



**HAL**  
open science

# STRUCTURES COMPLEXES ET PRESQUE REELLES EN PHYSIQUE, UNE APPLICATION A LA COMPLEXIFICATION DES DIMENSIONS

Jean Louis Jonot

► **To cite this version:**

Jean Louis Jonot. STRUCTURES COMPLEXES ET PRESQUE REELLES EN PHYSIQUE, UNE APPLICATION A LA COMPLEXIFICATION DES DIMENSIONS. [Rapport de recherche] Académie de Versailles. 2015. ⟨hal-01137579v3⟩

**HAL Id: hal-01137579**

**<https://hal.science/hal-01137579v3>**

Submitted on 27 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY 4.0 - Attribution - International License

**STRUCTURES COMPLEXES ET PRESQUE RÉELLES  
EN PHYSIQUE,  
UNE APPLICATION À LA COMPLEXIFICATION DES  
DIMENSIONS.**

JONOT JEAN LOUIS

ABSTRACT. Le but de cet article est de complexifier certaines structures réelles de la physique. Par exemple, si on prend un fibré réel, en le complexifiant on peut définir la notion de déplacement entre deux sections, la notion de quantité de mouvement et d'énergie des sections en déplacement l'une par rapport à l'autre. Les formules de transformations sont du même type que les changements de coordonnées en relativité pour un déplacement uniforme.

Ensuite, on caractérise les champs en corde, en utilisant le théorème de redressement d'un champ. Les champs en corde sont les champs complexifiés

$$X + iT$$

pour lesquels la dérivée de Lie de  $X$  par rapport à  $T$  est de la forme

$$\mathcal{L}_T(X) = \alpha X + \beta T.$$

La dernière partie est un procédé de complexification des dimensions. On plonge l'univers  $\Omega$  dans une variété  $\Lambda$  de grande dimension, munie d'une structure presque réelle  $J$  qui est intégrable. Une pseudo-métrique de Lorentz peut être définie sur  $\Omega$  à partir d'une métrique riemannienne. Pour cette pseudo-métrique les feuilles espace et les feuilles chronologiques se coupent orthogonalement.

1. COMPLEXIFICATION DES FIBRÉS HILBERTIENS RÉELS

On veut complexifier les fibrés hilbertiens réels. Un fibré hilbertien réel est un fibré

$$\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{H})$$

dont la fibre  $\mathcal{H}$  est espace de hilbert réel et la base est l'univers  $\Omega$ . Chaque fibre  $E_\omega(\zeta)$  est muni d'un produit scalaire

$$\langle \bullet | \bullet \rangle_\omega$$

pour lequel l'application

$$\omega \rightarrow \langle s(\omega) | t(\omega) \rangle_\omega$$

est  $C^\infty$  pour toutes sections  $s$  et  $t$  de  $\Gamma(\zeta)$ .

Le complexifié de  $\zeta$

$$\zeta \otimes \mathbb{C} \approx \zeta \times \zeta \approx \zeta + i\zeta$$

où le produit par un complexe est défini par

$$(\lambda + i\mu)(x, t) = (\lambda x - \mu t, \lambda t + \mu x)$$

---

*Date:* 30/03/2015.

*Key words and phrases.* Structure presque complexe; champs en corde; crochet de Lie; tenseur de Nijenhuis.

pour toutes sections  $x$  et  $t$  de  $\Gamma(\zeta)$  et toutes  $C^\infty$ -applications  $\lambda, \mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . L'opération de conjugaison est une section de  $\text{Hom}(\zeta \otimes \mathbb{C})$  définie par

$$\overline{(x, t)} = (x, -t), \quad x \text{ et } t \in \Gamma(\zeta)$$

et l'endomorphisme de fibré définissant la structure complexe est

$$J(x, t) = (-t, x) \quad [1].$$

On pose

$$s = x + it,$$

où  $x$  et  $t$  sont des sections de  $\Gamma(\zeta)$  par l'identification  $x = (x, \mathbf{o})$  et  $t = (\mathbf{o}, t)$  où  $\mathbf{o}$  représente la section nulle de  $\zeta$ .

**Definition 1.** Une section  $s = x + it$  de  $\Gamma(\zeta \otimes \mathbb{C})$  est une complexification de la section réelle  $x$ .

**Definition 2.** Une section complexe  $s \in \Gamma(\zeta \otimes \mathbb{C})$  est une  $\varphi$ -section sur  $O$  si

$$\varphi \otimes t = x \text{ sur } O.$$

Cela revient à dire qu'il existe une section locale  $\varphi$  de  $\text{Hom}(\zeta)$  définie sur  $O$  telle que pour tout  $\omega \in O$

$$\varphi(\omega) : E_\omega(\zeta) \rightarrow E_\omega(\zeta), \quad \varphi(\omega)(t(\omega)) = x(\omega).$$

L'application est un paramétrage qui donne la variation de la section espace  $x$  par rapport à la section temps  $t$ . On peut comparer cet opérateur au paramétrage d'une courbe. Une section  $d$ -dimensionnelle sur  $O \subset \Omega$  est une section locale  $(s_1, s_2, \dots, s_d)$  de  $\Gamma(\zeta \otimes \mathbb{C})^d$ , telle que

$$\{s_1(\omega), s_2(\omega), \dots, s_d(\omega)\}$$

est une famille libre de  $E_\omega(\zeta) \otimes \mathbb{C}$ , pour tout  $\omega$  appartenant à un ouvert  $O$ . Si  $s \in \text{Vect}\{s_1, s_2, \dots, s_d\}$  alors

$$s = z^\mu s_\mu, \quad z^\mu \in \mathbb{C}$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$s = x + it$$

avec

$$x = \text{Re}(z^\mu) \mathcal{R}(s_\mu) - \text{Im}(z^\mu) \mathcal{I}(s_\mu),$$

est une section espace et

$$t = \text{Im}(z^\mu) \mathcal{R}(s_\mu) + \text{Re}(z^\mu) \mathcal{I}(s_\mu)$$

est une section temps où

$$s_\mu = \mathcal{R}(s_\mu) + i\mathcal{I}(s_\mu).$$

**Definition 3.** Soit  $s'$  une autre section de  $\text{Vect}\{s_1, s_2, \dots, s_d\}$

$$s' = x' + it',$$

un  $\{\varphi, \psi\}$ -déplacement sur  $O$  de  $s'$  par rapport à  $s$  est la donnée de deux sections locales  $\varphi$  et  $\psi$  sur  $O$  de  $\text{Hom}(\zeta)$  telles que la condition suivante est réalisée

$$x' = \mathbf{o} \implies x = \varphi \otimes t \text{ et } x = \mathbf{o} \implies x' = \psi \otimes t'$$

où  $\mathbf{o}$  est la section nulle et

$$(\varphi \otimes t)(\omega) = \varphi(\omega)(t(\omega)), \quad \forall \omega \in O.$$

On dit que les sections  $s'$  et  $s$  sont en déplacement uniforme sur  $O$ , l'une par rapport à l'autre, s'il existe un  $\{\varphi, \psi\}$ -déplacement sur un ouvert  $O$  de  $\Omega$ , de  $s'$  par rapport à  $s$  tel que

$$\psi = -\varphi,$$

où  $\varphi$  est une section locale de  $\text{GL}(\zeta)$  définies sur l'ouvert  $O$ , c'est-à-dire que sur chaque fibre  $E_\omega(\zeta)$ ,  $\varphi(\omega) \in \text{GL}(E_\omega(\zeta))$ .

