



HAL
open science

Du calcul flottant en Mésopotamie

Christine Proust

► **To cite this version:**

Christine Proust. Du calcul flottant en Mésopotamie. Gazette des Mathématiciens, 2013, pp.23-48.
hal-01139616

HAL Id: hal-01139616

<https://hal.science/hal-01139616>

Submitted on 7 Apr 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Du calcul flottant en Mésopotamie

Christine Proust – CNRS & Université Paris-Diderot¹

Cet article est un plaidoyer pour les mathématiques d'écoliers. Il s'appuie sur une collection de tablettes d'argile écrites il y a 4000 ans dans les écoles de scribes de Mésopotamie. A première vue, ce sont des exercices très simples, de contenu mathématique élémentaire, et de ce fait, ces modestes écrits n'ont guère attiré l'attention des historiens des mathématiques. Pourtant, à y regarder de plus près, cette simplicité se révèle trompeuse. Le sentiment de familiarité résulte essentiellement d'une projection sur le passé de conceptions profondément ancrées lors de nos propres apprentissages précoces. Une observation attentive des tablettes scolaires révèle des différences subtiles entre les conceptions anciennes et nos idées modernes sur ce que nous appelons les nombres, les quantités, les unités, la mesure, les grandeurs, l'ordre, la divisibilité, etc. Les efforts pédagogiques des maîtres scribes laissent percevoir un univers numérique tout à fait original, doté de règles qui lui sont propres, et permettant le développement d'algorithmes de calcul puissants.

1- Les mathématiques cunéiformes

Les mathématiques de Mésopotamie sont une découverte récente. Lorsque dans les années 1930 François Thureau-Dangin, assyriologue Français, et Otto Neugebauer, mathématicien austro-américain, publièrent les premiers textes mathématiques cunéiformes, les perspectives de l'histoire des mathématiques en furent bouleversées. Les historiens découvraient que des mathématiques hautement sophistiquées avaient été élaborées en Orient plus de mille ans avant Euclide. Les mathématiques de Mésopotamie sont donc à la fois les plus anciennes dans l'histoire et les plus récentes dans l'historiographie. Mais elles ont une autre particularité : elles nous sont connues par des sources archéologiques, et non, comme dans le cas par exemple des mathématiques grecques, par une longue tradition écrite dont seuls des témoins tardifs nous sont accessibles.

Plusieurs centaines de tablettes d'argile couvertes d'écriture cunéiforme datant, pour les plus anciennes d'entre elles, du troisième millénaire avant notre ère, et pour les plus récentes de l'époque hellénistique, nous livrent une information extraordinairement riche sur les pratiques mathématiques les plus anciennes que nous connaissions. L'immense majorité de ces sources

¹ Cet article s'appuie d'une part sur le matériel et les résultats de ma thèse, publiés en 2007 et 2008 ([10], [12], [11]), et d'autre part sur la réflexion engagée dans le cadre du projet européen SAW (*Mathematical Sciences in the Ancient World*) dirigé par Karine Chemla (financement de l'*European Research Council* dans le cadre du 7^{ème} Programme Cadre de Recherche et Développement - FP7/2007-2013 / ERC Grant agreement n. 269804). Les informations générales sur les mathématiques cunéiformes, les écoles de scribes, et la notation positionnelle rappelées au début de l'article n'ont rien d'original et sont bien connues des spécialistes. En revanche, certaines des thèses défendues ici, notamment celles qui concernent la dualité entre mesures et nombres abstraits ou le calcul flottant, sont personnelles et ne font pas l'objet d'un consensus. On trouvera à ce sujet une argumentation plus développée que celle que permet l'espace limité de cet article dans [11] et dans les ouvrages en préparation dans le cadre du projet SAW. Cet article a de plus bénéficié de lectures critiques de Caroline Ehrhardt, Carlos Gonçalves, Steve Shnider et Jean Brette. Leurs commentaires m'ont permis d'apporter des éclaircissements et des améliorations substantielles au texte initial. Le présent texte résulte également de discussions animées avec Jens Høyrup, dont le point de vue critique a considérablement contribué à la clarification des thèses présentées ici. Je remercie chaleureusement tous ces collègues, y compris les participants aux séminaires du projet SAW et du Laboratoire SPHERE, pour leur aide et leurs contributions aux discussions.

datent de la période paléo-babylonienne (env. 2000-1600 av. n. e.)². Des petits corpus datant d'époques plus anciennes (deuxième partie du troisième millénaire) ou plus récentes (fin du premier millénaire), quoique plus modestes, présentent un intérêt particulier dans la mesure où ils nous éclairent sur des pratiques mathématiques complètement différentes de celles de l'époque paléo-babylonienne.

La provenance exacte des tablettes mathématiques publiées dans les années 1930 et 1940 est généralement inconnue. La plupart d'entre elles proviennent de fouilles illégales, et ont été achetées à des marchands d'art au début du XXe siècle par les grands musées européens et américains ou par des collectionneurs. On dispose cependant de lots de tablettes mathématiques dont la provenance, et parfois le contexte archéologique, sont bien documentés : c'est le cas par exemple des tablettes d'Ur, Nippur, Suse, Mari et des différents sites de la vallée de la Diyala au nord de la Mésopotamie.

Le corpus des tablettes mathématiques connues s'est considérablement accru ces dernières années avec la publication systématique des lots de tablettes scolaires qui avaient été accumulées dans les réserves des musées sans susciter d'intérêt chez les historiens. Avec cet afflux récent, le nombre de tablettes publiées à ce jour dépasse les 2000. Environ 200 tablettes mathématiques, principalement scolaires, restent encore à publier, ce qui permet d'estimer à plus de 2300 les tablettes mathématiques qui ont à ce jour été exhumées des sables de l'Irak, la Syrie et l'Iran³.

2- Le problème des ordres de grandeur

Une des caractéristiques les plus frappantes de ces mathématiques très anciennes est l'usage d'une numération sexagésimale positionnelle (voir annexe, 1c). Cette notation semble propre aux activités mathématiques puisqu'on n'en trouve que très peu de traces dans les autres genres de textes, par exemple administratifs ou commerciaux. La notation sexagésimale positionnelle est bien connue non seulement des historiens des mathématiques cunéiformes⁴, mais aussi des historiens de l'astronomie. En effet, la notation sexagésimale positionnelle héritée du Proche Orient cunéiforme a été utilisée dans les traités d'astronomie en langues grecque, latine, arabe, syriaque, hébraïque, sanskrite, chinoise, et bien d'autres, y compris les langues européennes modernes jusqu'à une époque récente. Le système sexagésimal a quelque chose qui nous est familier puisque nous le pratiquons encore aujourd'hui dans la mesure du temps et des angles.

Dans cet article, je voudrais montrer que cette familiarité est trompeuse : derrière l'apparente similarité entre le calcul sexagésimal ancien et le système sexagésimal que nous connaissons bien, se cachent des différences subtiles mais profondes. Pour souligner l'importance de ces différences, je me limiterai à deux aspects de la notation ancienne : 1) la position des unités dans le nombre n'est pas indiquée ; 2) les nombres sexagésimaux positionnels anciens servaient essentiellement aux multiplications et aux inversions. Le premier de ces deux aspects est sans doute le plus déroutant pour le lecteur moderne. En effet, il nous est nécessaire de connaître la position des unités dans un nombre de façon à savoir quelle quantité

² Dans ce qui suit, toutes les dates sont avant notre ère.

³ 2114 tablettes mathématiques, y compris les tablettes contenant des textes métrologiques, sont à ce jour (21 avril 2013) recensées par la base de données du *Cuneiform Digital Library Initiative* (<http://cdli.ucla.edu/>).

⁴ La notation sexagésimale positionnelle a suscité un vif intérêt dès les débuts de la redécouverte des mathématiques cunéiformes ([7], [19]).

est représentée par ce nombre. Par exemple, dans notre système décimal, nous souhaitons distinguer « un » de « mille » ou de « un dixième ». La tentation est donc grande de remédier à l'incertitude de la notation cunéiforme par l'ajout, dans les traductions et les commentaires, de marques telles que virgule ou zéro en position finale – et c'est ce que font tous les spécialistes (voir par exemple l'extrait d'un article de Sachs §5, tableau 2). La question qui se pose est alors de savoir si l'absence de système graphique fixant la position des unités dans le nombre est vraiment un défaut de la notation ancienne, ou bien si, au contraire, la notation flottante est une propriété intrinsèque de la numération sexagésimale positionnelle.

Considérons par exemple, le nombre écrit en cunéiforme



Les chevrons (\langle) représentent des dix, et les clous (Υ) des un. Chaque signe vaut soixante fois la valeur d'un signe identique placé dans la position précédente (à sa droite). Ce nombre peut être transcrit 44:26:40, où le signe « : » est un séparateur de positions sexagésimales, comme dans les montres à écran⁵. Une représentation moderne de ce nombre, dont l'ordre de grandeur est indéterminé, pourrait être : $(44 \times 60^2 + 26 \times 60 + 40) \times 60^p$, p entier relatif indéterminé. La question qui se pose pourrait être formulée, en langage moderne, de la façon suivante : faut-il se préoccuper de la valeur de p ?⁶

Pour répondre à cette question, nous disposons d'une source d'information particulièrement riche : celle qui provient des écoles de scribes. Grâce à cette documentation, on peut reconstituer les grandes étapes de la formation mathématique de base des futurs scribes, notamment de ceux qui seraient appelés un jour à écrire ou utiliser des textes mathématiques. Il est donc possible, et c'est sans doute une chance unique pour les historiens des mathématiques anciennes, d'accéder directement aux méthodes mathématiques qui formaient le fondement des connaissances mathématiques des érudits. Cette formation mathématique de base des futurs scribes était précisément focalisée sur les notions liées aux nombres, aux mesures, au calcul et à la quantification qui sont au cœur du problème des ordres de grandeurs. J'ai moi-même appris les mathématiques cunéiformes en fréquentant en quelque sorte une école de scribes, puisque mes premiers pas ont consisté à découvrir, transcrire, traduire et commenter des centaines de tablettes d'écoliers provenant de la ville de Nippur et conservées au Musée Archéologique d'Istanbul.

