



HAL
open science

Des mathématiques à l'école maternelle.

Claire Margolinas

► **To cite this version:**

Claire Margolinas. Des mathématiques à l'école maternelle.. Colloque international Des mathématiques à l'école maternelle, Ecole Normale Supérieure Centrale d'Ho Chi Minh ville, 2015, Ho Chi Minh ville, Vietnam. pp.32-62. hal-01140474

HAL Id: hal-01140474

<https://hal.science/hal-01140474>

Submitted on 28 Apr 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Des mathématiques à l'école maternelle

Claire Margolinas, Laboratoire ACTé, Clermont-Auvergne

Actes du colloque « *Des mathématiques à l'école maternelle* » l'Ecole Normale Supérieure Centrale d'Ho Chi Minh ville, avril 2015

1. Remarques introductives

1.1 Mathématiques ?

Les programmes de l'école maternelle en France et dans d'autres pays ne font pas toujours référence explicitement aux mathématiques. Dans les programmes de 2008, ce que nous pouvons reconnaître comme étant des mathématiques, par exemple « approcher les quantités et les nombres », se trouve dans la partie « découvrir le monde », le mot « mathématique » n'apparaît dans les programmes qu'en référence au programme de l'école élémentaire¹. Dans les programmes de 2015, nous trouvons deux domaines :

Les domaines « Construire les premiers outils pour structurer sa pensée » et « Explorer le monde » s'attachent à développer une première compréhension de l'environnement des enfants et à susciter leur questionnement. (Ministère_De_L'éducation_Nationale, 2015, p. 5)

Le mot « mathématique » apparaît une fois dans le programme, mais pour repousser un apprentissage à l'école élémentaire :

L'enseignant utilise un vocabulaire précis (cube, boule, pyramide, cylindre, carré, rectangle, triangle, cercle ou disque (à préférer à « rond ») que les enfants sont entraînés ainsi à comprendre d'abord puis à utiliser à bon escient, mais la manipulation du vocabulaire mathématique n'est pas un objectif de l'école maternelle. (Ministère_De_L'éducation_Nationale, 2015, p. 15)

Cette citation est intéressante, car nous voyons que les auteurs du programme identifient eux-mêmes certains mots ou concepts comme appartenant aux mathématiques, ils considèrent que l'enseignant doit connaître le vocabulaire des mathématiques. Cependant, c'est sans doute parce qu'il n'y a pas d'enseignement systématique à ce niveau que les programmes ne désignent pas certaines parties comme étant clairement des mathématiques. Dans le domaine « construire les premiers outils pour structurer sa pensée », nous ne trouvons en fait que des savoirs mathématiques « Découvrir les nombres et leurs utilisations » et « Explorer des formes, des grandeurs, des suites organisées », dans le domaine « Explorer le monde », les thèmes de l'espace et du temps sont abordés d'une façon plurielle, à la fois sous l'angle de la mesure, sous l'angle social, et sous l'angle des représentations de l'espace, certains de ces aspects se développeront ensuite clairement comme des mathématiques, alors que d'autres seront reconnus dans d'autres domaines (sciences expérimentales, sciences humaines).

Je considère qu'il y a bien de *connaissances* mathématiques en jeu dans les *situations* à l'école maternelle (Laparra & Margolinas, 2010). Le professeur, qui a la charge de mettre en œuvre ces situations, a besoin de comprendre comment ces situations sont liées aux savoirs mathématiques. Dans ce texte, comme nous l'avons fait dans notre livre sur le nombre à l'école maternelle (Margolinas & Wozniak, 2012), je vais décrire certaines connaissances sur le nombre à l'école maternelle en évoquant les situations dans lesquelles elles sont utiles, ce qui correspond au point de vue de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998a).

¹ En France l'école primaire se compose de l'école maternelle (trois années, à partir de 3 ans) et de l'école élémentaire (cinq années, à partir de 7 ans, école obligatoire).

1.2 Le nombre ?

Ce que l'on appelle « le nombre » est une synthèse de connaissances plus ou moins indépendantes et des relations entre ces connaissances (Malet, 2015) :

- suite orale des mots-nombres (un, deux, trois, quatre...)
- cardinal et quantité
- ordinal et position
- relations entre les quantités et les positions représentées par les mots-nombres
- etc.

Par exemple, pour un certain nombre de parents, « savoir compter » signifie « savoir la suite orale des mots-nombres » jusqu'à un certain rang, par exemple quand ils disent fièrement « ma fille n'a que trois ans mais elle sait déjà compter jusqu'à dix ». Certains enseignants considèrent que « savoir compter » n'est pas savoir la suite orale des mots-nombres, mais savoir donner le cardinal d'une collection d'objets en utilisant le comptage. Observons que les situations ne sont pas les mêmes, récitation ou bien dénombrement d'objets, cependant les connaissances en jeu dans ces situations relèvent bien du « nombre ».

Dans notre travail (Margolinas & Wozniak, 2012), nous avons essayé de montrer que le nombre à l'école maternelle s'appuie sur cinq aspects : le nombre comme mémoire de la quantité, le nombre comme mesure de grandeur, le nombre comme mémoire de la position, l'énumération (Rivière, 2015), la numération. Dans ce texte, je m'appuierai d'abord l'exemple du nombre comme mémoire de la quantité, car l'aspect cardinal est dominant à l'école maternelle (Malet, 2015), puis j'aborderai brièvement le nombre comme mémoire de la position (Cariat & Margolinas, 2015).

