



**HAL**  
open science

# SUR LA TORSION DANS LA COHOMOLOGIE DES VARIÉTÉS DE SHIMURA DE KOTTWITZ-HARRIS-TAYLOR

Pascal Boyer

► **To cite this version:**

Pascal Boyer. SUR LA TORSION DANS LA COHOMOLOGIE DES VARIÉTÉS DE SHIMURA DE KOTTWITZ-HARRIS-TAYLOR. 2015. hal-01137273v1

**HAL Id: hal-01137273**

**<https://hal.science/hal-01137273v1>**

Preprint submitted on 30 Mar 2015 (v1), last revised 31 Oct 2016 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# SUR LA TORSION DANS LA COHOMOLOGIE DES VARIÉTÉS DE SHIMURA DE KOTTWITZ-HARRIS-TAYLOR

par

Pascal Boyer

---

**Résumé.** — Lorsque le niveau en  $l$  d'une variété de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor n'est pas maximal, sa cohomologie à coefficients dans un  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -système local n'est en général pas libre. Afin d'obtenir des énoncés d'annulation de la torsion, on localise en un idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de l'algèbre de Hecke. Nous prouvons alors deux énoncés d'annulation de la torsion de ces localisés, le premier reposant sur l'existence d'une place où les paramètres de Satake modulo  $l$  associés à  $\mathfrak{m}$  vérifient une certaine hypothèse explicite, et le deuxième s'exprimant en termes d'une propriété vérifiée par la  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation galoisienne  $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$  associée à  $\mathfrak{m}$ .

**Abstract (Torsion in the cohomology of Kottwitz-Harris-Taylor Shimura varieties)**

When the level at  $l$  of a Shimura variety of Kottwitz-Harris-Taylor is not maximal, its cohomology with coefficients in a  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -local system isn't in general torsion free. In order to prove torsion freeness results of the cohomology, we localize at a maximal ideal  $\mathfrak{m}$  of the Hecke algebra. We then prove two sort of results of torsion freeness, the first resting on the existence of a place where the Satake parameters modulo  $l$  associated to  $\mathfrak{m}$ , verify an explicit condition, and the second supposing a certain property on the galois  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -representation  $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$  associated to  $\mathfrak{m}$ .

## Introduction

Dans [9], les auteurs prouvent un résultat très général sur la trivialité de la torsion dans la cohomologie d'une variété de Shimura PEL compacte à valeur dans un  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -système local. Pour obtenir un résultat aussi général, les données doivent vérifier un certain nombre d'hypothèses

— sur le système local qui est supposé très régulier au sens de la définition 7.18 de [9],

---

**Classification mathématique par sujets (2000).** — 14G22, 14G35, 11G09, 11G35, 11R39, 14L05, 11G45, 11Fxx.

**Mots clefs.** — Variétés de Shimura, cohomologie de torsion, idéal maximal de l'algèbre de Hecke, localisation de la cohomologie, représentation galoisienne.

L'auteur remercie l'ANR pour son soutien dans le cadre du projet PerCoLaTor 14-CE25.

— sur  $l$  qui doit être bon au sens de la définition 2.3 de [9] et donc suffisamment grand relativement au poids du système local considéré et  
 — sur le niveau en  $l$  supposé maximal, i.e. la variété de Shimura est non ramifiée en  $l$ .  
 Ces hypothèses sont loin d'être superflues comme pourra le noter le lecteur en considérant, par exemple, un niveau parahorique en  $l$  et un système local régulier  $V_{\bar{\mathbb{Z}}_l, \xi}$ . Il est bien connu qu'alors

- la cohomologie de  $V_{\bar{\mathbb{Z}}_l, \xi} \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{Q}}_l$  est concentrée en degré médian et que donc son  $H^0$  est nul ;
- le  $H^0$  de  $V_{\bar{\mathbb{Z}}_l, \xi} \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{F}}_l$  correspond aux vecteurs invariants sous le parahorique en  $l$ . Ainsi, par définition de la notion de sous-groupe parahorique, cet espace des invariants est non nul et donc  $H^0$  est non nul.

De ces deux faits, on en déduit que la torsion du  $H^1$  est non nulle. En ce qui concerne le système local trivial, considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow H^1\left(G, H^0(X, \bar{\mathbb{F}}_l)\right) \longrightarrow H^1(Y, \bar{\mathbb{F}}_l) \longrightarrow H^1(X, \bar{\mathbb{F}}_l)^G$$

où  $X \rightarrow Y$  est un revêtement galoisien de groupe de Galois  $G$ , que l'on applique dans le cas où

- $X$  est une variété de Shimura géométriquement connexe de sorte que  $H^0(X, \bar{\mathbb{F}}_l) \simeq \bar{\mathbb{F}}_l$ ,
- $G$  est de la forme  $(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^e$  et
- $H^1(Y, \bar{\mathbb{Q}}_l)$  est nul.

Ainsi comme  $H^1((\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^e, \bar{\mathbb{F}}_l)$  est non nul, on en déduit que la torsion de  $H^2(Y, \bar{\mathbb{Z}}_l)$  est non nulle. L'exemple le plus simple pour obtenir ces conditions consiste à prendre une variété de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor pour  $U(2, 1)$  et deux niveaux intermédiaires pour que  $G$  soit de la forme voulue, cf. [11] théorème 3.4.

À la vue de ces exemples, il semble clair que si on veut une annulation de la torsion lorsque le niveau en  $l$  augmente, il est raisonnable de localiser la cohomologie en un idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de l'algèbre de Hecke agissant sur la cohomologie. D'après [10], est associée à  $\mathfrak{m}$  une  $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation galoisienne  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$  et on cherche des conditions sur  $\mathfrak{m}$  ou sur  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$ , pour que la localisation de la cohomologie en  $\mathfrak{m}$  soit sans torsion. Des résultats dans ce sens sont obtenus dans [5], via la théorie de Hodge  $l$ -adique de la fibre spéciale en  $l$  de la variété de Shimura dans le cas où celle-ci est de Kottwitz-Harris-Taylor.

Dans ce travail on s'intéresse à la même question mais à partir de l'étude de la cohomologie de la fibre spéciale en une place au dessus de  $p \neq l$  en utilisant les calculs explicites de [2]. On montre alors deux cas de nullité de la torsion dans la cohomologie d'une variété de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor  $X_I$  de niveau  $I$  et de dimension relative  $d - 1$ , à coefficients dans un système local  $V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}$  associé à une représentation irréductible algébrique  $\xi$ , selon que la condition porte, théorème 4.3, sur les paramètres de Satake modulo  $l$ , i.e. sur  $\mathfrak{m}$  directement, ou, théorème 4.13, sur la représentation galoisienne  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$  associée.

**Théorème A** *Supposons qu'il existe une place  $v$  non ramifiée pour les données, cf. la notation 2.6, telle que le multi-ensemble des paramètres de Satake modulo  $l$  en  $v$  associé à*

$\mathfrak{m}$  ne contient aucun sous-multi-ensemble de la forme  $\{\alpha, q\alpha\}$  où  $q$  est le cardinal du corps résiduel en  $v$ . Alors pour tout  $i$ , les localisés  $H^i(X_{I, \bar{\eta}}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$  sont sans torsion.

**Théorème B** *Supposons qu'il existe un sous-corps  $k \subset \bar{\mathbb{F}}_l$  tel que  $SL_n(k) \subset \bar{\rho}_{\mathfrak{m}}(G_F) \subset \bar{\mathbb{F}}_l^\times GL_n(k)$ . Alors si  $l \geq d + 2$ , les localisés  $H^i(X_{I, \bar{\eta}}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$  sont sans torsion pour tout  $i$ .*

*Remarque :* le théorème B est l'une des formes que peut prendre le théorème 4.13 qui utilise une hypothèse tirée de [5] et qui est aussi vérifiée si  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$  est induit d'un caractère du groupe de Galois d'une extension  $K/F$  galoisienne cyclique.

