



HAL
open science

Traitement linéaire du signal numérique

Frédéric Truchetet

► **To cite this version:**

Frédéric Truchetet. Traitement linéaire du signal numérique. Hermès, 1998, collection traitement du signal. hal-01130949

HAL Id: hal-01130949

<https://hal.science/hal-01130949v1>

Submitted on 12 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Traitement linéaire du signal numérique

Frédéric Truchetet

Janvier 1998

Table des matières

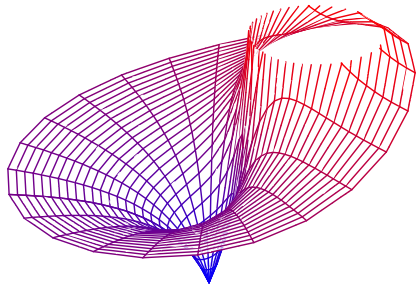
1	Avant-propos	2
2	Signaux et systèmes à temps discret	4
2.1	Introduction	4
2.2	Signaux déterministes à temps discret	4
2.3	Systèmes à temps discret	10
2.4	Signaux aléatoires ou stochastiques discrets	13
3	Opérations sur les signaux discrets	17
3.1	Corrélation de signaux discrets déterministes	17
3.2	Convolution de signaux discrets déterministes	21
3.3	Systèmes linéaires invariants : SLI	22
4	Transformée en z	29
4.1	Définition	29
4.2	Région de convergence ou existence de la transformée	31
4.3	Transformée en z inverse	33
4.4	Le Cepstre	35
4.5	Propriétés de la transformée en z	36
4.6	Table de transformées en z	43
4.7	Détermination pratique de la transformée inverse	44
4.8	Restriction au cercle unité : transformée de Fourier	47
5	Filtrage linéaire, RIF et RII	51
5.1	Généralités, fonction de transfert	51
5.2	Système régi par une équation aux différences	52
5.3	Mise en œuvre des filtres RIF : formes non récursives	57
5.4	Mise en œuvre des filtres RII : formes récursives	58
5.5	Réponse fréquentielle des filtres numériques linéaires	65
5.6	Réponse à des signaux stochastiques	74
5.7	Bruit de calcul	80
6	Détermination des filtres	89
6.1	Détermination des filtres par fonctions modèles	89
6.2	Approximation au sens des moindres carrés	100

6.3	Détermination par la réponse impulsionnelle	103
7	Transformée de Fourier discrète (TFD)	108
7.1	Généralités et rappels	108
7.2	Inversion, périodicité de la TFD	108
7.3	Propriétés de linéarité et de symétrie	110
7.4	Convolution et corrélation circulaires, théorème de Parseval	113
7.5	Algorithmes de TFD rapide, TFR (ou FFT)	117
	Bibliographie	125

Chapitre 1

Avant-propos

Si le traitement du signal, après avoir été un sous-produit de la physique et des mathématiques appliquées, est maintenant une discipline scientifique à part entière, il n'en est pas encore de même pour le traitement du signal numérique qui reste souvent confondu avec le traitement numérique du signal. Il est effectivement naturel de considérer l'emploi du traitement numérique pour effectuer des opérations de traitement du signal continu[9]. Les résultats ainsi obtenus sont de plus en plus probants au fur et à mesure que les contraintes de bande passante et de période d'échantillonnage sont rejetées de plus en plus en plus loin grâce aux progrès de l'électronique numérique programmée. On constate cependant que le signal numérique devient un signal «primaire» à part entière. En effet, d'une part de nombreux capteurs intègrent une fonction d'échantillonnage, pour certains elle est même intrinsèque (capteurs CCD), d'autre part les informations traitées sont souvent utilisées directement par des automatismes numériques ou des outils de visualisation numériques également (une image de télévision est intrinsèquement échantillonnée). Pourquoi alors ne pas considérer le signal numérique et son traitement numérique comme un ensemble cohérent indépendant de l'analyse du signal continu dit physique. Ce point de vue a l'avantage pédagogique de la simplicité de l'approche. Les mathématiques nécessaires restent élémentaires et une présentation des principales techniques et des outils de base est tout à fait possible en ne faisant appel, pour l'essentiel, qu'à un niveau de départ du type Bac scientifique ou technologique. C'est le point de vue qui est utilisé dans ce cours. Nous n'aborderons donc ni les transformations du signal continu analogique en signal numérique, ni la conversion numérique analogique, ni le théorème de Shannon. Nous privilégierons dans notre présentation l'esprit Sciences pour l'Ingénieur et nous n'hésiterons pas à sacrifier ça et là la sacro-sainte rigueur mathématique si elle nous semble inutile à une compréhension intuitive. En revanche de nombreux exemples seront présentés pour illustrer chacune des propriétés et les algorithmes présentés. Ces exemples pourront servir de point de départ à l'élaboration de familles d'exercices et pourront guider l'étudiant dans l'indispensable passage à la pratique. Ce dernier point est, du reste, grandement facilité par l'utilisation des outils logiciels de mathématique formelle et appliquée comme Matlab, Mathematica, Maple et autres (voir par exemple [2]). Dans ce domaine, comme dans beaucoup d'autres, l'expérimentation et l'apprentissage par la confrontation à la réalité sont les seuls vrais moyens de compréhension des concepts. Ce cours doit être utilisé comme un outil de base. Il n'aborde que les traitements linéaires et dans de nombreux domaines il ne fournit qu'une introduction ; les quelques références bibliographiques données à la fin de l'ouvrage pourront guider le lecteur avancé vers des informations plus complètes [9][17].



Chapitre 2

Signaux et systèmes à temps discret

2.1 Introduction

Nous présentons, dans ce premier chapitre, les définitions générales relatives aux signaux et systèmes discrets. Nous considérerons aussi bien les signaux déterministes que les signaux stochastiques et nous définirons les différentes catégories de systèmes discrets en mettant l'accent sur les systèmes linéaires et invariants. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des opérations classiques, produit de convolution, et fonctions de corrélation, qui constituent l'essentiel du traitement linéaire du signal. La transformée en z est présentée de façon détaillée dans le troisième chapitre ; nous aborderons le problème de la détermination pratique de la transformée inverse ; nous donnerons une large palette de ses propriétés et nous finirons par l'exposé des conséquences de sa restriction au cercle unité plus connue sous le nom de transformée de Fourier. Le quatrième chapitre est le plus long ; nous y décrivons en détail le filtrage linéaire du signal numérique déterministe et stochastique ainsi que sa mise en œuvre. Les deux principales familles de filtres, RIF et RII, sont passées en revue ainsi que les conséquences en termes de coût de calcul et de précision des différentes techniques de leur mise en œuvre logicielle et matérielle. Dans le cinquième chapitre nous donnons quelques éléments de détermination des filtres numériques. Les techniques utilisées dans ce domaine sont tellement dépendantes de l'application visée que, dans la pratique, chaque spécialité a ses méthodes de détermination des filtres ; c'est pourquoi, nous nous limitons à la présentation des plus classiques en mettant en évidence par des exemples leurs avantages et inconvénients respectifs. Le sixième et dernier chapitre est consacré à la transformée de Fourier discrète et à ses algorithmes rapides. Nous y indiquons comment et pourquoi cette transformée peut être mise à profit pour la mise en œuvre de certains filtres numériques.

2.2 Signaux déterministes à temps discret

2.2.1 Introduction

On parlera de signal déterministe à temps discret ou indifféremment de signal numérique (à une variable ou monodimensionnel) pour désigner une suite numérique représentée par une fonction de \mathbb{Z} dans \mathbb{R} :

$$x(n) \in \mathbb{R} \text{ avec } n \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

Nous ne considérerons, pour l'essentiel, que des signaux réels. Le cas des signaux complexes ne présente pas de difficultés mathématiques particulières et nous nous permettrons de généraliser directement les propriétés quand ce sera nécessaire (signaux issus de la transformée de Fourier discrète, par exemple : chapitre 7).

Remarque 1 $x(n)$ n'est pas défini si $n \notin \mathbb{Z}$! Mais $x(n)$ varie continûment dans \mathbb{R} . La discrétisation de $x(n)$, nécessaire pour la mise en œuvre pratique des algorithmes, est menée dans l'opération de quantification. Nous examinerons dans un paragraphe particulier (5.7) les conséquences de cette opération.

2.2.2 Représentations des signaux numériques

On utilise couramment quatre types de représentations pour les signaux numériques. Nous illustrons ces représentations par des exemples :

- **Représentation fonctionnelle :**

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 1, 3 \\ 4 & \text{pour } n = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.2)$$

- **Représentation tabulée :**

$$\begin{array}{cccccccccccc} n & . & . & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & . & . \\ x(n) & . & . & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & . & . \end{array} \quad (2.3)$$

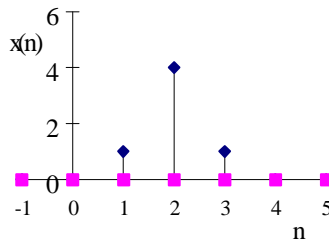
- **Représentation séquentielle :**

$$x(n) = \{\dots, \underline{0}, 1, 4, 1, 0, 0, \dots\} \quad (2.4)$$

L'élément souligné correspond à $n = 0$.

- **Représentation graphique :** figure 1.

On utilise, pour cette représentation, un diagramme «bâton» inspiré du graphe d'une fonction analogique, mais, le signal numérique n'est défini que pour les valeurs entières de l'abscisse.



1. Représentation graphique

2.2.3 Quelques exemples importants de signaux numériques

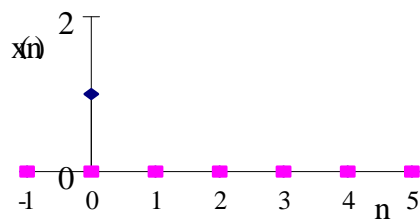
- **Suite unité** ou suite de Dirac : $\delta(n)$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

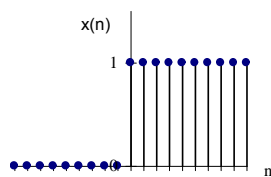
On l'appelle également «impulsion unité», voir figure 2.

- **Echelon unité** ou fonction de Heaviside : $u(n)$, voir figure 3.

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.5)$$



2. Séquence unité

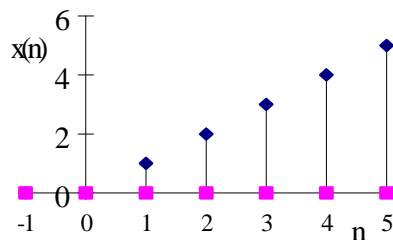


3. Echelon unité

- **Rampe unité** : $u_1(n)$, voir figure 4.

$$u_1(n) = \begin{cases} n & \text{pour } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.6)$$

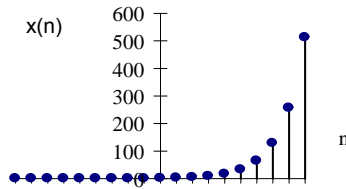
$$\text{ou} \\ u_1(n) = nu(n)$$



4. Rampe unité

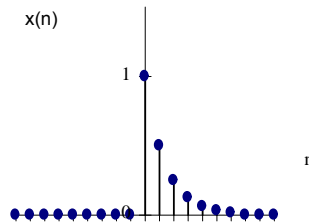
- **Suite exponentielle** : Représentation graphique sur la figure 5.

$$x(n) = a^n \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (2.7)$$

5. Suite exponentielle, cas où $a > 1$

- **Suite exponentielle tronquée** : voir figure 6

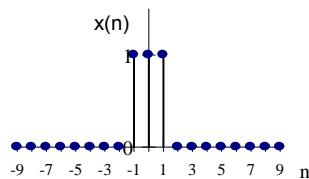
$$x(n) = a^n u(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (2.8)$$

6. Suite exponentielle tronquée, cas où $a < 1$

- **Suite rectangulaire** ou signal boîte (box) : $rect_a(n)$, voir figure 7.

$$rect_a(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -a \leq n \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.9)$$

On a d'ailleurs : $rect_a(n) = u(n+a) - u(n-a-1)$.



7. Rectangle de largeur 3

2.2.4 Quelques définitions, transformations et propriétés à propos des suites numériques déterministes

- **Energie et puissance.**

Par analogie avec le cas des signaux continus on nommera énergie d'un signal discret la quantité positive définie par :

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 \quad (2.10)$$

Remarque 2 Si pour des raisons calculatoires (par exemple dans le cas de transformée de Fourier) on utilise des signaux discrets complexes, cette définition reste valable.

Pour un signal à énergie infinie (périodique par exemple) on préférera utiliser la notion de puissance moyenne (on parlera aussi, de façon un peu abusive, d'énergie moyenne) :

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (2.11)$$

Exemple 1 Si $x(n) = u(n)$. Alors l'énergie diverge ($E = \infty$) tandis que la puissance moyenne du signal reste finie :

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N u(n)^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1}{2N+1} \quad (2.12)$$

Donc :

$$P = \frac{1}{2} \quad (2.13)$$

- **Périodicité.**

Un signal discret est périodique, de période N si :

$$\exists N > 0 \text{ tel que } x(n+N) = x(n), \forall n \in \mathbb{Z} \quad (2.14)$$

Remarque 3 La plus petite valeur de N est la période fondamentale.

Si l'énergie d'un signal périodique calculée sur une période est en général finie, son énergie totale est infinie et on utilisera plutôt dans ce cas la notion de puissance moyenne. On montrera aisément que cette puissance moyenne est d'ailleurs égale à la puissance moyenne calculée sur une période :

$$P = \frac{1}{N} \sum_N |x(n)|^2 \quad (2.15)$$

On utilisera également l'énergie sur une période ; si celle-ci est égale à N l'énergie s'écrit comme suit :

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 \quad (2.16)$$

- **Symétrie.**

Un signal est symétrique ou pair si :

$$x(-n) = x(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (2.17)$$

Un signal est antisymétrique ou impair si :

$$x(-n) = -x(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (2.18)$$

Il faut noter que dans ce cas, on a évidemment $x(0) = 0$.

- **Translation.**

Le signal translaté d'une quantité k (avec $k \in \mathbb{Z}$) est défini par :

$$x_k(n) = x(n - k) \quad (2.19)$$

Remarque 4 *L'opération de translation permet de décomposer une suite discrète quelconque en une somme de suites de Dirac plus ou moins translattées :*

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot \delta(n - k) \quad (2.20)$$

Cette décomposition conduira à l'utilisation du produit de convolution comme outil d'évaluation de la réponse des systèmes linéaires invariants.

- **Retournement.**

Le signal retourné ou inversé est défini par :

$$x_r(n) = x(-n) \quad (2.21)$$

Il faut noter que les opérations de translation et de retournement ne sont pas commutatives :

$$\begin{aligned} x_{k_r}(n) &= x(k - n) \\ \text{et} \\ x_{r_k}(n) &= x(-n - k) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Exemple 2 *Si*

$$x(n) = \text{rect}_2(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -2 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.23)$$

alors la séquence retournée sera identique :

$$x_r(n) = x(n) \quad (2.24)$$

et la translattée de $k = 2$ sera :

$$\begin{aligned} x_{r_2}(n) &= x_2(n) = x(n - 2) \\ x_{r_2}(n) &= \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.25)$$

tandis que la translatée de la séquence retournée sera : $x_{2r}(n)$:

$$\begin{aligned} x_{2r}(n) &= x(-(n-2)) \\ x_{2r}(n) &= \begin{cases} 1 & \text{pour } -4 \leq n \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.26)$$

- **Changement d'échelle ou sous-échantillonnage.**

Un signal discret peut être «sous-échantillonné» ; on définit ainsi une suite numérique plus «grossière» et le signal résultant sera plus resserré. Il ne faut pas confondre cette opération avec un vrai sous-échantillonnage effectué sur un signal analogique, opération dans laquelle l'échelle des abscisses (le temps par exemple) reste inchangée.

$$x_\alpha(n) = x(\alpha n) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{Z} \quad (2.27)$$

- **Sur-échantillonnage**

L'opération de **sur-échantillonnage** (zoom) ne peut être menée aussi simplement, il convient en effet de donner des valeurs aux éléments intermédiaires introduits dans la suite. Plusieurs méthodes sont utilisées ; la plus simple consiste à intercaler des 0 entre les éléments d'origine :

$$x_{1/\alpha}(n) = \begin{cases} x(n/\alpha) & \text{si } n/\alpha \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.28)$$

2.3 Systèmes à temps discret

Ce sont des systèmes ou opérateurs qui transforment des signaux discrets en signaux discrets :

$$x(n) \xrightarrow{H} y(n)$$

H symbolise la transformation (opérateur) effectuée par le système discret. $y(n)$ est la *réponse* du système à une *excitation* $x(n)$.

$$\xrightarrow{x(n)} \boxed{H} \xrightarrow{y(n)}$$

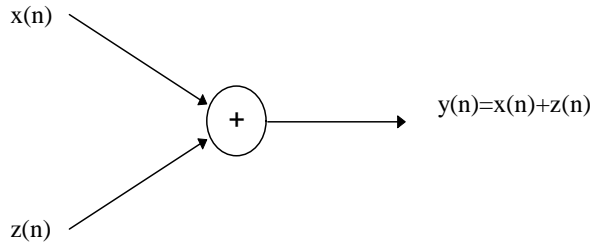
- | | |
|--|--------------------|
| 1) $y(n) = x(n)$ | identité |
| 2) $y(n) = x(n-1)$ | retard élémentaire |
| 3) $y(n) = x(n+1)$ | avance élémentaire |
| 4) $y(n) = \frac{1}{3} [x(n+1) + x(n) + x(n-1)]$ | filtre linéaire |
| 5) $y(n) = \max[x(n+1), x(n), x(n-1)]$ | |
| 6) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$ | valeur cumulée |

Remarque 5 : Pour l'exemple donné en 6), on peut noter qu'il s'agit d'un opérateur récursif et que l'on peut écrire : $y(n) = y(n-1) + x(n)$.

2.3.1 Représentations graphiques

Certaines opérations ont des représentations graphiques standards qui doivent être utilisées. On en trouvera ci-après quelques exemples.

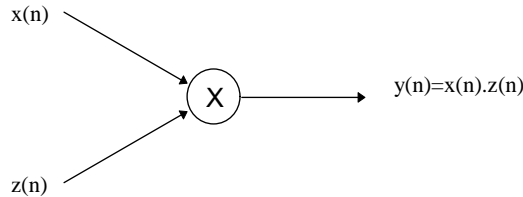
- **Additionneur**



- **Multiplication par une constante**

$$x(n) \xrightarrow{a} y(n) = ax(n) \quad (2.29)$$

- **Multiplieur**



- **Sous-échantillonnage**

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\downarrow \alpha} \longrightarrow y(n) = x(\alpha n) \quad (2.30)$$

- **Sur-échantillonnage**

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\uparrow \alpha} \longrightarrow y(n) = \begin{cases} x(\frac{n}{\alpha}) & \text{si } \frac{n}{\alpha} \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.31)$$

- **Retard unitaire**

$$x(n) \longrightarrow \boxed{z^{-1}} \longrightarrow y(n) = x(n - 1) \quad (2.32)$$

2.3.2 Classifications des systèmes discrets

Les systèmes discrets peuvent être classés dans différentes catégories en fonction de certaines propriétés ou de certains critères. Nous en présentons les principales familles dans les paragraphes suivants.

2.3.2.1 Systèmes statiques ou systèmes dynamiques Un système discret sera dit statique ou sans mémoire si sa sortie de rang n ne dépend que de son entrée de rang n également.

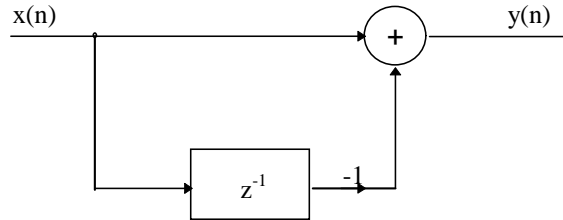
Dans tous les autres cas le système sera dit dynamique ou à mémoire. La mémoire peut être finie (seules les entrées de rang n à $n - N$ sont nécessaires) ou infinie ($N = \infty$).

2.3.2.2 Système invariant ou variant Un système est invariant si :

$$\begin{array}{ccc} x(n) & \xrightarrow{H} & y(n) \\ & \Downarrow & \\ x(n-k) & \xrightarrow{H} & y(n-k) \end{array} \quad \forall n, k \in \mathbb{Z} \quad (2.33)$$

Cette propriété d'invariance est très importante, son test est parfois délicat. On peut retenir que, d'une façon générale, la définition de la réponse d'un système invariant ne doit comporter aucune référence à l'origine absolue du rang n . Les quelques exemples ci-après devraient permettre d'illustrer ce point.