**Remark 1.**  $\varphi$  est la vitesse de  $s'$  par rapport à  $s$ .

Dans tout cette partie, on impose une condition d'analyticité des déplacements uniformes, dans le sens suivant, toutes les tranformations considérées sont analytiques par rapport à la vitesse  $\varphi$ .

**Theorem 1.** Si  $s$  et  $s'$  sont en déplacement uniforme dans un fibré  $\zeta$  qui vérifie les principes de relativité sur chaque fibre de  $\zeta$ , alors

$$\begin{cases} x' = (\mathbf{1} - c^{-2}\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}(x - \varphi t) \\ t' = (\mathbf{1} - c^{-2}\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}(t - c^{-1}\varphi x) \end{cases},$$

où  $c$  est la norme maximale des vitesses  $\varphi$  et  $\mathbf{1}$  est la section identique de  $\text{Hom}(\zeta)$ .

*Proof.* Si on prend une famille libre de sections  $\{s_1, s_2, \dots, s_d\}$  sur un ouvert  $O$  de trivialisat  de  $\zeta$ , une section  $s = x + it$  de  $\zeta \otimes \mathbb{C}$  s'écrit

$$x = x^\mu s_\mu \text{ et } t = t^\mu s_\mu$$

on pose

$$\mathbf{x} = \text{Tr}(x^1, x^2, \dots, x^d) \text{ et } \mathbf{t} = \text{Tr}(t^1, t^2, \dots, t^d).$$

On veut calculer  $\mathbf{x}'$  et  $\mathbf{t}'$  en fonction de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{t}$ , on impose que les propriétés de l'espace-temps d'Einstein s'étendent aux fibres complexifiées du fibré  $\zeta \otimes \mathbb{C}$ . On note encore,  $\varphi$  et  $\psi$  les matrices des endomorphismes  $\varphi$  et  $\psi$  dans  $\{s_1, s_2, \dots, s_d\}$ . Si l'homog nit  de l'espace-temps reste vraie sur le complexifié de  $\zeta$ , cela permet d'écrire

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{t}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix},$$

avec  $\mathbf{a}_{ij} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  et

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{t}' \end{pmatrix}.$$

La première condition implique que  $\mathbf{a}_{ij} \in \text{GL}(\mathbb{R}^d)$  et

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} (\mathbf{a}_{11} - \mathbf{a}_{12}\mathbf{a}_{22}^{-1}\mathbf{a}_{21})^{-1} & -(\mathbf{a}_{11} - \mathbf{a}_{12}\mathbf{a}_{22}^{-1}\mathbf{a}_{21})^{-1}\mathbf{a}_{12}\mathbf{a}_{22}^{-1} \\ -(\mathbf{a}_{22} - \mathbf{a}_{21}\mathbf{a}_{11}^{-1}\mathbf{a}_{12})^{-1}\mathbf{a}_{21}\mathbf{a}_{11}^{-1} & (\mathbf{a}_{22} - \mathbf{a}_{21}\mathbf{a}_{11}^{-1}\mathbf{a}_{12})^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La relation

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{a}_{11}\mathbf{x} + \mathbf{a}_{12}\mathbf{t} \\ \mathbf{t}' = \mathbf{a}_{21}\mathbf{x} + \mathbf{a}_{22}\mathbf{t} \end{cases} \quad (1.1)$$

permet d'écrire, si  $\mathbf{x}' = \mathbf{o}$

$$\mathbf{x} = \varphi\mathbf{t} \text{ et } (\mathbf{a}_{11}\varphi + \mathbf{a}_{12})\mathbf{t} = \mathbf{o}$$

pour tout  $\mathbf{t} \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ .

$$\mathbf{a}_{12} = -\mathbf{a}_{11}\varphi \text{ et } \mathbf{x}' = \mathbf{a}_{11}(\mathbf{x} - \varphi\mathbf{t}).$$

Si  $\mathbf{x} = o$  alors  $\mathbf{x}' = \psi\mathbf{t}'$  et  $\mathbf{x}' = -\mathbf{a}_{11}\varphi\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{t}' = \mathbf{a}_{22}\mathbf{t}$ . On en déduit que

$$-\mathbf{a}_{11}\varphi\mathbf{t} = \psi\mathbf{a}_{22}\mathbf{t}$$

pour tout  $\mathbf{t} \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$  et

$$-\mathbf{a}_{11}\varphi = \psi\mathbf{a}_{22}.$$

On a

$$-\psi^{-1}\mathbf{a}_{11}\varphi = \mathbf{a}_{22}.$$

En particulier si  $\varphi$  commute avec  $\mathbf{a}_{11}$ , on a

$$-\psi^{-1}\varphi\mathbf{a}_{11} = \mathbf{a}_{22}$$

et

$$\mathbf{a}_{11} = \mathbf{a}_{22}.$$

L'hypothèse, " $\varphi$  commute avec  $\mathbf{a}_{11}$ " est vraie car la matrice  $\mathbf{a}_{11}$  ne dépend que de  $\varphi$  et donc, en utilisant le caractère analytique des déplacements, il existe une fonction  $f$  de classe  $C^\infty$ , que l'on peut supposer développable en série entière, de rayon de convergence  $R > 0$ , notée  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ , pour laquelle si  $\|\varphi\| < R$ ,

$$\mathbf{a}_{11} = f(\varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi^n.$$

On pose,  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{11}$  et  $\mathbf{b} = -\mathbf{a}^{-1}\mathbf{a}_{12}$ . Le système 1.1 s'écrit

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{a}(\mathbf{x} - \varphi\mathbf{t}) \\ \mathbf{t}' = \mathbf{a}(\mathbf{t} - \mathbf{b}\mathbf{x}) \end{cases}.$$

Si on prend trois sections  $s$ ,  $s'$  et  $s''$  en déplacement uniforme de matrices vitesse  $\varphi$  de  $s'$  par rapport à  $s$ ,  $\varphi'$  de  $s''$  par rapport à  $s'$  et  $\varphi''$  de  $s''$  par rapport à  $s$  alors,

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{a}(\mathbf{x} - \varphi\mathbf{t}) \\ \mathbf{t}' = \mathbf{a}(\mathbf{t} - \mathbf{b}\mathbf{x}) \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathbf{x}'' = \mathbf{a}'(\mathbf{x}' - \varphi'\mathbf{t}') \\ \mathbf{t}'' = \mathbf{a}'(\mathbf{t}' - \mathbf{b}'\mathbf{x}') \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \mathbf{x}'' = \mathbf{a}''(\mathbf{x} - \varphi''\mathbf{t}) \\ \mathbf{t}'' = \mathbf{a}''(\mathbf{t} - \mathbf{b}''\mathbf{x}) \end{cases},$$

en combinant

$$\begin{cases} \mathbf{x}'' = \mathbf{a}'(\mathbf{a}(\mathbf{x} - \varphi\mathbf{t}) - \varphi'\mathbf{a}(\mathbf{t} - \mathbf{b}\mathbf{x})) \\ = \mathbf{a}'\mathbf{a}((\mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1}\varphi'\mathbf{a}\mathbf{b})\mathbf{x} - (\varphi + \mathbf{a}^{-1}\varphi'\mathbf{b})\mathbf{t}) \\ \mathbf{t}'' = \mathbf{a}'(\mathbf{a}(\mathbf{t} - \mathbf{b}\mathbf{x}) - \mathbf{b}'\mathbf{a}(\mathbf{x} - \varphi\mathbf{t})) \\ = \mathbf{a}'\mathbf{a}((\mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}'\mathbf{a}\varphi)\mathbf{t} - (\mathbf{b} + \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}'\mathbf{a})\mathbf{x}) \end{cases}.$$