Si les textes scolaires ont été considérés avec un certain dédain par les historiens des mathématiques, c'est qu'ils n'y voyaient que des exercices répétitifs et sans contenu consistant. Les textes scolaires ont été réhabilités ces dernières années en tant que témoins de la vie dans les écoles de scribes, et donc comme sources pour l'histoire intellectuelle de la Mésopotamie, mais sans que leur contenu mathématique proprement dit ne soit pour autant vu comme apportant quoi que ce soit de nouveau ou d'intéressant à l'histoire des mathématiques. La fréquentation de la collection d'Istanbul m'a au contraire convaincue de l'originalité des

⁵ Pour séparer les positions sexagésimales d'un nombre, j'ai choisi le séparateur ':', comme dans les documents numériques actuels (montre à écran, compteur de temps des vidéos, etc.) pour rendre clair le fait que la base est soixante, et non dix. Cependant, l'usage dans les publications depuis Neugebauer est plutôt d'utiliser le point (44.26.40) ou la virgule (44,26,40) comme séparateur, ce qui est tout à fait équivalent, mais conduit parfois à des confusions avec les nombres décimaux.

⁶ Pour plus de détails et d'explications, et pour suivre aisément ce qui suit, le lecteur est invité à lire l'annexe, qui donne toutes les informations utiles sur les systèmes numériques et métrologiques utilisés dans les mathématiques cunéiformes.

conceptions mathématiques enseignées à Nippur. En adoptant le point de vue qui transparait des textes scolaires, il est possible de percevoir un univers numérique inattendu.

Après une brève description de la formation mathématique des futurs scribes à Nippur au 18^e siècle avant notre ère (§3), je vais montrer dans ce qui suit comment les notions élémentaires étaient activées pour résoudre des problèmes simples de calcul de surface (§4). Ensuite, je vais exposer l'art du calcul flottant babylonien avec l'analyse de quelques algorithmes numériques (§5). Enfin, suivant la progression pédagogique des anciens, je vais aborder la résolution des problèmes de proportionnalité et des problèmes quadratiques (§6). La conclusion (§7) permettra de préciser les notions de quantité, d'ordre de grandeur et d'unité qui émergent de ces exemples.

3- Les mathématiques enseignées à Nippur au 18^e siècle av. n. e.

Les sources

Des milliers de tablettes d'argile écrites par de jeunes scribes en formation nous informent sur l'apprentissage des mathématiques en Mésopotamie. Pour celles dont le contexte archéologique est connu, ces tablettes ont été trouvées par lots plus ou moins importants en des lieux qui, souvent, ont pu être identifiés comme des écoles (*edubba* en sumérien, littéralement « maison des tablettes »). Des écoles de scribes ont sans doute existé en Mésopotamie du sud dès les débuts de l'écriture, mais les plus anciennes n'ont guère laissé de traces. En revanche, d'abondantes sources épigraphiques montrent que ces écoles se sont répandues dans tout le Proche Orient au début du deuxième millénaire avant notre ère. Une grande concentration d'écoles a été identifiée au sud de la Mésopotamie, dans l'aire géographique qui correspond à l'ancien « Pays de Sumer », mais la présence d'écoles est attestée sur une aire beaucoup plus vaste, qui inclut la haute vallée de l'Euphrate en Irak, la Syrie, l'ouest de l'Iran et l'Anatolie. Les tablettes mathématiques représentent, selon les lieux, environ 10% à 20% des tablettes scolaires. Les autres tablettes scolaires contiennent essentiellement des témoins de l'apprentissage de l'écriture cunéiforme, du sumérien, une langue qui avait pourtant disparu des usages courants depuis plusieurs siècles. Quoiqu'attestée sur une vaste aire géographique, la production des écoles de scribes est inégalement répartie. La très grande majorité des tablettes scolaires connues vient en fait d'un seul site, celui de Nippur, où elles se chiffrent par milliers, dont plus de 900 contiennent des mathématiques. Elles ont été exhumées par des expéditions américaines entre la fin du XIX^e siècle et la première guerre d'Irak, puis réparties entre plusieurs Musées (le musée archéologique d'Istanbul, l'Université de Philadelphie, l'Université de Iéna, le musée de Bagdad et l'*Oriental Institute* de Chicago). Les tablettes scolaires mathématiques de Nippur forment un ensemble cohérent et quantitativement important, donc suffisamment significatif pour autoriser des considérations statistiques. Pour cette raison, le cas de Nippur permet la reconstitution du curriculum de formation mathématique avec une certaine précision.⁷ Dans les autres écoles de Mésopotamie, de Syrie et d'Iran, on observe des variations sensibles en ce qui concerne la forme des tablettes et la « mise en page » des textes qu'elles contiennent. Les méthodes pédagogiques devaient donc être assez diverses. Cependant, il est frappant de constater que le contenu des tablettes scolaires les plus élémentaires ne varie que légèrement

⁷ Ce travail a constitué l'essentiel de ma thèse de doctorat, soutenue en 2004. Les tablettes conservées à Istanbul sont publiées dans [10], celles de Iéna dans [12]; celles de Philadelphie, auxquelles j'ai eu accès grâce aux données généreusement mises à ma disposition par Eleanor Robson sont en cours de publication ; celles de Chicago ont en partie été publiées dans [16] et [17], et j'ai pu en consulter un échantillon non publié en 2010.

d'un site à l'autre. Il est probable que certaines des notions de base sur les mesures et les nombres enseignées dans les écoles de scribes étaient communes à tous ces centres d'enseignement.

Le curriculum élémentaire à Nippur

Les tablettes scolaires livrent des informations non seulement grâce aux textes qu'elles contiennent, mais aussi grâce à leur aspect matériel et à des petites notices placées en marge des textes (date, nom propre, ligne d'appel, doxologie⁸...). Pour plus de détails sur la méthode d'enquête qui a permis la reconstitution du curriculum à Nippur, on se reportera à l'étude de l'assyriologue Niek Veldhuis [21]. Appliquée aux mathématiques, cette méthode m'a permis d'établir la structure générale du curriculum de formation mathématique, schématisée dans la figure 1.

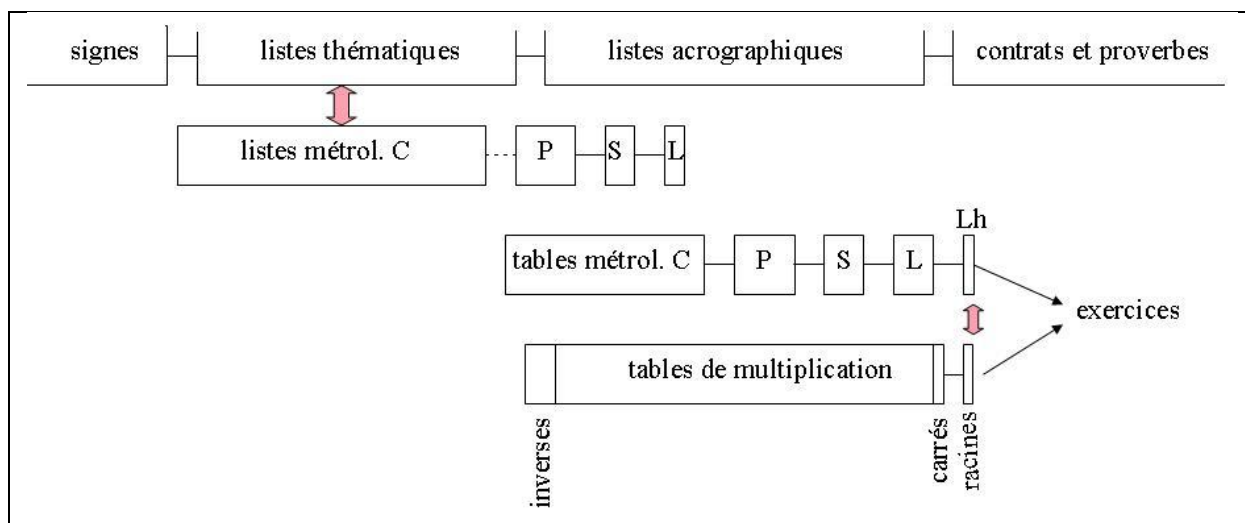


Figure 1 : le curriculum mathématique à Nippur⁹

La formation mathématique était articulée avec l'apprentissage de l'écriture et de la langue sumérienne. Cette formation « littéraire » consistait à mémoriser, dans un ordre fixe, une succession de listes contenant : des signes cunéiformes simples, du vocabulaire sumérien organisé de façon thématique, puis de façon acrographique (selon la forme des signes), des structures grammaticales exprimées au travers de phrases sumériennes types (des « proverbes »), et enfin des modèles de contrats utilisés dans l'administration et le commerce, ainsi qu'un répertoire de formules juridiques. Le curriculum mathématique était organisé de façon similaire, les listes à mémoriser contenant successivement : des mesures de capacité, poids, surface et longueur énumérées dans l'ordre croissant, des tables établissant une correspondance entre ces mesures et des nombres sexagésimaux positionnels, et enfin des

⁸ La ligne d'appel, généralement placée à la fin d'un texte, indique l'incipit du texte suivant dans l'ordre du curriculum. La doxologie est une brève formule de louange, généralement adressée à Nisaba, la divinité des scribes, de l'écriture et du calcul. La présence d'une doxologie indique la fin d'une collection de textes formant un ensemble cohérent dans le curriculum (exemple : diverses listes de noms d'objets, ou les listes de noms de dieux, ou les listes de mesures, etc.)

⁹ Extrait de [10], p. 152. Dans ce diagramme très schématique, l'ordre des listes et tables reproduit approximativement celui du curriculum, les rectangles ont des aires vaguement proportionnelles au nombre de sources attestées pour ces listes ou tables, et les flèches rouges indiquent la simultanéité possible des apprentissages. Les lettres C, P, S, L et Lh signifient respectivement : capacités, poids, surfaces, longueurs (et autres dimensions linéaires horizontales), hauteurs (et autres dimensions linéaires verticales).

tables numériques (inverses, multiplication, carrés, racines carrée et racines cubiques). L'ensemble de ces listes et tables fournissant les connaissances de base constitue ce que les assyriologues désignent par « niveau élémentaire ». Après la mémorisation de ce répertoire de résultats élémentaires, les scribes étaient entraînés à les activer dans quelques algorithmes numériques de base (multiplication et inversion), ainsi que dans le calcul des surfaces et des volumes. Dans un deuxième temps, un « niveau avancé » devait sans doute débiter par des problèmes de proportionnalité et des problèmes quadratiques simples. Cependant, la documentation est beaucoup moins abondante et explicite pour l'enseignement post-élémentaire, et, tout au moins pour ce qui concerne les mathématiques, il est difficile d'avoir une idée claire des grandes lignes de l'enseignement avancé à Nippur ou ailleurs¹⁰. Pour la plupart des textes mathématiques qui nous semblent relever de la pure érudition, on ne peut dire s'ils ont été écrits par des étudiants avancés ou par des maîtres, ni à qui exactement ils étaient destinés. Le flou est d'autant plus grand que la plupart des textes que Neugebauer considérait comme « authentiquement mathématiques » (par opposition aux textes scolaires élémentaires) sont de provenance inconnue et ne peuvent être rattachés à un contexte un tant soit peu documenté. Quelques éclairages ponctuels sur l'enseignement avancé proviennent cependant de textes dont la structure semble liée à un projet didactique – parmi eux des listes de problèmes résolus sur lesquelles je reviendrai (§6).