Exemple 3 a- $y(n) = x(n) - x(n-1]$



est un système invariant.

- b- $y(n) = x(-n]$
est un système variant ou dépendant du temps.
- c- $y(n) = nx(n]$
est un système variant.

Le résultat donné en b- est lié au fait que les opérations de retournement et de translation ne peuvent être permutées sans affecter le résultat. Si on considère en entrée de ce système un échelon unité $x_1(n) = u(n)$, la sortie sera $y_1(n) = u(-n)$. Si l'entrée est affectée d'un retard unité : $x_2(n) = u(n-1)$, la sortie sera alors : $y_2(n) = u(-n-1)$ qui est différent de $y_1(n-1) = u(-n+1)$!

2.3.2.3 Système linéaire ou non linéaire Un système H est linéaire si et seulement si :

$$H[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1H[x_1(n)] + a_2H[x_2(n)] \quad (2.34)$$

$$\forall x_1(n), x_2(n), a_1, a_2$$

Cette autre propriété est également fondamentale, sa vérification est plus aisée que celle de l'invariance ; il suffit, en général, d'appliquer la définition.

Exemple 4

- a- $y(n) = y(n-1) + x(n]$
est linéaire.
- b- $y(n) = nx(n]$
est linéaire (et variant).
- c- $y(n) = x(n^2]$
est linéaire (et variant).
- d- $y(n) = x^2(n]$
est non linéaire (mais invariant).

2.3.2.4 Système causal, non causal, anticausal Un système est dit **causal** si sa sortie de rang n ne dépend que des entrées de rang inférieur ou égal à n ($n, n-1, n-2, \dots$).

Un système est dit **anticausal** si sa sortie de rang n ne dépend que des entrées de rang supérieur ou égal à n ($n, n+1, n+2, \dots$).

Remarque 6 En général un système n'est ni causal ni anticausal.

2.3.2.5 Système stable et système instable Un système est **stable** si une entrée bornée conduit à une sortie bornée :

$$|x(n)| < \infty \implies |y(n)| < \infty \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (2.35)$$

Il s'agit d'une stabilité au sens large car un système juste oscillant est considéré comme stable d'après cette définition. On pourra de façon plus stricte considérer qu'un système est stable s'il «relaxe» vers 0 :

$$x(k) = 0, \forall k \in \mathbb{Z} \implies y(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad (2.36)$$

Nous reviendrons de façon plus exhaustive sur le problème de la stabilité des systèmes dans le cas des systèmes linéaires et invariants dans le paragraphe 3.3.2.

2.4 Signaux aléatoires ou stochastiques discrets

2.4.1 Processus discret

Un processus aléatoire discret X sera décrit par ses propriétés statistiques, en particulier par sa loi de probabilité et par ses **moments**. L'étude statistique expérimentale sera menée à travers ses réalisations $x_i(n)$.

Nous nous intéresserons plus particulièrement aux processus **ergodiques** et le plus souvent **stationnaires** (au moins au second ordre). On trouvera des résultats plus complets dans [4][6][8][9] et surtout dans la «bible» [16].

Un processus aléatoire X est ergodique si avec une probabilité de 1 tous ses moments statistiques peuvent être déterminés à partir de n'importe laquelle de ses réalisations. Dans ce cas, les moments temporels sont égaux aux moments statistiques. Dans la pratique courante et en particulier dans le cadre de ce cours, on se contentera des moments du 1^{er} et du 2nd ordre.

2.4.2 Moments statistiques

2.4.2.1 Premier ordre Valeur moyenne statistique ou **espérance**.

$$m_x(n) = E[X(n)] = \sum_i a_i \text{Prob}[x(n) = a_i] \quad (2.37)$$

Si $\{a_i, \dots\}$ est l'ensemble des valeurs discrètes que peut prendre $x(n)$, réalisation de X . En général cette quantité dépend de n . Si l'ensemble des valeurs accessibles à la variable $x(n)$ n'est pas discret, les sommes discrètes sont remplacées par des intégrations sur la gamme des valeurs accessibles.

2.4.2.2 Deuxième ordre On peut définir deux moments statistiques d'ordre 2.

- La **puissance** (parfois qualifiée d'**énergie** ou d'énergie moyenne) :

$$E[X^2(n)] = \sum_i a_i^2 \text{Prob}[x(n) = a_i] \quad (2.38)$$

- L'autocorrélation statistique :

$$r_{xx}(n_1, n_2) = E[X(n_1) \cdot X(n_2)] \quad (2.39)$$

ou encore

$$r_{xx}(n_1, n_2) = \sum_i \sum_j a_i a_j \text{Prob}[x(n_1) = a_i \text{ et } x(n_2) = a_j] \quad (2.40)$$

Cette quantité dépend en général de n_1 et n_2 .

Remarque 7 Si le processus peut prendre des valeurs complexes, on doit remplacer le premier terme des produits par la valeur conjuguée :

$$r_{xx}(n_1, n_2) = E[X^*(n_1) \cdot X(n_2)] \quad (2.41)$$

Si on prend les processus centrés X^c on aboutit à la notion de fonction de **covariance** statistique :

$$X^c = X - E[X] \quad (2.42)$$

et

$$r_{xx}^c(n_1, n_2) = E[X^c(n_1) \cdot X^c(n_2)] \quad (2.43)$$

En développant cette relation il vient :

$$r_{xx}^c(n_1, n_2) = r_{xx}(n_1, n_2) - m_x(n_1) \cdot m_x(n_2) \quad (2.44)$$

Dans le cas où $n_1 = n_2$ on retrouve la notion de **variance** statistique.

On peut, plus généralement pour l'ordre deux, introduire la notion de fonction d'**intercorrélation** statistique de deux signaux aléatoires discrets :

$$r_{xy}(n_1, n_2) = E[X(n_1) \cdot Y(n_2)] \quad (2.45)$$

Remarque 8 Si les variables sont à valeurs dans \mathbb{C} , la définition devient :

$$r_{xy}(n_1, n_2) = E[X^*(n_1) \cdot Y(n_2)] \quad (2.46)$$

2.4.3 Moments temporels

2.4.3.1 Premier ordre : valeur moyenne temporelle.

$$\bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} x(k) = m_x \quad (2.47)$$

Remarque 9 Il est évident que la somme peut s'étendre à n'importe quel intervalle de longueur N .

Remarque 10 Si le processus est périodique, de période N , on a :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} x(k) \quad (2.48)$$

2.4.3.2 Deuxième ordre

- **Puissance** temporelle (ou **énergie** moyenne) :

$$\overline{x^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} x^2(k) = P_x \text{ (ou } E_x) \quad (2.49)$$

- **Fonction d'autocorrélation** temporelle :

$$r_{xx}(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} x(k) \cdot x(k+l) \quad (2.50)$$

Si $l = 0$ on a : $E_x = r_{xx}(0)$.

Si on prend les processus centrés X^c

$$X^c = X - m_x \quad (2.51)$$

on retrouve la notion de fonction de **covariance** :

$$r_{xx}^c(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} [x(k) - m_x] \cdot [x(k+l) - m_x] \quad (2.52)$$

En développant cette relation il vient :

$$r_{xx}^c(l) = r_{xx}(l) - m_x^2 \quad (2.53)$$

Dans le cas où $l = 0$ on retrouve la notion de **variance** :

$$\sigma^2 = E_x - m_x^2 \quad (2.54)$$

Si les processus considérés sont ergodiques on confondra les deux types de moments : statistiques et temporels.

Si les processus sont à valeurs dans l'espace des complexes, on remplacera le premier terme des produits par son conjugué.

2.4.4 Stationnarité

Un processus aléatoire est stationnaire si ses moments sont invariants pour tout changement d'origine des temps.

On se contentera de la **stationnarité au second ordre**. Pour un processus stationnaire et ergodique nous aurons donc :

- $E[X(n)]$ est indépendant de n et $E[X(n)] = m_x$
- $E[X^2(n)]$ est indépendant de n et $E[X^2(n)] = \overline{x^2}$ (puissance).
- $r_{xx}(n_1, n_2)$ n'est fonction que de $n = n_1 - n_2$ et $r_{xx}(n) = E[X(k+n) \cdot X(k)]$ et la **puissance** (ou **énergie** moyenne) s'écrit donc :

$$P = E_x = \overline{x^2} = r_{xx}(0) \quad (2.55)$$

De même la **covariance** s'écrira :

$$r_{xx}^c(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} x^c(k) \cdot x^c(k+l) \quad (2.56)$$

Et la **variance** :

$$\sigma^2 = r_{xx}^c(0) = E_x - m_x^2 \quad (2.57)$$

On déduira aisément les expressions des fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélation pour des signaux stationnaires.

Chapitre 3

Opérations sur les signaux discrets

Parmi toutes les opérations qui peuvent être menées sur des signaux numériques et qui fournissent un résultat appartenant à l'ensemble des signaux numériques, il en est deux qui sont à la base de tous les traitements linéaires : le produit de convolution et le calcul des fonctions de corrélation. Le premier est à l'origine de toute opération de filtrage linéaire, quant au second, il est l'outil privilégié de la caractérisation des signaux stochastiques et de la reconnaissance des signaux déterministes.

3.1 Corrélation de signaux discrets déterministes

L'objectif premier du calcul de la fonction d'intercorrélation de deux signaux déterministes est de mesurer le degré de ressemblance entre ces deux signaux et de déterminer la translation nécessaire à la meilleure coïncidence.

3.1.1 Intercorrélation et autocorrélation

La fonction d'intercorrélation entre les signaux numériques $x(n)$ et $y(n)$ est le signal numérique $r_{xy}(n)$ défini par :

$$r_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k+n) \cdot y(k) \quad (3.1)$$

ou encore en translatant la variable muette :

$$r_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot y(k-n) \quad (3.2)$$

Le cas des signaux périodiques, qui donne lieu à une sommation divergente, sera traité à part (paragraphe 3.1.4 et 7.4.2).

Remarque 11 *Le produit d'intercorrélation n'est pas commutatif. En effet :*

$$r_{yx}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(k+n) \cdot x(k) \quad (3.3)$$

et si on pose $i = n + k$, il vient :

$$r_{yx}(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} y(i) \cdot x(i-n) \quad (3.4)$$

et donc :

$$r_{yx}(n) = r_{xy}(-n) \quad (3.5)$$

La séquence r_{yx} est la séquence r_{xy} retournée autour de 0.

La fonction d'autocorrélation du signal numérique $x(n)$ est le signal numérique défini par :

$$r_{xx}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k+n) \cdot x(k) \quad (3.6)$$

ou encore

$$r_{xx}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot x(k-n) \quad (3.7)$$

3.1.2 Propriétés

3.1.2.1 Energie L'énergie de $x(n)$ peut s'exprimer par la fonction d'autocorrélation en 0 :

$$E_x = r_{xx}(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^2(k) \quad (3.8)$$

Ce résultat est à l'origine de la confusion entre la notion de puissance et la notion d'énergie pour les signaux stochastiques. On pourra retenir cependant qu'à l'énergie dans le cas d'un signal déterministe correspond l'énergie moyenne dans le cas d'un signal aléatoire.

3.1.2.2 Relations d'inégalité Considérons une combinaison linéaire de deux signaux numériques quelconques : $x(n) + by(n-k)$.

L'énergie de cette combinaison sera donnée par :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x(n) + by(n-k)]^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2(n) + b^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y^2(n-k) + 2b \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(n-k) \quad (3.9)$$

soit :

$$r_{xx}(0) + b^2 r_{yy}(0) + 2br_{xy}(k) \geq 0 \quad (3.10)$$

(il s'agit en effet d'une énergie donc d'une quantité positive).

Si on considère cette expression comme une équation du 2^{ème} degré en b, elle est positive ou nulle et son discriminant est donc négatif ou nul car elle n'a pas de racine réelle en dehors des racines doubles :

$$r_{xy}^2(k) - r_{yy}(0) \cdot r_{xx}(0) \leq 0 \quad (3.11)$$

ce qui s'écrit :

$$|r_{xy}(k)| \leq \underbrace{\sqrt{r_{yy}(0) \cdot r_{xx}(0)}}_{\sqrt{E_x E_y}} \quad (3.12)$$

Dans le cas particulier où $x(n) = y(n)$ on obtient :

$$|r_{xx}(k)| \leq \underbrace{r_{xx}(0)}_{E_x} \quad (3.13)$$

Ce qui signifie que le module de la fonction d'autocorrélation est maximum et égal à l'énergie du signal en 0. (Il est clair que c'est en 0 que les deux signaux coïncident le mieux).

3.1.2.3 Normalisation Les propriétés des fonctions d'intercorrélations ne changent pas si on modifie le facteur d'échelle. On utilise ainsi souvent la fonction d'**intercorrélations normalisées** :

$$\rho_{xx}(n) = \frac{r_{xx}(n)}{r_{xx}(0)} \quad (3.14)$$

et :

$$\rho_{xy}(n) = \frac{r_{xy}(n)}{\sqrt{r_{xx}(0) \cdot r_{yy}(0)}} \quad (3.15)$$

On a évidemment :

$$\begin{cases} |\rho_{xx}(n)| \leq 1 \\ |\rho_{xy}(n)| \leq 1 \end{cases} \quad (3.16)$$

3.1.2.4 Parité La fonction d'autocorrélation est un signal numérique symétrique ou pair :

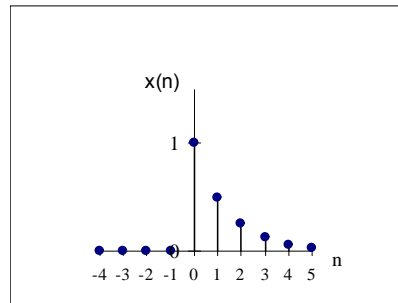
$$r_{xx}(n) = r_{xx}(-n) \quad (3.17)$$

3.1.3 Exemples

Calculons la fonction d'autocorrélation de la suite exponentielle tronquée :

$$x(n) = a^n u(n) \text{ avec } 0 < a < 1$$

La figure 8 illustre le cas où $a = 0,5$.



8. Exponentielle tronquée: $x(n) = 0,5^n u(n)$.

- Pour $k > 0$

$$r_{xx}(k) = \sum_{n=k}^{+\infty} x(n)x(n-k) = \sum_{n=k}^{+\infty} a^n a^{n-k} \quad (3.18)$$

$$r_{xx}(k) = a^{-k} \sum_{n=k}^{+\infty} a^{2n} \quad (3.19)$$

On a une série géométrique de raison a^2 donc¹ :

$$r_{xx}(k) = a^{-k} \cdot \frac{a^{2k}}{1 - a^2} \quad (3.20)$$

soit :

$$r_{xx}(k) = \frac{a^k}{1 - a^2} \quad (3.21)$$

et l'énergie s'écrit :

$$r_{xx}(0) = \frac{1}{1 - a^2} \quad (3.22)$$

¹ Somme d'une série géométrique: $\sum_{k=k_1}^{k_2} a^k = \frac{a^{k_1} - a^{k_2+1}}{1 - a}$

- Pour $k < 0$

$$r_{xx}(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)x(n-k) \quad (3.23)$$

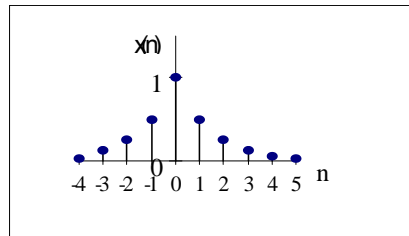
et donc directement :

$$r_{xx}(k) = \frac{a^{-k}}{1-a^2} \quad (3.24)$$

- Pour résumer :

$$\begin{aligned} r_{xx}(k) &= \frac{a^{|k|}}{1-a^2} \\ r_{xx}(0) &= \frac{1}{1-a^2} \\ \rho_{xx}(k) &= a^{|k|} \end{aligned} \quad (3.25)$$

La figure 9 représente la fonction d'autocorrélation normalisée pour le cas envisagé plus haut :



9. Fonction d'autocorrélation de l'exponentielle tronquée

3.1.4 Corrélation de signaux périodiques

L'énergie des signaux périodiques étant infinie, les fonctions de corrélation sont divergentes et une autre définition doit être utilisée pour rétablir la convergence. Cette définition est en fait analogue à celle déjà donnée pour les signaux stochastiques ; elle pourra être utilisée pour tous les signaux d'énergie infinie.

Fonction d'intercorrélation (moyenne) :

$$r_{xy}(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} x(n)y(n-k) \quad (3.26)$$

Si les signaux sont périodiques, la sommation sera effectuée sur une période :

$$r_{xy}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n-k) \quad (3.27)$$

et :

$$r_{xx}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-k) \quad (3.28)$$

Il est évident dans ce cas que les fonctions de corrélation r_{xx} et r_{xy} sont des signaux numériques périodiques de même période N que les signaux $x(n)$ et $y(n)$.

3.2 Convolution de signaux discrets déterministes

Nous verrons l'intérêt du produit de convolution surtout avec les systèmes linéaires invariants.

3.2.1 Définition

Le produit de convolution entre $x(n)$ et $y(n)$ est la suite numérique $z(n)$ définie par :

$$z(n) = x * y(n) \quad (3.29)$$

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot y(n-k) \quad (3.30)$$

Remarque 12 : *Le produit de convolution est différent de la fonction d'intercorrélation, en effet :*

$$r_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(k-n) \quad (3.31)$$

Et si on définit la séquence retournée $y_r(n) = y(-n)$, on obtient :

$$r_{xy}(n) = x * y_r(n) \quad (3.32)$$

ce qui est différent de $x * y(n)$.

On peut vérifier d'ailleurs que contrairement à l'intercorrélation le produit de convolution est **commutatif** :

$$y * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(k) \cdot x(n-k) \quad (3.33)$$

et en posant $l = n - k$

$$y * x(n) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} y(n-l) \cdot x(l) = x * y(n) \quad (3.34)$$

Donc :

$$z(n) = x * y(n) = y * x(n) \quad (3.35)$$

Remarque 13 *Le cas des signaux périodiques qui conduit à des sommations divergentes sera traité au paragraphe 7.4.1.*

3.2.2 Propriétés

3.2.2.1 Associativité Le produit de convolution est associatif :

$$[x * (y * z)](n) = [(x * y) * z](n) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (3.36)$$

Relation que l'on écrit plus simplement :

$$x * y * z(n) \quad (3.37)$$

La démonstration pourra être faite à titre d'exercice car elle est triviale.

3.2.2.2 Distributivité par rapport à l'addition Cette propriété est également évidente et elle s'énonce comme suit :

$$x * (y + z)(n) = x * y(n) + x * z(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (3.38)$$

3.2.2.3 Élément neutre de la convolution L'élément neutre du produit de convolution est la suite de Dirac :

$$x * \delta(n) = \sum_k x(k)\delta(n - k) = x(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (3.39)$$

Remarque 14 Cette propriété a déjà été présentée dans le paragraphe consacré à la translation des signaux numériques (paragraphe 2.2.4).

3.2.2.4 Retournement du produit de convolution Soit

$$z(n) = x * y(n) \quad (3.40)$$

Exprimons la séquence retournée $z_r(n) = z(-n)$:

$$z_r(n) = z(-n) = \sum_k x(k)y(-n - k) \quad (3.41)$$

En posant $l = n + k$ il vient :

$$z_r(n) = \sum_l x(-n + l)y(-l) \quad (3.42)$$

Ce qui correspond à la propriété suivante :

$$z_r(n) = x_r * y_r(n) \quad (3.43)$$

3.3 Systèmes linéaires invariants : SLI

On rappelle que pour un système linéaire invariant :

$$x(n) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y(n) = H[x(n)] \quad (3.44)$$

si l'entrée est :

$$ax(n) + by(n) \quad (3.45)$$

la sortie sera :

$$aH[x(n)] + bH[y(n)] \quad (3.46)$$

et si l'entrée est :

$$x(n - k) \quad (3.47)$$

la sortie sera ;

$$y(n - k) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (3.48)$$

3.3.1 Réponse d'un SLI et produit de convolution

Si l'entrée d'un système est l'impulsion unité $\delta(n)$, la sortie sera la **réponse impulsionnelle** $h(n)$ du système :

$$\delta(n) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow h(n) \quad (3.49)$$

Nous avons vu qu'un signal numérique quelconque pouvait toujours s'écrire comme une somme pondérée d'impulsions unités translattées (paragraphe 2.2.4) :

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k) \quad (3.50)$$

Si on considère un SLI, la sortie pourra donc s'écrire :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot h(n-k) \quad (3.51)$$

Ce qui s'exprime simplement par le produit de convolution entre l'entrée et la réponse impulsionnelle du système :

$$y(n) = x * h(n) \quad (3.52)$$

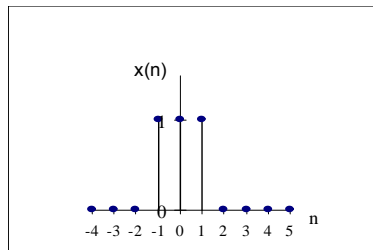
Un SLI sera donc entièrement caractérisé par sa réponse impulsionnelle et le calcul de sa réponse à une entrée quelconque est une convolution. Par voie de conséquence, n'importe quelle suite numérique peut être considérée comme la réponse impulsionnelle d'un SLI.