Si  $\|\mathbf{a}^{-1}\varphi'\mathbf{a}\mathbf{b}\| < 1$  et  $\|\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}'\mathbf{a}\varphi\| < 1$ , on peut inverser

$$\mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1}\varphi'\mathbf{a}\mathbf{b} \text{ et } \mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}'\mathbf{a}\varphi,$$

alors

$$\begin{cases} \mathbf{x}'' = \mathbf{a}'\mathbf{a}(\mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1}\varphi'\mathbf{a}\mathbf{b})\left(\mathbf{x} - (\mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1}\varphi'\mathbf{a}\mathbf{b})^{-1}(\varphi + \mathbf{a}^{-1}\varphi'\mathbf{b})\mathbf{t}\right) \\ \mathbf{t}'' = \mathbf{a}'\mathbf{a}(\mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}'\mathbf{a}\varphi)\left(\mathbf{t} - (\mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}'\mathbf{a}\varphi)^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}'\mathbf{a})\mathbf{x}\right) \end{cases}.$$

Le principe de relativité implique que

$$\mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1}\varphi'\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}'\mathbf{a}\varphi,$$

c'est-à-dire,  $\varphi' \mathbf{a} \mathbf{b} = \mathbf{b}' \mathbf{a} \varphi$ . Si  $\mathbf{a} \mathbf{b} = \mathbf{b} \mathbf{a}$  alors  $\varphi' \mathbf{b} = \mathbf{b}' \varphi$ . Les matrices  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont des matrices fonctions développables en série entière de  $\varphi$ , elles commutent. On pose  $\mathbf{k} = \mathbf{b}' (\varphi')^{-1} = \mathbf{b}^{-1} \varphi$ , cette matrice est indépendante du choix des matrices vitesse  $\varphi'$  et  $\varphi$ . On peut écrire

$$\varphi'' = (\mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1} \varphi' \mathbf{a} \mathbf{b})^{-1} (\varphi + \mathbf{a}^{-1} \varphi' \mathbf{b}),$$

$$\mathbf{b}'' = (\mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1} \mathbf{b}' \mathbf{a} \varphi)^{-1} (\mathbf{b} + \mathbf{a}^{-1} \mathbf{b}' \mathbf{a})$$

et

$$\mathbf{a}'' = \mathbf{a}' \mathbf{a} (\mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1} \varphi' \mathbf{a} \mathbf{b}) = \mathbf{a}' \mathbf{a} (\mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1} \mathbf{b}' \mathbf{a} \varphi)$$

et avec  $\mathbf{b} = \mathbf{k} \varphi$ ,  $\mathbf{b}' = \mathbf{k} \varphi'$  et  $\mathbf{b}'' = \mathbf{k} \varphi''$ .

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{a}_+ (\mathbf{x} - \varphi \mathbf{t}) \\ \mathbf{t}' = \mathbf{a}_+ (\mathbf{t} - \mathbf{k} \varphi \mathbf{x}) \end{cases},$$

où  $\mathbf{a}_+ = \mathbf{a}(\varphi)$ . La section  $s$  a pour matrice vitesse  $-\varphi$  par rapport à  $s'$ , on en déduit

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{a}_- (\mathbf{x}' + \varphi \mathbf{t}') \\ \mathbf{t} = \mathbf{a}_- (\mathbf{t}' + \mathbf{k} \varphi \mathbf{x}') \end{cases},$$

avec  $\mathbf{a}_- = \mathbf{a}(-\varphi)$ . Si le postulat d'isotropie reste vrai cela implique que  $\mathbf{a}_+ = \mathbf{a}_- = \mathbf{a}$ .

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{a}(\mathbf{x}' + \varphi \mathbf{t}') = \mathbf{a}(\mathbf{a}(\mathbf{x} - \varphi \mathbf{t}) + \varphi \mathbf{a}(\mathbf{t} - \mathbf{k} \varphi \mathbf{x})) \\ \quad = \mathbf{a}^2 (\mathbf{I}_d - \mathbf{a}^{-1} \varphi \mathbf{a} \mathbf{k} \varphi) \mathbf{x} \\ \mathbf{t} = \mathbf{a}(\mathbf{t}' + \mathbf{k} \varphi \mathbf{x}') = \mathbf{a}(\mathbf{a}(\mathbf{t} - \mathbf{k} \varphi \mathbf{x}) + \mathbf{k} \varphi \mathbf{a}(\mathbf{x} - \varphi \mathbf{t})) \\ \quad = \mathbf{a}^2 ((\mathbf{I}_d - \mathbf{a}^{-1} \mathbf{k} \varphi \mathbf{a} \varphi) \mathbf{t} - (\mathbf{k} \varphi - \mathbf{a}^{-1} \mathbf{k} \varphi \mathbf{a}) \mathbf{x}) \end{cases}.$$

On a  $\mathbf{a}^2 (\mathbf{I}_d - \mathbf{a}^{-1} \varphi \mathbf{a} \mathbf{k} \varphi) = \mathbf{I}_d$ ,  $\mathbf{k} \varphi - \mathbf{a}^{-1} \mathbf{k} \varphi \mathbf{a} = \mathbf{O}_d$  et  $\mathbf{a}^2 (\mathbf{I}_d - \mathbf{a}^{-1} \mathbf{k} \varphi \mathbf{a} \varphi) = \mathbf{I}_d$ . Donc,

$$\mathbf{a}^2 = (\mathbf{I}_d - \varphi \mathbf{k} \varphi)^{-1} = (\mathbf{I}_d - \mathbf{k} \varphi^2)^{-1}$$

et  $\mathbf{k} \varphi = \varphi \mathbf{k}$  quelque soit  $\varphi \in \text{Gl}(\mathbb{R}^d)$ , elle est donc de la forme  $\mathbf{k} = \lambda \mathbf{I}_d$ ,

$$\mathbf{a}^2 = (\mathbf{I}_d - \lambda \varphi^2)^{-1}.$$

Pour que  $\mathbf{I}_d - \lambda \varphi^2$  soit inversible, il faut et il suffit que  $\|\varphi\| < \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}$ .

Si  $m$  est une matrice quelconque, on appelle racine carrée de  $m$ , une matrice  $n$  si elle existe qui vérifie  $n^2 = m$  et on pose  $n = m^{\frac{1}{2}}$ . On en déduit

$$\mathbf{a} = \pm (\mathbf{I}_d - \mathbf{k} \varphi^2)^{-\frac{1}{2}},$$

or si  $\varphi = \mathbf{O}_d$ ,  $\mathbf{a} = \mathbf{I}_d$  alors  $\mathbf{a} = (\mathbf{I}_d - \mathbf{k} \varphi^2)^{-\frac{1}{2}}$ . De plus  $\lambda > 0$ , sinon  $\lambda = 0$ ,  $\mathbf{a} = \mathbf{I}_d$ ,

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \varphi \mathbf{t} \\ \mathbf{t}' = \mathbf{t} \end{cases},$$

on retombe sur des transformations du type Galilée étendues au fibré complexe, qui sont incompatibles sur chaque fibre réelle avec les fondements de l'électromagnétisme et si  $\lambda < 0$ , supposons que  $\varphi' = \mu' \mathbf{I}_d$ ,  $\varphi = \mu \mathbf{I}_d$ , alors  $\varphi'' = \frac{\mu + \mu'}{1 - |\lambda| \mu \mu'} \mathbf{I}_d$ , pour  $\mu > 0$ ,  $\mu' > 0$  et  $\mu \mu' < -\frac{1}{\lambda}$ ,  $\frac{\mu + \mu'}{1 + \lambda \mu \mu'} < 0$ , ce qui est impossible. Nécessairement,  $\lambda > 0$ , on pose  $c = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ , c'est la "constante" de la lumière qui est une valeur limite pour la norme des matrices vitesse.