En ce qui concerne la torsion, nous obtenons deux types de contraintes pour son existence :

- son apparition dans le localisé en  $\mathfrak{m}$  du  $i$ -ème groupe de cohomologie, implique des restrictions sur le multi-ensemble des paramètres de Satake modulo  $l$  en toute place non ramifiée, cf. la proposition 4.6.
- Si on considère le plus petit groupe de cohomologie où le localisé en  $\mathfrak{m}$  n'est pas libre, alors pour une sous-représentation galoisienne irréductible de cette torsion, l'action du Frobenius en toute place non ramifiée n'admet pas beaucoup de valeurs propres distinctes, cf. la proposition 4.10. En particulier si on cherche des représentations galoisiennes irréductibles sans valeur propre multiple pour l'action des Frobenius, leur dimension est majorée explicitement, cf. le corollaire 4.11, selon le principe que plus on s'éloigne du degré médian, plus la majoration est contraignante.

Pour l'essentiel, les arguments reposent sur les calculs explicites de [2] des groupes de cohomologie des strates de Newton ; ces résultats sont rappelés au §3.

Les résultats de ce papier et notamment le théorème 4.3 devrait, à l'instar du corollaire 3.5.1 de [5], permettre de prouver la partie poids de Serre de la conjecture de [7] pour  $U(d - 1, 1)$ , tout comme [5] le fait pour  $U(2, 1)$ . Il faudrait pour ce faire généraliser les résultats de [4].

### Table des matières

Introduction.....	1
1. Géométrie de quelques variétés de Shimura unitaires.....	3
2. Représentations automorphes cohomologiques.....	6
3. Rappels sur la $\mathbb{Q}_l$ -cohomologie d'après [2].....	8
4. Localisation de la cohomologie.....	10
Références.....	15

## 1. Géométrie de quelques variétés de Shimura unitaires

Dans la suite  $l$  et  $p$  désigneront deux nombres premiers distincts. On fixe aussi, par paresse, un isomorphisme  $\iota : \bar{\mathbb{Q}}_l \simeq \mathbb{C}$ . Soit  $F = F^+ E$  un corps CM avec  $E/\mathbb{Q}$  quadratique imaginaire, dont on fixe un plongement réel  $\tau : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$ . Pour  $v$  une place de  $F$ , on notera

- $F_v$  le complété du localisé de  $F$  en  $v$ ,

- $\mathcal{O}_v$  l'anneau des entiers de  $F_v$ ,
- $\varpi_v$  une uniformisante et
- $q_v$  le cardinal du corps résiduel  $\kappa(v) = \mathcal{O}_v/(\varpi_v)$ .

**1.1. Hypothèse.** — *On supposera dans la suite que  $l$  est non ramifié dans  $E$ .*

Soit  $B$  une algèbre à division centrale sur  $F$  de dimension  $d^2$  telle qu'en toute place  $x$  de  $F$ ,  $B_x$  est soit décomposée soit une algèbre à division et on suppose  $B$  munie d'une involution de seconde espèce  $*$  telle que  $*|_F$  est la conjugaison complexe  $c$ . Pour  $\beta \in B^{*-1}$ , on note  $\sharp_\beta$  l'involution  $x \mapsto x^\sharp_\beta = \beta x^* \beta^{-1}$  et  $G/\mathbb{Q}$  le groupe de similitudes, noté  $G_\tau$  dans [6], défini pour toute  $\mathbb{Q}$ -algèbre  $R$  par

$$G(R) \simeq \{(\lambda, g) \in R^\times \times (B^{op} \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \text{ tel que } gg^\sharp_\beta = \lambda\}$$

avec  $B^{op} = B \otimes_{F,c} F$ . Si  $x$  est une place de  $\mathbb{Q}$  décomposée  $x = yy^c$  dans  $E$  alors

$$G(\mathbb{Q}_x) \simeq (B_y^{op})^\times \times \mathbb{Q}_x^\times \simeq \mathbb{Q}_x^\times \times \prod_{z_i} (B_{z_i}^{op})^\times,$$

où, en identifiant les places de  $F^+$  au dessus de  $x$  avec les places de  $F$  au dessus de  $y$ ,  $x = \prod_i z_i$  dans  $F^+$ .

**1.2. Notation.** — *Pour  $x$  une place de  $\mathbb{Q}$  décomposée dans  $E$  et  $z$  une place de  $F^+$  au dessus de  $x$ , on notera  $G(F_z)$  le facteur  $(B_z^{op})^\times$  de  $G(\mathbb{Q}_x)$  et  $G(\mathbb{A}^z)$  pour  $G(\mathbb{A})$  auquel on ôte le facteur  $(B_z^{op})^\times$ . De même pour  $T$  un ensemble de places de  $\mathbb{Q}$  et  $x \in T$ , on notera  $T - \{z\}$  pour désigner la réunion des places de  $T$  distinctes de  $x$  avec les places de  $F$ , autres que  $z$ , au dessus de  $x$ .*

Dans [6], les auteurs justifient l'existence d'un  $G$  comme ci-dessus tel qu'en outre :

- si  $x$  est une place de  $\mathbb{Q}$  qui n'est pas décomposée dans  $E$  alors  $G(\mathbb{Q}_x)$  est quasi-déployé ;
- les invariants de  $G(\mathbb{R})$  sont  $(1, d - 1)$  pour le plongement  $\tau$  et  $(0, d)$  pour les autres.

On fixe à présent un nombre premier  $p = uu^c$  décomposé dans  $E$  tel qu'il existe une place  $v$  de  $F$  au dessus de  $u$  avec

$$(B_v^{op})^\times \simeq GL_d(F_v).$$

Pour tout sous-groupe compact  $U^p$  de  $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$  et  $m = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ , on pose

$$U^v(m) = U^p \times \mathbb{Z}_p^\times \times \prod_{i=2}^r \text{Ker}(\mathcal{O}_{B_{v_i}}^\times \longrightarrow (\mathcal{O}_{B_{v_i}}/\mathcal{P}_{v_i}^{m_i})^\times).$$

**1.3. Notation.** — *Soit  $\mathcal{I}$  l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts « assez petits » de  $G(\mathbb{A}^\infty)$ , de la forme  $U^v(m)K_v$ . Pour  $I = U^v(m)K_v \in \mathcal{I}$ , on note  $I^v = U^v(m)GL_d(\mathcal{O}_v)$ .*

**1.4. Définition.** — Pour  $U^v \ll \text{assez petit} \gg^{(1)}$  et  $K_v$  un sous-groupe compact ouvert de  $GL_d(F_v)$ , soit  $X_{U^v(m)K_v}/\text{Spec } \mathcal{O}_v \ll \text{la variété de Shimura dite de Kottwitz-Harris-Taylor associée à } G \gg$  et construite dans [6].

*Remarque :*  $X_{U^v(m)K_v}$  est un schéma projectif sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_v$  tel que quand  $U$  varie, les  $X_{U^v(m)K_v}$  forment un système projectif dont les morphismes de transition sont finis et plats. Quand  $m_1 = m'_1$  alors  $X_{U^v(m)} \rightarrow X_{U^v(m')}$  est étale.

Le système projectif

$$(X_{U^v(m)K_v})_{U^p, m, K_v}$$

est naturellement muni d'une action de  $G(\mathbb{A}^\infty) \times \mathbb{Z}$  telle que l'action d'un élément  $w_v$  du groupe de Weil  $W_v$  de  $F_v$  est donnée par celle de  $-\deg(w_v) \in \mathbb{Z}$ , où  $\deg = \text{val} \circ \text{Art}^{-1}$  où  $\text{Art}^{-1} : W_v^{ab} \simeq F_v^\times$  est l'isomorphisme d'Artin qui envoie les Frobenius géométriques sur les uniformisantes.