On donne habituellement le nom de **filtre linéaire** à un SLI.

Exemple 5 Considérons le SLI défini par sa réponse impulsionnelle (voir figure 10) $h(n)$:

$$h(n) = \text{rect}_1(n) \quad (3.53)$$

Si on applique à l'entrée de ce filtre un échelon unité $u(n)$, on obtient en sortie :



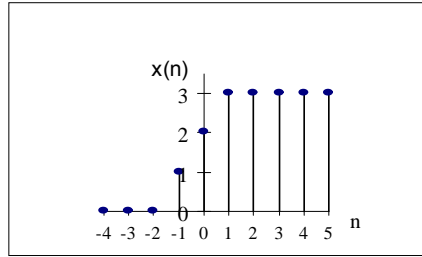
10. SLI: $h(n)=\text{rect}_1(n)$

$$y(n) = x * h(n) \quad (3.54)$$

avec :

$$y(n) = \{..0, \underline{1}, 2, 3, 3, ..\} \quad (3.55)$$

Il s'agit d'un filtre passe bas type «box». On pourra vérifier l'invariance par translation.



11. Réponse du filtre box à l'échelon

3.3.2 Stabilité d'un SLI

Nous considérons un système linéaire invariant relaxé. C'est-à-dire dont la sortie est constante si l'entrée est constante. Conformément à la définition donnée dans le chapitre précédent (paragraphe 2.3.2.5), le SLI sera stable si la sortie reste bornée quel que soit le signal d'entrée borné appliqué. Voyons la conséquence sur la réponse impulsionnelle :

$$x(n) \text{ borné} \iff |x(n)| \leq M_x < \infty \quad \forall n \quad (3.56)$$

On aura donc grâce à l'inégalité triangulaire :

$$|y(n)| \leq \sum_k |h(k)| |x(n-k)| \quad (3.57)$$

soit en majorant $|x(n-k)|$ par M_x :

$$|y(n)| \leq M_x \sum_k |h(k)| \quad (3.58)$$

On pourra en déduire une condition suffisante de stabilité pour le SLI :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \leq M_h < \infty \quad (3.59)$$

On vérifie que cette condition est aussi nécessaire en supposant qu'elle n'est pas vérifiée. En effet si :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \infty \quad (3.60)$$

et si on a l'entrée :

$$\begin{cases} x(n) = \frac{h(-n)}{|h(-n)|} & \text{si } h(-n) \neq 0 \\ x(n) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors pour $n = 0$:

$$y(0) = \sum_k x(-k)h(k) = \sum_k |h(k)| = \infty \quad (3.61)$$

On conclut qu'un système linéaire et invariant sera stable si et seulement si sa **réponse impulsionnelle est absolument sommable**.

3.3.3 Mise en cascade et en parallèle de SLI

Les règles de mise en cascade et en parallèle des SLI découlent des propriétés d'associativité, de commutativité et de distributivité du produit de convolution.

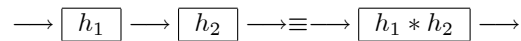
- On aura en effet pour la mise en cascade :

$$y(n) = (x * h_1) * h_2(n) = x * (h_1 * h_2)(n) = x * (h_2 * h_1)(n) \quad (3.62)$$

Le filtre résultant de la mise en cascade de deux SLI aura pour réponse impulsionnelle le produit de convolution des réponses impulsionnelles des deux SLI :

$$h(n) = h_1 * h_2(n) \quad (3.63)$$

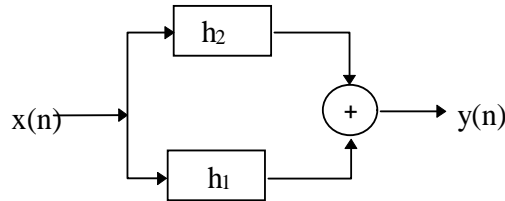
ou



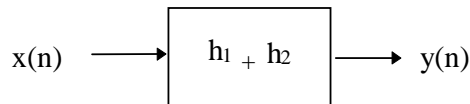
- Pour la mise en parallèle, on aura :

$$y(n) = x * h_1(n) + x * h_2(n) = x * (h_1 + h_2)(n) \quad (3.64)$$

ou



||



3.3.4 Séparation de la partie causale et de la partie anticausale

Nous avons vu au chapitre précédent que dans un système causal la sortie de rang n ne dépend que des entrées de rang inférieur ou égal à n . Or pour un SLI de réponse impulsionnelle $h(n)$:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)h(n-k) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} x(k)h(n-k) \quad (3.65)$$

Posons :

$$h(k) = h^+(k) + h^-(k) \quad (3.66)$$

avec :

$$\begin{cases} h^+(k) = h(k) \cdot u(k) \\ h^-(k) = h(k) \cdot u(-1-k) \end{cases} \quad (3.67)$$

L'équation 3.65 s'écrira :

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^n x(k)h^+(n-k) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} x(k)h^-(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h^+(n-k) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h^-(n-k) \end{aligned} \quad (3.68)$$

Donc :

$$y(n) = y^+(n) + y^-(n) \quad (3.69)$$

Le système dont la sortie est $y^+(n)$ est causal et le système dont la sortie est $y^-(n)$ est anticausal.

Tout SLI peut s'écrire comme la somme d'un système causal et d'un système anticausal en décomposant sa réponse impulsionnelle.

Remarque 15 En fait une *infinité de choix* sont possibles selon la valeur choisie pour $h(0)$; on peut, par exemple, «couper la poire en deux» et attribuer à chaque sous système la moitié de la valeur correspondant à 0.

3.3.5 SLI à réponse impulsionnelle finie : RIF ou infinie : RII

(en anglais : **FIR or IIR filters**)

Un RIF est caractérisé par le fait que sa réponse impulsionnelle est nulle en dehors d'un certain intervalle. On pourra dans ce cas caractériser le SLI par une séquence finie de valeurs numériques. On appelle souvent cette réponse le **masque de convolution** du filtre.

Exemple 6

$$h(n) = \{.., 0, 1, \underline{1}, 1, 0, ..\} \quad (3.70)$$

Le masque sera :

$$[1 \ \underline{1} \ 1]$$

Le calcul de la réponse est effectué en appliquant le masque renversé sur l'élément de l'entrée correspondant au rang de la sortie cherchée et en effectuant la somme pondérée par les valeurs du masque.

Exemple 7 Masque de convolution :

$$[-1 \ \underline{0} \ 1]$$

Si le signal d'entrée $x(n)$ est un échelon :

$$\begin{array}{cccccccccc} x(n) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \text{masque} & & & & & \rightarrow & [1 & 0 & -1] & \rightarrow \\ y(n) & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Si la réponse impulsionnelle s'étend sur un intervalle non borné on dit que le système est un filtre RII.

Dans ce cas le masque de convolution complet ne peut être exprimé explicitement et le calcul de la réponse ne peut être mené comme précédemment. On sera conduit, dans certains cas à admettre une certaine imprécision dans le calcul de cette réponse. Il existe cependant des familles de filtres RII pour lesquels la réponse est

calculable sans approximation (filtres récurrents par exemple). Ces éléments seront précisés dans le chapitre 5 consacré aux filtres et à leur mise en œuvre.

3.3.6 SLI et fonctions d'intercorrélation

3.3.6.1 Intercorrélation entre l'entrée et la sortie Soit un SLI de réponse impulsionnelle $h(n)$, sa réponse $y(n)$ à une entrée $x(n)$ s'écrit :

$$y(n) = h * x(n) = \sum_k h(k)x(n-k) \quad (3.71)$$

Calculons :

$$r_{yx}(n) = \sum_k y(n+k)x(k) \quad (3.72)$$

Si on pose comme d'habitude $x_r(n) = x(-n)$, il vient :

$$r_{yx}(n) = y * x_r(n) \quad (3.73)$$

Donc :

$$r_{yx}(n) = (h * x) * x_r(n) \quad (3.74)$$

Comme le produit de convolution est associatif :

$$r_{yx}(n) = h * (x * x_r)(n) \quad (3.75)$$

Donc :

$$r_{yx}(n) = h * r_{xx}(n) \quad (3.76)$$

Et de même, on montrera en utilisant la propriété de retournement du produit de convolution que :

$$r_{xy}(n) = h_r * r_{xx}(n) \quad (3.77)$$

3.3.6.2 Autocorrélation en sortie La fonction d'autocorrélation du signal de sortie d'un SLI s'écrit :

$$r_{yy}(n) = (h * x) * (h * x)_r(n) \quad (3.78)$$

Or :

$$(h * x)_r(n) = x_r * h_r(n) \quad (3.79)$$

Donc :

$$r_{yy}(n) = h * x * x_r * h_r(n) \quad (3.80)$$

Soit :

$$r_{yy}(n) = r_{hh} * r_{xx}(n) \quad (3.81)$$

En $n = 0$ on obtient l'énergie en sortie du filtre :

$$E_y = r_{yy}(0) = \sum_k r_{hh}(k) \cdot r_{xx}(k) \quad (3.82)$$

Remarque 16 Ces relations se généralisent au cas des signaux à énergie infinie et au cas des *signaux stochastiques*, à condition de considérer l'énergie moyenne.

3.3.7 Valeur moyenne de la réponse d'un SLI

Soit :

$$y(n) = h * x(n) = \sum_k h(k)x(n-k) \quad (3.83)$$

La valeur moyenne de $y(n)$ sera :

$$\bar{y} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \sum_k h(k)x(n-k) \quad (3.84)$$

On peut permuter les signes de sommation si les sommes sont finies :

$$\bar{y} = \sum_k h(k) \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} x(n-k) \right] \quad (3.85)$$

D'où :

$$\bar{y} = \bar{x} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \quad (3.86)$$

On peut en conclure par exemple que la moyenne de la réponse d'un filtre à réponse impulsionnelle anti-symétrique est nulle. Ou encore que si un filtre doit conserver la valeur moyenne des signaux (filtre passe-bas), la somme des coefficients de sa réponse impulsionnelle doit être égale à 1.

Remarque 17 *Ce résultat, moyennant les changements de définitions qui s'imposent, s'applique aussi aux signaux non déterministes.*

Chapitre 4

Transformée en z

La transformée en z joue pour les signaux numériques le même rôle que la transformée de Fourier pour les signaux continus. Ses propriétés la rendent très pratique pour l'étude des systèmes linéaires invariants. Elle permet une représentation compacte d'un certain nombre de signaux numériques et elle facilite la manipulation de ces signaux. A la différence de la transformée de Fourier elle reste formelle, le calcul explicite de la transformée n'est que rarement nécessaire et son interprétation en termes de présentation fréquentielle n'est pas très explicite. Ce dernier point sera résolu par l'utilisation d'une restriction de la transformée en z : la transformée de Fourier discrète qui sera présentée en fin de chapitre au paragraphe 4.8.

4.1 Définition

La transformée en z de $x(n)$ est définie, si elle existe par :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (4.1)$$

La transformée existe si la série converge ; ceci se produit en général pour des valeurs de la variable complexe z choisies dans une région limitée de l'espace des complexes, la région de convergence : **RDC** ou **ROC** en anglais. En toute rigueur la donnée de la RDC devrait toujours accompagner la transformée $X(z)$. Nous négligerons ce point dans la pratique quand aucune restriction particulière n'y sera liée.

- Notation :

$$x(n) \xrightarrow{z} X(z) \quad (4.2)$$

ou :

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] \quad (4.3)$$

Exemple 8 Soit le signal rectangle :

$$x(n) = \text{rect}_2(n) \quad (4.4)$$

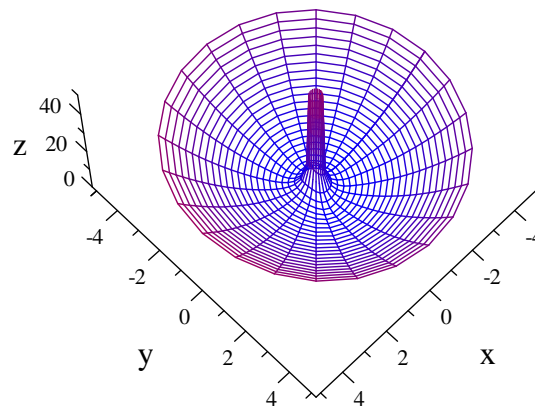
alors :

$$X(z) = z^{-2} + z^{-1} + 1 + z + z^2 \quad \text{avec RDC} = \mathbb{C} - \{0\} - \{\infty\} \quad (4.5)$$

Il est possible de proposer une représentation graphique de la transformée en z ; mais comme il s'agit d'une fonction complexe de variable complexe, nous serons contraints de représenter séparément le module et l'argument (chacun dans une représentation 3D). Le résultat n'est pas vraiment pratique et cette représentation n'est pratiquement jamais utilisée. Nous donnons dans les figures 12 et 13 un exemple de ce type de graphe pour le signal rectangle considéré.

Exemple 9 Soit le signal échelon unité :

$$x(n) = u(n) \quad (4.6)$$



12. Module de la transformée en z du signal rectangle (x est la partie réelle et y la partie imaginaire)

alors :

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{avec } |z| > 1 \quad (4.7)$$

Exemple 10 Soit l'impulsion unité :

$$x(n) = \delta(n) \quad (4.8)$$

alors :

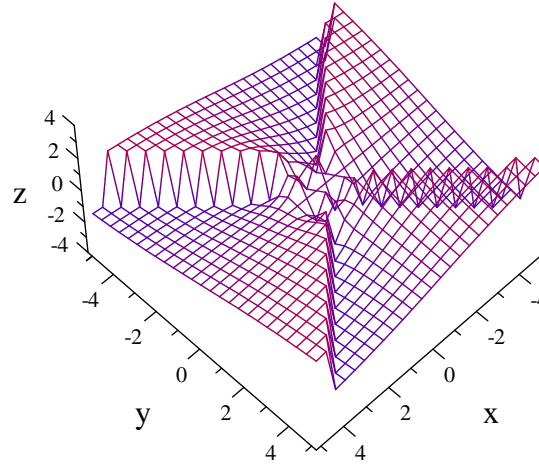
$$X(z) = 1 \quad \text{avec RDC} = \mathbb{C} \quad (4.9)$$

Remarque 18 Si on restreint la transformée au cercle unité, $z = e^{j2\pi v}$, la transformée en z se ramène à la transformée de Fourier :

$$X(e^{j2\pi v}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi v k} \quad (4.10)$$

On vérifiera d'ailleurs au passage que la transformée est périodique de période 2π .

Remarque 19 La RDC d'un signal fini de durée finie est le plan \mathbb{C} dans son ensemble à l'exception éventuelle-ment de l'origine et/ou de l'infini.

13. Argument de la transformée en z (à 2π près) du signal rectangle

4.2 Région de convergence ou existence de la transformée

4.2.1 Anneau de convergence

Essayons de déterminer la forme générale de la RDC.

On pose :

$$z = r e^{j\theta} \quad (4.11)$$

La transformée en z s'écrit alors :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-jn\theta} \quad (4.12)$$

D'après le critère de Cauchy on sait que la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} v(k) \quad (4.13)$$

converge si :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |v(k)|^{\frac{1}{k}} < 1 \quad (4.14)$$

Or

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (4.15)$$

Pour que la première des deux séries ci-dessus converge, il faut que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x(-k) z^k|^{\frac{1}{k}} < 1 \quad (4.16)$$

soit :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x(-k)|^{\frac{1}{k}} |z| < 1 \quad (4.17)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x(-k)|^{\frac{1}{k}} < \frac{1}{|z|}$$

On pose :

$$R_{x_+} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} |x(-k)|^{\frac{1}{k}}} \quad (4.18)$$

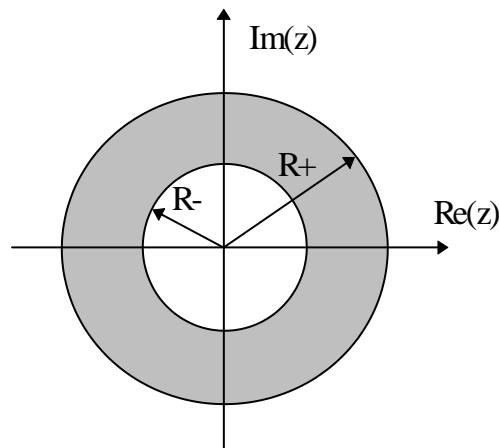
et de même :

$$R_{x_-} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} |x(k)|^{\frac{1}{k}}} \quad (4.19)$$

En résumé, pour que les deux séries, et donc la transformée en z , convergent il faut que :

$$0 \leq R_{x_-} < |z| < R_{x_+} \leq \infty \quad (4.20)$$

Dans le cas général, la région de convergence est donc un **anneau de convergence**, la figure 14 propose un exemple d'anneau de convergence.



14. Anneau de convergence

Exemple 11 Soit le signal échelon unité $x(n) = u(n)$. On vérifie aisément que :

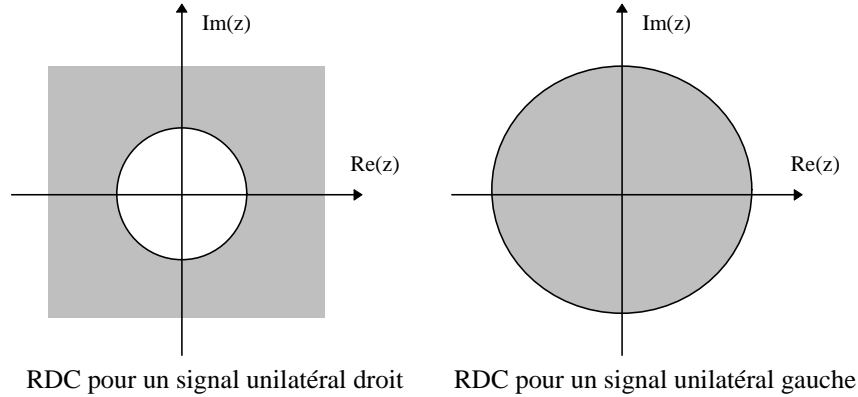
$$\begin{aligned} R_{x_-} &= 1 \\ R_{x_+} &= +\infty \end{aligned} \quad (4.21)$$

Exemple 12 Soit la suite exponentielle tronquée : $x(n) = a^n u(n)$. Alors

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (4.22)$$

et l'anneau de convergence devient un disque défini par :

$$|z| > |a| \quad (4.23)$$



1. Régions de convergence pour des signaux unilatéraux

4.2.2 Cas d'un signal unilatéral

- Si $x(n)$ est un signal **unilatéral droit** :

$$\begin{cases} x(n) \neq 0 & \text{si } n \geq 0 \\ x(n) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.24)$$

alors d'après les expressions précédentes :

$$R_{x_+} = \infty \quad (4.25)$$

donc la transformée existe en dehors d'un disque de rayon R_{x_-} .

- La réciproque est vraie pour un signal **unilatéral gauche**. Dans ce cas la RDC est un disque.

4.3 Transformée en z inverse

Le théorème de Cauchy (théorème des résidus) permet d'exprimer la transformée en z inverse, donc de déterminer $x(n)$ connaissant $X(z)$ et la RDC, dans le cas général. Il est cependant d'un usage lourd et on essaiera, dans la mesure du possible, d'éviter d'y avoir recours et on utilisera plutôt des tables de transformées en z ou d'autres méthodes simples.