La matrice de changement de coordonnées s'écrit dans  $\mathbb{R}^{2d}$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} (\mathbf{I}_d - c^{-2}\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} & -(\mathbf{I}_d - c^{-2}\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}\varphi \\ -c^2(\mathbf{I}_d - c^{-2}\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}\varphi & (\mathbf{I}_d - c^{-2}\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Remarquons que si  $f(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$  avec

$$a_0 = 1 \text{ et } a_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(k + \frac{1}{2}\right), \quad n \geq 1$$

pour  $\|x\| < 1$  et

$$\mathbf{a} = (\mathbf{I}_d - c^{-2}\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c^{-2n} \varphi^{2n}$$

pour  $\|\varphi\| < c$ . De plus, la matrice  $\mathbf{Q}$  existe même si  $\varphi$ , n'est pas inversible. Il suffit que  $\|\varphi\| < c$  pour que  $\mathbf{Q}$  soit définie. Si  $s' = x' + it'$  et  $s = x + it$  sont des sections de  $\zeta$ , en déplacement uniforme, de vitesse  $\varphi$  telle que  $\|\varphi\| < c$  alors

$$\begin{cases} x' = (\mathbf{1} - c^{-2}\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}(x - \varphi t) \\ t' = (\mathbf{1} - c^{-2}\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}(t - c^{-1}\varphi x) \end{cases},$$

où  $c$  est une constante positive pour laquelle la matrice vitesse de la section lumière est  $c\mathbf{1}$  où  $\mathbf{1}$  est la section identique.  $\square$

On en déduit

$$\begin{aligned} s' &= (\mathbf{1} - c^{-2}\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}(s - \varphi(t + ic^{-1}x)) \\ &= (\mathbf{1} - c^{-2}\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}(s - ic^{-1}\varphi(x - ict)). \end{aligned}$$

Si on normalise  $c$  à 1,

$$s' = (\mathbf{1} - \varphi^2)^{-\frac{1}{2}}(s - i\varphi\bar{s}).$$

La quantité de mouvement de la section  $s$  peut être définie par la section

$$\mathbf{p} = \varphi \otimes s,$$

où

$$\mathbf{p}(\omega) = (\varphi \otimes s)(\omega) = \varphi(\omega)(s(\omega)), \quad \omega \in \Omega.$$

**Remark 2.** 1) Par analogie à la relativité restreinte classique, la section  $\mathcal{E}$  correspondant à l'énergie d'une section  $s$  par rapport à la section  $s_0$  s'écrit

$$\mathcal{E} = c^2 s,$$

où  $s = (\mathbf{1} - c^{-2}\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}(s_0 - ic^{-1}\varphi(x_0 - ict_0))$  et  $c$  est la norme maximale des vitesses  $\varphi$ .

2) On suppose que le fibré  $\zeta$  hilbertien réel est un fibré relativiste, dans le sens suivant, la propriété d'homogénéité, le principe de relativité et le postulat d'isotropie sur chaque fibre réelle  $E_\omega(\zeta)$  sont vérifiés et qu'ils s'étendent à la fibre complexifiée

$$E_\omega(\zeta) \otimes \mathbb{C}.$$

3) Si  $\varphi$  définit une structure  $\pm$ -presque complexe sur  $\zeta$ , c'est-à-dire

$$\varphi^2 = \pm \mathbf{1},$$

$\varphi^2 = \mathbf{1}$  la structure est dite presque réelle et  $\varphi^2 = -\mathbf{1}$  la structure est dite presque complexe, alors tous les changements de coordonnées analytiques dans le repère  $\{s_1, s_2, \dots, s_d\}$  de  $\zeta$ , de  $s$  à  $s'$  en déplacement uniforme et de vitesse  $\varphi$  sont de la forme

$$\begin{cases} x' = (1 \mp c^{-2})^{-\frac{1}{2}} (x - \varphi t) \\ t' = (1 \mp c^{-2})^{-\frac{1}{2}} (t - c^{-1}\varphi x) \end{cases}$$

et

$$s' = (1 \mp c^{-2})^{-\frac{1}{2}} (s - ic^{-1}\varphi(x - ict)),$$

si  $c$  est normalisé à 1, dans le cas presque complexe on a

$$s' = \frac{1}{\sqrt{2}} (s - i\varphi\bar{s})$$

où  $\bar{s}$  est le conjugué de  $s$ .

## 2. LES CHAMPS EN CORDE DU COMPLEXIFIÉ DU FIBRÉ TANGENT

Dans ce qui suit, on munit l'univers  $\Omega$  d'une métrique riemannienne  $g$ . Le fibré  $\zeta = (T\Omega, \pi, \Omega, \mathbb{R}^4)$  muni de la métrique  $g$  est un fibré hermitien réel, les sections sont les champs de  $\Omega$ . Si

$$X + iT \text{ et } X' + iT'$$

sont en déplacement uniforme de vitesse  $V$ , alors

$$\begin{cases} X' = (\mathbf{I} - c^{-2}V^2)^{-\frac{1}{2}} (X - VT) \\ T' = (\mathbf{I} - c^{-2}V^2)^{-\frac{1}{2}} (T - c^{-1}VX) \end{cases}$$

où  $\mathbf{I}$  est la section identique de  $\text{GL}(\zeta)$  et  $V$  est une section de  $\text{GL}(\zeta)$ . La quantité de mouvement d'un champ complexe

$$Z = X + iT$$

est

$$P = Vm$$

où  $m$  est une section de  $\zeta$ , dite section de masse. La quantité

$$\sqrt{g(m, m)}$$

représente la masse du champ complexe  $Z$ . Le champ  $Z'$  en déplacement uniforme de vitesse  $V$  est

$$\begin{aligned} Z' &= (\mathbf{I} - c^{-2}V^2)^{-\frac{1}{2}} (Z - ic^{-1}V(X - icT)) \\ &= (\mathbf{I} - c^{-2}V^2)^{-\frac{1}{2}} \left( Z - iV \frac{(1-c)Z + (1+c)\bar{Z}}{2c} \right). \end{aligned}$$

Un champ en corde est un champ complexe local

$$Z = X + iT$$

pour lequel

$$\dim(\text{Vect}\{X, T\}) = 2$$

et

$$\mathcal{L}_T(X) = \alpha X + \beta T$$

pour deux  $C^\infty$ -applications  $\alpha$  et  $\beta$  définies localement. La fonction d'onde associée est

$$\theta = \alpha + i\beta,$$

on peut consulter [3] pour une représentation géométrique de ces champs.