**1.5. Notations.** — (cf. [1] §1.3) Pour  $I \in \mathcal{I}$ , on note :

- $X_{I, s_v}$  la fibre spéciale de  $X_I$  en  $v$  et  $X_{I, \bar{s}_v} := X_{I, s_v} \times \text{Spec } \bar{\mathbb{F}}_p$  la fibre spéciale géométrique.
- Pour tout  $1 \leq h \leq d$ ,  $X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}$  (resp.  $X_{I, \bar{s}_v}^{=h}$ ) désigne la strate fermée (resp. ouverte) de Newton de hauteur  $h$ , i.e. le sous-schéma dont la partie connexe du groupe de Barsotti-Tate en chacun de ses points géométriques est de rang  $\geq h$  (resp. égal à  $h$ ).

**1.6. Notations.** — Pour tout  $1 \leq h < d$ , nous utiliserons les notations suivantes :

$$i_{h+1} : X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}, \quad j^{\geq h} : X_{I, \bar{s}_v}^{=h} \hookrightarrow X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}.$$

*Remarque :* par la suite, lors de l'introduction de nouvelles notations relativement à des inclusions géométriques, nous conserverons la convention qu'une lettre  $i$  (resp.  $j$ ) désigne une inclusion fermée (resp. ouverte).

Notons  $\mathcal{A}$  la variété abélienne universelle sur  $X_{I^v, \bar{s}_v}$  puis  $\mathcal{G} := \text{diag}(1, 0, \dots, 0) \cdot \mathcal{A}[v^\infty]$  le groupe de Barsotti-Tate de dimension 1 associé. Rappelons que  $\mathcal{L} := (\text{Lie } \mathcal{G})^\vee$  est un fibré en droite ample sur  $X_{I^v, \bar{s}_v}$ .

**1.7. Théorème.** — (cf. [8]) Pour tout  $1 \leq h \leq d$ , il existe un invariant de Hasse généralisé

$$H_h \in H^0(X_{I^v, \bar{s}_v}^{\geq h}, \mathcal{L}^{(p^h-1)})$$

qui est inversible sur  $X_{I^v, \bar{s}_v}^{=h}$  et possède un zéro simple sur  $X_{I^v, \bar{s}_v}^{\geq h+1}$ .

---

1. tel qu'il existe une place  $x$  pour laquelle la projection de  $U^v$  sur  $G(\mathbb{Q}_x)$  ne contienne aucun élément d'ordre fini autre que l'identité, cf. [6] bas de la page 90

*Remarque* : en particulier  $X_{\Gamma_v, \bar{s}_v}^{=h}$  est affine et régulière.

Pour tout  $1 \leq h < d$ , les strates  $X_{\Gamma_v^n, \bar{s}_v}^{=h}$  sont géométriquement induites sous l'action du parabolique  $P_{h,d}(F_v)$  au sens où il existe un sous-schéma fermé  $X_{\Gamma_v^n, \bar{s}_v, 1}^{=h}$  muni d'une action par correspondances de  $G(\mathbb{A}^{\infty, v}) \times GL_{d-h}(F_v) \times \mathbb{Z}$  tel que :

$$X_{\Gamma_v^n, \bar{s}_v}^{=h} \simeq X_{\Gamma_v^n, \bar{s}_v, 1}^{=h} \times^{P_{h,d}(\mathcal{O}_v/(\varpi_v^n))} GL_d(\mathcal{O}_v/(\varpi_v^n)).$$

**1.8. Notation.** — On note  $X_{\Gamma_v^n, \bar{s}_v, 1}^{\geq h}$  l'adhérence de  $X_{\Gamma_v^n, \bar{s}_v, 1}^{=h}$  dans  $X_{\Gamma_v^n, \bar{s}_v}^{\geq h}$  et

$$j_1^{\geq h} : X_{\Gamma_v^n, \bar{s}_v, 1}^{=h} \hookrightarrow X_{\Gamma_v^n, \bar{s}_v, 1}^{\geq h}.$$

## 2. Représentations automorphes cohomologiques

Rappelons, cf. [6] p.97, la paramétrisation des représentations algébriques irréductibles de  $G$  sur  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ . Fixons pour ce faire un plongement  $\sigma_0 : E \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_l$  et notons  $\Phi$  l'ensemble des plongements  $\sigma : F \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_l$  dont la restriction à  $E$  est  $\sigma_0$ .

**Fait** : Il existe une bijection explicite entre les représentations algébriques irréductibles  $\xi$  de  $G$  sur  $\bar{\mathbb{Q}}_l$  et les  $(d+1)$ -uplets  $(a_0, (\vec{a}_\sigma)_{\sigma \in \Phi})$  où  $a_0 \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $\sigma \in \Phi$ , on a  $\vec{a}_\sigma = (a_{\sigma, 1} \leq \dots \leq a_{\sigma, d})$ .

Soit  $K \subset \bar{\mathbb{Q}}_l$ , une extension finie de  $\mathbb{Q}_l$  telle que, d'après le théorème de Baire, la représentation  $\iota^{-1} \circ \xi$  de plus haut poids  $(a_0, (\vec{a}_\sigma)_{\sigma \in \Phi})$ , soit définie sur  $K$ ; notons  $W_{\xi, K}$  l'espace de cette représentation et  $W_{\xi, \mathcal{O}}$  un réseau stable où  $\mathcal{O}$  désigne l'anneau des entiers de  $K$ .

*Remarque* : si on suppose que  $\xi$  est  $l$ -petit, i.e. que pour tout  $\sigma \in \Phi$  et pour tout  $1 \leq i < j \leq n$ , on a  $0 \leq a_{\tau, j} - a_{\tau, i} < l$ , alors un tel réseau stable est unique à homothétie près.

Notons  $\lambda$  une uniformisante de  $\mathcal{O}$  et soit pour  $n \geq 1$ , un sous-groupe distingué  $I_n \in \mathcal{I}$  de  $I \in \mathcal{I}$ , compact ouvert agissant trivialement sur  $W_{\xi, \mathcal{O}/\lambda^n} := W_{\xi, \mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\lambda^n$ . On note alors  $V_{\xi, \mathcal{O}/\lambda^n}$  le faisceau sur  $X_I$  dont les sections sur un ouvert étale  $T \rightarrow X_I$  sont les fonctions

$$f : \pi_0(X_{I_n} \times_{X_I} T) \rightarrow W_{\xi, \mathcal{O}/\lambda^n}$$

telles que pour tout  $k \in I$  et  $C \in \pi_0(X_{I_n} \times_{X_I} T)$ , on a la relation  $f(Ck) = k^{-1}f(C)$ .

**2.1. Notation.** — On pose alors

$$V_{\xi, \mathcal{O}} = \varprojlim_n V_{\xi, \mathcal{O}/\lambda^n} \text{ et } V_{\xi, K} = V_{\xi, \mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} K.$$

On utilisera aussi la notation  $V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}$  et  $V_{\xi, \bar{\mathbb{Q}}_l}$  pour les versions sur  $\bar{\mathbb{Z}}_l$  et  $\bar{\mathbb{Q}}_l$  respectivement.

*Remarque* : rappelons que la représentation  $\xi$  est dite *régulière* si son paramètre  $(a_0, (\vec{a}_\sigma)_{\sigma \in \Phi})$  est tel que pour tout  $\sigma \in \Phi$ , on a  $a_{\sigma, 1} < \dots < a_{\sigma, d}$ .

On fixe à présent une  $\mathbb{C}$ -représentation irréductible algébrique de dimension finie  $\xi$  de  $G$ .