On trouvera une description détaillée des textes mathématiques scolaires élémentaires dans différentes études ([16], [17], [10], [12]). Pour la clarté des considérations qui suivent, il importe cependant de revenir plus en détail sur deux extraits : l'un d'une table métrologique, l'autre d'une table d'inverses.

Table métrologique

Les tables métrologiques, dont l'apprentissage commençait dès le niveau élémentaire, fournissaient aux jeunes scribes un outil mathématique clé pour conduire une grande variété de calculs, notamment ceux où interviennent des surfaces et des volumes. Elles se présentent comme des tables à deux colonnes. La colonne de gauche contient une liste de mesures de capacité, poids, surface et longueur. L'ensemble de ces mesures, qu'on trouve aussi dans les « listes métrologiques », représente « en extension » les systèmes métrologiques standardisés utilisés en mathématiques, et très largement aussi dans les documents administratifs, commerciaux ou juridiques – voir annexe, 2). La colonne de droite donne, pour chaque mesure, un nombre en notation sexagésimale positionnelle flottante.

La figure 2 montre la copie et la traduction d'une tablette scolaire de Nippur contenant un extrait de table métrologique des longueurs.¹¹

¹⁰ La situation concernant l'enseignement de la littérature sumérienne à Nippur est un peu plus claire ([2], [3], [16], [20]).

¹¹ Tablette conservée à l'Université de Iéna sous le numéro d'inventaire HS 241, publiée par Hilprecht ([5], n°42). Voir aussi [12], n°29. La copie de la figure 2 est la mienne.

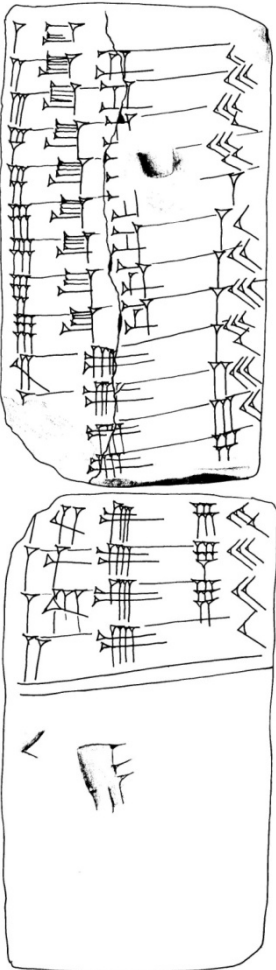
	1 <i>šusi</i>	10
	2 <i>šusi</i>	20
	3 <i>šusi</i>	30
	4 <i>šusi</i>	40
	5 <i>šusi</i>	50
	6 <i>šusi</i>	1
	7 <i>šusi</i>	1:10
	8 <i>šusi</i>	1:20
	9 <i>šusi</i>	1:30
	1/3 <i>kuš</i>	1:40
	1/2 <i>kuš</i>	2:30
	2/3 <i>kuš</i>	3:20
	5/6 <i>kuš</i>	4:10
	1 <i>kuš</i>	5
	1 1/3 <i>kuš</i>	6:40
	1 1/2 <i>kuš</i>	7:30
1 2/3 <i>kuš</i>	8:20	
2 <i>kuš</i>	10	

Figure 2 : tablette scolaire de Nippur (HS 241) contenant un extrait de table métrologique des longueurs. Echelle 1/1.

Noter le caractère cyclique de la colonne de droite : le nombre 10 apparaît à la première ligne, en tant que nombre positionnel correspondant à 1 *šusi* (env. 1,7 cm), et à la dernière ligne, en tant que nombre positionnel correspondant à 2 *kuš* (env. 1 m). L'usage de la table en lecture inverse exigeait donc un contrôle mental des ordres de grandeur. L'utilisation de ce type de table était un des buts principaux de la formation mathématique à Nippur. Quelques exemples sont décrits ci-dessous (voir la fin du présent paragraphe et §6).

Table d'inverses

Les tables numériques étudiées dans le curriculum élémentaire de Nippur¹² (et des autres écoles) étaient les suivantes, dans cet ordre : inverses, multiplication par 50, 45, 44:26:40, 40, 36, 30, 25, 24, 22:30, 20, 18, 16:40, 16, 15, 12:30, 12, 10, 9, 8:20, 8, 7:30, 7:12, 7, 6:40, 6, 5, 4:30, 4, 3:45, 3:20, 3, 2:30, 2:24, 2, 1:40, 1:30, 1:20, 1:15, carrés, racines carrées, racines cubiques. La première d'entre elles était donc la table des inverses (*igi* en sumérien). Cette position en tête de la série des tables numériques serait difficile à expliquer par des raisons pédagogiques, et tient plutôt à l'importance de l'inversion dans le calcul sexagésimal. En effet, dans le monde scolaire, diviser par un nombre, c'était multiplier par son inverse. L'analyse des « tables de multiplication », qui se succèdent en ordre décroissant de leur

¹² Voir la structure du curriculum Figure 1.

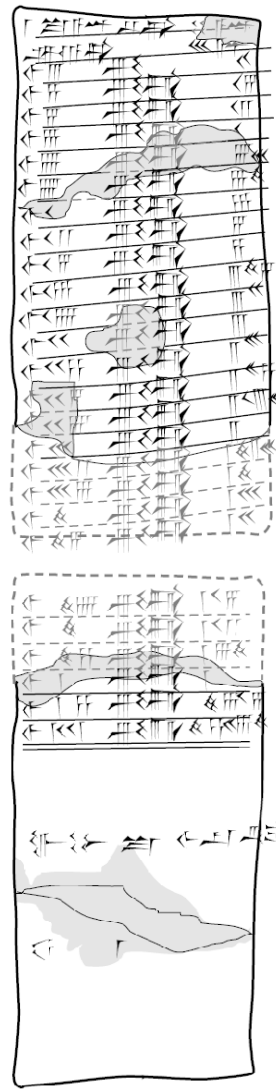
nombre principal, montre qu'en fait, il s'agit tout autant de tables de divisions que de tables de multiplication. Par exemple, la table de multiplication par 44:26:40, qui est une des premières de la série, est aussi (et surtout) une table de division par 1:21, l'inverse de 44:26:40.

Les tables d'inverses trouvées en Mésopotamie ont toutes plus ou moins le même contenu : ce sont les inverses des nombres réguliers¹³ à une position sexagésimale, plus deux ou trois inverses de nombres à deux positions d'usage courant. Les tables se présentent généralement sous la forme d'une liste de clauses ainsi rédigées : l'inverse de 2 est 30, l'inverse de 3 est 20, etc. Le caractère flottant de la notation apparaît ici clairement : seule la suite des chiffres est donnée dans la table, sans aucune marque indiquant la position des unités. Autrement dit, deux nombres forment une paire d'inverse si leur produit est 1, ce « 1 » représentant n'importe quelle puissance de 60.

La figure 3 suivante contient une copie de table d'inverses (MS 3874)¹⁴ avec toutes ses clauses rédigées, et, en vis-à-vis, son contenu mathématique simplifié, où je désigne les nombres et leurs inverses par n et $\text{inv}(n)$.

¹³ Les nombres réguliers en base 60 sont ceux dont l'inverse comporte un nombre fini de chiffres en notation sexagésimale. Ce sont donc des nombres dont la décomposition ne contient pas d'autre facteur premier que 2, 3 ou 5, les diviseurs premiers de 60. Les anciens scribes évitaient les nombres non réguliers, qui portaient la mention « *igi nu* », c'est-à-dire « n'a pas d'inverse » en sumérien.

¹⁴ MS 3874 est une tablette scolaire paléo-babylonienne de la Schøyen Collection, publiée par Jöran Friberg ([4], p. 69).



n	$\text{inv}(n)$
2	30
3	20
4	15
5	12
6	10
8	7:30
9	6:40
10	6
12	5
15	4
16	3:45
18	3:20
20	3
24	2:30
25	2:24
27	2:13:20
30	2
32	1:52:30
36	1:40
40	1:30
45	1:20
48	1:15
50	1:12
54	1:6:40
1	1
1:4	56:15
1:21	44:26:40

Figure 3 : table d'inverses (MS 3874, copie Friberg [4], p. 69)

La liste de ces paires d'inverses élémentaires était mémorisée dès les débuts de la formation mathématique, et le calculateur l'utilisait constamment dans l'application de certains algorithmes (voir §5).

4- Calculer et quantifier

Quelles sont les notions mathématiques fondamentales qui émergent de cet ensemble cohérent de listes et d'exercices qui se succèdent dans un ordre précis ? Une première remarque concerne les opérations : il n'est nulle part question dans l'enseignement élémentaire de l'addition. Les opérations clé sont l'inversion et la multiplication ainsi que les opérations qui en dérivent : carré, racine carrée et racine cubique. Il est clair ici que les bases de l'arithmétique ne sont pas appuyées sur le quatuor classique addition-soustraction-multiplication-division des manuels d'arithmétique élémentaire modernes, mais sur deux opérations fondamentales, la multiplication et l'inversion.