**Lemma 1.** *Si  $Z = X + iT$  et  $Z' = X' + iT$  sont des champs en corde de champ imaginaire  $T$  alors  $Z'' = (X + X') + iT$  et  $Z = \lambda X + iT$  sont des champs en corde.*

*Proof.* On a

$$\begin{aligned} [T, \lambda X] &= \lambda [T, X] + L_T(\lambda) X \\ &= \lambda \beta T + (\lambda \alpha + L_T(\lambda)) X \end{aligned}$$

si

$$[T, X] = \alpha X + \beta T.$$

□

**Remark 3.** *La fonction d'onde associée au champ en corde  $Z = \lambda X + iT$  est*

$$\lambda \alpha - L_T(\lambda) + i\lambda \beta = -L_T(\lambda) + \lambda(\alpha + i\beta),$$

*si la fonction d'onde du champ en corde  $X + iT$  est  $\phi$  alors la fonction d'onde du champ en corde  $\lambda X + iT$  est*

$$\psi = -L_T(\lambda) + \lambda \phi,$$

*où  $L_T$  est la dérivée de Lie le long du champ  $T$ .*

Si  $X \in \Gamma^\infty(\Omega)$  alors en coordonnées locales  $X = X^\mu \partial_\mu$ , où  $X^\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$  est une  $C^\infty$ -application. Si  $T = T^\mu \partial_\mu$  alors  $[T, X] = L^\nu \partial_\nu$  avec,

$$L^\nu = T^\mu (\partial_\mu X^\nu) - X^\mu (\partial_\mu T^\nu).$$

On cherche à déterminer les champs  $X$  tels que

$$\mathcal{L}_T(X) = [T, X] = \alpha X + \beta T,$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des  $C^\infty$ -applications définies sur un ouvert  $\mathcal{V}$  et  $T$  est un champ fixé non nul sur  $\mathcal{V}$ . Localement, on a

$$T^\mu (\partial_\mu X^\nu) - X^\mu (\partial_\mu T^\nu) = \alpha \delta_{\mu\nu} X^\mu + \beta \delta_{\mu\nu} T^\mu, \quad (2.1)$$

pour tout  $\nu = 0, 1, 2, 3$ .

Si  $\{\partial_\nu\}$  est le "local frame" associé à la carte  $\mathcal{V}$ , les champs  $X = X^\nu \partial_\nu$  pour lesquels

$$X + i\partial_\sigma$$

est un champ en corde sont les champs qui vérifient le système d'équations différentielles

$$\alpha \delta_{\sigma\nu} + \beta X^\nu + \partial_\sigma X^\nu = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Pour un champ  $T$ , le théorème de redressement permet de construire une carte  $\varphi$  pour laquelle le "local frame" associé vérifie

$$T = \partial_0 \text{ et } T\varphi(\partial_0) = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Un champ local  $X$  s'écrit dans cette carte

$$X = X^\mu \partial_\mu,$$

le champ complexe

$$X + iT$$

est un champ en corde si et seulement si il existe deux  $C^\infty$ -applications  $\alpha$  et  $\beta$  définies sur la carte  $\varphi$  telles que

$$\alpha\delta_{0\nu} + \beta X^\nu + \partial_0 X^\nu = 0, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

On peut écrire ce système sous la forme

$$\begin{aligned} \beta X^0 + \partial_T X^0 + \alpha &= 0 \\ \beta X^\nu + \partial_T X^\nu &= 0, \nu = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

avec

$$X = X^0 T + X^\nu \partial_\nu.$$

L'existence de solution s'obtient en transportant ce système dans  $\mathbb{R}^4$  par l'isomorphisme de carte  $T\varphi : T\mathcal{V} \rightarrow T\mathbb{R}^4$ , ce système s'écrit

$$\frac{\partial \mathbf{X}^\nu}{\partial t} + \beta_\varphi \mathbf{X}^\nu + \alpha_\varphi \delta_{0\nu} = 0$$

avec

$$\beta_\varphi = \beta \circ \varphi^{-1}, \alpha_\varphi = \alpha \circ \varphi^{-1} \text{ et } \mathbf{X}^\nu = X^\nu \circ \varphi^{-1}.$$

On a

$$\mathbf{X}^\nu = k_\nu \exp\left(-\int \beta_\varphi dt\right)$$

avec

$$k_\nu = -\delta_{0\nu} \int \alpha_\varphi \exp\left(-\int \beta_\varphi dt\right) dt + C_\nu$$

où  $C_\nu$  est une fonction indépendante de  $t$ , elle ne dépend que de  $x, y, z$ . On en déduit le théorème suivant. Ce théorème permet de déterminer le champ en corde à partir de sa fonction d'onde.

**Theorem 2.** *Les champs  $X$  pour lesquels  $X + iT$  est un champ en corde pour  $T \neq \mathbf{o}$  dans une carte*

$$\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^4$$

dont le "local frame" associé  $\{\partial_\nu, \nu = 0, 1, 2, 3\}$  vérifie

$$T = \partial_0$$

avec

$$T\varphi \otimes \partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}$$

et dont la fonction d'onde associée sur  $\mathcal{V}$  est

$$\theta = \alpha + i\beta,$$

sont de la forme

$$X^\nu \partial_\nu$$

où

$$X^\nu = \mathbf{X}^\nu \circ \varphi$$

et

$$\mathbf{X}^\nu = k_\nu \exp\left(-\int \beta_\varphi dt\right)$$

avec

$$k_\nu = -\delta_{0\nu} \int \alpha_\varphi \exp\left(-\int \beta_\varphi dt\right) dt + C_\nu, C_\nu = C_\nu(x, y, z),$$

et

$$\alpha_\varphi = \alpha \circ \varphi^{-1}, \beta_\varphi = \beta \circ \varphi^{-1}.$$

Supposons que sur l'univers  $\Omega$  existe une structure  $\pm$ -presque complexe  $J$ , si le champ complexe

$$X + iT$$

est en déplacement uniforme par rapport à

$$X_0 + iT_0$$

alors on a

$$\begin{cases} X = (1 \mp c^{-2})^{-\frac{1}{2}} (X_0 - JT_0) \\ T = (1 \mp c^{-2})^{-\frac{1}{2}} (T_0 - c^{-1}JX_0) \end{cases} .$$

**Proposition 1.** *Avec les hypothèses précédentes, si*

$$X_0 + iJT_0$$

*est un champ en corde alors*

$$X + iJT$$

*est un champ en corde.*

*Proof.* On a

$$\dim(\text{Vect}\{X, JT\}) = \dim(\text{Vect}\{X_0, JT_0\}) = 2$$

et

$$\begin{aligned} [X, JT] &= (1 \mp c^{-2})^{-\frac{1}{2}} [X_0 - JT_0, JT_0 + c^{-1}X_0] \\ &= (1 \mp c^{-2})^{-\frac{1}{2}} (1 + c^{-1}) [X_0, JT_0] \\ &= (1 \mp c^{-2})^{-\frac{1}{2}} (1 + c^{-1}) (\alpha X_0 + \beta JT_0) \\ &= (1 \mp c^{-2})^{-\frac{1}{2}} (1 + c^{-1}) (\alpha + \beta) X + (1 \pm c^{-2})^{-\frac{1}{2}} (1 + c^{-1}) (\beta - c^{-1}\alpha) JT. \end{aligned}$$