Si nous partons de l'expression de la transformée en z d'un signal $x(n)$:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (4.26)$$

si on multiplie par z^{k-1} et si on intègre le long d'un contour fermé \mathcal{C} entourant l'origine et situé dans la RDC, on obtient :

$$\oint_{\mathcal{C}} X(z)z^{k-1}dz = \oint_{\mathcal{C}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}z^{k-1}dz \quad (4.27)$$

Dans la mesure où la série converge sur le contour d'intégration, on peut interchanger les signes de sommation :

$$d \oint_{\mathcal{C}} X(z)z^{k-1}dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \oint_{\mathcal{C}} z^{k-1-n}dz \quad (4.28)$$

Or d'après le théorème de Cauchy :

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} z^{k-1-n} dz = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases}, j \text{ étant la racine de } -1 \quad (4.29)$$

On obtient donc la **formule d'inversion** de la transformée en z :

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} X(z) z^{k-1} dz \quad (4.30)$$

Le calcul explicite de la séquence $x(k)$ d'après la formule d'inversion est possible par la **méthode des résidus** dont nous donnons ci-après le principe. Le théorème de Cauchy permet de préciser en effet que :

$$x(k) = \sum [\text{résidus de } X(z) z^{k-1} \text{ dans } \mathbb{C}] \quad (4.31)$$

On appelle résidu à un pôle $z = a$ d'ordre q de la fonction $X(z) z^{k-1}$ la quantité :

$$\text{Res}_a^q = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(q-1)!} \cdot \frac{d^{q-1} [X(z) z^{k-1} (z-a)^q]}{dz^{q-1}} \quad (4.32)$$

Exemple 13 Prenons comme *exemple* la transformée en z de l'échelon unité :

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \text{ avec } |z| > 1 \quad (4.33)$$

En appliquant la formule d'inversion :

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} \frac{z^{k-1}}{1-z^{-1}} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} \frac{z^k}{z-1} dz \quad (4.34)$$

On peut prendre comme contour d'intégration un cercle de rayon supérieur à 1. Il y a deux cas à considérer suivant le signe de k :

- $k \geq 0$

On a un pôle simple : $a = 1$ et le résidu sera :

$$\text{Res}_1^1 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z-1} z^k = 1 \quad (4.35)$$

Donc $x(k) = 1$.

- $k < 0$

On a un pôle simple : $a = 1$ et un pôle d'ordre $|k|$: $a = 0$. Le résidu au pôle simple 1 est le même que dans le cas précédent : $\text{Res}_1^1 = 1$. On pourra vérifier en prenant quelques cas particuliers ($k = -1, -2, \dots$) que $\text{Res}_0^{|k|} = -1$. De telle sorte que $x(k) = 1 - 1 = 0$.

Finalement, on retrouve bien : $x(k) = u(k)$.

4.4 Le Cepstre

Le Cepstre complexe de la séquence $x(n)$ est la séquence $c_x(n)$ dont la transformée en z est $C_x(z)$ telle que :

$$C_x(z) = \ln [X(z)] \quad (4.36)$$

Le cepstre complexe existe si $C_x(z)$ converge. On a alors :

$$C_x(z) = \ln [X(z)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_x(n) z^{-n} \quad (4.37)$$

avec

$$c_x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \ln [X(z)] z^{n-1} dz \quad (4.38)$$

Si le cepstre complexe converge sur le cercle unité, on peut l'estimer sur ce cercle en posant $z = e^{j\omega}$:

$$C_x(e^{j\omega}) = \ln [X(e^{j\omega})] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_x(n) e^{-jn\omega} \quad (4.39)$$

ce qui correspond à la transformée de Fourier du signal numérique $c_x(n)$.

Réciproquement, ce signal peut être obtenu par transformation de Fourier inverse :

$$c_x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln [X(e^{j\omega})] e^{jn\omega} d\omega \quad (4.40)$$

Si on exprime $X(\omega)$ sous la forme :

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (4.41)$$

On aura :

$$C_x(e^{j\omega}) = \ln |X(e^{j\omega})| + j\varphi(\omega) \quad (4.42)$$

La représentation graphique de $C_x(e^{j\omega})$ s'apparente aux diagrammes de Bode bien connus dans le cas des signaux continus. Les propriétés de construction par additions de courbes existent également, nous le verrons dans le cas de la réponse des filtres numériques (paragraphe 5.5.4). C'est la principale raison de l'emploi de ce mode de présentation des propriétés fréquentielles des signaux numériques.

Le cepstre proprement dit est un signal numérique (il est clair que $C_x(\omega)$ est périodique de période 2π) qui est l'original par transformée de Fourier inverse de $C_x(\omega)$:

$$c_x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |X(e^{j\omega})| e^{jn\omega} d\omega + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\omega) e^{jn\omega} d\omega \quad (4.43)$$

Comme le signal $x(n)$ est réel, sa transformée de Fourier a des propriétés de symétrie que l'on peut exploiter (voir paragraphe 4.8) et il vient :

$$c_x(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln |X(e^{j\omega})| \cos n\omega d\omega - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\omega) \sin n\omega d\omega \quad (4.44)$$

Le cepstre est donc dans ce cas un signal numérique réel. Un exemple de calcul de cepstre est donné dans le paragraphe 4.8 consacré spécifiquement à la transformée de Fourier des signaux numériques.

Remarque 20 Dans certaines application comme le traitement de la parole on ne calcule qu'une partie de cepstre qui correspond au module de $X(e^{j\omega})$:

$$c_m(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln |X(e^{j\omega})| \cos n\omega d\omega \quad (4.45)$$

4.5 Propriétés de la transformée en z

4.5.1 Linéarité

La transformée en z est linéaire. En effet si :

$$x(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$$

alors :

$$X(z) = a_1X_1(z) + a_2X_2(z) \quad (4.46)$$

$\forall a_1, a_2$ constantes réelles ou complexes.

Cette propriété est mise à profit pour la recherche des transformées inverses ; on cherchera, par exemple, une décomposition en somme de termes simples. La RDC d'une somme de transformées est au moins l'intersection des RDC.

Exemple 14 On peut utiliser la propriété de linéarité pour déterminer la transformée en z de :

$$x(n) = u(n) \cos(n\omega_o) \quad (4.47)$$

en utilisant la formule d'Euler :

$$x(n) = u(n) \left[\frac{e^{jn\omega_o} + e^{-jn\omega_o}}{2} \right] \quad (4.48)$$

sachant que :

$$u(n)e^{jn\omega_o} \xrightarrow{z} \frac{1}{1 - e^{j\omega_o}z^{-1}} \quad \text{avec } |z| > 1 \quad (4.49)$$

donc :

$$X(z) = \frac{1/2}{1 - e^{j\omega_o}z^{-1}} + \frac{1/2}{1 - e^{-j\omega_o}z^{-1}} \quad \text{avec } |z| > 1 \quad (4.50)$$

4.5.2 Théorème du retard

Connaissant la transformée en z du signal $x(n)$ nous cherchons à déterminer la transformée du même signal retardé de k (entier), $x_k(n) = x(n - k)$:

$$X_k(z) = \sum_n x(n - k)z^{-n} \quad (4.51)$$

En posant $l = n - k$, il vient :

$$X_k(z) = \sum_l x(l)z^{-l}z^{-k} \quad (4.52)$$

et donc :

$$X_k(z) = X(z) \cdot z^{-k} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \quad (4.53)$$

Remarque 21 La condition sur k est importante ; en effet la relation n'est plus vraie si k n'est pas entier, car alors l ne l'est plus et la sommation ne s'effectue plus sur la suite des entiers et la définition de la transformée en z n'est plus respectée.

L'opération du retard ne change pas la RDC sauf éventuellement en 0 et à l'infini.

Dans le cas d'un retard unitaire : $k = 1$, l'opération de retard revient dans l'espace des transformées à la multiplication par z^{-1} d'où la notation pour l'opérateur retard unité :

$$\rightarrow \boxed{z^{-1}} \rightarrow \quad (4.54)$$

Exemple 15 On peut utiliser le théorème du retard pour déterminer la transformée en z d'une fonction rectangle causale.

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.55)$$

On peut écrire :

$$x(n) = u(n) - u(n - N) \quad (4.56)$$

donc

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{z^{-N}}{1 - z^{-1}} \quad (4.57)$$

et donc :

$$X(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \quad (4.58)$$

4.5.3 Sous-échantillonnage

Nous considérons l'opération de sous-échantillonnage dans le cas général qui consiste à ne conserver d'un signal numérique donné qu'un échantillon sur α , α étant entier :

$$x_\alpha(k) = x(\alpha k) \quad \text{avec } \alpha, k \in \mathbb{Z} \quad (4.59)$$

La transformée en z du signal sous-échantillonné sera donnée par :

$$X_\alpha(z) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\alpha-1} X \left[(ze^{j2\pi k})^{\frac{1}{\alpha}} \right] \quad (4.60)$$

si $X(z)$ est la transformée en z de $x(n)$. La vérification de ce résultat ou sa démonstration inductive pourront faire l'objet d'exercices, une démonstration déductive est donnée ci-après.

Soit un signal $x'(k)$ égal à $x(k)$ pour k multiple de α et nul ailleurs :

$$x'(k) = \begin{cases} x(k) & \text{si } k = n\alpha \text{ avec } n \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.61)$$

Or les racines α -ièmes de l'unité ont la propriété d'orthogonalité :

$$\sum_{l=0}^{\alpha-1} e^{-j2\pi l \frac{k}{\alpha}} = \begin{cases} \alpha & \text{si } k = n\alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.62)$$

Donc :

$$x'(k) = x(k) \cdot \frac{1}{\alpha} \sum_{l=0}^{\alpha-1} e^{-j2\pi l \frac{k}{\alpha}} \quad (4.63)$$

Sa transformée en z sera donc :

$$X'(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot \frac{1}{\alpha} \sum_{l=0}^{\alpha-1} e^{-j2\pi l \frac{k}{\alpha}} z^{-k} = \frac{1}{\alpha} \sum_{l=0}^{\alpha-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \left(e^{j \frac{2\pi l}{\alpha}} z \right)^{-k} \quad (4.64)$$

donc :

$$X'(z) = \frac{1}{\alpha} \sum_{l=0}^{\alpha-1} X(e^{j\frac{2\pi l}{\alpha}} z) \quad (4.65)$$

Or il est clair que :

$$X_{\alpha}(z) = X'(z^{\frac{1}{\alpha}}) \quad (4.66)$$

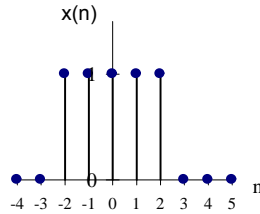
d'où le résultat annoncé plus haut.

Nous retiendrons particulièrement le résultat correspondant à un sous-échantillonnage de facteur 2 :

$$X_2(z) = \frac{1}{2} [X(z^{\frac{1}{2}}) + X(-z^{\frac{1}{2}})] \quad (4.67)$$

Il est intéressant de vérifier ce résultat sur un exemple. Prenons un signal rectangle de largeur 5 (voir figure 15) :

$$x(n) = \text{rect}_2(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -2 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.68)$$



15. Signal rectangle: $\text{rect}_2(n)$

Dans ce cas :

$$x_2(n) = x(2n) = \text{rect}_1(n) \quad (4.69)$$

Ce résultat est illustré par la figure 16 et :

$$X(z) = z^2 + z + 1 + z^{-1} + z^{-2} \quad (4.70)$$

Donc :

$$X(z^{\frac{1}{2}}) = z + z^{\frac{1}{2}} + 1 + z^{-\frac{1}{2}} + z^{-1} \text{ et } X(-z^{\frac{1}{2}}) = z - z^{\frac{1}{2}} + 1 - z^{-\frac{1}{2}} + z^{-1} \quad (4.71)$$

et ainsi :

$$X_2(z) = z + 1 + z^{-1} \quad (4.72)$$

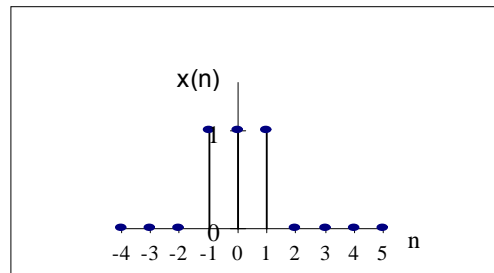
4.5.4 Sur-échantillonnage

Dans le cas de l'opération de sur-échantillonnage telle qu'elle est définie dans le paragraphe 2.2.4, la détermination de la transformée en z est aisée. On rappelle que cette opération consiste à intercaler des 0 entre les éléments du signal d'origine :

$$x_{1/\alpha}(n) = \begin{cases} x(n/\alpha) & \text{si } n/\alpha \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.73)$$

On aura simplement :

$$X_{1/\alpha}(z) = X(z^{\alpha}) \quad (4.74)$$

16. $rect_1(n)$

En effet :

$$X_{1/\alpha}(z) = \sum_k x(k)z^{-\alpha k} \quad (4.75)$$

car seuls les termes où $n = \alpha k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ doivent être conservés.

Exemple 16 Si on reprend l'exemple d'un signal de type rectangle :

$$x(n) = rect_1(n) \quad (4.76)$$

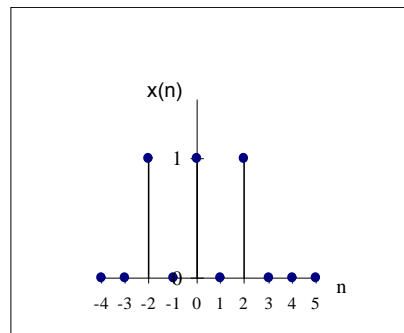
avec

$$X(z) = z + 1 + z^{-1} \quad (4.77)$$

Le signal sur-échantillonné dans un rapport 2 sera donné par :

$$x_{1/2}(n) = \{\dots, 0, 1, 0, \underline{1}, 0, 1, 0, \dots\} \quad (4.78)$$

Et d'après la relation ci-dessus :



17. Rectangle sur-échantillonné

$$X_{1/2}(z) = z^2 + 1 + z^{-2} \quad (4.79)$$

Le signal correspondant est présenté par la figure 17.

4.5.5 Changement d'échelle en z

Pour déterminer la signification d'un changement d'échelle dans l'espace des transformées nous cherchons la transformée en z du signal numérique $y(n)$ déduit d'un signal numérique $x(n)$ quelconque (RDC : $r_1 < |z| <$

r_2) par :

$$y(n) = a^n x(n) \quad (4.80)$$

On aura :

$$Y(z) = \sum_n a^n x(n) z^{-n} = \sum_n x(n) (a^{-1} z)^{-n} \quad (4.81)$$

et donc :

$$Y(z) = X(a^{-1} z) \quad (4.82)$$

La RDC sera évidemment :

$$|a| r_1 < |z| < r_2 |a| \quad (4.83)$$

La constante a peut être réelle ou complexe.

Le cas $a = e^{j\varphi}$ est intéressant car il correspond à une simple rotation dans le plan complexe.

4.5.6 Retournement du temps

Avec les mêmes hypothèses que précédemment pour $x(n)$ on définit la séquence retournée :

$$x_r(n) = x(-n) \quad (4.84)$$

La transformée en z sera :

$$X_r(z) = \sum_n x(-n) z^{-n} = \sum_k x(k) z^k \quad (\text{en posant } k = -n) \quad (4.85)$$

Donc :

$$X_r(z) = X(z^{-1}) \quad (4.86)$$

La RDC devient alors :

$$1/r_2 < |z| < 1/r_1 \quad (4.87)$$

Le retournement temporel correspond donc à l'inversion dans le domaine des z .

Exemple 17 Prenons l'échelon unité :

$$x(n) = u(n) \text{ alors } x_r(n) = u(-n) \quad (4.88)$$

et :

$$X_r(z) = \frac{1}{1-z} \text{ avec } |z| < 1 \quad (4.89)$$

4.5.7 Dérivation en z

Cette propriété est utile dans certains cas pour déterminer des transformées en z particulières.

On a :

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_n x(n) (-n) z^{-n-1} \quad (4.90)$$

$$\frac{dX(z)}{dz} = -z^{-1} \sum_n n x(n) z^{-n} \quad (4.91)$$

On en déduit donc que la transformée du signal :

$$y(n) = n x(n) \quad (4.92)$$

est :

$$Y(z) = -z \frac{dX(z)}{dz}, \text{ la RDC étant inchangée (à } 0 \text{ et } l'∞ \text{ près)}. \quad (4.93)$$

Exemple 18 Soit à déterminer la transformée en z de :

$$y(n) = na^n u(n) \quad (4.94)$$

D'après la propriété de changement d'échelle en z la transformée de $a^n u(n)$ est :

$$\frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (4.95)$$

Donc :

$$Y(z) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \text{ avec } |z| > a \quad (4.96)$$

4.5.8 Transformée du produit de convolution

Soit deux signaux numériques :

$$\begin{aligned} x_1(n) &\xrightarrow{z} X_1(z) \\ x_2(n) &\xrightarrow{z} X_2(z) \end{aligned} \quad (4.97)$$

et le produit de convolution :

$$y(n) = x_1 * x_2(n) = \sum_k x_1(k)x_2(n - k) \quad (4.98)$$

La transformée en z s'écrit :

$$Y(z) = \sum_n \sum_k x_1(k)x_2(n - k)z^{-n} \quad (4.99)$$

On pose $n - k = l$:

$$Y(z) = \sum_l \sum_k x_1(k)x_2(l)z^{-l}z^{-k} \quad (4.100)$$

Soit :

$$Y(z) = \sum_l x_2(l)z^{-l} \sum_k x_1(k)z^{-k} \quad (4.101)$$

Et donc :

$$Y(z) = X_1(z) \cdot X_2(z) \quad (4.102)$$

Le produit de convolution se transforme en produit simple dans l'espace des z. Ce résultat est à l'origine de l'intérêt de la transformée en z pour l'étude des SLI dont la réponse se calcule par produit de convolution.

La RDC du produit de convolution est au moins égale à l'intersection des RDC des signaux de départ.

Remarque 22 La transformée en z permet de définir l'élément inverse du produit de convolution.

En effet si $\frac{1}{X_2(z)}$ existe alors

$$X_1(z) = Y(z) \cdot \frac{1}{X_2(z)} \quad (4.103)$$

et l'inverse du signal $x_2(n)$ sera l'original de $\frac{1}{X_2(z)}$. On peut montrer que l'élément inverse existe et est unique si la transformée en z du signal de départ n'a pas de zéro sur le cercle unité.

Cette condition n'est malheureusement pas toujours vérifiée pour les réponses impulsionnelles des filtres usuels.

Exemple 19 Soit les signaux numériques :

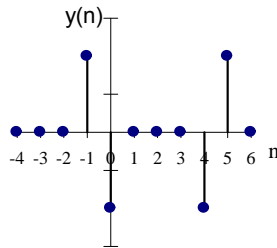
$$\begin{aligned} x_1(n) &= \{\dots, 1, \underline{-2}, 1, \dots\} \xrightarrow{z} X_1(z) = z - 2 + z^{-1} \\ x_2(n) &= \begin{cases} 1 & 0 \leq n < 5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \xrightarrow{z} X_2(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} \end{aligned} \quad (4.104)$$

ce qui donne pour le produit de convolution :

$$Y(z) = z - 1 - z^{-4} + z^{-5} \quad (4.105)$$

$$y(n) = \{\dots, 1, \underline{-1}, 0, 0, 0, -1, 1, \dots\} \quad (4.106)$$

Soit le signal de la figure 18. Il sera intéressant de vérifier ce résultat en faisant le calcul à partir de la



18. Rectangle filtré par un dérivateur

définition du produit de convolution. On remarque que le signal $x_1(n)$ peut être considéré comme la réponse impulsionnelle d'un filtre détecteur de contour (gradient).

4.5.9 Transformée de la fonction de corrélation

Soit la fonction de corrélation de deux signaux numériques :

$$r_{xy}(n) = \sum_k x(n+k)y(k) = x * y_r(n) \quad (4.107)$$

le signal $y_r(n)$ est le retourné temporel de $y(n)$. En utilisant le résultat du paragraphe précédent, il vient :

$$R_{xy}(z) = X(z) \cdot Y_r(z) \quad (4.108)$$

Et donc :

$$R_{xy}(z) = X(z) \cdot Y(1/z) \quad (4.109)$$

Et pour l'autocorrélation :

$$R_{xx}(z) = X(z) \cdot X(1/z) \quad (4.110)$$

Ce résultat est très utilisé dans la pratique pour calculer des produits de corrélation.