Une deuxième remarque concerne les nombres : deux sortes de nombres sont délibérément distingués par les maîtres anciens, à la fois dans la présentation des tables et dans leur ordre de succession. D'abord viennent, dans les listes métrologiques, les nombres qui sont utilisés pour exprimer des mesures (ou pour dénombrer), c'est-à-dire des nombres qui expriment des quantités. Ces nombres appartiennent à différents systèmes, qui ont pour point commun de ne pas être positionnels ; le plus utilisé de ces systèmes, le système S, a une structure sexagésimale (alternance de facteurs 10 et 6), comme le montre l'annexe 1a. Ensuite, dans les tables métrologiques, apparaît une correspondance entre des mesures, exprimées sous la forme de nombres-quantité (et de fractions) suivis d'une unité de mesure, et des nombres sexagésimaux positionnels dont l'écriture ne précise pas la position des unités. Enfin, les tables numériques fournissent un vaste répertoire de résultats élémentaires de multiplications et d'inversions, dans lesquelles n'interviennent que des nombres positionnels. Il devient clair, par la simple observation des pratiques scolaires, que l'usage de la notation sexagésimale positionnelle flottante est étroitement liée à la multiplication et à l'inversion. Ce lien n'est évidemment pas étranger au fait que, pour effectuer une multiplication ou une inversion, la position des unités dans les nombres n'a aucune importance, au sens où elle n'influe pas sur la liste des chiffres du résultat – le seul aspect qui importe en notation flottante. Nous voyons donc se former, à ce stade, un univers numérique composé de nombres sexagésimaux flottants sur lesquels agissent des multiplications et des inversions. Dans ce monde, l'absence de repérage de la position des unités dans la notation des nombres n'est pas une défaillance de l'écriture. C'est au contraire, on le verra, une caractéristique fondamentale qui permet le développement d'algorithmes de calcul puissants (§5).

Mais « comment faisaient-ils pour ajouter des moutons ? » me demande-t-on souvent. La réponse est que les moutons ne sont jamais dénombrés avec les nombres sexagésimaux positionnels, mais toujours au moyen du système sexagésimal de principe additif dit « système S » (voir annexe, 1a). Pour ajouter des moutons dénombrés en système additif, on ajoute des nombres écrits en système additif, où l'ordre de grandeur est défini par la forme des signes ou d'autres artifices. Ces opérations d'addition de moutons, de travailleurs, ou de quantités diverses, sont omniprésentes dans les textes administratifs, ainsi que dans certains textes mathématiques avancés, quoique de façon plus abstraite, mais absentes des exercices scolaires : ajouter des moutons est hors du champ des mathématiques élémentaires des écoles de scribes.

En conclusion, la pratique des nombres dans l'enseignement élémentaire à Nippur témoigne de la dissociation de deux fonctions distinctes : quantifier et calculer. La quantification est prise en charge par des nombres de principe additif, dont l'ordre de grandeur est parfaitement défini. La fonction de calcul (pour la multiplication) est prise en charge par des nombres sexagésimaux positionnels flottants ; ces derniers ne sont pas des quantités, mais de simples suites ordonnées de chiffres, qui ne sont jamais suivis d'entités concrètes comme des unités de mesure ou des items dénombrés. Dans la suite, je nomme ces nombres des « nombres abstraits ».

Le calcul des surfaces et des volumes

Des exercices de calcul de surface trouvés à Nippur témoignent de la façon dont les deux sortes de nombres interviennent à des étapes précises du calcul des surfaces. La figure 4 montre la copie et la traduction de l'un de ces exercices.

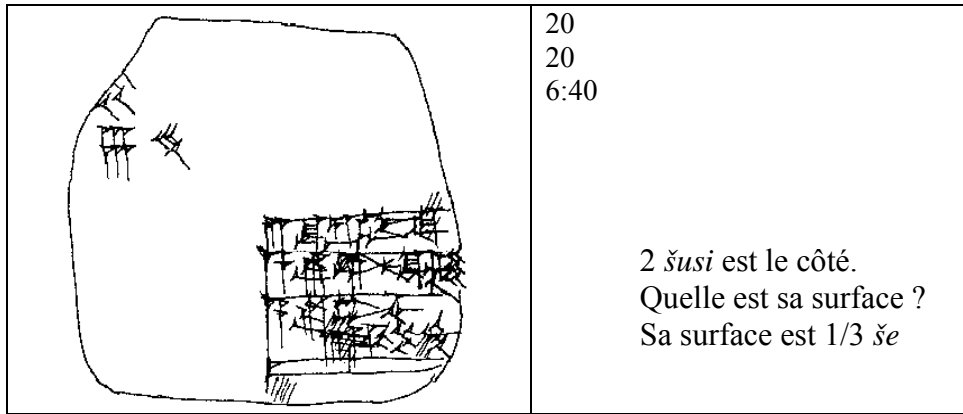


Figure 4 : tablette scolaire de Nippur (UM 29-15-192)¹⁵

Le problème semble très simple. Dans le coin inférieur droit, un petit texte dit que le côté d'un carré est 2 *šusi* (env. 3 cm) et demande sa surface, ensuite il donne la réponse. Toutes les données sont exprimées au moyen de mesures de longueur ou de surface, notées de la même façon que dans les listes et les tables métrologiques. Dans le coin supérieur gauche, on trouve trois nombres abstraits écrits l'un sous l'autre. Les autres tablettes du même type nous permettent de savoir que le troisième nombre est le produit des deux autres, et donc de deviner les parties cassées ; ici, $20 \times 20 = 6:40$. Selon la table métrologique des longueurs, la mesure 2 *šusi* correspond au nombre abstrait 20. C'est précisément ce nombre 20 qui est multiplié par lui-même dans le coin supérieur gauche. Le produit est 6:40. Selon la table métrologique des surfaces, utilisée parallèlement à une estimation mentale des ordres de grandeur, le nombre abstrait 6:40 correspond à $1/3$ *še*.

Le calcul se fait donc en trois étapes, avec basculements des mesures aux nombres abstraits et retour, selon le schéma :

- Transformation d'une mesure de longueur en nombre abstrait (utilisation de la table des longueurs)
- Multiplication de deux nombres abstraits (utilisation des tables de multiplication)
- Transformation d'un nombre abstrait en mesure de surface (utilisation de la table des surfaces et estimation de l'ordre de grandeur)

Le calcul des volumes et des poids suivait le même schéma. Le système d'unités de volume le plus utilisé dans les textes mathématiques a été fabriqué artificiellement, sans doute dans la deuxième moitié du troisième millénaire, à partir des unités de surface : une unité de volume est une unité de surface affectée d'une épaisseur constante de 1 *kuš* (env. 50 cm). Une table métrologique spéciale pour les hauteurs, où 1 *kuš* correspond au nombre abstrait 1 (au lieu de 5 dans la table des longueurs), était utilisée. Cette astuce permettait d'utiliser la même table métrologique pour les surfaces et les volumes. Un système sophistiqué de coefficients (exprimés en nombres abstraits), généralement fournis au calculateur par des tables de coefficients, permettait de faire appel à plusieurs autres jeux d'unités de volume, représentés par des « briques » de différents formats, tout en utilisant la même table métrologique. D'autres coefficients permettaient de calculer les poids de diverses substances de densités différentes à partir de leur volume ou leur capacité en utilisant la table métrologique des poids.

Sans entrer plus dans les détails, ces quelques remarques sur le calcul des surfaces, des volumes et des poids suffisent à montrer comment le jeu de basculement des mesures aux nombres abstraits, et vice-versa, était à la base du calcul avec des grandeurs.

¹⁵Publiée dans [9], 248, 251.

5- Le calcul flottant en action dans quelques exemples

Inverser un nombre

La puissance du calcul positionnel flottant apparaît dans toute sa force lorsqu'on examine les algorithmes de calcul qui étaient utilisés pour l'extraction des inverses, des racines carrées et des racines cubiques. J'ai analysé en détail ces algorithmes et la façon dont les scribes en contrôlaient la validité dans le livre de Karine Chemla sur les formes de la preuve dans les traditions mathématiques anciennes ([1], [14]). Je me limiterai ici à quelques exemples concernant le calcul des inverses.

Comment calculer l'inverse d'un nombre régulier qui n'est pas donné par la table d'inverses ? Là encore, on trouve la réponse dans les exercices d'écolier. Celui qui est reproduit dans la figure 5 en est un exemple.

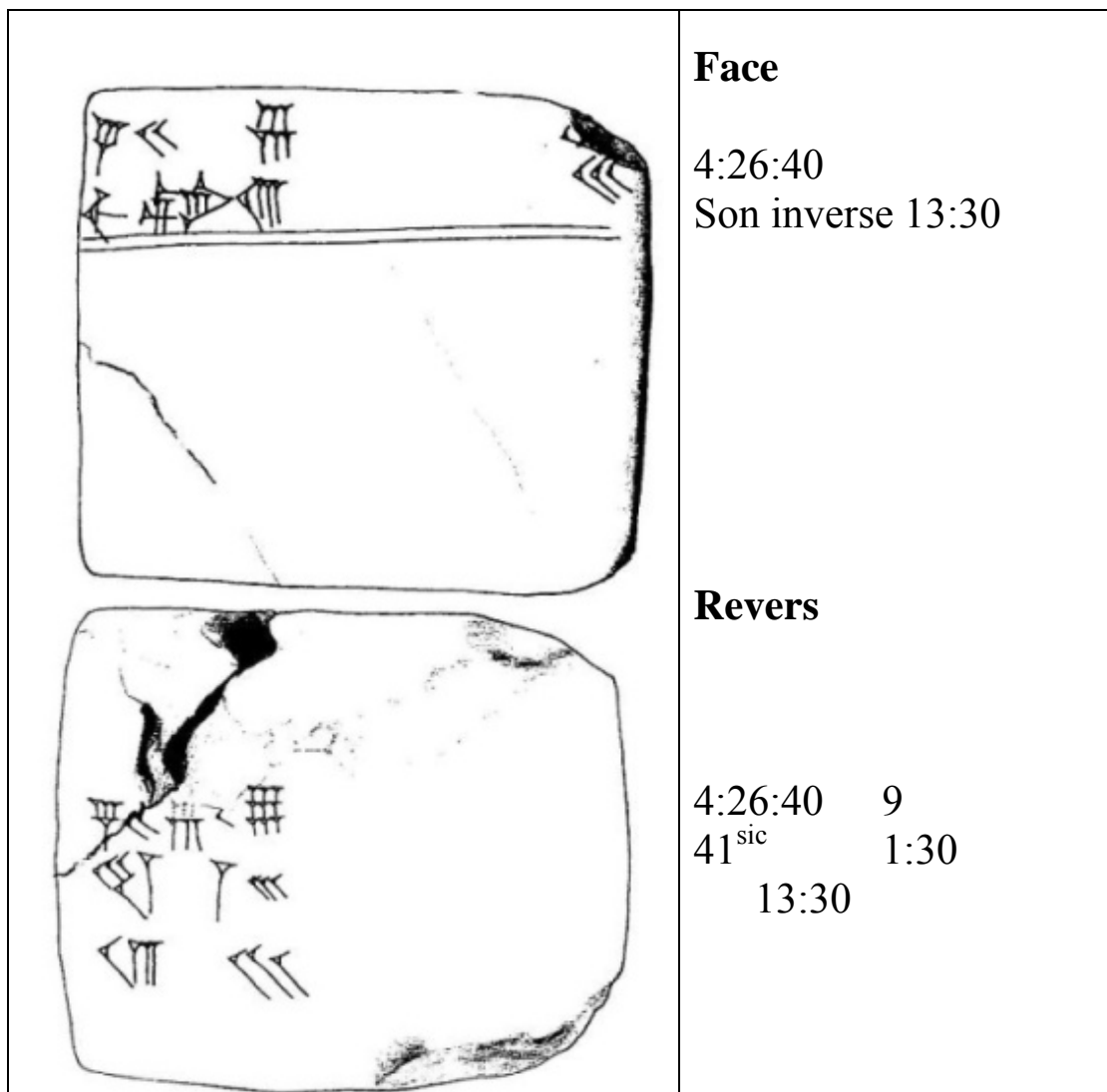


Figure 5 : tablette scolaire de Nippur (Ist Ni 10241) contenant un calcul d'inverses. Echelle 1/1.