□

**Remark 4.** *Si la fonction d'onde de  $X_0 + iJT_0$  est  $\alpha + i\beta$  alors la fonction d'onde de  $X + iJT$  est*

$$(1 \mp c^{-2})^{-\frac{1}{2}} (1 + c^{-1}) ((\alpha + \beta) + i(\beta - c^{-1}\alpha))$$

*si le champ  $X + iT$  est en déplacement uniforme le long de la structure  $\pm$ -complexe, de vitesse  $J$ .*

### 3. COMPLEXIFICATION DES DIMENSIONS

L'idée de la complexification est de coupler à chaque dimension d'espace une dimension temps et à chaque dimension temps une dimension d'espace de telle façon que les couples espace-temps s'identifient à une dimension complexe, dont la partie réelle représente une dimension espace et la partie imaginaire une dimension temps. On plonge l'univers  $\Omega$  dans une variété  $\Lambda$ , de dimension  $2n$  avec  $n \geq 4$  et on identifie  $\Omega$  à son image dans  $\Lambda$ . En chaque événement  $\omega \in \Omega$ , il existe une carte  $U$  de  $\omega$  dans  $\Lambda$ , notée  $\Phi$  telle que

$$\Phi(\Omega \cap U) \subset \{(x, 0, y, 0, z, 0, 0, t, 0, \dots, 0) : x, y, z, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n,$$

où l'identification de  $\mathbb{R}^{2n}$  à  $\mathbb{C}^n$  est donnée par

$$\theta(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n) = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \dots, x_n + iy_n).$$

Le triplet  $(x, y, z)$  représente les dimensions spatiales et  $t$  la dimension temps, avec le plongement précédent on en déduit que  $x, y$  et  $z$  sont les parties réelles de dimensions complexes et  $t$  est la partie imaginaire d'une dimension complexe. Supposons que la variété  $\Lambda$  soit munie d'une structure presque réelle  $J$ , c'est-à-dire, d'une section de  $\text{Hom}(\zeta)$  telle que

$$J^2 = \mathbf{1}$$

où

$$\zeta = (T\Lambda, \pi, \Lambda)$$

est le fibré tangent à  $\Lambda$ , l'espace total  $T\Lambda$  se scinde en deux sous-fibrés

$$T\Lambda = T^+\Lambda \oplus T^-\Lambda$$

où  $T^+\Lambda$  est le sous-fibré propre associé à la valeur propre 1 et  $T^-\Lambda$  est le sous-fibré propre associé à la valeur propre  $-1$ . Les champs de  $\Lambda$  à valeurs dans  $T^+\Lambda$ , respectivement  $T^-\Lambda$ , sont les champs espace, respectivement les champs temps de  $\Lambda$ . On a

$$\dim T^+\Lambda = \dim T^-\Lambda = n.$$

Tout champ  $X$  de  $\Lambda$  se décompose de façon unique sous la forme

$$X = X^+ + X^-$$

où

$$X^+ = \frac{1}{2}(X + JX)$$

est un champ espace et

$$X^- = \frac{1}{2}(X - JX)$$

est un champ temps. Si  $J$  est intégrable, on peut feuilletter  $\Lambda$  en deux feuilletages d'espace et de temps, notés respectivement

$$\mathcal{F}^+ \text{ et } \mathcal{F}^-,$$

chaque feuille  $\mathbf{F}^+ \in \mathcal{F}^+$  et  $\mathbf{F}^- \in \mathcal{F}^-$  ont pour espace tangent en  $\lambda \in \mathbf{F}^+ \cap \mathbf{F}^-$ , respectivement,  $T_\lambda^+\Lambda$  et  $T_\lambda^-\Lambda$  munis de leur structure d'espace vectorielle réelle. Ces feuilles sont transversales. On munit  $\Lambda$  d'une métrique riemannienne  $g$ . Cette métrique riemannienne  $g$  induit une métrique pseudo-riemannienne  $h$  ayant pour forme quadratique

$$\mathbf{Q}_h(X^+ + X^-) = \mathbf{Q}_g(X^+) - \mathbf{Q}_g(X^-),$$

pour tout  $X^+ \in \Gamma^\infty(T^+\Lambda)$  et  $X^- \in \Gamma^\infty(T^-\Lambda)$ .

Si on munit  $\Lambda$  d'une métrique riemannienne  $g$  pour laquelle

$$J \in \text{SO}(T\Lambda, g), \quad g(J \otimes X, J \otimes Y) = g(X, Y)$$

alors  $\Gamma^\infty(T^+\Lambda)$  et  $T \in \Gamma^\infty(T^-\Lambda)$  sont orthogonaux pour la métrique  $g$ . Pour la pseudo-métrique  $h$ , un champ espace  $X$  vérifie  $\mathbf{Q}_h(X) \geq 0$  et un champ temps  $\mathbf{Q}_h(T) \leq 0$ . Pour la pseudo-métrique  $h$ , les feuilles espace et les feuilles temps se coupent orthogonalement,

$$\begin{aligned} h(X^+, X^-) &= \frac{1}{2}(\mathbf{Q}_h(X^+ + X^-) - \mathbf{Q}_h(X^+) - \mathbf{Q}_h(X^-)) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{Q}_g(X^+) - \mathbf{Q}_g(X^-) - \mathbf{Q}_g(X^+) + \mathbf{Q}_g(X^-)) = 0. \end{aligned}$$

Les feuilles espace et temps se coupent orthogonalement pour la pseudo-métrie  $h$  sans l'hypothèse  $J \in SO(T\Lambda, g)$ . Cette pseudo-métrie induit une métrie de Lorentz sur l'univers  $\Omega$  si la dimension des feuilles espace est 3 et 1 pour les feuilles temps. On peut donc définir un champ chronologique stable local sur  $\Omega$  comme dans [4].

Si  $\omega \in \Omega \subset \Lambda$ ,  $T_\omega \Omega$  s'identifie à un sous-espace vectoriel de  $T_\omega \Lambda$ . Le scindage

$$T_\omega \Lambda = T_\omega^+ \Lambda \oplus T_\omega^- \Lambda$$

induit un scindage

$$T_\omega \Omega = T_\omega^+ \Omega \oplus T_\omega^- \Omega.$$

Si  $\zeta^\pm = (\cup_{\omega \in \Omega} T_\omega^\pm \Omega, \pi, \Omega)$  sont des sous-fibrés de  $\zeta = (T\Omega, \pi, \Omega)$  alors ils sont complètement intégrables. Les champs  $X^\pm$  et  $Y^\pm$  de  $\Gamma^\infty(\zeta^\pm)$  vérifient

$$[X^\pm, Y^\pm] \in \Gamma^\infty(\zeta^\pm)$$

grâce à l'intégrabilité de la structure presque réelle  $J$ . Chaque événement  $\omega$  appartient à une feuille espace et une feuille temps de  $\Omega$ , une feuille espace est une sous-variété  $\mathbf{F}^+ \subset \Omega$  telle que  $T(\mathbf{F}^+) \subset T^+ \Lambda$  et une feuille temps  $\mathbf{F}^- \subset \Omega$  est une sous-variété de  $\Omega$  vérifiant  $T(\mathbf{F}^-) \subset T^- \Lambda$ . On peut feuilleter en espace et en temps le voisinage d'un événement avec

$$\dim(\mathbf{F}^+) + \dim(\mathbf{F}^-) = 4.$$

Lorsque  $\dim(\mathbf{F}^+) = 3$  et  $\dim(\mathbf{F}^-) = 1$ , on est dans l'espace relativiste d'Einstein, dans cette situation on a un champ chronologique stable  $T$ . On rappelle qu'un champ chronologique  $T$  est stable en  $\omega \in \Omega$  si il existe une carte  $U$  en  $\omega$  telle que si

$$T = t^\nu \partial_\nu$$

pour le local frame associé à la carte  $U$  on ait

$$\partial_k(t^j h_{ij}) = \partial_i(t^j h_{kj}), \forall i, \forall k$$

où

$$h_{ij} = h(\partial_i, \partial_j),$$

et  $h$  est la métrie de Lorentz induite sur  $\Omega$ .  $T$  est stable sur l'ouvert  $W \subset \Omega$  si  $T$  est stable en chaque point  $\omega \in \Omega$ .