2. Connaissance et savoir : une distinction utile

Bref aperçu de la distinction connaissance / savoir

Guy Brousseau introduit la distinction entre savoir et connaissance, en didactique des mathématiques dès les années 70. En voici un aperçu rapide, extrait de (Margolinas, 2012) :

Une connaissance est ce qui réalise l'équilibre entre le sujet et le milieu, ce que le sujet met en jeu quand il investit une situation. Il s'agit d'un concept très large, qui inclut à la fois des connaissances du corps, des connaissances dans l'action, des connaissances de l'interaction, des connaissances mémorisées, etc. Toute situation implique des connaissances, par exemple « être assis » demande des connaissances, ce dont on peut avoir l'occasion de s'apercevoir quand on doit rester assis assez longtemps sur un siège inhabituel. Un exemple plus scolaire pourrait être ce qui permet de savoir que si je mets trois jetons dans une boîte vide et que j'en rajoute encore deux, en vidant la boîte je dois trouver cinq jetons.

Un savoir est d'une autre nature, il s'agit d'une construction sociale et culturelle, qui vit dans une institution et qui est par nature un texte (ce qui ne veut pas dire qu'il soit toujours matériellement écrit). Le savoir est dépersonnalisé, décontextualisé, détemporalisé. Il est formulé, formalisé, validé et mémorisé. Il peut être linéarisé, ce qui correspond à sa nature textuelle. En reprenant l'exemple de la posture assise, un étudiant qui fait des études de kinésithérapie rencontre des savoirs sur la posture assise. En effet, pour aider des patients à retrouver les équilibres nécessaires pour rester assis après un accident, le kinésithérapeute a besoin de savoirs qui vont au-delà de sa propre connaissance expérientielle de la posture assise. De même, en reprenant la situation de la boîte, le professeur enseigne à l'élève que la réponse au problème de la boîte est une addition, et situe la situation de la boîte parmi d'autres situations qui, du point de vue des structures additives, sont les mêmes, le professeur situe donc le savoir « addition » dans le cadre des mathématiques.

Pourquoi cette distinction est-elle importante pour l'enseignement ?

Les programmes indiquent au professeur ce qu'il doit enseigner en termes de savoir, et c'est au professeur de construire des situations qui devraient permettre à l'élève d'acquérir les connaissances correspondant à ce savoir et d'éprouve l'utilité des connaissances en situation. Ce mouvement qui part des savoirs et aboutit à la production de connaissances en situation est connu sous le terme de processus de *dévolution*.

Dans l'autre sens, les connaissances rencontrées en situation, si elles restent implicites, non formulées, non formalisées, restent fragiles, elles peuvent être attachées, pour les élèves, à une seule situation au lieu d'être considérées comme plus générales. Par exemple, l'élève peut considérer que les connaissances qu'il a construit pour prévoir correctement le bon nombre de jetons dans la boîte est spécifique de la situation de la boîte avec les jetons et ne pas imaginer que le même raisonnement pourrait permettre de savoir combien de personnes sont rentrées dans une pièce initialement vide. C'est pourquoi il est nécessaire de consolider les connaissances en les formulant, en les formalisant, en éprouvant leur validité dans de nouvelles situations, en mémorisant les procédures qui permettent de les résoudre, en les généralisant, en reconnaissant leur valeur culturelle et sociale et la façon de les nommer et de les représenter pour être compris en société. Ce mouvement qui part des connaissances et aboutit à leur reconnaissance en tant que savoirs est connu sous le terme de processus d'*institutionnalisation*.

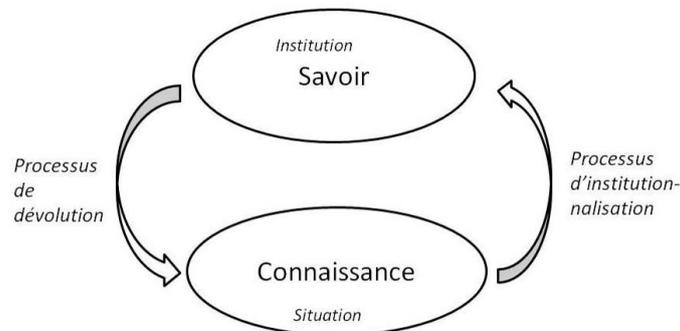


Figure 1. Processus de dévolution et d'institutionnalisation

L'école maternelle, les connaissances et les savoirs

Contrairement à ce que l'on pense parfois, il n'est pas facile d'enseigner à l'école maternelle, si l'on considère qu'il faut y transmettre des connaissances utiles, notamment en mathématiques, et ce pour plusieurs raisons :

Les savoirs mathématiques correspondant au niveau de l'école maternelle sont complexes et peu connus des professeurs. Les programmes ne les identifient pas toujours très bien, car ces savoirs ne sont pas toujours décrits culturellement de façon adéquate. Par exemple, pour enseigner, il est indispensable de distinguer les chiffres (signes graphiques) et les nombres (concept permettant d'exprimer une quantité ou une position), alors que dans le langage courant, en français en tout cas, ces mots sont synonymes. De même, pour enseigner, il est nécessaire de distinguer la quantité, qui est une grandeur et le nombre qui permet de mesurer cette grandeur, comme nous allons le voir plus loin. Or dans le langage courant « même quantité » et « même nombre » ne se distinguent pas.