**2.2. Définition.** — Une  $\mathbb{C}$ -représentation irréductible  $\Pi_\infty$  de  $G(\mathbb{A}_\infty)$  est dite  $\xi$ -cohomologique s'il existe un entier  $i$  tel que

$$H^i((\text{Lie } G(\mathbb{R})) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, U_\tau, \Pi_\infty \otimes \xi^\vee) \neq (0)$$

où  $U_\tau$  est un sous-groupe compact modulo le centre de  $G(\mathbb{R})$ , maximal, cf. [6] p.92. On notera  $d_\xi^i(\Pi_\infty)$  la dimension de ce groupe de cohomologie. Une  $\mathbb{Q}_l$ -représentation irréductible  $\Pi^\infty$  de  $G(\mathbb{A}^\infty)$  sera dit automorphe  $\xi$ -cohomologique s'il existe une  $\mathbb{C}$ -représentation  $\xi$ -cohomologique  $\Pi_\infty$  de  $G(\mathbb{A}_\infty)$  telle que  $\iota_l(\Pi^\infty) \otimes \Pi_\infty$  est une  $\mathbb{C}$ -représentation automorphe de  $G(\mathbb{A})$ .

**2.3. Notation.** — Pour  $\Pi$  une représentation irréductible admissible de  $G(\mathbb{A})$ , on note  $m(\Pi)$  sa multiplicité dans l'espace des formes automorphes.

Pour  $\Pi$  une représentation automorphe irréductible admissible cohomologique de  $G(\mathbb{A})$ , rappelons, cf. par exemple le lemme 3.2 de [3], que pour  $x$  une place de  $\mathbb{Q}$  décomposée  $x = yy^c$  dans  $E$  et  $z$  une place de  $F$  au dessus de  $y$  telle que, avec la notation 1.2,  $G(F_z) := (B_z^{op})^\times \simeq GL_d(F_z)$ , la composante locale  $\Pi_z$ , au sens de 1.2, est de la forme  $\text{Speh}_s(\pi_z)$  pour  $\pi_z$  une représentation irréductible non dégénérée et  $s$  un entier  $\geq 1$  qui ne dépend que de  $\Pi$  et non de la place  $z$  comme ci-dessus.

**2.4. Définition.** — L'entier  $s$  ci-avant est appelé le paramètre de  $\Pi$ .

*Remarque :* on rappelle qu'une telle représentation  $\Pi$  est dite tempérée si son paramètre  $s$  est égal à 1.

**2.5. Notation.** — Les  $d_\xi^i(\Pi_\infty)$  sont nuls pour  $|i| \geq s$  ou pour  $i \equiv s \pmod{2}$  et sinon ils sont tous égaux, on note  $d_\xi(\Pi_\infty)$  la valeur commune non nulle des  $d_\xi^i(\Pi_\infty)$ .

Le résultat suivant tiré de [5] est la relation d'Eichler-Shimura démontrée par Wedhorn dans [12], dans le cadre de nos variétés de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor.

**2.6. Notation.** — Pour  $I \in \mathcal{I}$ , on note  $\text{Spl}(I)$  l'ensemble des places  $v$  de  $F$  telles que

- $v$  ne divise pas le niveau  $I$  et
- $p_v := v|_{\mathbb{Q}}$  est décomposé dans  $F$  et distinct de  $l$ , avec

$$G(\mathbb{Q}_{p_v}) \simeq \mathbb{Q}_{p_v}^\times \times GL_d(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times,$$

où  $p_v = v \cdot \prod_{i=2}^r v_i$  dans  $F^+$ .

Pour  $i = 0, \dots, d$ , on pose

$$T_{v,i} := \text{diag}(\overbrace{p_v, \dots, p_v}^i, \overbrace{1, \dots, 1}^{d-i}) \times 1 \in GL_d(\mathbb{Q}_{p_v}) \times \mathbb{Z}.$$

**2.7. Théorème.** — (cf. [5] 3.3.1) Pour tout  $v \in \text{Spl}(I)$ , l'action de

$$\sum_{i=0}^d (-1)^i q_v^{\frac{i(i-1)}{2}} T_{v,i} \text{Frob}_v^{d-i}$$

sur chacun des  $H^j(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l})$  est nulle.

### 3. Rappels sur la $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -cohomologie d'après [2]

Dans ce paragraphe  $v$  désigne une place de  $F$  telle que  $p_v := v|_{\mathbb{Q}}$  est décomposé dans  $F$  distinct de  $l$  et  $G(\mathbb{Q}_{p_v}) \simeq \mathbb{Q}_{p_v}^\times \times GL_d(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times$ , où  $p_v = v \cdot \prod_{i=2}^r v_i$  dans  $F^+$ .

**3.1. Notation.** — Pour  $1 \leq h \leq d$ , la notation  $[H^i(h, \xi)]$  (resp.  $[H_1^i(h, \xi)]$ ) désignera l'image de

$$\lim_{\substack{\rightarrow \\ I \in \mathcal{I}}} H^i(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Q}}_l}[d-h]) \quad \text{resp.} \quad \lim_{\substack{\rightarrow \\ I \in \mathcal{I}}} H^i(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}, j_{1,!}^{\geq h} V_{\xi, \bar{\mathbb{Q}}_l}[d-h])$$

dans le groupe de Grothendieck  $\text{Groth}(v, h)$  des représentations admissibles de  $G(\mathbb{A}^\infty) \times GL_{d-h}(F_v) \times \mathbb{Z}$ .

*Remarque :* comme tous les compacts de  $\mathcal{I}$  contiennent le facteur  $\mathbb{Z}_{p_v}^\times$ , les représentations  $\Pi$  qui vont intervenir par la suite, dans les différents groupes de cohomologie, devront toutes vérifier que leur composante  $\Pi_{p_v,0}$  sur le facteur de similitude  $\mathbb{Q}_{p_v}^\times$ , est telle  $(\Pi_{p_v,0})|_{\mathbb{Z}_{p_v}^\times} = 1$ .

*Remarque :* l'action de  $\sigma \in W_v$  sur les  $GL_{d-rg}(F_v) \times \mathbb{Z}$ -modules ci-avant est donnée par celle de  $-\deg \sigma \in \mathbb{Z}$  composée avec celle de  $\Pi_{p_v,0}(\text{Art}^{-1}(\sigma))$ .

Pour  $I \in \mathcal{I}$  qui est maximal en  $v$ , on a

$$H^i(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Q}}_l}) = \left( \lim_{\substack{\rightarrow \\ I \in \mathcal{I}}} H^i(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Q}}_l}) \right)^I \quad (3.2)$$

ainsi que

$$H^i(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}, j_{1,!}^{\geq h} V_{\xi, \bar{\mathbb{Q}}_l}) = \left( \lim_{\substack{\rightarrow \\ I \in \mathcal{I}}} H^i(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}, j_{1,!}^{\geq h} V_{\xi, \bar{\mathbb{Q}}_l}) \right)^I. \quad (3.3)$$

**3.4. Notation.** — Pour  $\Pi^{\infty, v}$  une représentation irréductible de  $G(\mathbb{A}^{\infty, v})$ , on notera  $\text{Groth}(h)\{\Pi^{\infty, v}\}$  le sous-groupe facteur direct de  $\text{Groth}(v, h)$  engendré par les irréductibles de la forme  $\Pi^{\infty, v} \otimes \pi_{v, \text{et}} \otimes \zeta$  où  $\pi_{v, \text{et}}$  (resp.  $\zeta$ ) est une représentation irréductible quelconque de  $GL_{d-h}(F_v)$  (resp. de  $\mathbb{Z}$ ). On notera alors

$$[H^i(h, \xi)]\{\Pi^{\infty, v}\}$$

la projection de  $[H^i(h, \xi)]$  sur ce facteur direct.

Les résultats suivant se déduisent directement, dans le cas de la représentation triviale, de la description des groupes de cohomologie des extensions intermédiaires (resp. par zéro) des systèmes locaux d'Harris-Taylor donnés aux §3 (resp. §5) de [2]. Le lecteur pourra trouver utile, la réécriture de ces résultats dans [3].

**3.5. Proposition.** — Soit  $\Pi$  une représentation automorphe irréductible  $\xi$ -cohomologique tempérée. Pour tout  $h = 1, \dots, d$  et pour tout  $i \neq 0$ ,

$$[H^i(h, \xi)]\{\Pi^{\infty, v}\} \quad \text{et} \quad [H_!^i(h, \xi)]\{\Pi^{\infty, v}\}$$

sont nuls.