**Definition 4.** Une structure presque complexe  $K$  sur  $\Lambda$  est instable pour  $J$  si

$$K(T^+ \Lambda) \subset T^- \Lambda \text{ et } K(T^- \Lambda) \subset T^+ \Lambda,$$

si le crochet de Poisson vérifie

$$\{K, J\} = 0$$

alors  $K$  est instable pour  $J$ . On dit que  $K$  est stable si

$$[K, J] = 0$$

alors

$$K(T^+ \Lambda) \subset T^+ \Lambda \text{ et } K(T^- \Lambda) \subset T^- \Lambda.$$

Pour une structure presque complexe  $K$ , une condition nécessaire et suffisante pour que  $K$  induise une structure complexe sur  $\Lambda$  est que le tenseur de Nijenhuis

$$\mathcal{N}(X, Y) = [X, Y] + K[KX, Y] + K[X, KY] - [KX, KY]$$

soit identiquement nul, c'est le théorème de Newlander-Nirenberg [1] ou [5].

On pose pour un champ  $X$ ,

$$X = X^+ + X^-$$

$X^+ \in T^+\Lambda$  et  $X^- \in T^-\Lambda$ , pour une structure presque complexe  $K$  vérifiant

$$K(X^+) = -X^-, K(X^-) = X^+,$$

$K$  définit une structure presque complexe instable sur  $\Lambda$ . On peut calculer le tenseur de Nijenhuis,

$$\mathcal{N}(X^+, Y^+) = [X^+, Y^+] - K[X^-, Y^+] - K[X^+, Y^-] - [X^-, Y^-]$$

$$\mathcal{N}(X^-, Y^-) = [X^-, Y^-] + K[X^+, Y^-] + K[X^+, Y^-] - [X^+, Y^+]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(X^+, Y^-) &= [X^+, Y^-] - [X^-, Y^-]^+ - [X^+, Y^+]^- + [X^-, Y^+] \\ &= [X^+, Y^-] + [X^-, Y^+] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(X^-, Y^+) &= [X^-, Y^+] - [X^+, Y^+]^- - [X^-, Y^-]^+ + [X^+, Y^-] \\ &= [X^-, Y^+] + [X^+, Y^-] \end{aligned}$$

car  $J$  est intégrable, en sommant

$$\mathcal{N}(X, Y) = 2([X^+, Y^-] + [X^-, Y^+])$$

que l'on peut écrire en posant

$$X^+ = \frac{1}{2}(X + JX) \text{ et } X^- = \frac{1}{2}(X - JX)$$

$$\mathcal{N}(X, Y) = \frac{1}{2}([X, Y] - [JX, JY]).$$

Si  $K$  est intégrable on a

$$[JX, JY] = [X, Y].$$

**Theorem 3.** *Une structure presque réelle  $J$ , qui est intégrable induit une structure holomorphe sur  $\Lambda$  si*

$$[JX, JY] = [X, Y], \quad (3.1)$$

pour tous les champs  $X$  et  $Y$  de  $\Lambda$ .

**Remark 5.** 1) *La structure holomorphe définie est la complexification des dimensions de  $\Lambda$ ,*

2) *L'équation 3.1 est équivalente à*

$$[JX, Y] = [X, JY],$$

on dit que la structure presque réelle  $J$  sur  $\Lambda$ , commute dans le crochet de Lie.

On peut élargir la notion de complexification des dimensions de l'univers  $\Omega$ , en le plongeant dans un univers  $\Lambda$  sur lequel il existe une section  $J$  de  $\text{Hom}(T\Lambda)$  diagonalisable, c'est-à-dire, pour laquelle il existe des  $C^\infty$ -applications

$$\varsigma_\nu : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}, \nu = 1, \dots, k$$

telles que

$$\mathcal{T}^\nu \Lambda = (\cup_{\lambda \in \Lambda} \text{Ker}(J(\lambda) - \varsigma_\nu(\lambda) \text{Id}_{T_\lambda \Lambda}), \pi_\nu, \Lambda)$$

est un sous-fibré de

$$\mathcal{T}\Lambda = (T\Lambda, \pi, \Lambda)$$

avec  $\mathcal{T}\Lambda$  est la somme de Whitney des  $\mathcal{T}^\nu\Lambda$ ,

$$\mathcal{T}\Lambda = \bigoplus_{\nu=1}^k \mathcal{T}^\nu\Lambda.$$

**Definition 5.** *J est intégrable si pour tous champs  $X, Y \in \Gamma(\mathcal{T}^\nu\Lambda)$  alors  $[X, Y] \in \Gamma(\mathcal{T}^\nu\Lambda)$  pour tous les indices  $\nu = 1, \dots, k$ .*

On peut définir une famille de feuilletages  $\{\mathcal{F}_\nu\}$  locaux, deux à deux transversaux de  $\Lambda$  qui induisent des feuilletages locaux de  $\Omega$  au voisinage de  $\omega$  car

$$\omega \rightarrow T_\omega\Omega \cap \mathcal{T}_\omega^\nu\Lambda$$

est complètement intégrable sous les hypothèses  $J$  intégrable et

$$T^\nu\Omega = \bigcup_{\omega \in \Omega} T_\omega\Omega \cap \mathcal{T}_\omega^\nu\Lambda$$

est un sous-fibré de  $T\Omega$ .

**Definition 6.** *Une structure presque complexe  $K$  est  $\sigma$ -stable s'il existe une permutation  $\sigma$  de  $\{1, 2, \dots, k\}$  telle que*

$$K(\mathcal{T}^\nu\Lambda) \subset \mathcal{T}^{\sigma(\nu)}\Lambda,$$

pour tout  $\nu \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

Soit  $K$ , la section des endomorphismes de  $T\Lambda$  définie par

$$(K \circ p_\nu) \otimes X = (-1)^\nu p_{\sigma(\nu)} \otimes X,$$

où  $p_\nu$  est la section des projections sur  $\mathcal{T}^\nu\Lambda$  parallèlement à

$$\mathcal{T}^1\Lambda \oplus \mathcal{T}^2\Lambda \oplus \dots \oplus \widehat{\mathcal{T}^\nu\Lambda} \oplus \dots \oplus \mathcal{T}^k\Lambda.$$