De plus, l'école maternelle a une importante mission de socialisation et d'éducation « L'école maternelle structure les apprentissages autour d'un enjeu de formation central pour les enfants : "Apprendre ensemble et vivre ensemble" » (Ministère_De_L'Éducation_Nationale, 2015, p. 3). De part cette mission, il est normal de proposer aux élèves de nombreuses situations qui leur permettent d'accepter la parole des autres, de s'investir dans des actions collectives, etc. Ainsi, une situation, même quand elle est construite dans le but d'enseigner les savoirs prescrits par les programmes, présentent toujours un aspect éducatif. Il existe ainsi une certaine tension entre les

but éducatifs et les but d'enseignement. A l'école maternelle, on observe fréquemment des situations qui ne correspondent pas vraiment à la volonté du professeur de faire acquérir aux élèves des connaissances précises. Par exemple, les enseignants se contentent souvent, en mathématiques, de faire dénombrer par comptage un certain nombre d'objets, suffisamment régulièrement pour que la procédure de comptage soit incorporée. Cependant, cette incorporation ne suffit pas pour que les raisons du comptage soient comprises par les élèves : pourquoi compter ? dans quelles circonstances ? pour obtenir quoi ? C'est ainsi que l'on constate parfois que des élèves, quand le professeur leur dit : « comptes », sont tout à fait capable de compter six objets et de dire qu'il y en a six mais sont incapables d'aller chercher six objets si personne ne leur dit qu'il faut les compter. Les situations rencontrées à l'école maternelle sont ainsi souvent un peu « incertaines » du point de vue des savoirs, car ces situations sont parfois plus dictées par les circonstances que par une véritable progression des apprentissages.

L'objectif de ce texte est donc, comme nous l'avons fait dans notre ouvrage (Margolinas & Wozniak, 2012)

- De décrire des connaissances en situation concernant les deux principaux aspects du nombre : mémoire de la quantité et mémoire de la position.
- De donner des éléments de construction des situations et des progression.
- De relier les connaissances en situation avec les savoirs mathématiques

Le nombre comme mémoire de la quantité

Une définition en situation

Si le nombre est une « mémoire de la quantité », c'est donc que la quantité peut se définir sans « le nombre » et donc en particulier sans utiliser les mots-nombres. La correspondance terme à terme permet une « définition » en situation de la relation « même quantité ». Étant donné deux collections distinctes, par exemple un paquet de jetons rouges et un paquet de jetons bleus, on dit que la collection des jetons rouges a la même quantité que la collection des jetons bleus si l'on peut associer chaque jeton rouge avec un jeton bleu. Remarquons que cette « définition » ne peut être compris par les jeunes élèves que si des collections réelles sont présentes et que l'on associe réellement les jetons en les rapprochant. Cependant, pour travailler le nombre comme mémoire de la quantité, il est nécessaire que l'élève aie une connaissance de ce que veut dire « même quantité » en situation. En effet, nous voyons parfois les professeurs dire que les collections sont « pareilles », cependant, dans notre exemple, les jetons n'ont pas la même couleur, et bien sûr d'une façon générale, il est possible de comparer des collections d'objets tout à fait différents qui ont pourtant même quantité. Dire que les collections sont « pareilles » peut être un obstacle pour les élèves qui penseront légitimement que ce n'est pas le cas.

Pour dire que deux collections ont même quantité, il n'est donc pas nécessaire, en théorie, de les « compter », il suffit d'associer leurs éléments dans une correspondance terme-à-terme. Cependant, cette solution va se révéler incommode, voire impossible, dans certaines situations, ce qui va permettre de faire évoluer la connaissance de la quantité (Brousseau, 1995).

Situation d'action

Guy Brousseau (1998b) considère ce qu'il appelle une « situation d'action » (figure 1) :

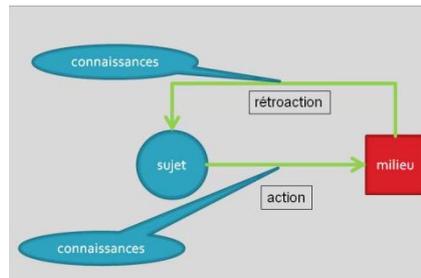


Figure 2. Situation d'action

Dans une situation d'action, quand le sujet agit sur le milieu, il anticipe une réaction du milieu, que l'on appelle une « rétroaction ». Il y a donc à la fois des connaissances dans l'action du sujet avec le milieu, mais aussi des connaissances dans l'interprétation de la rétroaction du milieu. En ce sens, il ne s'agit jamais « seulement » d'une action, il y a toujours une dimension d'anticipation. En vous asseyant sur votre chaise, vous vous attendez à une solidité qui permet une position que l'on appelle « assise », si quelqu'un vous fait une farce et enlève la chaise, tout en vous retenant pour éviter votre chute, la rétroaction que vous attendez ne se produit pas.