Exemple 20 Essayons de retrouver le résultat du paragraphe 3.1.3 en calculant la fonction d'autocorrélation de

$$x(n) = a^n u(n) \quad (4.111)$$

On a vu que :

$$a^n u(n) \xrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (4.112)$$

Donc :

$$R_{xx}(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - az} \quad (4.113)$$

la RDC est :

$$|a| < |z| < \frac{1}{|a|} \quad (\text{il faut donc que } |a| < 1) \quad (4.114)$$

Pour retrouver le signal il faut faire la transformée inverse, ce sera l'objet de l'exemple 24 donné dans le paragraphe 4.7.3 de ce chapitre.

4.5.10 Transformée du produit simple de deux signaux

Soit le signal numérique obtenu par produit simple de deux signaux numériques (le problème de la RDC du produit ne sera pas considéré ici) :

$$y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n) \quad (4.115)$$

La transformée en z sera :

$$Y(z) = \sum_n x_1(n) \cdot x_2(n) z^{-n} \quad (4.116)$$

Pour expliciter cette expression on utilise la transformée en z inverse :

$$x_1(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint X_1(z) z^{n-1} dz \quad (4.117)$$

Alors :

$$Y(z) = \sum_n \frac{1}{2\pi j} \oint X_1(v) v^{n-1} dv \cdot x_2(n) z^{-n} \quad (4.118)$$

ou encore :

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint X_1(v) \cdot \left[\sum_n x_2(n) \left(\frac{z}{v}\right)^{-n} \right] v^{-1} dv \quad (4.119)$$

Soit :

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint X_1(v) \cdot X_2\left(\frac{z}{v}\right) \cdot v^{-1} dv \quad (4.120)$$

On peut considérer cette expression comme un produit de convolution dans le domaine complexe. Ce qui rétablit la symétrie dans l'équivalence produit de convolution-produit simple vis à vis du passage espace temporel-espace transformé. Il est clair cependant que cette propriété n'a pas l'élégante simplicité qui a pu être constatée pour les signaux continus et la transformée de Fourier (théorème de Plancherel).

4.6 Table de transformées en z

Le tableau ci-après résume les principales propriétés de la transformée en z.

Signal	Transformée en z	RDC
$\delta(n)$	1	\mathbb{C}
$\delta(n - k)$	z^{-k}	\mathbb{C}^* (si $k > 0$)
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
$nu(n)$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$ z > 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
$\cos \omega_o nu(n)$	$\frac{1-z^{-1} \cos \omega_o}{1-2z^{-1} \cos \omega_o + z^{-2}}$	$ z > 1$
$\sin \omega_o nu(n)$	$\frac{z^{-1} \sin \omega_o}{1-2z^{-1} \cos \omega_o + z^{-2}}$	$ z > 1$
$a^n \cos \omega_o nu(n)$	$\frac{1-az^{-1} \cos \omega_o}{1-2az^{-1} \cos \omega_o + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $
$a^n \sin \omega_o nu(n)$	$\frac{az^{-1} \sin \omega_o}{1-2az^{-1} \cos \omega_o + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $

4.7 Détermination pratique de la transformée inverse

La détermination de la transformée inverse d'une fonction complexe est un problème souvent difficile. La formule d'inversion permet en principe de trouver l'original dans tous les cas :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad (4.121)$$

Mais les calculs sont, en pratique, souvent impossibles, ou à tout le moins très pénibles, et il est souvent plus rapide d'utiliser d'autres méthodes pour déterminer (ou approcher) la transformation inverse d'une fonction complexe donnée. Nous présentons dans les paragraphes suivants quelques unes de ces méthodes.

4.7.1 Développement en série de puissances

Cette méthode permet d'obtenir une expression approchée de la séquence des coefficients du signal original. Elle consiste à développer dans sa région de convergence en série de Taylor de z^{-1} la fonction $X(z)$. Dans certains cas, en particulier si une relation de récurrence peut être trouvée, l'expression obtenue sera exacte.

Exemple 21 Soit la transformée en z suivante :

$$X(z) = e^{z^{-1}} (1 + z^{-1}) \quad (4.122)$$

La RDC contient $z^{-1} = 0$ on peut donc développer en z^{-1} autour de 0 :

$$X(z) = X(z^{-1} = 0) + z^{-1}X'(z^{-1} = 0) + \frac{z^{-2}}{2!}X''(z^{-1} = 0) + \frac{z^{-3}}{3!}X'''(z^{-1} = 0) + \dots \quad (4.123)$$

les dérivées sont calculées par rapport à z^{-1} :

$$\begin{aligned} X(z^{-1} = 0) &= 1 \\ \frac{dX(z)}{dz^{-1}} &= e^{z^{-1}}(2 + z^{-1}) \\ \frac{d^2X(z)}{dz^{-2}} &= e^{z^{-1}}(3 + z^{-1}) \end{aligned} \quad (4.124)$$

d'où :

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2} + \frac{4}{3!}z^{-3} + \dots + \frac{k+1}{k!}z^{-k} + \dots \quad (4.125)$$

Ce qui permet d'exprimer le signal original sous la forme suivante :

$$x(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{n!} & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases} \quad (4.126)$$

4.7.2 Développement par division de polynômes

Si la fonction complexe $X(z)$ est sous la forme d'un rapport de polynômes, on peut faire un développement approché en effectuant la division. Cette division peut être menée suivant les puissances négatives ou positives de z .

- Si la RDC contient $l' \infty$ la division doit se faire suivant les puissances négatives de z .
- Si la RDC contient 0 la division doit se faire suivant les puissances positives de z .
- Si la RDC ne contient ni 0 ni $l' \infty$, la méthode ne peut pas être utilisée directement.

Si on est, en particulier, en présence d'un signal bilatéral de durée finie, on devra commencer par le décomposer en deux signaux unilatéraux. Dans la plupart des cas, on retombera alors, pour chacun de ces signaux, dans l'un des deux cas précédents.

Exemple 22 Soit le signal complexe :

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} \quad (4.127)$$

Nous allons chercher le développement dans deux cas différent par la RDC imposée.

- RDC : $|z| > 1$. La RDC contient $l' \infty$ nous ferons donc la division suivant les puissances négatives de z .

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} \\ 1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} & 1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{7}{4}z^{-2} + \frac{15}{8}z^{-3} + \dots \\ \hline 0 + \frac{3}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} & \\ 0 + \frac{3}{2}z^{-1} - \frac{9}{4}z^{-2} + \frac{3}{4}z^{-3} & \\ \hline 0 + 0 + \frac{7}{4}z^{-2} - \frac{3}{4}z^{-3} & \\ 0 + 0 + \frac{7}{4}z^{-2} - \frac{21}{8}z^{-3} + \frac{7}{8}z^{-4} & \\ \hline 0 + 0 + 0 + \frac{15}{8}z^{-3} - \frac{7}{8}z^{-4} & \end{array}$$

soit : $X(z) = 1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{7}{4}z^{-2} + \frac{15}{8}z^{-3} + \dots$

- RDC : $|z| < \frac{1}{2}$. La RDC contient 0 nous ferons donc la division suivant les puissances positives de z .

$$\begin{array}{r|l}
 1 & \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1 \\
 1 - 3z + 2z^2 & \hline
 0 + 3z - 2z^2 & \\
 0 + 3z - 9z^2 + 6z^3 & \hline
 0 + 0 + 7z^2 - 6z^3 & \\
 0 + 0 + 7z^2 - 21z^3 + 14z^4 & \hline
 0 + 0 + 0 + 15z^3 - 14z^4 &
 \end{array}$$

soit : $X(z) = 2z^2 + 6z^3 + 14z^4 + 30z^5 + \dots$

On voit bien l'importance de la RDC ; on constate également que seuls les premiers éléments de la séquence originale sont déterminés par cette méthode.

4.7.3 Développement en fractions partielles

Dans cette méthode on essaie de décomposer le signal complexe $X(z)$ en une somme de fractions simples dont on connaît la transformée inverse. Encore une fois, cette méthode ne s'applique que dans le cas de fractions rationnelles de polynômes.

Exemple 23

$$X(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} \text{ avec } |z| > 2 \quad (4.128)$$

La fonction admet deux pôles simples :

$$p_1 = 1 \text{ et } p_2 = 2 \quad (4.129)$$

$$X(z) = \frac{1}{(z^{-1} - 1)(2z^{-1} - 1)} = \frac{1}{z^{-1} - 1} - \frac{2}{2z^{-1} - 1} \quad (4.130)$$

D'après la table de transformées, il vient :

$$x(n) = 2 \cdot 2^n u(n) - u(n) = (2^{n+1} - 1)u(n) \quad (4.131)$$

Remarque 23 Si le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur, on commence la division et on s'arrête quand le degré du reste est inférieur au degré du dénominateur. Le calcul des pôles permet d'obtenir la décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle restante.

Remarque 24 Dans toutes ces opérations il faut faire attention à ne pas introduire de pôles supplémentaires, en particulier si on multiplie numérateur et dénominateur par un même polynôme. Le problème se pose quand on essaie de déterminer l'original de fonctions bilatérales. Dans ce cas il est préférable, dans un premier temps, de décomposer en une somme de deux termes strictement unilatéraux (voir l'exemple ci-après).

Exemple 24 Reprenons le résultat du paragraphe sur le produit d'intercorrélation :

$$R_{xx}(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - az} \quad (4.132)$$

avec comme RDC :

$$|a| < |z| < \frac{1}{|a|} \quad (4.133)$$

On ne peut multiplier en haut et en bas ni par z ni par z^{-1} sans sortir de la RDC, il faut donc décomposer en deux signaux unilatéraux :

$$R_{xx}(z) = \frac{1/2}{1 - a^2} \left(\frac{1 + az^{-1}}{1 - az^{-1}} + \frac{1 + az}{1 - az} \right) \quad (4.134)$$

Donc :

$$R_{xx}(z) = \frac{1/2}{1 - a^2} \left[\frac{1}{1 - az^{-1}} + \frac{az^{-1}}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{1 - az} + \frac{az}{1 - az} \right] \quad (4.135)$$

D'où en utilisant le théorème du retard :

$$r_{xx}(n) = \frac{1/2}{1 - a^2} [a^n(u(n) + u(n-1)) + a^{-n}(u(-n) + u(-n-1))] \quad (4.136)$$

Ce qui donne enfin :

$$\begin{cases} n = 0 & r_{xx}(n) = \frac{1}{1 - a^2} \\ n > 0 & r_{xx}(n) = \frac{a^n}{1 - a^2} \\ n < 0 & r_{xx}(n) = \frac{a^{-n}}{1 - a^2} \end{cases} \text{ soit } \frac{a^{|n|}}{1 - a^2} \quad (4.137)$$

On vérifiera, à titre d'exercice, que la détermination de l'original qui commencerait par une transformation de la fonction en z par la multiplication du dénominateur et du numérateur par z ou z^{-1} donnerait un résultat différent et faux.

4.8 Restriction au cercle unité : transformée de Fourier

On suppose dans ce paragraphe que $|z| = 1 \in \text{RDC}$ et on restreint la transformée en z au cercle unité en posant :

$$z = e^{j\omega} \quad (4.138)$$

Celle ci s'écrit alors :

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-jk\omega} \quad (4.139)$$

Que nous noterons souvent (abusivement) $X(\omega)$. La transformée en z se ramène dans ce cas à la transformée de Fourier du signal numérique. Il faut noter que cette transformée n'est pas discrète, il s'agit d'une fonction complexe continue de la variable ω .

Une propriété fondamentale de cette transformée est qu'elle est périodique, de période 2π :

$$X(\omega + 2\pi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-jk\omega} e^{-j2\pi k} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \quad (4.140)$$

donc :

$$X(\omega) = X(\omega + 2\pi) \quad (4.141)$$

Réciproquement toute fonction complexe périodique de période 2π peut être considérée comme la transformée de Fourier d'un signal numérique.

La transformation inverse est obtenue par intégration sur le cercle unité :

$$x(n) = \frac{1}{j2\pi} \oint X(z)z^{n-1}dz \quad (4.142)$$

$$x(n) = \frac{1}{j2\pi} \int_{2\pi} X(\omega)e^{jn\omega}e^{-j\omega}e^{j\omega}j d\omega \quad (4.143)$$

soit :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega)e^{jn\omega}d\omega \quad (4.144)$$

Les propriétés de la transformée en z se transmettent directement à la transformée de Fourier. On voit en particulier se rétablir la symétrie du théorème de Plancherel en ce qui concerne la convolution, à condition d'utiliser la convolution circulaire pour les signaux périodiques :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega)X(\xi - \omega)d\omega \quad (4.145)$$

On peut noter également que le spectre de puissance d'un signal numérique est obtenu à partir de la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation :

$$R_{xx}(z) = X(z) \cdot X(1/z) \quad (4.146)$$

Changer z en $1/z$ revient à prendre le conjugué (si le signal original $x(n)$ est réel) d'où :

$$R_{xx}(\omega) = X(\omega) \cdot X^*(\omega) = |X(\omega)|^2 \quad (4.147)$$

Ce résultat se généralise au cas des signaux discrets non déterministes.

La transformée inverse permet de retrouver aisément le théorème de Parseval :

$$r_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} R_{xx}(\omega)d\omega \quad (4.148)$$

et donc :

$$E_x = r_{xx}(0) = \sum_n x^2(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (4.149)$$

On a des propriétés de symétrie importantes dans le cas des signaux numériques réels. En effet :

$$X^*(\omega) = \sum_n x(n)e^{jn\omega} = \sum_n x(-n)e^{-jn\omega} \quad (4.150)$$

Donc :

$$\begin{aligned} x(n) &\longleftrightarrow X(\omega) \\ x(-n) &\longleftrightarrow X^*(\omega) = X(-\omega) \end{aligned} \quad (4.151)$$

ce qui peut s'exprimer aussi par :

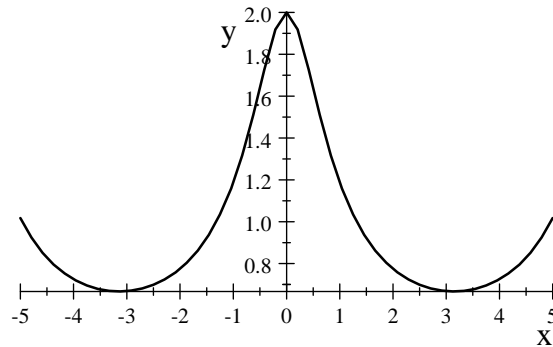
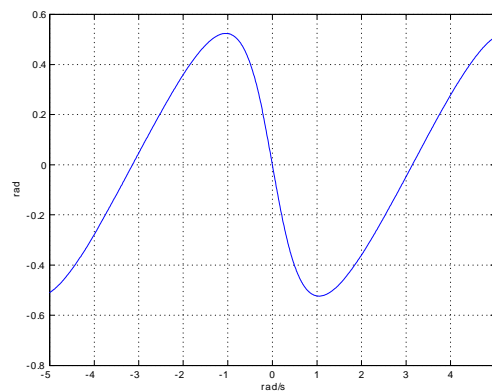
$$\begin{aligned} |X(\omega)| &= |X(-\omega)| \\ \arg [X(\omega)] &= -\arg [X(-\omega)] \end{aligned} \quad (4.152)$$

Donc si le signal $x(n)$ est pair alors $X(\omega)$ est réel ; et si le signal $x(n)$ est impair on a alors :

$$X(-\omega) = X(\omega)e^{j\pi} \quad (4.153)$$

Exemple 25 Soit le signal numérique exponentiel tronqué :

$$x(n) = a^n u(n) \quad (4.154)$$

19. Module de $X(\omega)$ 20. Argument de $X(\omega)$

Sa transformée de Fourier sera :

$$X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (4.155)$$

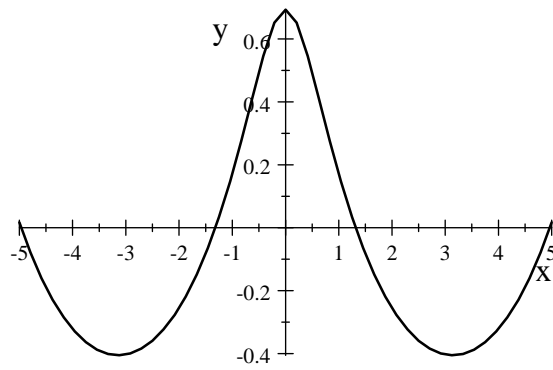
Le module et l'argument du spectre (pour $a = 0,5$) sont présentés sur les graphiques 19 et 20.

On observe bien la périodicité de 2π , la parité du module et l'antisymétrie de l'argument.

Le cepstre de $x(n)$ est déterminé par sa transformée de Fourier (car elle existe), on a :

$$C_x(\omega) = \ln |X(\omega)| + j\varphi(\omega) \quad (4.156)$$

La partie complexe correspond directement à l'argument de $X(\omega)$ et la partie réelle est représentée par la courbe 21.

21. Partie réelle de la transformée du cepstre de $x(n)$

Chapitre 5

Filtrage linéaire, RIF et RII

5.1 Généralités, fonction de transfert

Un système linéaire et invariant (**SLI**) est aussi appelé **filtre linéaire**, nous avons vu qu'il pouvait être caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(n)$ et que le calcul de sa réponse pour une entrée quelconque faisait appel au produit de convolution.

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\text{SLI}} \longrightarrow y(n)$$

avec :

$$\text{ou } \begin{cases} y(n) = h * x(n) \\ y(n) = \sum_k h(k)x(n-k) \end{cases} \quad (5.1)$$

La transformée en z du signal de sortie sera :

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) \quad (5.2)$$

$H(z)$ est appelée **fonction de transfert** du filtre.

Nous savons (paragraphe 3.3.2) qu'un filtre linéaire est **stable** si et seulement si sa réponse impulsionnelle est absolument sommable :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty \quad (5.3)$$

Or l'inégalité triangulaire conduit à :

$$|H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| |z^{-n}| \quad (5.4)$$

Ce résultat est vrai $\forall z$ donc en particulier sur le cercle unité :

$$|H(e^{j\omega})| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| \quad (5.5)$$

Si le système est stable, on doit donc avoir :

$$|H(z)| \leq \infty \text{ pour } |z| = 1 \quad (5.6)$$

Le cercle unité doit donc être dans la Région De Convergence. Nous admettrons que la réciproque est vraie.

Proposition 1 *Un filtre linéaire est stable si et seulement si sa fonction de transfert converge sur le cercle unité.*

$$\{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\} \in RDC \quad (5.7)$$

* Si la réponse impulsionnelle est **finie** et de durée finie (RIF), le **filtre est stable** ; car la RDC est égale à \mathbb{C} à (l'origine et l'infini près).

* Si le filtre est **causal** (réponse impulsionnelle unilatérale droite), la stabilité est assurée si et seulement si le rayon de convergence est inférieur à 1. Les **pôles sont à l'intérieur du cercle unité**.

★ Si le filtre est **anticausal** (réponse impulsionnelle unilatérale gauche), la stabilité est assurée si et seulement si le rayon de convergence est supérieur à 1. Les **pôles sont à l'extérieur du cercle unité**.

★ Si le filtre est à réponse impulsionnelle **bilatérale**, la stabilité est assurée si il n'y a **aucun pôle sur le cercle unité**.

D'une façon générale, l'étude des filtres linéaires est facilitée par le passage dans l'espace des transformées en z . C'est le cas tout particulièrement quand la fonction de transfert peut se mettre sous forme de fraction rationnelle de polynômes en z . On verra qu'alors, le système est régi par une équation aux différences tout à fait analogue à l'équation différentielle linéaire des filtres continus. Nous nous limiterons dans la suite de ce chapitre à ce cas.

5.2 Système régi par une équation aux différences

5.2.1 Fonction de transfert

Nous avons vu (paragraphe 3.3.4) qu'un SLI quelconque pouvait toujours être décomposé en la somme de deux systèmes dont la réponse impulsionnelle est unilatérale (système causal ou anticausal). Nous pourrions donc sans nuire à la généralité du propos nous limiter au cas causal. Les résultats correspondants pour le cas anticausal se déduiront aisément :

$$n \longrightarrow -n \text{ ou } z \longrightarrow z^{-1} \quad (5.8)$$

Si on admet qu'un tel système est régi par une équation aux différences, nous aurons sa réponse $y(k)$ en fonction de l'entrée $x(k)$ par :

$$a_o y(k) = - \sum_{n=1}^N a_n y(k-n) + \sum_{m=0}^M b_m x(k-m) \quad (5.9)$$

La transformée en z de cette équation aux différences (en appliquant le théorème du retard et la propriété de linéarité) s'écrit :

$$a_o Y(z) = - \sum_{n=1}^N a_n Y(z) z^{-n} + \sum_{m=0}^M b_m X(z) z^{-m} \quad (5.10)$$

D'où :

$$Y(z) \sum_{n=0}^N a_n z^{-n} = X(z) \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} \quad (5.11)$$

La fonction de transfert sera donc :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}}$$

avec $N, M \in \mathbb{Z}^+$.