La section  $K$  est une structure presque complexe si

$$\sigma(\nu) + \nu \equiv 1 \pmod{2}$$

pour tout  $\nu \in \{1, 2, \dots, k\}$ . On suppose que  $K$  est une structure presque complexe et on calcule le tenseur de Nijenhuis. Si on pose

$$X_\nu = p_\nu \otimes X$$

on a

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(X_\nu, Y_\mu) &= [X_\nu, Y_\mu] + (-1)^\nu K[X_{\sigma(\nu)}, Y_\mu] \\ &\quad + (-1)^\mu K[X_\nu, Y_{\sigma(\mu)}] + (-1)^{\nu+\mu+1} [X_{\sigma(\nu)}, Y_{\sigma(\mu)}] \end{aligned}$$

en sommant

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(X, Y) &= \sum_{\nu, \mu=1}^k [X_\nu, Y_\mu] + \sum_{\nu, \mu=1}^k (-1)^\nu K[X_{\sigma(\nu)}, Y_\mu] \\ &\quad + \sum_{\nu, \mu=1}^k (-1)^\mu K[X_\nu, Y_{\sigma(\mu)}] + \sum_{\nu, \mu=1}^k (-1)^{\nu+\mu+1} [X_{\sigma(\nu)}, Y_{\sigma(\mu)}] \\ &= \sum_{\nu, \mu=1}^k ((-1)^\nu K[X_{\sigma(\nu)}, Y_\mu] + (-1)^\mu K[X_\nu, Y_{\sigma(\mu)}]) \\ &= K \left( \sum_{\nu, \mu=1}^k ((-1)^\nu [X_{\sigma(\nu)}, Y_\mu] + (-1)^\mu [X_\nu, Y_{\sigma(\mu)}]) \right), \end{aligned}$$

en prenant pour convention  $X_\tau = X_\rho$  si  $\tau \equiv \rho \pmod{k}$ . Le tenseur de Nijenhuis est nul si et seulement si

$$\sum_{\nu, \mu=1}^k ((-1)^\nu [X_{\sigma(\nu)}, Y_\mu] + (-1)^\mu [X_\nu, Y_{\sigma(\mu)}]) = o$$

en utilisant les projections  $p_\nu$

$$\sum_{\nu, \mu=1}^k ((-1)^\nu [p_{\sigma(\nu)} \otimes X, p_\mu \otimes Y] + (-1)^\mu [p_\nu \otimes X, p_{\sigma(\mu)} \otimes Y]) = o,$$

on a plusieurs structures complexes sur  $\Lambda$  qui préservent la section des endomorphismes diagonalisables de  $\text{Hom}(T\Lambda)$ .

**Theorem 4.** *Si  $J$  est une section d'endomorphismes diagonalisables de  $\text{Hom}(T\Lambda)$  et soit  $\sigma$  une permutation de  $\{1, 2, \dots, k\}$ , où  $k$  est le nombre de fonctions propres de  $J$ , telle que*

$$\sigma(\nu) + \nu \equiv 1 \pmod{2}$$

*et  $J$  est intégrable alors  $J$  induit une structure complexe sur  $\Lambda$  si et seulement si le tenseur*

$$\mathcal{T}(X, Y) = \sum_{\nu, \mu=1}^k ((-1)^\nu [p_{\sigma(\nu)} \otimes X, p_\mu \otimes Y] + (-1)^\mu [p_\nu \otimes X, p_{\sigma(\mu)} \otimes Y])$$

*est identiquement nul où  $p_\nu$  est la section des projections sur  $\mathcal{T}^\nu \Lambda$  parallèlement à*

$$\mathcal{T}^1 \Lambda \oplus \mathcal{T}^2 \Lambda \oplus \dots \oplus \widehat{\mathcal{T}^\nu \Lambda} \oplus \dots \oplus \mathcal{T}^k \Lambda.$$

**Remark 6.** *Ces notions peuvent s'étendre aux structures de fibré réel*

$$\zeta = (E, \pi, \Lambda, \mathcal{H})$$

*dont la fibre  $\mathcal{H}$  est un espace de vectoriel réel de dimension finie. On note  $\mathcal{R}(\zeta)$  l'ensemble des structures presque réelles  $J$  de  $\zeta$ , c'est-à-dire, les sections d'endomorphismes du fibré  $\zeta$  pour lesquelles*

$$J^2 = \mathbf{1}.$$

*On a*

$$\dim \zeta = 2n,$$

*et si  $s \in \zeta$*

$$s_+ = \frac{1}{2}(s + J \otimes s) \in \Gamma(\text{Ker}(J - \mathbf{1})) \text{ et } s_- = \frac{1}{2}(s - J \otimes s) \in \Gamma(\text{Ker}(J + \mathbf{1}))$$

*où  $\mathbf{1}(\lambda) = \text{Id}_{E_\lambda(\zeta)}$  et  $\text{Ker}(J \pm \mathbf{1})$  sont les fibrés associés aux valeurs propres  $\mp 1$ . Chaque section  $s$  s'écrit*

$$s = s_+ + s_-$$

*et l'application de conjugaison*

$$\mathcal{Q} : s_+ \rightarrow s_-$$

*est un isomorphisme sur chaque fibre de  $E_\lambda(\text{Ker}(J - \mathbf{1}))$  sur  $E_\lambda(\text{Ker}(J + \mathbf{1}))$ .*

## 4. CONCLUSION

Dans la première partie, on s'intéresse à la notion de déplacement d'une section d'un fibré par rapport à une autre. Si le fibré est relativiste, on montre que la norme des matrices vitesse est inférieure à une constante  $c$ . Par analogie avec la relativité restreinte on définit la notion de quantité de mouvement et d'énergie d'une section par rapport à une autre comme des sections du fibré complexifié.

On fait un retour aux champs en corde et on donne un procédé permettant de calculer tous ces champs pour une fonction d'onde fixée. Ensuite, on propose de donner une méthode de complexification des dimensions de l'univers  $\Omega$ . Pour étudier cet univers, on le plonge dans une variété  $\Lambda$ , de grande dimension, qui est munie d'une structure presque réelle  $J$  et d'une métrique riemannienne  $g$ . Cela permet de définir une métrique de Lorentz sur  $\Omega$ . On peut ainsi feuilleter l'univers en feuille espace et temps. Chaque dimension espace peut être définie comme la partie réelle d'une dimension complexe et chaque dimension temps peut être décrite comme la partie imaginaire d'une dimension complexe de  $\Lambda$ . L'intérêt de cette complexification est de symétriser les dimensions d'espace et de temps. Ce procédé a été proposé en théorie des cordes et en relativité complexe. Les dimensions inobservables existent dans la variété  $\Lambda$ , c'est un artifice mathématique pour faire des calculs dans  $\Omega$ . La question que l'on peut se poser est la suivante, la variété  $\Lambda$  a-t-elle un sens physique?

## REFERENCES

- [1] G. Dloussky, "Variétés riemanniennes, variétés hermitiennes" (2008)
- [2] L. Hormander, "An introduction to complex analysis in several variables" (Third Edition, 1990)
- [3] J.L.Jonot, "Sur les champs physiques de divergence nulle et les champs en cordes." [hal.archives-ouvertes.fr/hal-01072257/](http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01072257/)(document 2015)
- [4] J.L.Jonot, "Sur l'équation de Schödinger et l'équation de Dirac-Weyl-Fock" [hal.archives-ouvertes.fr/hal-00998279v5/](http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00998279v5/)document (2014)
- [5] J. J. Kohn, "Harmonic Integrals on Strongly Pseudo-Convex Manifolds, I and II" (Annals of Math, 1963)

*E-mail address:* `jean-louis.jonot@ac-versailles.fr`