En mathématique, l'action est essentielle parce que les mathématiques servent d'abord à contrôler notre rapport au réel et à anticiper sur les situations réelles : « Ce n'est pas la manipulation d'un matériel qui constitue l'activité mathématique mais son utilisation pour résoudre un problème ou les questions qu'elle suggère » (Conseil_Supérieur_Des_Programmes, 2014, p. 55).

Situations d'action pour enseigner la quantité

Pour construire des situations, il faut organiser les actions des élèves dans un milieu. À l'école maternelle, ce milieu est clairement constitué d'objets. Travailler sur la quantité demande de travailler sur l'appariement de deux collections. En théorie, du point de vue strictement mathématique, ces collections peuvent être constituées d'objets identiques : je peux comparer le cardinal de ces deux ensembles : $A = \{o o o o o\}$ et $B = \{o o o\}$. Cependant, dans la classe, comparer une collection de jetons blancs et une autre collection de jetons blancs va poser des problèmes pratiques importants pour distinguer les jetons appartenant à la collection A et les jetons appartenant à la collection B. Nous postulons donc un milieu avec deux collections distinctes.

Deux grandes catégories de collections se présentent alors. D'une part des collections qui sont socialement associées, comme par exemple :

- une collection de carottes et une collection de lapins (Briand, Loubet, & Salin, 2004)
- une collection de voiture et une collection de garages (Briand, Loubet, & Salin, 2004)
- une collection de crayon et une collection de pots (Quevedo De Villegas, 1983)
- une collection d'œuf et une collection de coquetiers (Margolinas & Wozniak, 2012).

Il peut paraître incongru au lecteur de voir associer avec du matériel aussi banal des références bibliographiques. Cependant, ces associations n'ont pas exactement les mêmes propriétés didactiques et c'est pourquoi le lecteur pourrait avoir envie de mieux comprendre ces propriétés pour faire son propre choix en fonction de sa progression. Par exemple, dans un coquetier on ne peut mettre qu'un seul œuf, l'association un œuf – un coquetier est donc socialement et matériellement biunivoque (un pour un). C'est le cas aussi de l'association voiture – garage, dans laquelle le « garage » est en fait un morceau de carton sur lequel on peut mettre une seule voiture. Par contre, les élèves ont des connaissances sociales qui leur permettent de savoir qu'un lapin peut manger plusieurs carottes et que l'on peut mettre plusieurs crayons dans un pot. Ainsi, si le professeur demande : « y a-t-il la même quantité de carottes que de lapins ? » l'élève devra prendre la décision de vérifier en appariant une carotte avec un lapin, alors même que si le professeur avait demandé de distribuer les carottes aux lapins, l'élève aurait pu donner plusieurs carottes.

Le professeur peut aussi décider de travailler avec des collections qui n'ont aucune connotation sociale, comme une collection de jetons bleus et une collection de jetons rouges. Une telle collection, plus « abstraite », est en même temps moins soumise aux variations que peuvent apporter les connaissances extra-mathématiques. . Aucune solution n'est donc « idéale », car tout dépend l'objectif que le professeur assigne à cette situation d'action au moment où il la met en œuvre. Dans la suite du texte, toutes les situations seront présentées avec le même milieu (voiture et garage), pour des raisons de commodité.

A l'école maternelle, les situations sont longues à installer (cela peut prendre plusieurs semaines) : les enfants ont besoin d'abord manipuler le matériel, sans aucun but particulier. Il faut également s'assurer que tous les élèves peuvent nommer les différents éléments et comprendre quand le professeur en parle (voiture, garage). Ils doivent savoir aussi décider si une collection de voiture a la même quantité qu'une collection de garage, s'il y a bien « juste assez » de garages pour poser une voiture sur chaque garage. C'est à partir de ce connaissance de l'interaction avec le milieu que le travail sur la quantité peut commencer.

Situation fondamentale

Toutes les situations ont ici le même but pour les élèves : construction une collection de garages de même quantité qu'une collection de voitures, c'est-à-dire construire une collection de garages pour pouvoir poser chaque voiture sur un garage sans qu'il reste de garages.

Il s'agit d'une situation fondamentale du nombre cardinal : « étant donné une collection (de voitures), constituer une collection (de garages) pour avoir un garage pour chaque voiture ». Toutes les situations qui impliquent le cardinal peuvent se déduire de celle-ci en faisant varier certaines variables, ce que nous allons montrer maintenant.

Situation d'action : anticipation

Pour provoquer une anticipation, il ne suffit pas de demander à l'élève de constituer une collection de garages de même quantité que celle des voitures, il est nécessaire de lui demander de s'engager par anticipation sur le fait que la procédure qu'il a utilisé pour constituer la quantité de garage lui permettra effectivement de poser une voiture sur chaque garage. C'est le cas par exemple si l'on demande à l'élève de déposer sur un plateau « juste ce qu'il faut » de garages pour pouvoir poser chaque voiture sur un garage.