Sur la face, on lit que l'inverse de 4:26:40 est 13:30, ce qui est exact (pour le vérifier, il suffit de multiplier 4:26:40 par 13:30 et constater que le produit est bien 1). Sur le revers, on trouve le détail du calcul, que je reproduis ci-dessous en corrigeant l'erreur de la deuxième ligne :

4:26:40	9
40	1:30
13:30	

Voici l'explication du calcul : 4:26:40, le nombre à inverser, se termine par le nombre régulier 6:40, donc 4:26:40 est « divisible » par 6:40¹⁶. Pour diviser 4:26:40 par 6:40, on multiplie 4:26:40 par l'inverse de 6:40. L'inverse de 6:40 est dans la table des inverses (voir figure 3) : c'est 9. Ce nombre 9 est posé à droite. Le produit de 4:26:40 par 9 donne 40, donc 40 est le quotient de 4:26:40 par 6:40 ; ce nombre est posé à gauche. L'inverse de 40 est dans la table des inverses, c'est 1:30. Le nombre 1:30 est posé à droite. Pour trouver l'inverse de 4:26:40, on n'a plus qu'à multiplier les inverses des facteurs de 4:26:40, c'est-à-dire les nombres 9 et 1:30 posés à droite. Ce qui donne 13:30, l'inverse cherché.

Pour résumer, la colonne de gauche nous dit que 4:26:40 peut se décomposer en produit de facteurs réguliers de la façon suivante :

$$4:26:40 = 6:40 \times 40$$

La colonne de droite donne les inverses des facteurs, donc le nombre cherché est le produit de ces inverses :

$$9 \times 1:30 = 13:30$$

Lorsque le dernier quotient trouvé n'est pas dans la table d'inverses, il faut itérer le processus. On connaît une tablette où ces itérations sont développées de façon spectaculaire. C'est une tablette de provenance inconnue conservée à l'Université de Philadelphie aux Etats-Unis sous le numéro d'inventaire CBS 1215. Cette tablette contient 21 calculs d'inverses. Le 20^e calcul est reproduit et expliqué dans le tableau 1 ci-dessous (j'ai fait ressortir en caractères gras les facteurs réguliers qui apparaissent en partie finale du nombre à inverser, et j'ai souligné l'inverse trouvé)¹⁷.

¹⁶ La notion de divisibilité et les critères correspondants demandent à être légèrement reformulés dans le contexte de la notation sexagésimale flottante. Tout d'abord, il ne s'agit ici que de divisibilité par des nombres réguliers. Mais, dans ce système où il n'y a pas de différence entre nombre entier et non entier, tous les nombres sont divisibles par des nombres réguliers (par exemple, on peut diviser 2 par 5, cela donne 24). Je prends ici le mot divisible au sens suivant : a est divisible par b (régulier) si le produit de a par l'inverse de b donne un nombre plus « petit » que a , i. e., un nombre qui comporte moins de chiffres que a , ou, à nombre de chiffres égal, un nombre inférieur à a . Ensuite, il faut insister sur le fait que la divisibilité par un nombre régulier se voit sur les derniers chiffres (penser à la divisibilité par 2, 4, 5, 10, 25 etc. en base 10). Généralement, le diviseur est identifié par les scribes comme étant les derniers chiffres qui forment un nombre régulier, d'où le nom de *trailing part algorithm* donné par Friberg à cette méthode de factorisation. Parfois, la partie finale régulière est légèrement masquée (voir, dans le tableau 1, où le facteur 3.45 est identifié, alors que le nombre se termine par 8.45).

¹⁷ Pour une analyse complète de la tablette, voir [15].

Transcription		Explication
5:3:24:26:40	[9]	$n \rightarrow 5:3:24:26:40$
45:30:40	1:30	Facteurs de n
1:8:16	3:45	facteurs de $inv(n)$
4:16	3:45	6:40
16	3:45	9
14:3:45		40
5[2:44]:3:45		16
1:19:6:5:37:30		16
<u>11:51:54:50:37:30</u>	2	16
23:43:49:41:15	4	Produits
1:34:55:18:45	16	14:3:45
25:18:45	16	5[2:44]:3:45
6:45	1:20	1:19:6:5:37:30
9	6:[40]	11:51:54:50:37:30
8:53:20		$n \rightarrow 11:51:54:50:37:30$
2:2:22:2:13:20		30
37:55:33:20		15
2:31:42:13:20		3:45
5:3:24:26:40		3:45
		45
		9
		Produits
		8:53:20
		2:22:13:20
		37:55:33:20
		2:31:42:13:20
		5:3:24:26:40

Tableau 1 : CBS 1215 #20

On constate que ce calcul, outre l'itération du procédé de factorisation, fait apparaître un nouveau raffinement, qu'on ne trouve pas dans les tablettes scolaires : une fois trouvé, l'inverse est à son tour inversé par le même algorithme, ce qui produit évidemment le nombre dont on était parti. J'ai montré dans [15] que ce retour à la case départ témoigne non pas d'une simple vérification du résultat, mais plutôt d'un souci de contrôler la validité de l'algorithme lui-même, ainsi que de mettre en évidence le fait que l'opération réciproque de l'inversion est l'inversion elle-même.

La simplicité du calcul, et donc sa puissance, découle largement de son caractère flottant. Cet aspect du calcul sexagésimal n'a pas toujours été perçu, comme en témoigne cet extrait de l'étude de CBS 1215 faite par Abraham Sachs en 1947 ([18], p. 238-240) :

c	b	a	\bar{a}	$1+\bar{ab}$	$\overline{1+ab}$	\bar{c}
[...] #20						
5,3,24,26,40 45,30,40 1,8,16 4,16	5,3,24,20 45,30,0 1,8,0 4,0	6,40 40 16 16	0,9 0;1,30 0;3,45 0;3,45	45,30,40 1,8,16 4,16 16	0;0,0,1,19,6,5,37,30 0;0,0,52,44,3,45 0;0,14,3,45 0;3,45	0;0,0,0,11,51,54,50,37,30 0;0,0,1,19,6,5,37,30 0;0,0,52,44,3,45 0;0,14,3,45
0;0,0,1,19,6,5,37,30 23,43,49,41,15 1,34,55,18,45 25,18,45 6,45	0;0,0,0,11,51,54,50,37 23,43,49,41,0 1,34,55,15,0 25,15,0 6,0	0;0,0,0,0,0,0,0,30 15 3,45 3,45 45	2,0,0,0,0,0,0,0 0,4 0,0,16 0,0,16 0,1,20	23,43,49,41,15 1,34,55,18,45 25,18,45 6,45 9	0;0,0,0,2,31,42,13,20 0;0,0,0,37,55,33,20 0;0,0,2,22,13,20 0;0,8,53,20 0;6,40	5,3,24,26,40 0;0,0,0,2,31,42,13,20 0;0,0,0,37,55,33,20 0;0,0,2,22,13,20 0;0,8,53,20

Tableau 2: La techniques d'inversion dans CBS 1215 #20 expliquée par Sachs

Le calcul de Sachs est inutilement compliqué pour plusieurs raisons. D'abord, il a cherché à exprimer l'algorithme par une formule algébrique. Ensuite, il a considéré que le nombre à inverser c était décomposé en somme $a + b$, et que l'inverse était calculé par application de la « formule » $\overline{a}(1 + \overline{ab})$ (en notant \overline{a} l'inverse de a)¹⁸. Enfin, il a considéré les nombres comme des quantités, dont il a restitué l'ordre de grandeur en ajoutant les « zéros » qui lui paraissaient nécessaires, parfois en nombre impressionnant. Cet exemple montre comment l'utilisation des concepts modernes peut s'avérer inadaptée et faire obstacle à une compréhension complète des procédures anciennes.¹⁹

Surface du disque

La relation entre nombres abstraits et mesurés est particulièrement intéressante à observer dans des situations géométriques élémentaires. Des exercices de calcul de surface, notés sur des tablettes carrées ou rondes caractéristiques des exercices scolaires, ont été trouvés dans divers sites de Mésopotamie. Ces exercices de géométrie contiennent souvent des diagrammes accompagnés de nombres qui représentent les mesures linéaires (généralement notés à l'extérieur de la figure) et la surface correspondante (généralement notée à l'intérieur de la figure). Les deux exemples représentés dans la figure 6, de provenance inconnue, concernent le cercle.

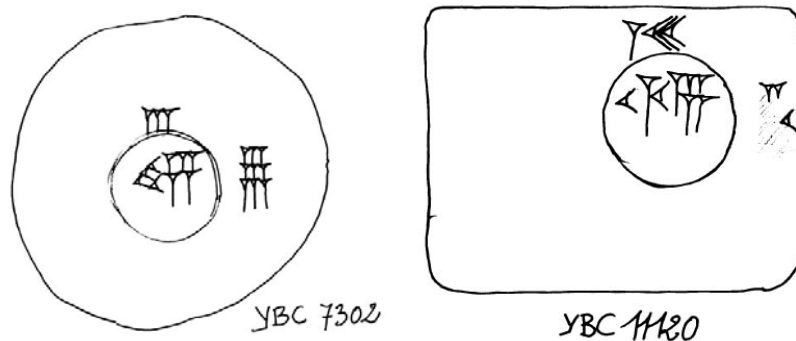


Figure 6 : cercle, périmètre et surface. Tablettes scolaires conservées à l'Université Yale.