*Démonstration.* — Le résultat pour  $H^i(h, \xi)$  est un cas particulier de la proposition <sup>(2)</sup> 3.6 de [3] pour le système local constant, i.e.  $\pi_v$  est la représentation triviale, et  $s = 1$ . Pour la cohomologie à support compact, on peut soit évoquer la proposition 3.12 de [3], soit utiliser la description, d'après le corollaire 5.4.1 de [1], de cette extension par zéro en termes des systèmes locaux sur les strates de Newton d'indices  $h' \geq h$ . □

**3.6. Proposition.** — Soit  $\Pi$  une représentation automorphe irréductible  $\xi$ -cohomologique non tempérée de paramètre  $s > 1$  au sens de la définition 2.4. Alors

- (i) pour tout  $h > s$ , les  $[H_!^i(h, \xi)]\{\Pi^{\infty, v}\}$  sont nuls pour tout  $i$  ;
- (ii) pour tout  $h \neq s$ ,  $[H_!^0(h, \xi)]\{\Pi^{\infty, v}\}$  est nul.

*Démonstration.* — Le résultat est donné à la proposition <sup>(3)</sup> 3.12 de [3] en prenant  $t = 1$ . En particulier pour (ii), le résultat découle du fait que, avec les notations de loc. cit.,  $n_{s,1}(h, 0)$  est non nul si et seulement si  $h = s$ . □

*Remarque :* dans loc. cit. on montre plus précisément que  $[H_!^i(h, \xi)]\{\Pi^{\infty, v}\} \neq (0)$  si et seulement si  $i = h - s \geq 0$ .

**3.7. Notation.** — Soit  $\mathcal{U}_G(\Pi^{\infty, v})$  l'ensemble des représentations irréductibles automorphes  $\Pi'$  de  $G(\mathbb{A})$  telles que  $(\Pi')^{\infty, v} \simeq \Pi^{\infty, v}$ .

*Remarque :* d'après le corollaire VI.2.2 de [6], la composante locale  $\Pi'_v$  d'un  $\Pi' \in \mathcal{U}_G(\Pi^{\infty, v})$  ne dépend pas de  $\Pi'$  tel que  $d_\xi(\Pi'_\infty) \neq 0$ , cf. le corollaire VI.2.2 de [6].

**3.8. Hypothèse.** — On suppose pour la fin de ce paragraphe que  $\Pi$  est une représentation automorphe irréductible  $\xi$ -cohomologique tempérée dont la composante locale en  $v$  est

$$\Pi_v \simeq \text{St}_{t_1}(\chi_{v,1}) \times \dots \times \text{St}_{t_u}(\chi_{v,u}),$$

2. laquelle découle directement de la proposition 3.6.1 de [2]

3. laquelle découle directement des calculs de [2] §5

où  $\chi_{v,1}, \dots, \chi_{v,u}$  sont des caractères de  $F_v^\times$  ; quitte à réordonner on supposera que les  $r$  premiers correspondent aux non ramifiés.

**3.9. Proposition.** — Avec les notations et les hypothèses précédentes concernant  $\Pi$ , dans  $\text{Groth}(h)\{\Pi^{\infty,v}\}$ , on a l'égalité

$$[H^0(h, \xi)]\{\Pi^{\infty,v}\} = e_{\pi_v} \left( \frac{\#\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G)}{d} \sum_{\Pi' \in \mathcal{U}_G(\Pi^{\infty,v})} m(\Pi') d_\xi(\Pi'_\infty) \right) \left( \sum_{1 \leq k \leq r: t_k=h} \Pi_v^{(k)} \otimes \chi_{v,k} \Xi^{\frac{d-h}{2}} \right)$$

où

- $e_{\pi_v}$  désigne le cardinal de la classe d'équivalence inertielle de  $\pi_v$  i.e. le nombre de représentations  $\pi'_v$ , à isomorphisme près, telles  $\pi'_v \simeq \pi \otimes \alpha \circ \text{val} \circ \det$  où  $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$  est un caractère,
- $\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G)$  est le sous-ensemble de  $H^1(\mathbb{Q}, G)$  constitué des éléments qui deviennent triviaux dans  $H^1(\mathbb{Q}_{p'}, G)$  pour toute place  $p'$  de  $\mathbb{Q}$ ,
- $\Pi_v^{(k)} := \text{St}_{t_1}(\chi_{v,1}) \times \dots \times \text{St}_{t_{k-1}}(\chi_{v,k-1}) \times \text{St}_{t_{k+1}}(\chi_{v,k+1}) \times \dots \times \text{St}_{t_u}(\chi_{v,u})$  et
- $\Xi : \frac{1}{2}\mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}_l^\times$  est défini par  $\Xi(\frac{1}{2}) = q_v^{\frac{1}{2}}$ .

*Démonstration.* — Il s'agit à nouveau de la proposition 3.6 de [3] avec  $s = 1$  et  $\pi_v$  la représentation triviale de  $F_v^\times$  : avec les notation de loc. cit.,  $R_{\pi_{k,v}}(1, t_k)(h, 0)$  disparaît i.e. c'est la représentation triviale de  $GL_0(F_v)$ .  $\square$

*Remarque :* à partir de ces descriptions cohomologiques en niveau infini, on retrouve leurs versions en niveau fini, et maximal en  $v$ , en utilisant (3.2) ou (3.3), i.e. en prenant les invariants sous  $I$ .

#### 4. Localisation de la cohomologie

On rappelle qu'un multi-ensemble est un couple  $(A, m)$  où  $A$  est un ensemble appelé le support et  $m : A \rightarrow \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$  est la multiplicité au sens où  $a \in A$  apparaît  $m(a)$  fois dans le multi-ensemble  $(A, m)$ . On dit que  $(A, m)$  est contenu dans  $(A', m')$  si et seulement si  $A \subset A'$  et pour tout  $a \in A$ , on a  $m(a) \leq m'(a)$ .

**4.1. Notation.** — Pour  $I \in \mathcal{I}$  un niveau fini, soit

$$\mathbb{T}_I := \overline{\mathbb{Z}}_l[T_{v,i} : v \in \text{Spl}(I) \text{ et } i = 1, \dots, d],$$

l'algèbre de Hecke associée à  $\text{Spl}(I)$ .

On fixe à présent et pour la suite, un idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $\mathbb{T}_I$  de corps résiduel  $\overline{\mathbb{F}}_l$ .

**4.2. Définitions.** — Pour tout  $v \in \text{Spl}(I)$ , on note

$$S_{\mathfrak{m}}(v) = \left\{ \frac{\overline{T_{v,i}}}{T_{v,i-1}} \in \mathbb{T}_I/\mathfrak{m}, i = 1, \dots, d \right\}$$

le multi-ensemble des paramètres de Satake modulo  $l$  en  $v$  associé à  $\mathfrak{m}$ , i.e. on garde en mémoire la multiplicité des paramètres. On définit alors

$$l_{\mathfrak{m}}(v; \alpha) := \max \left\{ s \text{ tel que } \{\alpha, q_v \alpha, \dots, q_v^{s-1} \alpha\} \subset S_{\mathfrak{m}}(v) \right\}$$

et

$$l_{\mathfrak{m}}(v) := \max_{\alpha \in S_{\mathfrak{m}}(v)} l_{\mathfrak{m}}(v; \alpha).$$

*Remarque :* dans la définition précédente,  $\{\alpha, q_v \alpha, \dots, q_v^{s-1} \alpha\}$  est considéré comme un multi-ensemble et l'inclusion associée est relative aux multi-ensembles. En particulier si  $q_v \equiv 1 \pmod{l}$ , alors  $l_{\mathfrak{m}}(v; \alpha)$  est simplement la multiplicité de  $\alpha$  dans  $S_{\mathfrak{m}}(v)$ .