Certains élèves vont déposer une quantité de garages au hasard ou bien par estimation visuelle, ils auront alors l'occasion de s'apercevoir que cette procédure ne fonctionne pas souvent et qu'elle n'est pas fiable. Certains élèves vont compter les voiture puis compter les garages et déposer le même nombre de garages que de voitures, cependant cette procédure ne fonctionnera que dans le registre correspondant à la capacité de dénombrement par comptage. De nombreuses procédures existent : reconnaître visuellement les quantités, grouper les voitures et les garages de la même façon, attribuer un doigt à chaque voiture, etc. Toutes ces procédures mettent en jeu, implicitement, la quantité comme la propriété qui est la même pour la collection de voitures et la collection de garages.

Éloignement dans l'espace

Cependant, la situation précédente ne suffit pas à provoquer un début de conceptualisation, car la reconnaissance visuelle, totalement implicite, suffit souvent à réussir. Il faut donc empêcher la perception visuelle pour obliger les élèves à mettre en œuvre des procédures impliquant la quantité de façon certaine.

Pour cela, il suffit d'éloigner les voitures et les garages de telle manière que l'élève ne puisse pas construire la collection des garages et en même temps voir la collection des voitures (une vidéo correspondant à cette situation se trouve dans le cédérom : Briand, Loubet, & Salin, 2004). La consigne est alors d'aller chercher les garages et de les ramener en une seule fois sur le plateau.

« En une seule fois » est très important, en effet, sans cette consigne, l'élève peut ramener les garages un par un et il n'y a pas de différence avec la situation d'action.

Dans cette nouvelle situation, la mémorisation de la quantité devient nécessaire. Le nombre donné par comptage peut être présent dans les stratégies, comme une connaissance utile en situation. Cependant, ce n'est pas la seule possibilité : les doigts, les configurations spatiales, peuvent aussi servir à mémoriser la quantité.

Collection intermédiaire

J'appelle ici « collection intermédiaire » une collection dont le rôle est de « transporter la quantité ». Donnons un exemple social : en français, le mot « calcul » vient du mot latin « calculus » qui signifie « cailloux ». Cela réfère au travail quotidien du berger : savoir si, à la fin de la journée, il a bien la même quantité de moutons qu'au début. Pour le savoir, il est difficile de dénombrer par comptage, pour plusieurs raisons : (a) avec un grand troupeau, le berger peut ne pas savoir compter assez loin (b) même s'il connaît très bien la suite orale des mots nombres, compter les moutons est difficile pour le berger car il peut être interrompu (être obligé de s'occuper de quelque chose dans le troupeau). La solution consiste à mettre dans un sac un caillou à chaque fois qu'un mouton sort de la bergerie, le matin, de conserver le sac de cailloux et de sortir un caillou à chaque fois qu'un mouton rentre dans la bergerie, le soir. Le sac de cailloux n'a pas de valeur en soi : il s'agit de cailloux tout à fait quelconques. L'intérêt du sac de cailloux est seulement d'être une collection de même quantité que le troupeau de moutons, il s'agit d'une collection *intermédiaire* qui représente une quantité.

Comprendre la quantité et le rôle joué par le nombre comme mémoire de la quantité implique de comprendre l'utilité d'une collection intermédiaire. En gardant les doigts levés suivant la quantité à mémoriser, dans la situation d'éloignement dans l'espace, l'élève constitue une collection intermédiaire avec ses doigts levés, qui disparaîtra quand l'élève baissera les doigts. S'il dispose d'une collection de jetons, par exemple, il peut aussi conserver une collection de jetons de même quantité que les voitures.

Éloignement dans le temps : entrée dans l'écrit

L'exemple du berger est un exemple d'éloignement dans le temps : le berger évalue la quantité de moutons le matin et il a besoin d'évaluer son troupeau le soir. Il est donc nécessaire de garder la mémoire de la quantité pendant un temps long, ce qui peut se faire grâce à une collection intermédiaire matérielle (les cailloux).

Cependant, quand deux collections sont données dans des temps différents, par exemple les voitures le lundi et les garages le mardi, il existe une autre solution culturelle : utiliser l'écriture. Une des fonctions de l'écriture est effectivement la fonction mémorielle. Il est en effet assez facile de représenter une collection intermédiaire écrite, qui est une première approche de la symbolisation.

Les travaux de Quevedo de Villegas (1983, thèse sous la direction de Guy Brousseau) ont montré qu'il y a une évolution des représentations de la quantité quand on répète les situations d'éloignement dans le temps. En effet, il arrive que certains élèves commencent par essayer de dessiner l'objet « voiture », en s'intéressant plus à l'objet qu'à la quantité. Il est possible aussi qu'ils dessinent des voitures schématisées, en n'établissant par une correspondance rigoureuse avec la quantité (schéma de plusieurs points, par exemple). Les procédures qui conduisent à la réussite sont aussi susceptibles d'évolution : représentation la disposition spatiale des voitures, découverte de la possibilité de schématisation très abstraites (petits points, traits, etc.), utilisation de représentation sociales (écriture chiffrée).

Communication à autrui

Quand les collections sont gérées par deux personnes différentes (jeu de « marchande »), la communication des quantités peut avoir lieu à l'oral ou à l'écrit. Examinons certaines variables de la situation : la communication n'a d'intérêt que si le « client » est le seul à pouvoir voir la collection de voitures alors que le « marchand » est le seul à pouvoir manipuler la collection de garages.