Sur ces diagrammes sont notés des nombres abstraits correspondant au périmètre (en haut), au carré du périmètre (à droite) et à la surface (dans le cercle). Sur ces tablettes, il apparaît que la surface du disque est obtenue en multipliant le carré du périmètre par 5. En effet, si on note a l'aire d'un disque et p son périmètre, la relation entre p et a est la suivante en langage moderne :

$$a = p^2 / 4 \pi.$$

Les scribes utilisaient généralement une estimation approchée de 3 pour le rapport du périmètre au diamètre d'un cercle (ce qui correspond en langage moderne à l'approximation $\pi \approx 3$) :

$$a \approx p^2 / 12$$

Comme l'inverse de 12 est 5, on obtient la formule d'approximation suivante, ici en notation flottante :

¹⁸ Cette décomposition en somme, quelque peu incongrue dans l'optique d'une inversion, résulte de l'interprétation, à mon avis erronée, d'une tablette (VAT 6505) où cette somme intervient – voir [14] et [15].

¹⁹ Pour plus de détails sur la démarche de Sachs, qui, il convient de le souligner ici car c'est l'essentiel, est celui qui a percé le mystère de la tablette CBS 1215, et sur les aspects historiographiques rapidement évoqués ici, voir [14] et [15].

$$a \approx p^2 \times 5$$

Il est notable, dans les deux tablettes ci-dessus, qu'aucune unité de mesure n'est précisée. Que représentent donc ces nombres ? Dans YBC 7302, doit-on interpréter le nombre 3 comme représentant une mesure, par exemple un périmètre de 3 *ninda* ? On a vu que, dans les tables métrologiques, les nombres de la colonne de droite décrivent des cycles, et, par exemple, le nombre 3 peut correspondre à plusieurs mesures de longueur différentes :

$\frac{1}{2}$ <i>kuš</i> 3 <i>šusi</i>	→ 3
3 <i>ninda</i>	→ 3
3 <i>uš</i>	→ 3
6 <i>danna</i>	→ 3

Doit-on choisir une de ces correspondances de façon privilégiée ? Aucune indication, dans ces textes, ne nous permet de le faire. On peut même, à l'inverse, considérer que le diagramme annoté de YBC 7302 représente **en même temps** toutes les situations métriques suivantes :

Périmètre (3)	Surface (45)	Ordre de grandeur
$\frac{1}{2}$ <i>kuš</i> 3 <i>šusi</i>	2 $\frac{1}{4}$ <i>še</i>	Une tablette
3 <i>ninda</i>	$\frac{2}{3}$ <i>sar</i> 5 <i>gin</i>	Un verger
3 <i>uš</i>	(1×18 + 1×6 + 3) <i>gan</i>	Une ville
6 <i>danna</i>	(1×1080 + 3×180) <i>gan</i>	Une région

Tableau 3 : ordres de grandeurs possibles correspondant aux données de la tablette YBC 7302

Comme dans le cas des tables d'inverses, l'indétermination des nombres écrits sur la tablette donne une grande flexibilité au texte. Les lectures habituelles écrasent cette multiplicité des significations possibles pour n'en retenir qu'une seule, à savoir que 3 représente 3 *ninda*²⁰.

6- De la proportionnalité aux problèmes quadratiques : YBC 4663

Le basculement incessant des mesures aux nombres abstraits et vice-versa est à mon avis un mécanisme omniprésent dans les textes mathématiques ; ce mécanisme est apparent dans les textes scolaires élémentaires, et implicite dans les textes plus érudits. Pour observer comment ce mécanisme fonctionne dans la résolution des problèmes, j'ai choisi dans ce qui suit quelques exemples simples, extraits d'une tablette qui a probablement été utilisée dans les débuts de l'enseignement avancé. Cette tablette, de provenance inconnue et conservée à l'Université Yale sous le numéro d'inventaire YBC 4663, contient une liste de huit problèmes résolus²¹. Les six premiers problèmes traitent de situations de proportionnalité, ne nécessitant pour les résoudre qu'une suite de multiplications et d'inversions. Les deux derniers sont des

²⁰ Lorsqu'ils correspondent à des longueurs, les nombres sexagésimaux positionnels sont généralement interprétés par les spécialistes comme des mesures exprimées en *ninda*, l'unité de mesure étant omise mais implicite. Cet avis est ainsi exprimé par Høyrup: "The basic measure of horizontal distance is the nindan ("rod"), equal to c. 6 m. Mostly, this unit is not written but remains implicit." ([6], p. 17). J'ai développé des arguments contre l'idée que les nombres abstraits puissent être interprétés comme des mesures dont l'unité a été omise dans [11], ainsi du reste que dans le présent article.

²¹ La tablette YBC 4663 a été publiée par Neugebauer et Sachs dans [8] (translittération, traduction et interprétation pp. 69-75 ; copie planche 7, photo planche 32). La translittération et la traduction données ici sont les miennes ; elles s'appuient sur celles de Neugebauer et sur ma propre observation de la tablette en 2010, avec l'aimable autorisation de Benjamin Foster et d'Ulla Kasten.

problèmes quadratiques qui, parce qu'ils impliquent des additions, soulèvent des difficultés nouvelles dans l'utilisation des nombres abstraits, notamment celle du repérage des positions sexagésimales.

Proportionnalité : YBC 4663 #1 et 4

Examinons de plus près deux des problèmes traitant de situations de proportionnalité, les problèmes 1 et 4.

YBC 4663 #1²²

1. Une tranchée. 5 *ninda* sa longueur, 1 1/2 *ninda* sa largeur, 1/2 *ninda* sa profondeur. 10 *gin* le volume assigné. 6 *še* le [salaire (d'un ouvrier)].
2. La base, le volume, le nombre d'ouvriers et l'argent (des salaires) combien ? Toi, pour le savoir :
3. La longueur et la largeur croise, 7:30 *te donnera*.
4. 7:30 à la profondeur élève, 45 *te donnera*.
5. L'inverse du volume assigné dénoue, 6 *te donnera*. A 45 élève, 4:30 *te donnera*.
6. 4:30 au salaire élève, 9 *te donnera*. Telle est la façon de procéder.

L'énoncé donne ici les dimensions d'une tranchée, le volume de terre que doit extraire un ouvrier (« volume assigné »), et le salaire journalier des ouvriers ; il est demandé de calculer la surface de la base de la tranchée, son volume, et le salaire total à verser aux ouvriers (sous-entendu : pour faire le travail en une journée). La solution consiste évidemment à multiplier la longueur par la largeur pour obtenir la surface (ligne 3), puis à multiplier le résultat obtenu par la hauteur pour obtenir le volume (ligne 4), puis à diviser le volume de la tranchée par le volume que doit extraire chaque jour chaque ouvrier pour obtenir le nombre d'ouvrier (ligne 5), et enfin, à multiplier le nombre d'ouvriers par le salaire journalier pour obtenir le coût salarial total (ligne 6).

La méthode de résolution de ce problème très simple ne fait aucun mystère. Le point intéressant à remarquer est que les données du problème sont exprimées en quantités concrètes (mesures de longueur, de volume et de poids) dans l'énoncé. En revanche, dès que commence la résolution, n'interviennent que des nombres abstraits. La relation entre les mesures données dans l'énoncé et les nombres abstraits utilisés dans la résolution est celle qui est établie dans les tables métrologiques²³ :

Données

longueur	5 <i>ninda</i>	→ 5	(table L)
largeur	1 1/2 <i>ninda</i>	→ 1:30	(table L)
profondeur	1/2 <i>ninda</i>	→ 6	(table Lh)
salaire	6 <i>še</i>	→ 2	(table P)
volume assigné	10 <i>gin</i>	→ 10	(table S)

Ensuite, la procédure de calcul, ouverte par la formule « Toi, pour le savoir », consiste à opérer des multiplications sur ces nombres abstraits ou leurs inverses :

²² Le texte original est un mélange de langue akkadienne en notation syllabique, et d'idéogrammes sumériens ; dans la traduction, les termes akkadiens sont en italiques et les termes sumériens en caractères droits. Les séquences entre crochets sont des reconstitutions de parties du texte détruites. Les nombres à gauche correspondent à la numérotation des lignes de la tablette par Neugebauer.

²³ Dans ce qui suit, la table des longueurs est désignée par « table L », la table des hauteurs par « table Lh », des poids par « table P », des surfaces par « table S » et des capacités par « table C ». Ces tables sont accessibles en ligne ([13], §9)

Opérations

longueur × largeur	$5 \times 1:30 = 7:30$	ligne 3
surface × profondeur	$7:30 \times 6 = 45$	ligne 4
volume / volume assigné	$45 / 10 = 45 \times 6 = 4:30$	ligne 5
nombre d'ouvriers × salaire journalier	$4:30 \times 2 = 9$	ligne 6

Le résultat final 9 étant trouvé, la procédure de calcul est terminée, et se conclut par la formule « Telle est la procédure. » On notera que seules des multiplications et des inversions sont impliquées dans le calcul sur les nombres abstraits, et que donc le « calcul flottant » fonctionne parfaitement. Une autre remarque est que la première étape, celle des traductions des mesures en nombre abstraits, fait intervenir presque toutes les tables métrologiques du répertoire du scribe en formation (seule manque la table des capacités), ce qui peut témoigner du caractère didactique de ce problème. Enfin, il est notable que le basculement des mesures aux nombres abstraits est ici doublé, comme pour enfoncer le clou, d'un basculement linguistique du sumérien à l'akkadien.

Les problèmes 2 à 6 de cette tablette reprennent exactement la même situation que le problème 1, avec des permutations circulaires entre ce qui est donné et ce qui est demandé. Ils ajoutent de plus une étape à la résolution : celle qui consiste à transformer le résultat abstrait en mesure, de façon à répondre complètement à la question. Examinons par exemple le problème 4.