La démarche peut être suivie sans difficulté en sens inverse. On constate donc l'équivalence entre une fonction de transfert rationnelle et une réponse impulsionnelle décrite par une équation aux différences.

Cette équation aux différences est une équation de récurrence et on constate que pour démarrer le calcul de la sortie $y(k)$ il faut disposer des N valeurs des sorties précédentes. Ces N valeurs définissent donc les conditions d'initialisation du système. On dira, par analogie avec le cas continu, que le système est d'**ordre** N (N étant le degré du dénominateur de la fonction de transfert).

Si le filtre est anticausal, la fonction de transfert pourra être mise sous la forme :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^m}{\sum_{n=0}^N a_n z^n}$$

avec $N, M \in \mathbb{Z}^+$.

Et si le filtre n'est ni causal ni anticausal, alors la forme générale de la fonction de transfert sera :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=-M_1}^{M_2} b_m z^m}{\sum_{n=-N_1}^{N_2} a_n z^n}$$

avec $N_1, M_1, N_2, M_2 \in \mathbb{Z}^+$.

Remarque 25 *Il apparaît que l'utilisation de l'équation aux différences dans un algorithme de calcul pose un problème pour des filtres dont la réponse impulsionnelle n'est pas unilatérale. Il n'existe en effet aucun ordre de déroulement du calcul qui permette d'avoir à la fois la réponse précédente ($y(n-1)$) et la réponse suivante ($y(n+1)$) par rapport à l'instant considéré ($y(n)$). Nous verrons dans les paragraphes consacrés à la mise en œuvre des filtres RII comment cette difficulté peut être résolue.*

Un filtre dont la fonction de transfert s'écrit sous forme d'une fraction rationnelle peut être à réponse impulsionnelle infinie mais aussi à réponse impulsionnelle finie (RIF), il suffit que les coefficients du dénominateur soient tous nuls sauf $a_0 = 1$ ou encore que la division du numérateur par le dénominateur soit exacte. Cette forme est cependant rarement utilisée pour les RIF et nous admettons que, sauf précision contraire, si la fonction de transfert se présente sous la forme d'une fraction rationnelle le filtre est du type RII.

5.2.2 Stabilité

Nous ne traitons ici évidemment que le cas des RII, les RIF étant stables par construction. Nous avons montré que la condition de stabilité pour un système causal est que le rayon de convergence de la fonction de transfert soit inférieur à l'unité.

Si le système a une fonction de transfert rationnelle, seuls les pôles de $H(z)$ peuvent être des points de divergence. La condition de stabilité sera donc : **tous les pôles doivent être à l'intérieur du cercle unité**. La vérification de cette condition passe par le calcul de ces pôles. Or ce calcul est plus ou moins facile et, dans le cas général, il est même impossible analytiquement et la seule méthode possible est l'approche numérique (méthode de Bairstow par exemple). L'inconvénient majeur des méthodes numériques est l'absence de généralité des résultats obtenus. C'est la raison pour laquelle (comme pour le cas continu) des critères de stabilité ne faisant pas appel au calcul explicite des pôles ont été développés.

Nous présentons ici le **critère de Schür-Cohn**.

Notons $D(z)$ le dénominateur de $H(z)$ avec $a_0 = 1$ (si ce n'est pas le cas on s'y ramènera) :

$$D(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^{-n} \quad (5.12)$$

On introduit le polynôme réciproque de $D(z)$:

$$D_r(z) = z^{-N} D(z^{-1}) = \sum_{n=0}^N a_n z^{n-N} \quad (5.13)$$

Soit en posant :

$$k = N - n \quad (5.14)$$

$$D_r(z) = \sum_{k=0}^N a_{N-k} z^{-k} \quad (5.15)$$

On a ainsi construit un polynôme de même ordre mais dont les coefficients sont en ordre inverse.
On définit une suite de polynômes de degrés croissants commençant par :

$$D^0(z) = D(z) \quad (5.16)$$

et se terminant par :

$$D^N(z) = 1 \quad (5.17)$$

en suivant l'équation récurrente :

$$D^{i-1}(z) = \frac{D^i(z) - K_i D_r^i}{1 - K_i^2} \quad (5.18)$$

où K_i est le coefficient du terme de plus haut degré de $D^i(z^{-1})$:

$$K_o = a_N \text{ pour } i = 0 \quad (5.19)$$

Prenons un exemple pour se convaincre du fonctionnement :

$$D(z) = 1 + 3z^{-1} - 2z^{-2} \text{ donc } K_o = -2 \quad (5.20)$$

$$D_r(z) = -2 + 3z^{-1} + z^{-2} \quad (5.21)$$

$$D^{-1}(z) = \frac{1 + 3z^{-1} - 2z^{-2} - (-2)(-2 + 3z^{-1} + z^{-2})}{1 - (-2)^2} \quad (5.22)$$

soit :

$$D^{-1}(z) = 1 - 3z^{-1} \text{ donc } K_1 = -3 \quad (5.23)$$

et de même :

$$D^{-2}(z) = 1 \text{ donc } K_2 = 1 \quad (5.24)$$

On s'arrêtera en fait à :

$$i = N - 1 \quad (5.25)$$

Le critère de Schür-Cohn indique que $D(z)$ a toutes ses racines dans le cercle unité (condition de stabilité du filtre) si et seulement si les N coefficients K_i sont de module inférieur à 1 : $|K_i| < 1$. (Ce n'est pas le cas dans l'exemple précédent).

Exemple 26 Prenons un exemple du deuxième ordre où la vérification est facile.

$$H(z) = \frac{z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} \quad (5.26)$$

On aura :

$$D(z) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}$$

et :

$$D^{-1}(z) = 1 - \frac{6\sqrt{2}}{15}z^{-1} \quad (5.27)$$

Donc :

$$K_o = \frac{1}{4} \text{ et } K_1 = -\frac{6\sqrt{2}}{15} \quad (5.28)$$

ces deux nombres sont de module inférieur à 1, donc le système est stable. On vérifiera que les zéros du dénominateur sont :

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \text{ et } z_2 = z_1^* \quad (5.29)$$

donc à l'intérieur du cercle unité.

Toujours pour ce même exemple, l'équation aux différences sera :

$$y(n) = \frac{\sqrt{2}}{2}y(n-1) - \frac{1}{4}y(n-2) + x(n-1) + \frac{1}{2}x(n-2) \quad (5.30)$$

On peut, à titre d'exercice, chercher l'original de $H(z)$, c'est-à-dire la réponse impulsionnelle du filtre :

$$H(z) = \frac{z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{(1 - z_1z^{-1})(1 - z_1^*z^{-1})} \quad (5.31)$$

En décomposant en éléments simples, il vient :

$$H(z) = (z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}) \left[\frac{A}{(1 - z_1z^{-1})} + \frac{A^*}{(1 - z_1^*z^{-1})} \right] \quad (5.32)$$

avec :

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} \quad (5.33)$$

Or l'original de :

$$\frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (5.34)$$

est :

$$a^n u(n) \quad (5.35)$$

donc, en utilisant le théorème du retard et la relation d'Euler, on obtient :

$$h(n) = \frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}} \left[\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) u(n-1) + \sin\left((n-1)\frac{\pi}{4}\right) u(n-2) \right] \quad (5.36)$$

On pourra vérifier que l'on retrouve les mêmes coefficients en calculant directement la réponse impulsionnelle à partir de l'équation aux différences. Les premiers coefficients sont donnés dans le tableau ci-après.

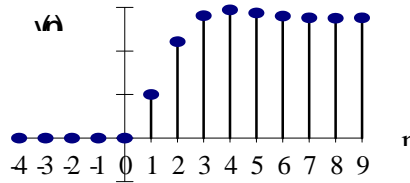
n	h(n)
0	0
1	1
2	$2^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
3	$2^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
4	$2^{-\frac{5}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$
5	$-2^{-\frac{7}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$
6	$-2^{-\frac{9}{2}} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
7	$-2^{-\frac{11}{2}} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
8	$-2^{-\frac{13}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$
...	...

On constate que la réponse impulsionnelle (voir figure 22) est oscillante, amortie et de durée infinie (RII). On vérifiera que la réponse indicielle présente un dépassement et se stabilise assez rapidement ($n > 8$) autour d'une valeur finale voisine de :

$$y(\infty) = 2,763 \quad (5.37)$$

Cette valeur finale peut être déterminée a priori en écrivant :

$$y(\infty) = \frac{\sqrt{2}}{2}y(\infty) - \frac{1}{4}y(\infty) + 1 + \frac{1}{2} \quad (5.38)$$



22. Réponse indicielle du filtre du second ordre

Il est facile de montrer que d'une façon générale, la valeur finale de la réponse indicielle pour un filtre RII causal sera :

$$y(\infty) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m}{\sum_{n=0}^N a_n} \quad (5.39)$$

Cette relation est intéressante pour déterminer des conditions initiales relaxées pour un filtre RII. On pourra définir le **gain statique** d'un filtre numérique linéaire comme la limite quand $k \rightarrow \infty$ de la réponse à une entrée unitaire :

$$h_o = \lim_{k \rightarrow \infty} h * 1(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) = \frac{\sum b_m}{\sum a_n} \quad (5.40)$$

Ce résultat est exact pour tous les filtres.

Exemple 27 Prenons un filtre dont la fonction de transfert est :

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - az} \quad (5.41)$$

Le gain statique est donc :

$$h_o = \frac{1}{(1 - a)^2} \quad (5.42)$$

Nous avons vu (exemple 24) que la réponse impulsionnelle d'un tel filtre est :

$$h(n) = \frac{a^{|n|}}{1 - a^2} \quad (5.43)$$

Le filtre est stable si $a \neq 1$, dans ce cas la réponse à une entrée unitaire est :

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a^{|n|}}{1-a^2} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{a^{-n}}{1-a^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{1-a^2} \\ \bar{y} &= \left(\frac{a}{1-a} + \frac{1}{1-a} \right) \frac{1}{1-a^2} = \frac{1+a}{(1-a)(1-a^2)}\end{aligned}\quad (5.44)$$

On retrouve bien le gain statique :

$$\bar{y} = \frac{1}{(1-a)^2} \quad (5.45)$$

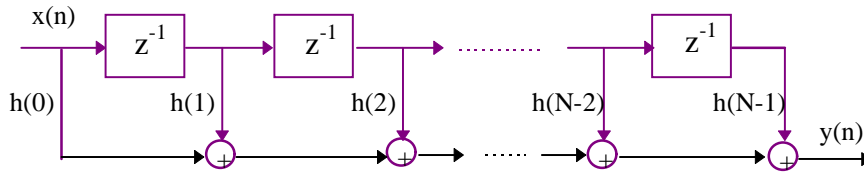
5.3 Mise en œuvre des filtres RIF : formes non récursives

5.3.1 Forme directe

Nous continuons à ne présenter que les résultats correspondant à la forme causale. Le cas des filtres RIF à réponse impulsionnelle bilatérale ne pose aucun problème particulier, en dehors, bien entendu, du stockage par anticipation des valeurs du signal d'entrée nécessaires au calcul de la sortie. La mise en œuvre directe découle de la forme du produit de convolution pour un système causal de réponse impulsionnelle finie, de durée N :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k) \quad (5.46)$$

Le schéma de mise en œuvre sera le suivant :



Il y a $N - 1$ cellules de retard dans la structure qui nécessitera $N - 1$ additionneurs et N multiplieurs :

$$\begin{cases} N & \text{multiplications} \\ N - 1 & \text{additions} \\ N - 1 & \text{mémoires} \end{cases}$$

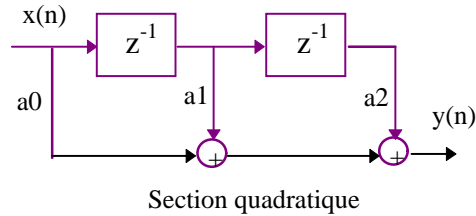
5.3.2 Forme cascade

On décompose la fonction de transfert $H(z)$ en produit de polynômes du 2^{nd} degré en z^{-1} (toujours pour la forme causale) :

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N/2} H_k(z) \text{ pour } N \text{ pair.} \quad (5.47)$$

avec

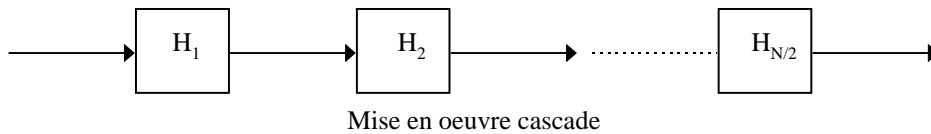
$$H_k(z) = a_{k_0} + a_{k_1}z^{-1} + a_{k_2}z^{-2} \quad (5.48)$$



Si N est impair, il y aura $\frac{N+1}{2}$ facteurs dans $H(z)$ dont au moins un du premier ordre ($a_{k_2} = 0$).

Les zéros de $H(z)$ sont groupés par paires de nombres complexes conjugués pour former des coefficients a_{k_i} réels. Les racines réelles peuvent être regroupées de façon indifférente.

La réalisation de la mise en œuvre cascade prend la forme décrite par le schéma suivant. Cette forme peut être particulièrement avantageuse pour des filtres bilatéraux symétriques si on apparie les racines avec leurs inverses qui sont aussi des zéros du polynôme.



Une troisième forme de mise en œuvre pour les filtres RIF est souvent utilisée, la forme treillis. Sa description nous entraînerait dans des considérations trop éloignées du propos de ce cours. Nous renvoyons donc le lecteur intéressé au livre de Proakis et Manolakis ([17]) qui présente en détail ce mode de réalisation.

5.4 Mise en œuvre des filtres RII : formes récursives

Nous nous plaçons tout d'abord dans le cas d'un filtre causal. Le passage au cas anticausal ne pose aucun problème particulier ; le renversement du temps change seulement l'ordre de traitement des données. En revanche le cas des filtres RII à réponse impulsionnelle bilatérale sera évoqué dans un paragraphe particulier (5.4.4).

5.4.1 Formes directes

La fonction de transfert est toujours supposée être de la forme suivante :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}} \quad (5.49)$$

On décompose la fonction de transfert en une partie non récursive à réponse impulsionnelle finie $H_1(z)$ et une partie purement récursive $H_2(z)$:

$$H_1(z) = \frac{X_2(z)}{X(z)} = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} \quad (5.50)$$

et

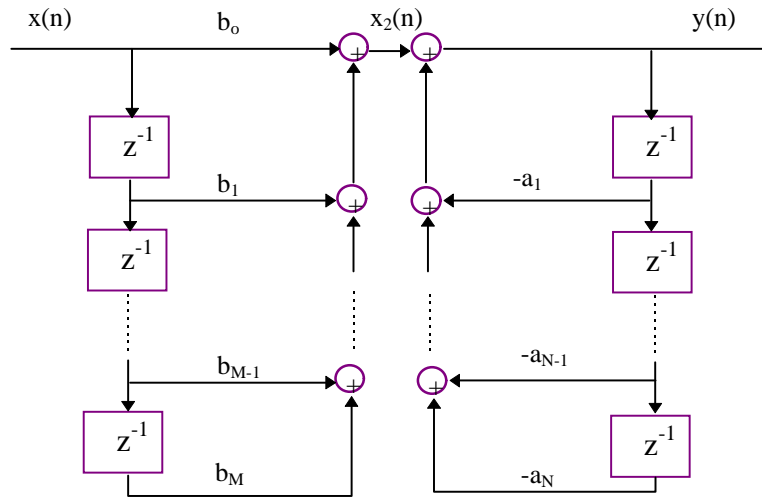
$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{X_2(z)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}}$$

Les deux filtres sont mis en cascade. La partie non récursive est réalisée sous la forme directe. La partie

récurrente (filtre tout pôle) sera mise en œuvre en suivant simplement l'équation aux différences :

$$y(n) = \sum_{k=1}^N -a_k y(n-k) + x_2(n) \quad (\text{en supposant que } a_0 = 0) \quad (5.51)$$

On arrive ainsi au schéma de mise en œuvre suivant.



Filtre RII: forme directe

Le coût de mise en œuvre dans ce cas est :

$$\begin{cases} M + N + 1 & \text{multiplications} \\ M + N & \text{additions} \\ M + N & \text{mémoires} \end{cases}$$

Si on place le filtre tout pôle avant le filtre tout zéro, on obtient une mise en œuvre plus économe en mémoire :

$$H_1(z) = \frac{X_2(z)}{X(z)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}}$$

et :

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{X_2(z)} = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} \quad (5.52)$$

Dans ce cas, toujours avec $a_0 = 1$, on aura :

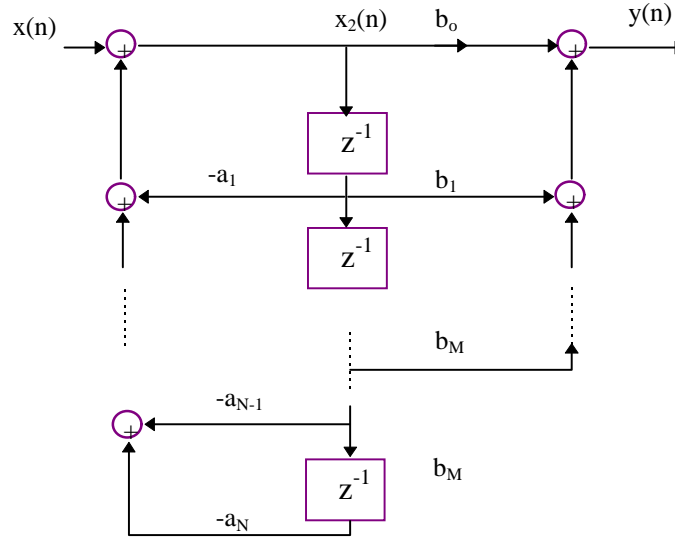
$$x_2(k) = x(k) - \sum_{n=1}^N a_n x_2(k-n) \quad (5.53)$$

et :

$$y(k) = \sum_{m=0}^M b_m x_2(k-m) \quad (5.54)$$

Dans l'hypothèse (fréquemment vérifiée) où $N \geq M$, les versions retardées de $x_2(k)$ calculées dans la première équation aux différences pourront être utilisées pour déterminer $y(k)$. Ceci est illustré par le schéma

de mise en œuvre suivant.



Filtre RII: forme directe compacte

Le coût de mise en œuvre devient :

$$\begin{cases} M + N + 1 & \text{multiplications} \\ M + N & \text{additions} \\ \max(M, N) & \text{mémoires} \end{cases}$$

5.4.2 Forme cascade

Pour obtenir un schéma de réalisation sous forme cascade, la fonction de transfert $H(z)$ sera décomposée en produits de fractions rationnelles $H_k(z)$ ne contenant que des polynômes de degré inférieur ou égal à deux et à coefficients réels :

$$H(z) = \prod_{k=1}^K H_k(z)$$

avec :

$$K = \text{partie entière}\left(\frac{N+1}{2}\right) \tag{5.55}$$

si $N \geq M$ (permuter M et N sinon).