Quand la communication a lieu à l'oral, cela veut donc dire qu'il faut trouver une façon d'empêcher le « client » de voir ce que fait le « marchand », par un système de paravent, par exemple. Une telle communication orale est intéressante au niveau de l'école maternelle parce que l'élève a l'occasion de s'apercevoir de l'effet d'une formulation à l'orale, en particulier si celle-ci n'est pas assez précise pour permettre à celui qui l'entend de pouvoir agir. A l'oral, la procédure gagnante est souvent l'énoncé du nombre, cependant ce n'est pas toujours possible et dans ce cas il faut parfois procéder à des groupements (par exemple : « j'ai besoin de garages, quatre et encore quatre » si l'on ne connaît pas le nombre « huit »).

Quand la communication a lieu à l'écrit, il est facile d'empêcher la communication directe, il suffit pour cela que le professeur fasse le « postier ». Dans le cas de la communication à l'écrit, les élèves vont prendre en compte la nécessité d'être compris par l'autre, ce qui peut conduire à des codes sociaux ou à la compréhension de l'utilité de codes sociaux. A côté des écrits produits par les élèves eux-mêmes, l'utilisation de cartes représentant les quantités de façon culturelle (dés, nombre en écriture chiffrée, etc.), peut être intéressante pour que l'élève fasse usage de ces représentations en situation.

Le comptage et le cardinal

Le résultat du comptage est une collection intermédiaire particulière : en prononçant « un, deux, trois, quatre, cinq, six » à chaque pointage d'un objet de la collection de voiture et en recommençant cette opération avec les garages, l'élève se sert en fait d'une collection intermédiaire de sons, dont la quantité est la même que celle des voitures. Remarquons que n'importe quelle chanson permet de transporter la quantité, pourvu que chaque mot de la chanson soit bien connu et que la chanson soit toujours répétée de la même manière. Parce que les mots-nombres sont ordonnés et que chaque mot-nombre est unique, il suffit de retenir le dernier pour savoir jusqu'où prononcer la suite orale.

Toutes les collections représentant la même quantité ont une même caractéristique (la quantité), on appelle cette même caractéristique le cardinal. Se pose alors la question de donner un nom au cardinal. Pour mieux faire comprendre cette nécessité, prenons l'exemple de la couleur, on peut associer les objets suivant leur couleur, cependant, le nom des couleurs est tout à fait arbitraire (rouge, bleu, etc.). Pour les cardinaux, le nom n'est pas arbitraire : parce que la suite orale des mots-nombres est ordonnée, le nom du cardinal est le dernier mot-nombre prononcé.

Cette description didactique montre bien qu'il y a une différence entre le fait de prononcer la suite des mots nombres : comptage et considérer que le dernier mot nombre prononcé est le résultat du dénombrement, ce que les psychologues décrivent comme une étape dans le développement.

Processus d'enseignement et institutionnalisation

Le processus qui a été décrit est une façon de « raconter » le nombre comme connaissance, dans des situations où ces connaissances sont utiles. C'est ainsi que nous sommes partis du nombre comme savoir culturel et que nous avons décrit les situations qui doivent être distinguées pour comprendre ce qui est en jeu dans l'apprentissage, pour les élèves. Nous pouvons donc voir la description ci-dessus comme celle du processus de dévolution d'une connaissance : « le nombre comme mémoire de la quantité ».

Mais nous pouvons aussi considérer que les connaissances rencontrées au fur et à mesure des différentes situations que nous avons évoquées sont d'abord rencontrées implicitement, en situation d'action, puis mémorisées, toujours de façon implicite, puis formulées, mémoriser en utilisant l'écrit, formalisée dans la communication à autrui et qu'elles sont enfin associée à des savoirs culturels. Nous avons donc décrit aussi un processus d'institutionnalisation du nombre comme mémoire de la quantité.

Savoir compter et calculer est tout à fait insuffisant pour le professeur pour faire des choix dans son enseignement, qu'il s'agisse de choix dans les situations à mettre en place ou de choix dans les réponses à apporter aux élèves au cours de l'enseignement. La description que j'ai essayé de faire est une tentative de décrire des savoirs mathématiques et didactiques dont le professeur de l'école maternelle a besoin pour enseigner. On s'aperçoit ici que ces savoirs sont beaucoup plus complexes et spécialisés que ce que l'on aurait pu penser a priori.

Le nombre comme mémoire de la position

Ce texte n'a pas vocation à être exhaustif, cependant, je vais évoquer rapidement une autre fonction du nombre : la mémoire de la position, ce qui va permettre de mieux comprendre que ce qui a été décrit dans le cadre de la mémoire de la quantité a une portée assez générale.

La position dans une liste

Le nombre est souvent considéré principalement voire uniquement sous son aspect cardinal, c'est-à-dire pour désigner des quantités. L'aspect ordinal du nombre réfère à des listes ordonnées. Si je dis « bleu, rouge, vert, jaune », je prononce le mot « bleu » en premier, le mot « rouge » en deuxième, etc. Il s'agit là d'une liste temporelle, c'est l'ordre des mots prononcés qui permet d'attribuer une position à chaque mot. Si j'ai neuf perles rouges et une perle bleue, j'ai dix perles, ce qui correspond à l'aspect cardinal. Si je prends ces perles et que je les enfile sur une fil noué à une extrémité, j'obtiens un collier dans lequel la position de la perle bleue par rapport au nœud peut être décrite par un nombre, par exemple la perle bleue est en quatrième position à partir du nœud. Les perles, parce qu'elles ont été disposées sur le fil noué constituent une liste dont l'origine est le nœud et le sens celui du fil à partir du nœud. Avec les mêmes dix perles, il est possible de faire des « colliers » différents : par exemple, un collier dans lequel la perle bleue est en quatrième position à partir du nœud et un collier dans lequel la perle bleue est en première position à partir du nœud.