**4.3. Théorème.** — *S'il existe  $v \in \text{Spl}(I)$  tel que  $l_{\mathfrak{m}}(v) = 1$  alors pour toute représentation algébrique  $\xi$ , la localisation  $H^i(X_{I, \bar{\eta}}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$  en  $\mathfrak{m}$  de la cohomologie de  $V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}$  est nulle pour  $i \neq d - 1$  et sans torsion, pour  $i = d - 1$ .*

*Démonstration.* — Nous allons montrer par récurrence sur  $h$  de  $d$  à 2 que les  $H^i(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$  sont nuls. Pour  $h = d$ , les  $H^i(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq d}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l})$  sont nuls pour  $i \neq 0$  et sans torsion pour  $i = 0$ . D'après les propositions 3.6 et 3.9 et en utilisant (3.2), si

$$\left[ \varinjlim_I H^0(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq d}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}) \right] \{ \Pi^{\infty, v} \} \neq (0)$$

alors  $\Pi_v$  est soit de la forme  $\text{Speh}_d(\chi_v)$  ou  $\text{St}_d(\chi_v)$  pour  $\chi_v$  un caractère de  $F_v^\times$ . Dans chacun de ces cas, les paramètres de Satake sont de la forme  $\{\alpha, q_v \alpha, \dots, q_v^{d-1} \alpha\}$  de sorte que, comme par hypothèse  $l_{\mathfrak{m}}(v) = 1 < d$ , on a bien  $H^0(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq d}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}} = (0)$ . Supposons le résultat acquis jusqu'au rang  $h + 1$  et traitons le cas de  $h \geq 2$ . Considérons la suite exacte courte de faisceaux pervers sans torsion

$$0 \rightarrow i_{h+1, *} V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l, |X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h+1}|[d-h-1] \rightarrow j_!^{\geq h} j^{\geq h, *} V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l, |X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}|[d-h] \rightarrow V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l, |X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}|[d-h] \rightarrow 0.$$

D'après le théorème 1.7, les  $H^i(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}, j_!^{\geq h} j^{\geq h, *} V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l, |X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}|[d-h])$  sont nuls pour  $i < 0$  et sans torsion pour  $i = 0$ , de sorte que pour  $i > 0$ , on a

$$0 \rightarrow H^{-i-1}(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}[d-h]) \rightarrow H^{-i}(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h+1}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}[d-h-1]) \rightarrow 0, \quad (4.4)$$

et pour  $i = 0$ ,

$$0 \rightarrow H^{-1}(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}[d-h]) \rightarrow H^0(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h+1}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}[d-h-1]) \rightarrow H^0(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}, j_!^{\geq h} j^{\geq h, *} V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}[d-h]) \rightarrow H^0(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}[d-h]) \rightarrow \dots \quad (4.5)$$

Ainsi après localisation en  $\mathfrak{m}$  et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient que les  $H^i(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}[d-h])_{\mathfrak{m}}$  sont nuls pour  $i < 0$  et sans torsion pour  $i = 0$ . En utilisant que la propriété  $l_{\mathfrak{m}}(v) = 1$  est invariante par dualité, on en déduit alors par application de la dualité de Verdier que les  $H^i(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}[d-h])_{\mathfrak{m}}$  sont nuls pour  $i \neq 0$  et sans torsion pour  $i = 0$ . On est ainsi ramener sur  $\mathbb{Q}_l$  en degré médian : d'après les propositions 3.6 et 3.9 via

(3.2), les représentations automorphes  $\Pi$  qui contribuent à  $H^0(X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h}, j_!^{\geq h} V_{\xi, \bar{\mathbb{Q}}_l}[d-h])$ , sont telles que leurs composantes locales en  $v$  est

- soit de la forme  $\mathrm{Speh}_h(\chi_{v,1}) \times \cdots \times \mathrm{Speh}_h(\chi_{v,\frac{d}{h}})$ ,
- soit  $\Pi_v \simeq \mathrm{St}_{t_1}(\chi_{v,1}) \times \cdots \times \mathrm{St}_{t_u}(\chi_{v,u})$  où l'ensemble  $\{1 \leq i \leq u : t_i = h\}$  est non vide.

Dans chacun de ces cas l'ensemble des paramètres de Satake contient un sous-ensemble de la forme  $\{\alpha, q_v \alpha, \cdots, q_v^{h-1} \alpha\}$  de sorte que, comme par hypothèse  $l_{\mathfrak{m}}(v) = 1 < h$ , on obtient bien la propriété au rang  $h$ .

Les mêmes arguments appliqués au cas  $h = 1$ , nous donnent que les  $H^i(X_{I,\bar{s}_v}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$  sont nuls pour  $i \neq d-1$  et sans torsion pour  $i = d-1$ . Le théorème de changement de base lisse fournit  $H^i(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}) \simeq H^i(X_{I,\bar{s}_v}^{\geq 1}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l})$ , d'où le résultat.  $\square$

Une analyse plus fine de la preuve précédente permet d'obtenir la précision suivante.

**4.6. Proposition.** — Soit  $i \geq 0$  tel que la torsion de  $H^{-i}(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}[d-1])_{\mathfrak{m}}$  est non nulle. Alors pour tout  $v \in \mathrm{Spl}(I)$ , on a  $l_{\mathfrak{m}}(v) \geq i + 2$ .

*Remarque :* l'inégalité évidente  $l_{\mathfrak{m}}(v) \leq d$ , nous donne en particulier que la torsion de  $H^0(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$  est nulle; on peut donc comprendre l'énoncé précédent comme une généralisation de ce fait bien connu.

*Démonstration.* — Soit donc  $v \in \mathrm{Spl}(I)$  et notons  $r = l_{\mathfrak{m}}(v)$ . En reprenant la preuve du théorème précédent, on obtient que les  $H^i(X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}[d-h])_{\mathfrak{m}}$  sont nuls pour tout  $i$  (resp.  $i \neq 0$  et sans torsion pour  $i = 0$ ) tant que  $h > r$  (resp. pour  $h = r$ ). Montrons à présent par récurrence sur  $h$  de  $r$  à 1 que les  $H^{-i}(X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}[d-h])_{\mathfrak{m}}$  sont nuls pour  $i > r-h$  et sans torsion pour  $i = r-h$ . D'après les isomorphismes de (4.4), on voit que la nullité de  $H^{-i}(X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h+1}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}[d-h-1])_{\mathfrak{m}}$  pour tout  $i > r-h-1$  donne celle de  $H^{-i}(X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}[d-h])_{\mathfrak{m}}$  pour tout  $i > r-h$ . Le résultat de l'énoncé découle alors du cas  $h = 1$  et du changement de base lisse.  $\square$

*Remarque :* dans l'argument précédent on voit que la torsion peut apparaître, par exemple, à cause de la flèche

$$H^0(X_{I,\bar{s}_v}^{\geq r}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l, |X_{I,\bar{s}_v}^{\geq r}}[d-r])_{\mathfrak{m}} \hookrightarrow H^0(X_{I,\bar{s}_v}^{\geq r-1}, j_!^{\geq r-1} j^{\geq r-1,*} V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l, |X_{I,\bar{s}_v}^{\geq r-1}}[d-r+1])_{\mathfrak{m}}$$

entre deux  $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -modules libres à priori non nuls. Les exemples de l'introduction où la torsion est non nulle, illustrent que cette possibilité existe bel et bien pour certains  $\mathfrak{m}$ .

**4.7. Définition.** — Pour  $1 \leq \delta \leq l_{\mathfrak{m}}(v)$ , on définit

$$\mu_{\mathfrak{m}}(v; \delta) = \#\left\{ \alpha \in S_{\mathfrak{m}}(v) : l_{\mathfrak{m}}(v; \alpha) \geq \delta \right\}.$$

Supposons que  $\mathfrak{m}$  et  $\xi$  sont tels qu'il existe  $i \leq 0$  tel que la torsion de  $H^i(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\bar{\mathbb{Z}}_l}[d-1])_{\mathfrak{m}}$  est non nulle.