Et :

$$H_k(z) = \frac{b_{k_0} + b_{k_1}z^{-1} + b_{k_2}z^{-2}}{1 + a_{k_1}z^{-1} + a_{k_2}z^{-2}}$$

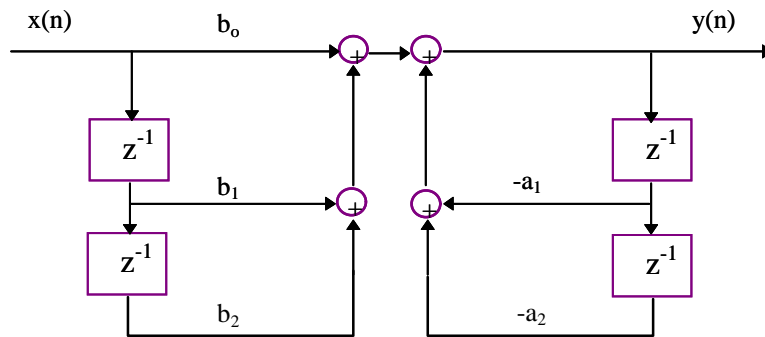
avec :

$$b_{k_0} = b_{k_1} = 0 \tag{5.56}$$

pour :

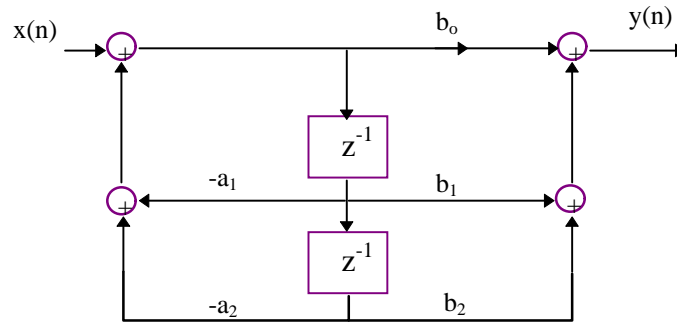
$$k > \text{partie entière}\left(\frac{M+1}{2}\right) \tag{5.57}$$

La cellule de base quadratique correspondant à $H_k(z)$ pourra être mise en œuvre sous une forme directe quelconque :



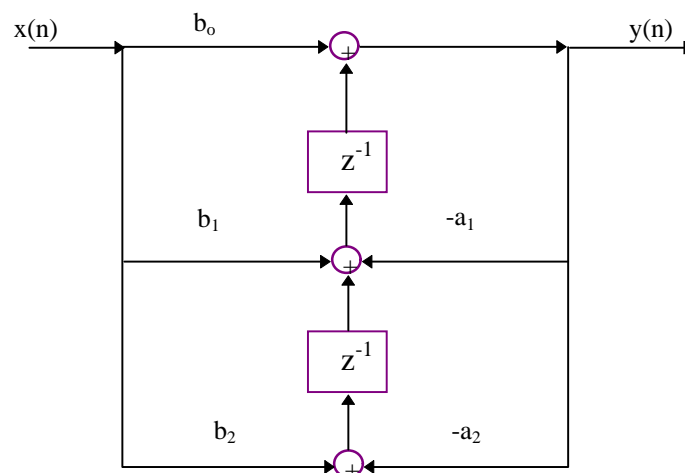
Cellule quadratique, forme 1

ou :



Cellule quadratique, forme 2

ou encore :



Cellule quadratique, forme 3

Les formes 2 et 3 sont en fait équivalentes car le nombre réel d'additions est le même.

La mise en œuvre cascade est obtenue par la simple mise en cascade du nombre voulu de telles cellules quadratiques. Certaines de ces cellules peuvent d'ailleurs n'être que des cellules du premier ordre si certains

coefficients sont nuls.

5.4.3 Forme parallèle

Pour obtenir une mise en œuvre parallèle d'un filtre RII récursif, il faut décomposer sa fonction de transfert en sommes de fractions partielles. On utilisera une méthode analogue à celle proposée pour l'inversion de la transformée en z (paragraphe 4.7.3). De sorte que si $N \geq M$:

$$H(z) = C + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} \quad (5.58)$$

avec $C = \frac{b_N}{a_N}$

Dans ce cas, les termes p_k sont les pôles de $H(z)$ et A_k les résidus correspondants.

En général, les pôles p_k sont complexes et il est préférable de regrouper les pôles conjugués pour obtenir une mise en œuvre qui ne mette en jeu que des coefficients réels.

Alors, les fractions partielles deviennent :

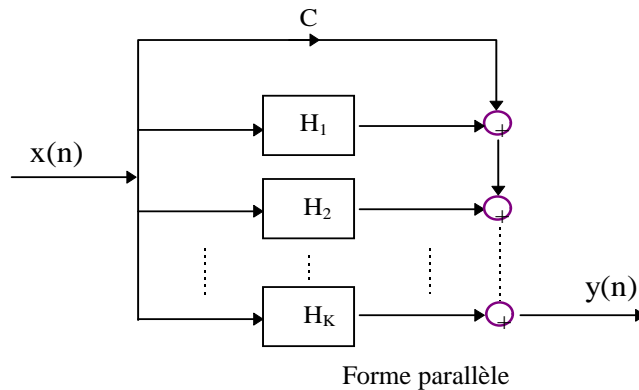
$$H_k(z) = \frac{b_{k_0} + b_{k_1} z^{-1}}{1 + a_{k_1} z^{-1} + a_{k_2} z^{-2}} \quad (5.59)$$

et :

$$H(z) = C + \sum_{k=1}^{\text{partie entière}(\frac{N+1}{2})} H_k(z) \quad (5.60)$$

De même que dans le cas précédent, certains coefficients peuvent être nuls pour les pôles réels.

La mise en œuvre se fera selon le schéma suivant :



5.4.4 Cas des RII à réponse bilatérale

Le cas des filtres RII à réponse impulsionnelle bilatérale pose un problème particulier de mise en œuvre. L'équation aux différences récursive contient à la fois des termes correspondant aux réponses précédentes ($y(n - i)$) et des termes proportionnels aux réponses suivantes ($y(n + i)$). Il est donc impossible de faire le calcul directement en parcourant le signal d'entrée dans un sens ou dans l'autre. Il faudra donc avant toute mise en œuvre décomposer la fonction de transfert en deux parties, chacune ne correspondant qu'à une équation récursive unilatérale (causale ou anticausale).

Si le filtre est déterminé par la donnée de sa réponse impulsionnelle, la décomposition est facile. Il suffit de suivre la procédure décrite au paragraphe 3.3.4 pour obtenir une somme de deux signaux unilatéraux, l'un correspondant à un filtre causal, l'autre à un filtre anticausal :

$$h(n) = h^+(n) + h^-(n)$$

avec :

$$h^+(n) = 0 \text{ si } n < 0 \quad (5.61)$$

et :

$$h^-(n) = 0 \text{ si } n > 0 \quad (5.62)$$

De sorte que la sortie du filtre sera :

$$y(n) = y^+(n) + y^-(n)$$

avec :

$$\begin{cases} y^+(n) = h^+ * x(n) \\ y^-(n) = h^- * x(n) \end{cases} \quad (5.63)$$

Les filtres h^+ et h^- sont RII et ont comme fonction de transfert $H^+(z)$ et $H^-(z)$. La mise en œuvre de ces filtres pourra être menée suivant une des formes précédemment décrites. Le signal d'entrée $x(n)$ sera donc successivement parcouru dans un sens (n croissant), puis dans l'autre (n décroissant) et filtré dans chaque sens par le filtre adéquat (h^+ dans le sens croissant, h^- pour l'autre sens). Le signal de sortie du filtre sera obtenu par addition des deux signaux numériques obtenus.

Si le filtre est défini directement par sa fonction de transfert, la décomposition est moins immédiate. Remarquons tout d'abord qu'elle peut ne concerner que la partie récursive de l'équation aux différences donc le dénominateur de la fonction de transfert. Si nous notons ce dénominateur $D(z)$, nous aurons :

$$D(z) = \sum_{n=-N}^{n=P} a_n z^n \text{ avec } N, P \in \mathbb{Z}^+ \quad (5.64)$$

Supposons, pour fixer les idées, que $N \leq P$. Si on met en facteur z^{-N} , on obtient un polynôme en puissances strictement positives de z :

$$D(z) = z^{-N} \sum_{n=0}^{N+P} a_{n-N} z^n \quad (5.65)$$

On peut décomposer ce polynôme en produits de cellules quadratiques à coefficients réels car les zéros apparaissent sous forme de complexes conjugués ou de réels :

$$D(z) = z^{-N} \prod_{i=1}^{\text{part ent}(\frac{N+P+1}{2})} (\alpha_i + \beta_i z + \gamma_i z^2) \quad (5.66)$$

Si on redistribue le facteur z^{-N} , on obtient un produit de cellules quadratiques dont certaines sont causales (polynômes en z^{-1}) et les autres anticausales (polynômes en z) :

$$D(z) = \prod_j (\alpha_j + \beta_j z^{-1} + \gamma_j z^{-2}) \cdot \prod_i (\alpha_i + \beta_i z + \gamma_i z^2) = D^-(z) \cdot D^+(z) \quad (5.67)$$

Un certain nombre de cellules sont seulement du premier ordre si les zéros correspondants sont réels. Cette décomposition conduit à une première mise en œuvre du filtre RII sous forme cascade :

$$H(z) = N(z) \cdot \frac{1}{D^+(z)} \cdot \frac{1}{D^-(z)} \quad (5.68)$$

Le premier filtre est RIF, les deux suivants sont RII à réponse impulsionnelle unilatérale (le premier est anticausal, le second est causal). La mise en œuvre de chacun de ces filtres est donc connue, l'entrée de l'un étant la sortie du précédent.

La décomposition sous forme de sommes de fractions partielles conduira à une mise en œuvre analogue à celle décrite dans la première partie du paragraphe :

$$H(z) = N(z) \cdot \left[\frac{N^+(z)}{D^+(z)} + \frac{N^-(z)}{D^-(z)} \right] \quad (5.69)$$

On déterminera les numérateurs $N^+(z)$ et $N^-(z)$ en suivant les méthodes classiques de décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Exemple 28 Soit le filtre de fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{1}{2z^{-2} + 2z^{-1} + 5 - \frac{25}{4}z + \frac{7}{2}z^2 - z^3} \quad (5.70)$$

On a :

$$D(z) = z^{-2}(2 + 2z + 5z^2 - \frac{25}{4}z^3 + \frac{7}{2}z^4 - z^5) \quad (5.71)$$

La détermination des zéros, en dehors des cas triviaux, sera menée par une méthode numérique. Dans notre exemple, il y a 5 zéros :

$$2, 2e^{j\frac{\pi}{3}}, 2e^{-j\frac{\pi}{3}}, \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{3}}, \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{3}} \quad (5.72)$$

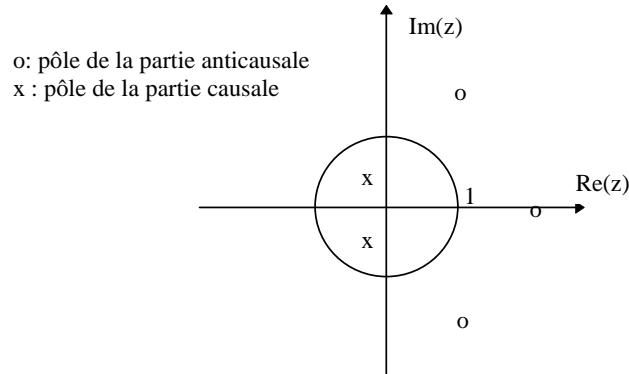
Donc un zéro réel et deux paires de complexes conjugués. Ce qui donne la factorisation suivante :

$$D(z) = z^{-2}(2 - z)(1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2)(1 + 2z + 4z^2) \quad (5.73)$$

Il y a deux façons de redistribuer le facteur z^{-2} qui conduisent à une séparation causal-anticausal mais une seule correspond à des filtres stables. Il faut en effet que les pôles qui sont à l'intérieur du cercle unité appartiennent à la partie causale et les autres à la partie anticausale (voir le diagramme des pôles de la figure 23) d'où dans notre cas :

$$D(z) = (2 - z)(1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2)(z^{-2} + 2z^{-1} + 4) \quad (5.74)$$

Ce qui peut s'écrire :



23. Diagramme des pôles

$$D(z) = D^+(z) \cdot D^-(z) \quad (5.75)$$

avec

$$\begin{cases} D^+(z) = (2 - z)(1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2) \\ D^-(z) = z^{-2} + 2z^{-1} + 4 \end{cases}$$

D'où une mise en œuvre cascade suivant l'équation 5.76 :

$$H(z) = \frac{1/4}{\frac{1}{4}z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-1} + 1} \cdot \frac{1/2}{1 - z + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{8}z^3} \quad (5.76)$$

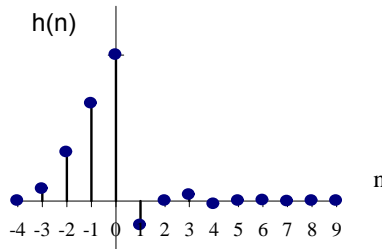
Le signal sera filtré tout d'abord par le filtre causal du 2^e ordre d'équation aux différences :

$$y(n) = -\frac{1}{2}y(n-1) - \frac{1}{4}y(n-2) + \frac{1}{4}x(n)$$

Le résultat sera injecté à l'entrée d'un filtre anticausal du 3^e ordre d'équation aux différences :

$$v(n) = \frac{1}{8}v(n+3) - \frac{1}{2}v(n+2) + v(n+1) + \frac{1}{2}y(n) \quad (5.77)$$

La réponse indicielle du filtre est déterminée numériquement à partir de ces deux équations, le graphe de la figure 24 donne l'allure du résultat : On peut obtenir une mise en œuvre parallèle par la décomposition de $H(z)$



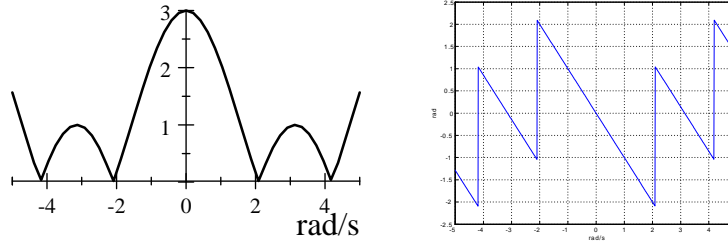
24. Réponse indicielle du filtre bilatéral

en une somme de deux RII de réponses impulsionnelles unilatérales :

$$H(z) = \frac{1}{8} \left[\frac{Az^3 + Bz + C}{1 - z + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{8}z^3} + \frac{Dz^{-1} + E}{\frac{1}{4}z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-1} + 1} \right] \quad (5.78)$$

$$\text{avec} : \begin{cases} A = 4 \cdot 10^{-3} \\ B = -19.41 \cdot 10^{-3} \\ C = 46.52 \cdot 10^{-3} \\ D = -11.63 \cdot 10^{-3} \\ E = 31.99 \cdot 10^{-3} \end{cases}$$

5.5 Réponse fréquentielle des filtres numériques linéaires



2. Réponse fréquentielle du filtre moyennneur (module et argument)

5.5.1 Définition

La restriction au cercle unité de la fonction de transfert d'un filtre numérique, si ce cercle fait partie de la RDC, sera la **réponse fréquentielle** du filtre. La réponse fréquentielle est donc, comme dans le cas continu, la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle.

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-jn\omega} \quad (5.79)$$

Cette réponse est évidemment périodique, de période 2π (comme pour toutes les transformées de Fourier de signaux numériques). Rappelons que la transformée de Fourier inverse permet de déterminer la réponse impulsionnelle à partir de la réponse fréquentielle :

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H(\omega)e^{jn\omega} d\omega \quad (5.80)$$

Comme la réponse impulsionnelle d'un filtre réel est un signal réel, on aura :

$$\begin{cases} |H(\omega)| = |H(-\omega)| \\ \arg [H(\omega)] = -\arg [H(-\omega)] \end{cases} \quad (5.81)$$

Exemple 29 Soit le filtre moyennneur de réponse impulsionnelle :

$$h(n) = \{\dots, 0, \underline{1}, 1, 1, 0, \dots\} \quad (5.82)$$

Sa fonction de transfert sera :

$$H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} \quad (5.83)$$

Sa réponse fréquentielle s'écrira :

$$H(\omega) = 1 + e^{-j\omega} + e^{-2j\omega} \quad (5.84)$$

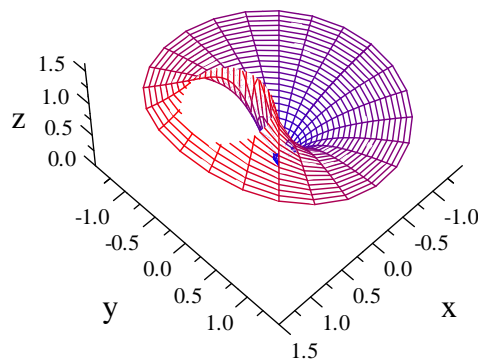
Son module et son argument sont présentés sur les graphiques du tableau 2.

Exemple 30

Exemple 31 Soit le filtre passe bas récursif de fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} \quad (5.85)$$

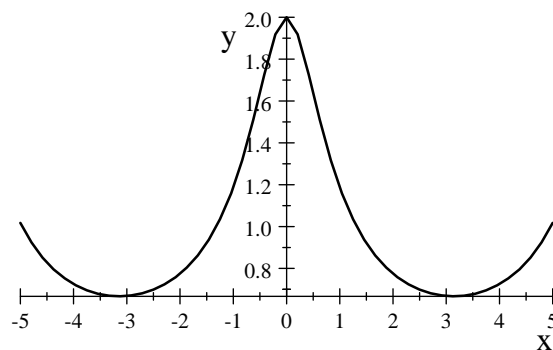
Le graphique de la figure 25 présente le module de cette fonction de transfert dans le plan complexe (x est la partie réelle et y la partie imaginaire). Sa réponse fréquentielle sera :



25. Module de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas dans le plan complexe

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\omega}} \quad (5.86)$$

Le module de sa réponse fréquentielle qui correspond à la projection de la fonction de transfert sur le cercle unité est donné par le graphique de la figure 25.



26. Module de la réponse fréquentielle d'un filtre passe-bas

La réponse fréquentielle d'un filtre numérique linéaire à une entrée $x(n)$ quelconque s'écrit :

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) \quad (5.87)$$

La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation de $h(n)$ d'après :

$$R_{hh}(z) = H(z)H(z^{-1}) \quad (5.88)$$

s'écrit :

$$R_{hh}(\omega) = H(\omega)H^*(\omega) = |H(\omega)|^2 \quad (5.89)$$

Ce résultat est connu sous le nom de **théorème de Wiener-Kintchine**.

5.5.2 Symétries et linéarité en phase

Dans le traitement du signal continu, la recherche de la linéarité en phase des filtres est souvent le but ultime qui ne peut être qu'approché. Avec les signaux numériques de durée finie, comme les images, cette propriété peut être rigoureusement obtenue. Cette linéarité en phase traduit des propriétés de symétrie de la réponse impulsionnelle que nous pouvons mettre en évidence à partir de l'analyse de Fourier.

Posons la réponse fréquentielle du filtre considéré sous la forme :

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (5.90)$$

avec :

$$\varphi(\omega) = \arg [H(\omega)] \text{ la réponse en phase du filtre.} \quad (5.91)$$

Nous considérerons les filtres numériques dont la réponse impulsionnelle $h(n)$ présente des propriétés de symétrie autour d'une valeur k ; plus précisément, deux cas seront envisagés, celui du filtre pair et celui du filtre impair :

$$\begin{aligned} \text{Filtre pair : } & h(k+n) = h(k-n) \\ \text{Filtre impair : } & g(k+n) = -g(k-n) \end{aligned} \quad (5.92)$$

Pour le filtre pair, on aura par transformée de Fourier inverse :

$$\begin{aligned} h(k+n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} e^{jk\omega} e^{jn\omega} d\omega \\ h(k-n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} e^{jk\omega} e^{-jn\omega} d\omega \end{aligned} \quad (5.93)$$

De la parité de $|H(\omega)|$ on déduit la condition :

$$e^{j\varphi(\omega)} e^{jk\omega} = e^{j\varphi(-\omega)} e^{-jk\omega} = e^{-j\varphi(\omega)} e^{-jk\omega} \quad (5.94)$$

soit :

$$e^{2j\varphi(\omega)} = e^{-2jk\omega} \quad (5.95)$$

d'où :

$$2\varphi(\omega) = -2k\omega + 2l\pi$$

avec : $l \in \mathbb{Z}$.

Si on tient compte de la condition d'antisymétrie de la phase et en se limitant à l'intervalle de $[-\pi, +\pi]$ correspondant à une période, on a :

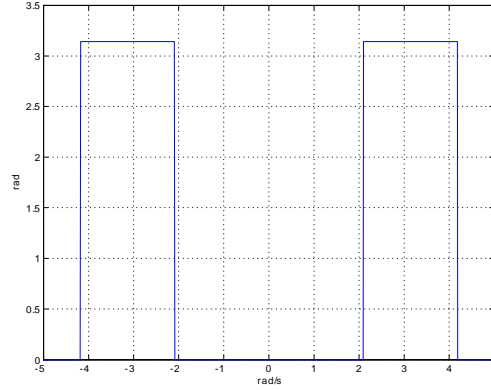
$$\varphi(\omega) = -k\omega + l\pi \operatorname{sgn}(\omega)$$

avec : $l = 0$ ou ± 1 .