YBC 4663 #4

20. 9 *gin* l'argent (total) pour une tranchée. 5 *ninda* sa longueur, 1 1/2 *ninda* sa largeur. 10 *gin* le volume assigné. 6 *še* (d'argent) le salaire (d'un ouvrier).
21. Sa profondeur combien ? Toi, pour le savoir :
22. la longueur et la largeur croise. 7:30 *te donnera*. L'inverse du volume assigné *dénoue*,
23. à 7:30 *élève*. 45 *te donnera*. 45 *au salaire élève*.
24. 1:30 *te donnera*. L'inverse de 1:30 *dénoue*. 40 *te donnera*.
25. 40 à 9, l'argent (total), *élève*. 6, la profondeur, *te donnera*. 1/2 *ninda* sa profondeur. *<Telle est la procédure.>*

Le calcul consiste, comme précédemment, en une suite de multiplications et d'inversions opérant sur des nombres abstraits :

Données

argent	9 <i>gin</i>	→ 9	(table P)
longueur	5 <i>ninda</i>	→ 5	(table L)
largeur	1 1/2 <i>ninda</i>	→ 1:30	(table L)
volume assigné	10 <i>gin</i>	→ 10	(table S)
salaire	6 <i>še</i>	→ 2	(table P)

Opérations

longueur × largeur	$5 \times 1:30 = 7:30$	ligne 22
base / volume assigné	$7:30 / 10 = 7:30 \times 6 = 45$	lignes 22-23
(base / volume assigné) × salaire	$45 \times 2 = 1:30$	ligne 23-24
argent / [(base / volume assigné) × salaire]	$9 / 1:30 = 9 \times 40 = 6$	ligne 25

La solution trouvée est un nombre abstrait (6). C'est là, et seulement là, que se pose la question de l'ordre de grandeur. La transformation du nombre abstrait 6 en mesure de profondeur par lecture inverse des tables métrologiques suppose, comme je l'ai indiqué plus haut, que l'ordre de grandeur du résultat soit évalué très approximativement. La table métrologique Lh (voir [13], §9) donne le choix entre plusieurs mesures de hauteur correspondant au nombre 6. Ces mesures sont 3 *šusi* (env. 5 cm), $\frac{1}{2}$ *ninda* (env. 3 m), 40 *ninda* (env. 240 m) et 1 *danna* (10,5 km). Le choix est évident, c'est $\frac{1}{2}$ *ninda*.

Finalement le processus est le même que pour les calculs de surface (UM 29-15-192) : mesures, transformation en nombres abstraits par lecture directe des tables métrologiques, multiplications et divisions en calcul flottant, et enfin transformation du résultat en mesure par lecture inverse des tables métrologiques doublée d'une évaluation mentale grossière des ordres de grandeur.

Intervention de l'addition

Les deux derniers problèmes de la tablette posent la question : comment gérer les additions de nombres dont les positions sexagésimales sont flottantes ? Examinons le problème 7.

YBC 4663 #7

1. 9 *gin* l'argent (total) pour la tranchée.
2. L'argent d'une tranchée. La longueur *et* la largeur j'ai ajouté : 6:30. $\frac{1}{2}$ *ninda* sa profondeur.
3. 10 *gin* la tâche assignée. 6 *še* (d'argent) le salaire (d'un ouvrier). La longueur et la largeur combien ?
4. Toi, pour le savoir : l'inverse de son salaire *dénoue*.
5. A 9 *gin*, l'argent, *élève*. 4:30 *te donnera*.
6. 4:30 à la tâche assignée *élève*. 45 *te donnera*.
7. L'inverse de la profondeur *dénoue*, à 45 *élève*. 7:30 *te donnera*.
8. La moitié de la longueur *et* la largeur *que j'ai ajoutées coupe*. 3:15 *te donnera*.
9. 3:15 avec lui-même *croise*. 10:33:45 *te donnera*.
10. 7:30 *du cœur de* 10:33:45 *soustrais*.
11. 3:3:45 *te donnera*. Son côté *prends*.
12. 1:45 *te donnera*. A l'un *ajoute*, de l'autre *soustrais*.
13. La longueur et la largeur *te donnera*. 5 *ninda* la longueur, 1 $\frac{1}{2}$ *ninda* la largeur.

Le problème semble analogue aux précédents, mais présente une différence de taille : une des données concerne la somme de la longueur et de la largeur (ligne 2). Comme précédemment, les opérations prescrites dans la résolution s'appliquent à des nombres abstraits. La première étape est donc la transformation des données métrologiques de l'énoncé par usage des tables :

Données

argent	9 <i>gin</i>	→ 9	(table P)
longueur + largeur		→ 6:30	(directement en nombre abstrait)
profondeur	$\frac{1}{2}$ <i>ninda</i>	→ 6	(table Lh)
tâche	10 <i>gin</i>	→ 10	(table S)
salaire	6 <i>še</i>	→ 2	(table P)

La résolution commence par le calcul de la surface de base, par une méthode identique à celle des # précédents. Ligne 7, on trouve une surface de base (longueur × largeur) de 7:30. Le

lecteur est donc ramené au problème de trouver la longueur et la largeur connaissant leur somme et leur produit. Les données du problème sont alors :

$$\begin{aligned} \text{longueur} + \text{largeur} &\rightarrow 6:30 \\ \text{longueur} \times \text{largeur} &\rightarrow 7:30 \end{aligned}$$

Le problème qui se pose maintenant est le positionnement de la surface (7:30) par rapport à la somme des longueurs (6:30). En fait, nous allons voir que tous les choix sont possibles. Le tableau 4 montre quelques unes de ces configurations numériques (désignées par A, B et C) ; la lettre U désigne la position des unités dans les nombres.

		A		B		C							
				U		U							
1 <i>ninda</i>	→		1			1			1				
longueur	→		5			5			5				
largeur	→		1	30		1	30		1	30			
surface	→	7	30			7	30			7	30		
longueur + largeur	→		6	30		6	30			6	30		

Tableau 4 : quelques positionnements possibles des données de YBC 4663 #7

Chacune de ces configurations est déterminée par le choix des positions relatives du nombre 1 représentant l'unité de mesure 1 *ninda*, et de l'unité dans le nombre (U), que je désigne dans ce qui suit par « unité de calcul » pour la distinguer des unités de mesure. On voit que, dans ce problème, tous les positionnements relatifs de 7:30 et 6:30 sont possibles.

Ces positionnements sont représentés ici d'une façon qui évoque les états d'un instrument de calcul ou d'un abaque, et ce choix de présentation n'est bien sûr pas anodin de ma part. Il est probable que les opérations, notamment les multiplications, étaient effectuées au moyen d'un instrument matériel, et la représentation choisie ci-dessus donne sans doute une bonne idée de la façon dont les problèmes de repérage des positions sexagésimales se posaient aux yeux des anciens scribes. Ces différentes configurations de l'hypothétique abaque représentent des situations géométriques différentes : déplacer sur l'abaque un nombre représentant une surface par rapport à un nombre représentant une longueur revient en fait à affecter cette longueur d'une deuxième dimension de 1 *ninda*, ou 60 *ninda* (1 *uš*), ou 1/60 *ninda* (6 *šusi*), etc. Mais rien dans le texte ne nous permet de privilégier une situation par rapport à une autre. On peut même imaginer que le texte les incluait toutes.

Revenons à la procédure décrite dans le texte cunéiforme. Le calcul fonctionne aussi bien dans toutes les configurations ci-dessus. Le tableau 5 suivant permet de suivre pas à pas les calculs prescrits par le texte dans les configurations A, B et C.

Lignes	Opérations	A			B			C					
				U	U			U					
7.	Moitié =		6	30	6	30			6	30			
			3	15	3	15			3	15			
8.	Produit =		3	15	3	15			3	15			
			3	15	3	15			3	15			
		10	33	45	10	33	45			10	33	45	
9. et 10.	Soustraction =	10	33	45	10	33	45			10	33	45	
		7	30		7	30				7	30		
		3	3	45	3	3	45			3	3	45	
10. et 11.	Racine carrée =	3	3	45	3	3	45			3	3	45	
			1	45	1	45			1	45			
11. et 12.	Addition =		3	15	3	15			3	15			
			1	45	1	45			1	45			
		5		5					5				
	Soustraction =		3	15	3	15			3	15			
			1	45	1	45			1	45			
			1	30	1	30			1	30			

Tableau 5 : quelques positionnements possibles des nombres dans les calculs de YBC 4663 #7

Conclusions :

- 1) **Rien n'oblige à choisir la position correspondant à 1 *ninda* pour unité de calcul.**
On peut découpler unité de **mesure** en *ninda* et unité de **calcul**.
- 2) Exécuter le calcul ne nécessite que la détermination initiale des positions sur l'abaque de quelques données minimales, par exemple les positions relatives de l'unité de calcul et du nombre 1 représentant 1 *ninda*.
- 3) Le problème de l'ordre de grandeur n'apparaît qu'à la fin du calcul, au moment où le résultat (ici, 5) doit être interprété comme une mesure de longueur (ici, 5 *ninda* – voir ligne 12).

On vient de voir que l'exécution du calcul ne nécessite pas un suivi des ordres de grandeurs des nombres posés sur l'abaque. Mais en même temps, ces nombres **représentent** des grandeurs. Les nombres et les opérations ont une signification géométrique, et ces significations permettent de guider le raisonnement qui gouverne le calcul²⁴. Chaque étape du calcul peut ainsi être représentée par des opérations sur des carrés et des rectangles (voir figure 7).

²⁴ Le fait que les procédures de résolution des problèmes quadratiques s'appuient sur des opérations sur des carrés et des rectangles a été montré par Jens Høyrup ; voir notamment [6].

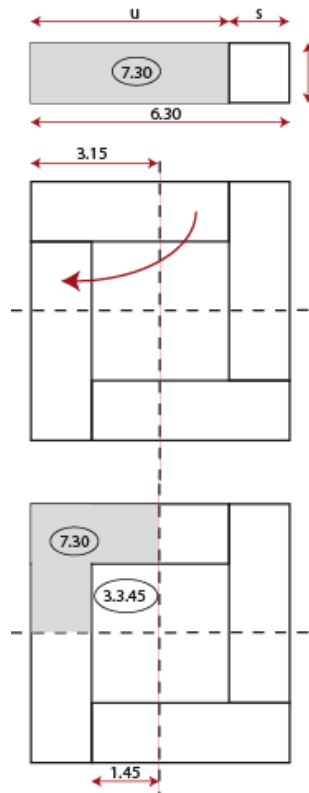


Figure 7 : représentation géométrique de la résolution du problème 7 de YBC 4663.

7- Ordre de grandeur et position des unités dans le nombre

Les exemples simples décrits dans cette brève présentation montrent que les nombres sexagésimaux positionnels des mathématiques d'époque paléo-babylonienne sont fondamentalement des instruments destinés au calcul, et non pas à la représentation des quantités. Dans le monde idéal des mathématiques d'école, seules les multiplications et les inversions agissent sur ces nombres flottants qui, de plus, sont généralement réguliers en base soixante. Les algorithmes fondamentaux de factorisation, qui permettent le calcul des inverses et des racines carrées et cubiques, doivent leur puissance et leur efficacité au caractère flottant des nombres sur lesquels ils agissent. Beaucoup de problèmes rencontrés dans les mathématiques cunéiformes, y compris dans des contextes de haute érudition, sont des problèmes de proportionnalité et se résolvent par une suite de multiplications et d'inversions. Certaines méthodes mathématiques utilisées à l'époque paléo-babylonienne sont particulièrement bien adaptées à cet univers multiplicatif : fausse position, agrandissement ou réduction des figures ou de certaines dimensions des figures, usage des coefficients.