**4.8. Notation.** — Soit  $i_{\mathfrak{m},\xi} \geq 0$  maximal tel que pour tout  $i < -i_{\mathfrak{m},\xi}$ , la torsion de  $H^i(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\bar{\mathbb{Z}}_l}[d-1])_{\mathfrak{m}}$  est nulle.

**4.9. Lemme.** — Pour tout  $1 \leq h \leq 1 + i_{\mathfrak{m},\xi}$ , le localisé  $H^i(X_{I,\bar{\eta}}^{\geq h}, V_{\xi,\bar{\mathbb{Z}}_l}|_{X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h}}[d-h])_{\mathfrak{m}}$  est sans torsion pour  $i < h - 1 - i_{\mathfrak{m},\xi}$  et de torsion non nulle pour  $i = h - 1 - i_{\mathfrak{m},\xi}$ .

*Démonstration.* — On raisonne par récurrence sur  $h$  de 1 à  $1 + i_{\mathfrak{m},\xi}$  : le cas  $h = 1$  découle de la définition de  $i_{\mathfrak{m},\xi}$  et du changement de base lisse. La propriété d'inductivité de  $h - 1$  à  $h$  se déduit alors des isomorphismes (4.4) localisés en  $\mathfrak{m}$  et, pour  $i = 1 + i_{\mathfrak{m},\xi}$ , de la suite exacte longue (4.5). □

**4.10. Proposition.** — Pour tout  $v \in \text{Spl}(I)$ , l'action du Frobenius  $\text{Frob}_v$  sur le sous-espace de torsion de  $H^{-i_{\mathfrak{m},\xi}}(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\bar{\mathbb{Z}}_l}[d-1])_{\mathfrak{m}}$  admet au plus  $\mu_{\mathfrak{m}}(v; i_{\mathfrak{m},\xi} + 2)$  valeurs propres distinctes.

*Démonstration.* — Continuons les arguments de la preuve du lemme précédent pour les  $h > 1 + i_{\mathfrak{m},\xi}$ . Des isomorphismes (4.4) et de la suite exacte (4.5), on en déduit, par récurrence sur  $h > 1 + i_{\mathfrak{m},\xi}$ , que les  $H^i(X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h}, V_{\xi,\bar{\mathbb{Z}}_l}|_{X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h}}[d-h])_{\mathfrak{m}}$  sont sans torsion pour tout  $i \leq 0$ . En outre pour  $h = 1 + i_{\mathfrak{m},\xi}$ , la torsion de  $H^0(X_{I,\bar{s}_v}^{\geq 1+i_{\mathfrak{m},\xi}}, V_{\xi,\bar{\mathbb{Z}}_l}[d-1-i_{\mathfrak{m},\xi}])_{\mathfrak{m}}$  s'obtient comme celle du conoyau

$$H^0(X_{I,\bar{s}_v}^{\geq 2+i_{\mathfrak{m},\xi}}, V_{\xi,\bar{\mathbb{Z}}_l}[d-2-i_{\mathfrak{m},\xi}])_{\mathfrak{m}} \longrightarrow H^0(X_{I,\bar{s}_v}^{\geq 1+i_{\mathfrak{m},\xi}}, j_!^{\geq 1+i_{\mathfrak{m},\xi}} j^{\geq 1+i_{\mathfrak{m},\xi,*}} V_{\xi,\bar{\mathbb{Z}}_l}[d-1-i_{\mathfrak{m},\xi}])_{\mathfrak{m}}.$$

En utilisant les isomorphismes (4.4) respectivement pour  $h = i_{\mathfrak{m},\xi}, \dots, 1$  avec  $i = i_{\mathfrak{m},\xi} - h$ , on obtient que la torsion de  $H^{-i_{\mathfrak{m},\xi}}(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\bar{\mathbb{Z}}_l}[d-1])_{\mathfrak{m}}$  s'obtient comme celle du conoyau du morphisme précédent.

Ainsi d'après la proposition 3.6, les valeurs propres de  $\text{Frob}_v$  cherchées sont à prendre dans la réduction modulo  $l$  des  $[H^0(2 + i_{\mathfrak{m},\xi}, \xi)]\{\Pi^{\infty,v}\}$ , pour  $\Pi$  tempérée, telles que pour tout  $v \in \text{Spl}(I)$ , les paramètres de Satake de  $\Pi_v$  modulo  $l$  sont donnés par  $\mathfrak{m}$ . Pour une telle représentation  $\Pi$  avec

$$\Pi_v \simeq \text{St}_{t_1}(\chi_{v,1}) \times \cdots \times \text{St}_{t_u}(\chi_{v,u}),$$

d'après la proposition 3.9, les valeurs propres de  $\text{Frob}_v$  sont données par  $\chi_{v,k}(\varpi_v) q_v^{\frac{d-i_{\mathfrak{m},\xi}-2}{2}}$  tels que  $t_k = 2 + i_{\mathfrak{m},\xi}$ .

*Remarque* : avec les notations de la proposition 3.9, si on veut que  $\Pi_v^{(k)}$  ait des vecteurs invariants sous  $GL_{d-2-i_{\mathfrak{m},\xi}}(\mathcal{O}_v)$ , il faut en outre que pour tout  $1 \leq i \neq k \leq u$ , on ait  $t_i = 1$ . Nous n'utiliserons pas ce fait dans la suite.

Le résultat découle de l'observation élémentaire que  $\text{St}_{2+i_{\mathfrak{m},\xi}}(\chi_{v,k})$  fournit un multi-ensemble de paramètres de Satake de la forme  $\{\alpha, q_v \alpha, \dots, q_v^{1+i_{\mathfrak{m},\xi}} \alpha\}$  et, par définition, il y en a donc au plus  $\mu_{\mathfrak{m}}(v; i_{\mathfrak{m},\xi} + 2)$  distinctes.  $\square$

**4.11. Corollaire.** — *On suppose  $l \geq d+2$  et soit  $v \in \text{Spl}(I)$  telle que l'ordre de  $q_v$  modulo  $l$  soit  $> d$ . Si  $\rho$  est une  $\overline{\mathbb{F}}_l$ -sous-représentation galoisienne irréductible dans la torsion de  $H^{-i_{\mathfrak{m},\xi}}(X_{I,\overline{\eta}}, V_{\xi,\overline{\mathbb{Z}}_l}[d-1])_{\mathfrak{m}}$  telle que les valeurs propres de  $\text{Frob}_v$  sont distinctes alors*

$$\dim \rho \leq d - 1 - i_{\mathfrak{m},\xi}.$$

*Remarque* : en particulier on retrouve un phénomène bien connu en caractéristique nulle, à savoir que la dimension chute à mesure qu'on s'éloigne du degré médian.