Une autre fonction du nombre

La même suite de mots nombres : un, deux, trois, etc. peut être utilisée pour désigner des positions et pas seulement des quantités, c'est une autre fonction du nombre que celle du cardinal, que l'on appelle l'ordinal. A l'oral, dans différentes langues, cardinal et ordinal se distinguent : premier, deuxième, troisième. Du point de vue mathématique, il s'agit de deux points de vue complémentaires sur le nombre.

Construire le nombre comme mémoire de la position

Comme nous l'avons fait pour la quantité, décrire la construction du nombre comme mémoire de la position implique de décrire des situations dans lesquelles « avoir même position » a un sens en situation. De même, puisque la position est une grandeur (grandeur repérable), comme toute grandeur, elle se construit dans des comparaisons directes puis indirectes : situation d'action puis éloignement dans l'espace, éloignement dans le temps, communication à autrui. Nous retrouvons donc le même raisonnement que pour la quantité.

Quel milieu pour enseigner le nombre comme mémoire de la position ?

Enseigner le nombre comme mémoire de la position demande de s'appuyer sur un milieu matériel qui comporte des files ayant une origine, une orientation et un rang, comme c'est par exemple le cas des objets de la figure 3.



Figure 3 : objets d'un milieu pour le travail sur la position

Toutes ces files comportent une origine possible, qui induit un sens et un rang pour un objet distingué parmi les autres. Les milieux sont différents du point de vue de leur propriétés didactique, dans les deux premiers, le nœud et le départ de la piste sont considérés culturellement comme des points de départ, alors que dans la barre, le « trou » ou le « bouton » peuvent être considérés comme une origine, ce qui implique un choix d'origine (Cariat & Margolinas, 2015). Dans tous les cas, pour comparer des files, il est possible de faire une comparaison terme à terme : aligner le nœud avec le nœud puis chacune des perles jusqu'à la perle distinguée, par exemple (voir figure 4).



Figure 4 : validation dans le milieu des colliers

Résultats d'une expérimentation

Le nombre ordinal étant moins enseigné que le nombre cardinal, il nous a été nécessaire de mettre en place une ingénierie didactique pour mieux comprendre les stratégies des élèves dans les situations qui concernent la mémoire de la position (Margolinas & Wozniak, 2014). Je ne vais donner ici que les résultats les plus importants. Ces résultats concernent les phases dans lesquelles il est nécessaire d'utiliser l'écrit : phase d'éloignement dans le temps et phase de communication à autrui par écrit, je ne différencierai pas ici les écrits produits dans ces deux phases, pour plus de détail, voir l'article cité. Dans cette expérimentation pour la recherche, nous avons demandé au professeur de ne pas intervenir, le professeur devait seulement donner les consignes, organiser la validation, mais sans dire quelles étaient les procédures qui lui paraissaient les plus intéressantes

Dans les premiers écrits, de nombreux élèves produisent d'abord un dessin non orienté (pas de trace d'une origine ou d'une orientation) dont une position au moins correspond au collier modèle. C'est le cas par exemple du dessin ci-dessous, au moment où l'élève doit reconstruire le collier (éloignement dans le temps), il ne peut pas savoir s'il faut tenir le dessin dans un sens ou dans l'autre. Il peut donc faire une reproduction du modèle correcte ou incorrecte.

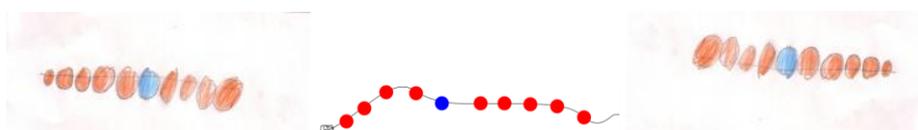


Figure 5 : suivant la façon dont le dessin est lu, il correspond ou non au modèle

Dans la phase suivante (communication à autrui), de nombreux élèves produisent un schéma qui comporte une origine et un sens (figure 6).



Figure 6 : un dessin complet

Utilisation des nombres par les élèves dans ces situations

Quand les élèves ont produit des écritures chiffrées (nouvelle phase d'éloignement dans le temps : interdiction des dessins), ils ont inventé une façon d'utiliser les quantités et l'écriture pour décrire les colliers : 5 1 4 pour décrire un collier dans lequel la perle bleue est en sixième position à partir du nœud. Cette façon de décrire le collier a été majoritaire dans cette expérimentation pour la recherche.