Cependant, cet univers multiplicatif est trop limité pour résoudre certains problèmes, notamment les problèmes quadratiques, où interviennent des additions. Pour des besoins de calculs particuliers, la position des unités de calcul doit être fixée à des moments précis du calcul. Fixer la position des unités revient à fixer des règles d'usage de l'abaque. Ces règles, qui sont la traduction des situations géométriques correspondant à l'énoncé, laissent une beaucoup plus grande flexibilité au calcul que ne le font les notations modernes avec des marques telles que 0, point-vigule (;), virgule (,) ou système degré-seconde-minute étendu (°, ', ") couramment utilisées dans les publications actuelles. Dans notre système numérique décimal adossé sur un système métrique entièrement décimal, fixer les ordres de grandeurs et repérer les positions décimales relève du même mouvement. Mais il n'en n'est pas de même

dans le système savant de Mésopotamie que nous venons de décrire. Déterminer les ordres de grandeur est une chose, et cela concerne les grandeurs et la métrologie. Repérer les positions sexagésimales des nombres abstraits les uns par rapport aux autres en est une autre, et cela concerne le calcul sur abaque.

Annexes : les systèmes numériques et métrologiques

1- Nombres

a- Système S (sexagésimal additif)

	$\times 6$		$\times 10$		$\times 6$		$\times 10$		$\times 6$		$\times 10$	
\leftarrow		\leftarrow		\leftarrow		\leftarrow		\leftarrow		\leftarrow		\leftarrow
<i>šargal</i> 216000		<i>šaru</i> 36000		<i>šar</i> 3600		<i>gešu</i> 600		<i>geš</i> 60		<i>u</i> 10		<i>aš</i> ou <i>diš</i> 1

b- Fractions usuelles

1/3	1/2	2/3	5/6

c- Nombres abstraits (notation sexagésimale positionnelle)

Signes

etc.		$\times 6$		$\times 10$		$\times 6$		$\times 10$		etc.
	\leftarrow		\leftarrow		\leftarrow		\leftarrow		\leftarrow	

La notation sexagésimale positionnelle des textes cunéiformes utilise deux signes : le clou (1) et le chevron (10) – voir ci-dessus. Les « chiffres » sexagésimaux de 1 à 59 sont écrits par juxtaposition de 1 et de 10 autant de fois que nécessaire (notation décimale additive).

Exemple :

$$\left\langle\left\langle\begin{array}{c} \text{chevron} \\ \text{chevron} \\ \text{chevron} \end{array}\right\rangle\begin{array}{c} \text{clou} \\ \text{clou} \\ \text{clou} \end{array}\right\rangle = 26$$

Dans un nombre à plusieurs positions sexagésimales, un signe écrit dans une position vaut soixante fois plus que le même signe écrit dans la position précédente (i. e. placé à sa droite).






Il n'existe pas dans la notation cunéiforme de signe équivalent à notre « zéro » ou au signe que nous utilisons pour séparer la partie entière de la partie fractionnaire dans un nombre (équivalent à notre « virgule », comme dans « 3,14 »). Autrement dit, la notation cunéiforme n'indique pas la position des unités dans le nombre : le signe représente indifféremment les nombres que nous écrivons 1, 60, 3600, 1/60, etc. en base dix, ou bien 1, 1:0, 1:0:0 ou 0;1 etc. en base soixante.

Par exemple, la relation entre nombre flottants $2 \times 30 = 1$ exprime le fait que 30 est l'inverse de 2 (leur produit est « 1 »). De même $44:26:40 \times 1:21 = 1$ signifie que 44:26:40 est l'inverse de 1:21. La relation $30 \times 30 = 15$ exprime le fait que le carré (flottant) de 30 est 15, ou que la racine carrée (flottante) de 15 est 30. En toute rigueur, on devrait remplacer le signe '=' par le signe d'égalité modulaire '≡', étant entendu que, dans la relation d'équivalence dont il s'agit ici, deux nombres sont équivalents si leur quotient est une puissance de 60, d'exposant entier positif ou négatif.


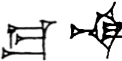


2- Unités de mesures

Les diagrammes suivants sont une représentation synthétique (en partie due à Jöran Friberg) des informations délivrées par les tables métrologiques : relations entre unités, graphèmes représentant ces unités, et nombres abstraits correspondants.





Capacités (1 *sila* ≈ 1 litre)

<i>gur</i>	←5-	<i>bariga</i>	←6-	<i>ban</i>	←10-	<i>sila</i>	←60-	<i>gin</i>
								
5		1		10		1		1






Poids (1 *gu* ≈ 30 kg)

<i>gu</i>	←60-	<i>mana</i>	←60-	<i>gin</i>	←180-	<i>še</i>
						
1		1		1		20

Surfaces (1 *sar* ≈ 36 m²) et volumes (1 *sar*-volume = 1 *sar* d'épaisseur 1 *kuš* ≈ 18 m³)

<i>gan</i>	←100-	<i>sar</i>	←60-	<i>gin</i>	←180-	<i>še</i>
						
1:40		1		1		20

Longueurs (1 *ninda* ≈ 6 m)

<i>danna</i>	←30-	<i>uš</i>	←60-	<i>ninda</i>	←12-	<i>kuš</i>	←30-	<i>šusi</i>
								
30		1		1		5		10
6		12		12		1		2
								(horizontales)
								(verticales)

3- MesoCalc, une calculatrice mésopotamienne

La représentation des nombres et des quantités est étroitement liée à la façon dont ils sont utilisés dans les calculs. Dans les documents cunéiformes, les notations ont été forgées par les anciens scribes pour des usages précis ; le but de cet article est précisément une tentative de décrire ces usages. Pour les historiens modernes, les conventions de transcription des textes cunéiformes reflètent la façon dont ils comprennent les calculs anciens. La définition de ces conventions revêt donc une grande importance, souvent sous-estimée dans les études historiques.

La lecture des textes mathématiques cunéiformes exige une grande puissance de calcul, que les outils informatiques modernes permettent de modéliser. Pour les raisons indiquées ci-dessus, les choix de notations et des principes de calcul adoptés dans cette modélisation relèvent d'un travail historique, et pas seulement informatique. L'outil *MesoCalc*, développé par Baptiste Mèlès (<http://baptiste.meles.free.fr/site/mesocalc.html>) est une tentative de mettre en œuvre un calcul automatisé aussi fidèle que possible aux pratiques anciennes. En particulier, cet outil distingue les calculs métrologiques et les calculs en notation sexagésimale positionnelle, et il met en œuvre du calcul flottant pour la multiplication et l'inversion.

Bibliographie

- [1] Chemla, Karine (ed.), *The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [2] Delnero, Paul, "Sumerian Literary Catalogues and the Scribal Curriculum", *Zeitschrift für Assyriologie und Vorderasiatische Archäologie*, 100, 2010, 32-55.
- [3] Delnero, Paul, "Inana and Ebih and the Scribal Tradition", dans *A Common Cultural Heritage: Studies on Mesopotamia and the Biblical World in Honor of Barry L. Eichler*, G. Frame (ed.), CDL Press, 2011, 123-149.
- [4] Friberg, Jöran, *A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts*, Springer, New York, 2007.
- [5] Hilprecht, Herman Vollrat, *Mathematical, Metrological and Chronological Tablets from the Temple Library of Nippur*, University of Pennsylvania, Philadelphia, 1906.
- [6] Høyrup, Jens, *Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and its Kin*, Springer, Berlin & Londres, 2002.
- [7] Neugebauer, Otto, "Zur Entstehung des Sexagesimalsystems", *Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Klasse. Neue Folge*, 13/1, 1927.
- [8] Neugebauer, Otto et Sachs, Abraham J., *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Series & American Schools of Oriental Research New Haven, 1945.
- [9] Neugebauer, Otto et Sachs, Abraham J., "Mathematical and Metrological Texts", *Journal of Cuneiform Studies*, 36, 1984, 243-251.
- [10] Proust, Christine, *Tablettes mathématiques de Nippur*, Institut Français d'Etudes Anatoliennes, De Boccard, Istanbul, 2007.
- [11] Proust, Christine, "Quantifier et calculer: usages des nombres à Nippur", *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 14, 2008, 143-209.
- [12] Proust, Christine, *Tablettes mathématiques de la collection Hilprecht*, Harrassowitz, Leipzig, 2008.
- [13] Proust, Christine, "Numerical and metrological graphemes: from cuneiform to transliteration", *Cuneiform Digital Library Journal*, 2009:1, 2009, <http://www.cdli.ucla.edu/pubs/cdlj/2009/cdlj2009_2001.html>.
- [14] Proust, Christine, "Guessing an algorithm beyond numbers displayed on a clay tablet: a sample for Old Babylonian period", dans *Explicit Versus Tacit Knowledge in Mathematics*, T. Archibald, J. Peiffer and N. Schappacher (ed.), Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach Report, 2012, 20-23.
- [15] Proust, Christine, "Interpretation of Reverse Algorithms in Several Mesopotamian Texts", dans *The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions*, K. Chemla (ed.), Cambridge University Press, 2012, 384-422.
- [16] Robson, Eleanor, "The Tablet House: A Scribal School in Old Babylonian Nippur", *Revue d'Assyriologie*, 95, 2001, 39-66.
- [17] Robson, Eleanor, "More than metrology: mathematics education in an Old Babylonian scribal school", dans *Under One Sky. Astronomy and Mathematics in the Ancient Near East*, J. M. Steele and A. Imhausen (ed.), Ugarit-Verlag, 2002, 325-365.
- [18] Sachs, Abraham J., "Reciprocals of regular sexagesimal numbers", *Journal of Cuneiform Studies*, 1, 1947, 219-240.
- [19] Thureau-Dangin, François, "L'origine du système sexagésimal", *Revue d'Assyriologie*, 25, 1928, 115-121.
- [20] Tinney, Steve, "On the curricular setting of Sumerian literature", *Iraq*, 61, 1999, 159-172.
- [21] Veldhuis, Niek, *Elementary Education at Nippur, The Lists of Trees and Wooden Objects*, Ph. D. dissertation, University of Groningen, Groningen, 1997.