*Démonstration.* — Notons  $V$  (resp.  $S$ ) l'ensemble des valeurs propres de  $q_v^{-\frac{d-i_{\mathfrak{m},\xi}-2}{2}} \rho(\text{Frob}_w)$  (resp. les paramètres de Satake modulo  $l$  associés à  $\mathfrak{m}$ ). D'après la proposition précédente si  $\lambda \in V$  alors  $\{\lambda, q_v \lambda, \dots, q_v^{i_{\mathfrak{m},\xi}+1} \lambda\} \subset S$ . En particulier, les valeurs propres étant supposées distinctes, on a  $V \subset S$  et donc le cardinal de  $V$  est  $\leq d$ . Notons alors que, comme l'ordre de  $q_v$  est  $> d$ , alors  $q_v V$  n'est pas inclus dans  $V$  : en effet sinon on aurait  $q_v^n V \subset V$  et  $V$  contiendrait un ensemble de la forme  $\{\alpha, q_v \alpha, \dots, q_v^d \alpha\}$  ce qui n'est pas car  $V$  est de cardinal  $\leq d$ . Prenons alors  $\lambda_0 \in V$  tel que  $\lambda_0 q_v \notin V$ , i.e.  $\lambda_0 q_v^{2+i_{\mathfrak{m},\xi}} \notin S$ . On en déduit alors que pour tout  $k = 1, \dots, 1 + i_{\mathfrak{m},\xi}$ , l'élément  $\lambda_0 q_v^k$  appartient à  $S$  mais pas à  $V$ , d'où le résultat.  $\square$

D'après [10], il existe une représentation irréductible continue

$$\overline{\rho}_{\mathfrak{m}} : G_F \longrightarrow GL_d(\overline{\mathbb{F}}_l)$$

non ramifiée à toutes les places ne divisant pas  $I$  et telle que pour tout  $v \in \text{Spl}(I)$ , le polynôme caractéristique de  $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}(\text{Frob}_v)$  est

$$P_{\mathfrak{m},v}(X) := \sum_{i=0}^d (-1)^i q_v^{\frac{i(i-1)}{2}} T_{v,i} X^{d-i} \in \mathbb{T}_I/\mathfrak{m} \simeq \overline{\mathbb{F}}_l.$$

**4.12. Hypothèse.** — *Si  $\theta : G_F \longrightarrow GL_n(\overline{\mathbb{F}}_l)$  est une représentation irréductible continue telle que pour tout  $v \in \text{Spl}(I)$ , on a*

$$P_{\mathfrak{m},v}(\theta(\text{Frob}_v)) = 0$$

*alors  $\theta$  est équivalent à  $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ .*

*Remarque* : d'après [5], l'hypothèse 4.12 est vérifiée si

— soit  $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$  est induit d'un caractère de  $G_K$  pour  $K/F$  une extension galoisienne cyclique ;

— soit  $l \geq d$  et  $SL_n(k) \subset \bar{\rho}_{\mathfrak{m}}(G_F) \subset \bar{\mathbb{F}}_l^\times GL_n(k)$  pour un sous-corps  $k \subset \bar{\mathbb{F}}_l$ .

**4.13. Théorème.** — *Supposons que  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$  vérifie l'hypothèse 4.12 et que  $l \geq d + 2$ . Alors les  $H^i(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\bar{\mathbb{Z}}_l})_{\mathfrak{m}}$  sont sans torsion.*

*Remarque :* on obtient ainsi une version améliorée du théorème 3.4.2 de [5]. On notera en outre que nos hypothèses n'impliquent pas que la  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -cohomologie est concentrée en degré médian.

*Démonstration.* — La condition sur  $\mathfrak{m}$  étant invariante par dualité, il suffit de montrer que les  $H^i(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\bar{\mathbb{Z}}_l}[d-1])_{\mathfrak{m}}$  sont sans torsion pour  $i \leq 0$ . On raisonne par l'absurde et on note comme précédemment  $i_{\mathfrak{m},\xi} \geq 0$  le plus grand indice  $i$  tel que la torsion de  $H^{-i}(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\bar{\mathbb{Z}}_l}[d-1])_{\mathfrak{m}}$  est non nulle. Soit alors  $\theta$  une représentation de  $G_F$  obtenue comme sous-quotient irréductible de la torsion de  $H^{-i_{\mathfrak{m},\xi}}(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\bar{\mathbb{Z}}_l}[d-1])_{\mathfrak{m}}$ . D'après la relation de congruence 2.7 et l'hypothèse précédente, on en déduit que  $\theta$  est isomorphe à  $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$  et que donc, pour tout  $v \in \text{Spl}(I)$ , les valeurs propres de  $\theta(\text{Frob}_v)$  correspondent aux paramètres de Satake modulo  $l$  donnés par  $\mathfrak{m}$ , à multiplication par  $q_v^{\frac{d-1}{2}}$  près.

Comme  $l-1 > d$ , on choisit  $v \in \text{Spl}(I)$  tel que l'ordre de  $v|_{\mathbb{Q}}$  modulo  $l$  est  $> d$ . Soit alors  $q_v^{\frac{d-1}{2}} \lambda$  une valeur propre de  $\text{Frob}_v$  agissant sur la torsion de  $H^{-i_{\mathfrak{m},\xi}}(X_{I,\bar{\eta}}, V_{\xi,\bar{\mathbb{Z}}_l}[d-1])_{\mathfrak{m}}$  : la réduction modulo  $l$  de  $\lambda$  est un paramètre de Satake modulo  $l$  de  $\mathfrak{m}$ . D'après la preuve de la proposition précédente, il existe alors une représentation automorphe  $\Pi$  dont la composante  $\Pi_v$  est de la forme

$$\Pi_v \simeq \text{St}_{t_1}(\chi_{v,1}) \times \cdots \times \text{St}_{t_u}(\chi_{v,u}),$$

avec  $\lambda = \chi_{v,1}(\varpi_v) q_v^{\frac{1-t_1}{2}}$  et <sup>(4)</sup>  $t_1 = 2 + i_{\mathfrak{m},\xi} > 1$ . Les paramètres de Satake modulo  $l$  sont alors donnés par

$$\left\{ \chi_{v,1}(\varpi_v) q_v^{\frac{1-t_1}{2}}, \cdots, \chi_{v,1}(\varpi_v) q_v^{\frac{t_1-1}{2}}, \cdots, \chi_{v,u}(\varpi_v) q_v^{\frac{1-t_u}{2}}, \cdots, \chi_{v,u}(\varpi_v) q_v^{\frac{t_u-1}{2}} \right\}.$$

En particulier, on remarque que si  $\lambda$  est un paramètre de Satake modulo  $l$  de  $\mathfrak{m}$  à la place  $v$  alors  $q_v \lambda$  aussi. Comme par hypothèse l'ordre de  $q_v$  modulo  $l$  est  $> d$ , alors  $q_v^i \lambda$  serait un paramètre de Satake modulo  $l$  de  $\mathfrak{m}$  à la place  $v$ , pour tout  $i = 0, \dots, d$ , ce qui donnerait  $d+1$  paramètres distincts ce qui ne se peut pas, d'où la contradiction. □

## Références

- [1] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples. *Invent. Math.*, 177(2) :239–280, 2009.

---

4. D'après la remarque de la preuve de la proposition 4.10, on a aussi que  $t_2 = \cdots = t_u = 1$ .

- [2] P. Boyer. Cohomologie des systèmes locaux de Harris-Taylor et applications. *Compositio*, 146(2) :367–403, 2010.
- [3] P. Boyer. Congruences automorphes et torsion dans la cohomologie d’un système local d’Harris-Taylor. *Annales de l’Institut Fourier*, à paraître en 2014.
- [4] M. Emerton, T. Gee, and F Herzig. Weight cycling and Serre-type conjectures for unitary groups. *Duke Mathematical Journal*, 162, no. 9 :1649–1722, 2013.
- [5] M. Emmerton and T. Gee.  $p$ -adic Hodge theoretic properties of étale cohomology with mod  $p$  coefficients, and the cohomology of Shimura varieties. *preprint*, 2014.
- [6] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [7] F. Herzig. The weight in a serre-type conjecture for tame  $n$ -dimensional Galois representations. *Duke Mathematical Journal*, 149, no. 1 :37–116, 2009.
- [8] T. Ito. Hasse invariants for somme unitary Shimura varieties. *Math. Forsch. Oberwolfach report 28/2005*, pages 1565–1568, 2005.
- [9] K.-W. Lan and J. Suh. Vanishing theorems for torsion automorphic sheaves on compact PEL-type Shimura varieties. *Duke Math.*, 161(6) :951–1170, 2012.
- [10] P. Scholze. On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties. *Preprint Bonn*, 2013.
- [11] J. Suh. Plurigeners of general type surfaces in mixed characteristic. *Compos. Math.*, 144 no. 5 :1214–1226, 2008.
- [12] T. Wedhorn. Congruence relations on some Shimura varieties. *J. Reine Angew. Math.*, 524 :43–71, 2000.