Quelques élèves ont utilisé des nombres ordinaux, par exemple en trouvant un moyen de désigner la position de la perle bleue dans la suite des nombres, ce qui veut dire que chaque nombre représente bien une position : 1 2 3 4 5 **6** 7 8 9 10 pour un collier dans lequel la perle bleue est en sixième position à partir du nœud. Une minorité des élèves est capable de distinguer clairement le sens ordinal et le sens cardinal des nombres. C'est par exemple le cas de Manon, qui écrit 4 5 5 pour désigner un collier dans lequel la perle bleue est en cinquième position à partir du nœud et qui dit : « d'abord il y a quatre blanches, elle est en cinquième, et après il y a cinq perles blanches ».

Résultats de la recherche concernant le nombre comme mémoire de la position

Les connaissances du nombre comme mémoire de la quantité ne construisent pas le nombre comme mémoire de la position. Autrement dit, enseigner l'aspect cardinal du nombre ne suffit pas pour construire l'aspect ordinal.

Cependant, les élèves de l'école maternelle sont capables de progresser dans la construction d'une origine et d'un sens, même dans une progression expérimentale dans laquelle le professeur intervient peu, et certains d'entre eux peuvent mettre en œuvre une connaissance du nombre ordinal en situation.

Remarquons que les élèves de l'école maternelle sont capables de résoudre des problèmes complexes et d'inventer des procédures, ce qui n'est pas toujours assez bien mis en valeur.

Cependant, il faut un travail spécifique et un véritablement enseignement pour éviter que les élèves ne se contentent des « quantités orientées » et qu'ils progressent vers le nombre ordinal (Margolinas & Wozniak, 2013; Cariat & Margolinas, 2015).

Conclusion

Les connaissances dont les professeurs ont besoin pour enseigner le nombre à l'école maternelle sont beaucoup plus complexes que ce que l'on pourrait croire au départ. Les professeurs ont besoin de comprendre que le « nombre » a de très nombreux aspects et que savoir dénombrer par comptage et connaître des relations entre certains nombres (par exemple 2 c'est 1 et 1) ne peuvent pas suffire pour que les élèves soient capables d'utiliser le nombre dans les situations dans lesquelles c'est utile.

En particulier, il est très important que les professeurs comprennent que la progression de l'enseignement des nombres ne peut pas s'ordonner suivant l'ordre des nombres : on n'apprend pas « le un » puis « le deux », etc. En effet, une telle progression ne peut pas correspondre aux connaissances en jeu, qu'il s'agisse de la quantité ou de la position ou d'autres aspects du nombre (Malet, 2015).

Enfin, il est important que les professeurs sachent que les différents aspects qui sont nécessaires pour utiliser le nombre se construisent dans des situations simples, tout au long de la maternelle, dans des progressions qui permettent la construction de ces connaissances avec leur sens en situation, ce qui permettra aux élèves, plus tard, une connaissance utile du nombre.

Références

- Briand, J., Loubet, M., & Salin, M.-H. (2004). *Apprentissages mathématiques en maternelle*. Paris Hatier.
- Brousseau, G. (1995). Les mathématiques à l'école. *Bulletin de l'APMEP*, 400, 831-850. <http://www.apmep.asso.fr/Les-mathematiques-a-l-Ecole,3626>
- Brousseau, G. (1998a). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage.
- Brousseau, G. (1998b). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques from http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf
- Cariat, A., & Margolinas, C. (2015). Le nombre comme mémoire de la position Colloque international « Des mathématiques à l'école maternelle », Ho Chi Minh Ville, VietNam.
- Conseil_Supérieur_des_Programmes (2014). *Projet de programme et recommandations école maternelle*. Paris: Ministère de l'éducation nationale de l'enseignement supérieur et de la recherche. http://cache.media.education.gouv.fr/file/Organismes/32/4/CSP-Projet_de_programme-recommandations_337324.pdf
- Laparra, M., & Margolinas, C. (2010). Milieu, connaissance, savoir. Des concepts pour l'analyse de situations d'enseignement. *Pratiques*, 145-146(Didactique du Français (1)), 141-160. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00722212>
- Malet, A. (2015). L'influence des connaissances mathématiques du professeur sur l'apprentissage du nombre à la maternelle et sur la diffusion des savoirs didactiques. Colloque international « Des mathématiques à l'école maternelle », Ho Chi Minh Ville, VietNam.
- Margolinas, C. (2012). Connaissance et savoir Des distinctions frontalières? Colloque sociologie et didactiques. from <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00779070>
- Margolinas, C., & Wozniak, F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle. Une approche didactique*. Bruxelles: De Boeck.
- Margolinas, C., & Wozniak, F. (2013). Le nombre comme mémoire de la position : un révélateur des besoins praxéologiques des professeurs. XVIIe école d'été de didactique des mathématiques.
- Margolinas, C., & Wozniak, F. (2014). Early construction of number as position with young children: a teaching experiment. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education* 46(1), 29-44. <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-013-0554-y>
- Ministère_de_l'Éducation_Nationale (2015). *Programme de l'école maternelle*. Bulletin officiel spécial, 2(26 mars 2015), 1-19.
- Quevedo de Villegas, B. (1983). *Les situations et les processus dans l'apprentissage des nombres*. Université de Bordeaux I, Bordeaux.
- Rivière, O. (2015). Une situation pour mieux s'organiser quand on compte. Colloque international « Des mathématiques à l'école maternelle », Ho Chi Minh Ville, VietNam.