On dira (de façon un peu abusive) que le filtre est **linéaire en phase**. On devrait plutôt dire linéaire en phase par morceaux, car la valeur de l peut dépendre de ω comme c'est illustré par l'exemple ci-après.

Exemple 32 Soit le filtre moyennneur type «box» :

$$H(z) = z + 1 + z^{-1} \quad (5.96)$$



27. Exemple de courbe de phase pour un filtre symétrique

D'où la réponse fréquentielle :

$$H(\omega) = 1 + 2 \cos \omega \quad (5.97)$$

Le diagramme de phase sera :

$$\arg(1 + 2 \cos \omega) \quad (5.98)$$

Ce diagramme est illustré par la figure 27. On constate que la phase est égale à 0 ou π par morceaux, le filtre ayant une réponse impulsionnelle paire :

$$h(n) = \delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1) = h(-n) \quad (5.99)$$

Pour le filtre impair, on aura la condition :

$$e^{j\varphi(\omega)} e^{jk\omega} = -e^{j\varphi(-\omega)} e^{-jk\omega} = -e^{-j\varphi(\omega)} e^{-jk\omega} \quad (5.100)$$

soit :

$$e^{2j\varphi(\omega)} = -e^{-2jk\omega} \quad (5.101)$$

d'où :

$$2\varphi(\omega) = -2k\omega + (2l+1)\pi$$

avec $l \in \mathbb{Z}$.

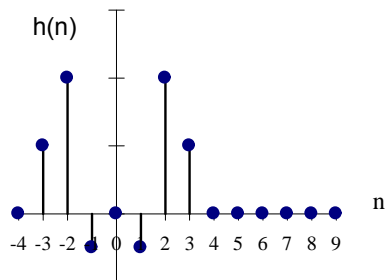
Si on tient compte de la condition d'antisymétrie de la phase et en se limitant à l'intervalle de $[-\pi, +\pi]$ correspondant à une période, on aura alors :

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= -k\omega + l\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\omega) \\ \text{avec} \quad &: \quad l = \pm 1 \end{aligned} \quad (5.102)$$

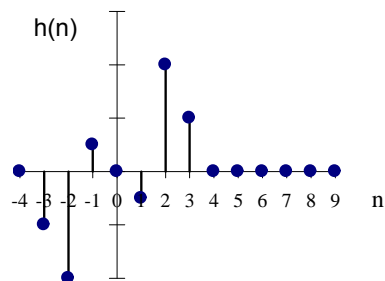
De la même façon que pour le filtre pair, la valeur de l peut dépendre de ω .

Dans la pratique, on aura souvent $k = 0$ et on dira de façon abusive qu'un **filtre linéaire en phase a une réponse impulsionnelle paire** (phase nulle ou égale à $\pm\pi$ par morceaux) **ou impaire** (phase = $\pm\frac{\pi}{2}$, éventuellement par morceaux). Les courbes des figures 28 et 29 proposent des exemples de tels filtres.

Remarque 26 Les filtres linéaires en phase jouent un rôle important en traitement du signal numérique et en particulier dans le traitement des images car leur action ne privilégie aucun sens de parcours du signal (droite-gauche ou gauche-droite pour une image). Les réponses des figures 30 et 31 de deux filtres passe-bas,



28. Réponse impulsionnelle d'un filtre à phase nulle

29. Réponse impulsionnelle d'un filtre à phase égale à $\frac{\pi}{2}$

l'un linéaire en phase : $h_1(n)$, et l'autre non : $h_2(n)$ (voir exemple 25), à un signal d'entrée rectangulaire ($x(n) = \text{rect}_2(n)$), illustrent ce propos. On constate, en particulier que l'effet du filtre non linéaire en phase est fortement dissymétrique. Les deux filtres ont le même gain statique.

$$H_1(z) = z + 1 + z^{-1} \quad (5.103)$$

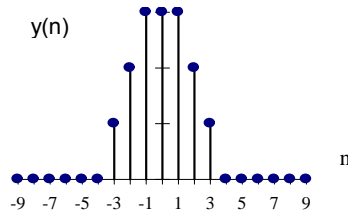
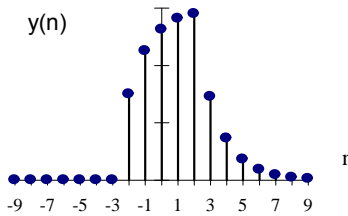
$$H_2(z) = \frac{3/2}{1 - 0,5z^{-1}}$$

Les filtres linéaires en phase ont évidemment des réponses impulsionnelles bilatérales et des fonctions de transfert ayant des propriétés de symétrie importantes :

$$\begin{aligned} H(z) &= H(z^{-1}) && \text{pour une phase «nulle»} \\ H(z) &= -H(z^{-1}) && \text{pour une phase} = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (5.104)$$

La mise en œuvre de ces filtres RII ou RIF doit bénéficier de ces propriétés. On pourra examiner à titre d'exercice le cas des filtres RII à phase nulle.

Exemple 33 *Soit à mettre en œuvre sous forme cascade le filtre détecteur de contour dit de «Canny-Deriche»*

30. Réponse à un rectangle du filtre linéaire en phase (h_1)31. Réponse impulsionnelle du filtre non linéaire en phase (h_2)

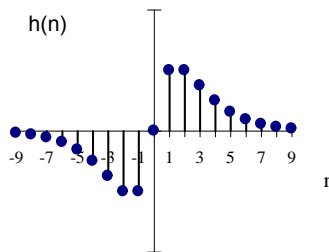
qui a une réponse impulsionnelle impaire donnée par :

$$h(n) = h^+(n) + h^-(n) \quad (5.105)$$

$$\text{avec} : \begin{cases} h^+(n) = k n e^{\alpha n} u(-n) \\ h^-(n) = k n e^{-\alpha n} u(n) \end{cases}$$

$$\text{et} : k, \alpha \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{Z}$$

La réponse impulsionnelle du filtre a l'allure présentée sur le graphique de la figure 32. Nous aurons donc :



32. Réponse impulsionnelle du filtre de Canny-Deriche

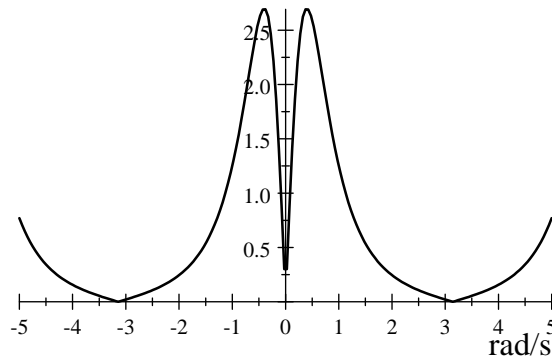
$$H^+(z) = \frac{-k e^{-\alpha} z}{(1 - e^{-\alpha} z)^2} \text{ et } H^-(z) = \frac{k e^{-\alpha} z^{-1}}{(1 - e^{-\alpha} z^{-1})^2} \quad (5.106)$$

Soit sous forme cascade :

$$H(z) = \frac{ke^{-\alpha} (1 - e^{-2\alpha}) (z^{-1} - z)}{(1 - e^{-\alpha}z)^2 (1 - e^{-\alpha}z^{-1})^2} \quad (5.107)$$

On trouve au numérateur un filtre RIF très simple et au dénominateur deux parties récursives identiques ; un même filtre pourra donc être réutilisé pour cette partie.

Les courbes des figures 33 et 34 donnent le module et l'argument de la réponse fréquentielle du filtre numérique ; on remarquera la périodicité 2π et on vérifiera que le module est une fonction paire de type passe-bande tandis que la phase est impaire et égale à $\pm \frac{\pi}{2}$ (linéarité en phase).



33. Module de la réponse fréquentielle du filtre de Canny-Deriche

5.5.3 Corrélations entrée-sortie

Nous avons vu (paragraphe 3.3.6) que pour un filtre de réponse impulsionnelle $h(n)$ les fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélation entre entrée ($x(n)$) et sortie ($y(n)$) s'écrivent :

$$\begin{aligned} r_{yy}(n) &= r_{hh} * r_{xx}(n) \\ r_{yx}(n) &= h * r_{xx}(n) \end{aligned} \quad (5.108)$$

Ce qui, après transformée en z , donc pour les fonctions de transfert, donne :

$$\begin{aligned} R_{yy}(z) &= H(z)H(z^{-1})R_{xx}(z) \\ R_{yx}(z) &= H(z)R_{xx}(z) \end{aligned} \quad (5.109)$$

Projetée sur le cercle unité la transformée en z de la fonction d'autocorrélation devient la **densité spectrale d'énergie** :

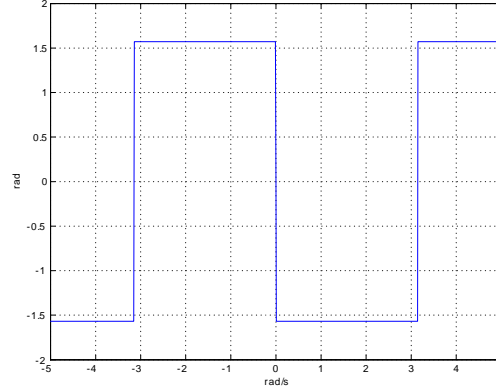
$$R_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2 \quad (5.110)$$

On peut donc déterminer la densité spectrale d'énergie en sortie d'un filtre linéaire par :

$$\begin{aligned} R_{yy}(\omega) &= |H(\omega)|^2 \cdot |X(\omega)|^2 \\ R_{yx}(\omega) &= H(\omega) \cdot |X(\omega)|^2 \end{aligned} \quad (5.111)$$

L'énergie totale en sortie du filtre sera obtenue par :

$$r_{yy}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} R_{yy}(\omega) d\omega \quad (5.112)$$



34. Phase de la réponse fréquentielle du filtre de Canny-Deriche

Donc :

$$E_y = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |H(\omega)|^2 \cdot |X(\omega)|^2 d\omega \quad (5.113)$$

5.5.4 Cepstre de la réponse d'un filtre linéaire

Nous avons vu au paragraphe 4.4 que la transformée en z du cepstre complexe d'un signal numérique s'écrit :

$$C_x(z) = \ln [X(z)] \quad (5.114)$$

La transformée en z du cepstre complexe du signal de sortie d'un filtre linéaire de fonction de transfert $H(z)$ s'écrit donc :

$$C_y(z) = \ln [H(z)X(z)]$$

soit :

$$C_y(z) = C_h(z) + C_x(z) \quad (5.115)$$

Si le cepstre converge sur le cercle unité, on peut utiliser les relations fréquentielles et on aura :

$$C_y(\omega) = C_h(\omega) + C_x(\omega) \quad (5.116)$$

On pourra ainsi construire aisément des «réponses fréquentielles» en additionnant des courbes comme avec les diagrammes de Bode. On a en effet :

$$C_x(\omega) = \ln |X(\omega)| + j \arg(X(\omega)) \quad (5.117)$$

Donc :

$$\operatorname{Re} [C_y(\omega)] = \ln |X(\omega)| + \ln |H(\omega)| \quad (5.118)$$

$$\operatorname{Im} [C_y(\omega)] = \arg(X(\omega)) + \arg(H(\omega))$$

Le cepstre sera déterminé par transformée de Fourier inverse. Cette opération, dans le cas de signaux réels s'écrit (voir équation 4.44) :

$$\begin{aligned} c_y(n) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\ln |X(\omega)| + \ln |H(\omega)|] \cos n\omega d\omega \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\arg(X(\omega)) + \arg(H(\omega))] \sin n\omega d\omega \end{aligned} \quad (5.119)$$

5.6 Réponse à des signaux stochastiques

On peut généraliser directement un certain nombre de résultats précédents au cas des signaux non déterministes. Les propriétés des filtres linéaires vis-à-vis des fonctions de corrélation temporelles restent, en particulier, vraies pour les corrélations statistiques. **La réponse d'un filtre linéaire à un processus stochastique ergodique et stationnaire est un processus ergodique et stationnaire du même ordre.**

Nous proposons dans les paragraphes suivants un rappel de ces principales propriétés accompagnées de démonstrations souvent plus intuitives que parfaitement rigoureuses. Nous suivons là l'esprit général de ce cours qui ne prétend jamais à la parfaite précision mathématique mais qui privilégie chaque fois que c'est possible les résultats pratiques.

5.6.1 Moyenne ou espérance

Nous rappelons ici des résultats déjà présentés au paragraphe 3.3.7 pour les moyennes temporelles et qui se généralisent aux moyennes statistiques ou espérances.

Si $x(n)$ est une réalisation d'un processus stochastique ergodique appliqué à l'entrée du filtre, la sortie $y(n)$ fournira la réalisation correspondante du processus stochastique filtré, $y(n) = h * x(n)$. La moyenne statistique de ce processus sera :

$$\begin{aligned} E(y(n)) &= E \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)E[x(n-k)] \end{aligned} \quad (5.120)$$

Si le processus d'entrée est stationnaire :

$$E[x(n-k)] = E[x(n)] \quad (5.121)$$

et :

$$E(y(n)) = E[x(n)] \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \quad (5.122)$$

On confondra les notations $E(x)$, m_x et \bar{x} .

La réponse fréquentielle étant :

$$H(\omega) = \sum_k h(k)e^{-jk\omega} \quad (5.123)$$

on retrouve le gain statique (voir équation 5.40) :

$$h_o = H(0) = \sum_k h(k) \quad (5.124)$$

et :

$$m_y = m_x \cdot H(0) \quad (5.125)$$

5.6.2 Moments d'ordre deux (auto- et intercorrélations statistiques)

Les propriétés données au paragraphe 3.3.6 seront généralisées ici . Avec les mêmes hypothèses que dans le paragraphe précédent, la fonction d'autocorrélation statistique du signal de sortie du filtre sera :

$$r_{yy}(l) = E[y(l+n)y(n)] = E[y(n)y(n-l)] \quad (5.126)$$

donc :

$$r_{yy}(l) = E \left[\sum_k h(k) \sum_j h(j) x(n-k) x(n-l-j) \right] \quad (5.127)$$

ou, après changements de variables :

$$r_{yy}(l) = \sum_k \sum_m h(k) h(k-m) E [x(n-k) x(n-l-k+m)] \quad (5.128)$$

or :

$$\begin{aligned} E [x(n-k) x(n-l-k+m)] &= r_{xx}(l-n) \\ \sum_k h(k) h(k-m) &= r_{hh}(m) \end{aligned} \quad (5.129)$$

donc :

$$r_{yy}(l) = \sum_m r_{hh}(m) r_{xx}(l-n) \quad (5.130)$$

D'où finalement :

$$r_{yy}(l) = r_{hh} * r_{xx}(l) \quad (5.131)$$

Et de même :

$$r_{yx}(l) = h * r_{xx}(l) \quad (5.132)$$

On retrouvera les résultats correspondants dans l'espace des transformées en z ou des transformées de Fourier :

$$\begin{aligned} R_{yy}(z) &= H(z) H(z^{-1}) R_{xx}(z) \\ R_{yy}(\omega) &= |H(\omega)|^2 R_{xx}(\omega) \\ R_{yx}(z) &= H(z) R_{xx}(z) \\ R_{yx}(\omega) &= H(\omega) R_{xx}(\omega) \end{aligned} \quad (5.133)$$

L'énergie du signal de sortie est obtenue en estimant en 0 la fonction d'autocorrélation du signal de sortie (voir paragraphe 3.3.6.2) :

$$E_y = r_{yy}(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{hh}(k) r_{xx}(k) \quad (5.134)$$

ou par transformée de Fourier inverse :

$$E_y = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |H(\omega)|^2 R_{xx}(\omega) d\omega \quad (5.135)$$

5.6.3 Autocovariance des signaux de sortie

Nous rappelons qu'avec les mêmes hypothèses que précédemment, l'autocovariance statistique ou temporelle d'un signal stochastique est définie par :

$$r_{xx}(k) = r_{xx}^c(k) + m_x^2 \quad (5.136)$$

Si on injecte ce résultat dans l'expression de la fonction d'autocorrélation en sortie du filtre (équation 5.131) :

$$r_{yy}(l) = r_{hh} * r_{xx}^c(l) + m_x^2 \sum_k r_{hh}(k) \quad (5.137)$$

Or :

$$\sum_k r_{hh}(k) = \sum_k \sum_n h(n+k)h(n) \quad (5.138)$$

$$= \sum_k h(k) \sum_n h(n) \quad (5.139)$$

$$= \left[\sum_n h(n) \right]^2 \quad (5.140)$$

donc :

$$m_x^2 \sum_k r_{hh}(k) = m_x^2 \left[\sum_n h(n) \right]^2 = m_y^2 \quad (5.141)$$

D'où :

$$r_{yy}(l) = r_{hh} * r_{xx}^c(l) + m_y^2 \quad (5.142)$$

Ce qui s'exprime plus simplement par :

$$r_{yy}^c(l) = r_{hh} * r_{xx}^c(l) \quad (5.143)$$

On se souviendra que la variance d'un signal est égale à sa fonction d'autocovariance estimée en 0 :

$$\sigma^2 = r_{xx}^c(0) = r_{xx}(0) - m_x^2 \quad (5.144)$$

$$\sigma^2 = E_x - m_x^2 \quad (5.145)$$

Ces résultats permettent de déterminer l'énergie du signal numérique en sortie du filtre en fonction de l'énergie fournie à l'entrée.

5.6.4 Réponse à un processus blanc

Le signal d'entrée sera un bruit blanc si le processus stochastique stationnaire d'entrée a une densité spectrale de puissance constante ; on aura :

$$R_{xx}(\omega) = E_x = r_{xx}(0) \quad (5.146)$$

Si on suppose le processus centré, alors :

$$E_x = r_{xx}(0) = \sigma_x^2 \quad (5.147)$$

La fonction d'autocorrélation du processus d'entrée est donc une distribution de Dirac comme on peut le vérifier en calculant la transformée de Fourier inverse de $R_{xx}(\omega)$:

$$r_{xx}(k) = E_x \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} e^{jk\omega} d\omega = E_x \delta(k) \quad (5.148)$$

En sortie du filtre, on aura :

$$R_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 E_x \quad (5.149)$$

Le bruit en sortie ne sera donc plus blanc, mais il restera centré s'il l'était à l'entrée.

L'énergie en sortie peut être déterminée de deux façons équivalentes (théorème de Parseval : équation 4.148) :

$$E_y = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} R_{yy}(\omega) d\omega = \frac{E_x}{2\pi} \int_{2\pi} |H(\omega)|^2 d\omega \quad (5.150)$$

$$E_y = E_x \sum_n h^2(n)$$

La détermination de la loi de probabilité suivie par le processus en sortie est relativement aisée dans le cas d'un processus décorrélé (blanc) à l'entrée. On profite en effet de la loi de composition des probabilités.

5.6.4.1 Rappels Soit un processus stationnaire Y dont les réalisations $y(n)$ sont la somme des réalisations de deux processus stationnaires décorrélés X_1 et X_2 de lois de probabilité p_1 et p_2 , la loi de probabilité de Y sera p :

$$p(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_2(x)p_1(y-x)dx \quad (5.151)$$

qui peut s'écrire :

$$p(y) = p_1 * p_2(y) \text{ (produit de convolution)} \quad (5.152)$$

Soit un processus stationnaire Y dont les réalisations $y = ax$ sont proportionnelles aux réalisations x d'un processus stationnaire X de loi de probabilité p , la loi de probabilité de Y sera p_a :

$$p_a(y) = \frac{1}{|a|}p\left(\frac{y}{a}\right) \quad (5.153)$$

Le processus Y est blanc.

5.6.4.2 Application au filtrage linéaire La réponse du filtre à une entrée $x(n)$ s'écrit comme une combinaison linéaire de réalisations successives du processus X (le processus est ergodique) :

$$y(n) = \sum_k h(k)x(n-k) \quad (5.154)$$

Le processus d'entrée est décorrélé donc les probabilités de $x(n)$ ne dépendent pas de n ; on a donc une somme pondérée de processus indépendants de même loi de probabilité. La loi de probabilité du processus de sortie sera donc :

$$\begin{aligned} p_s(y) &= \dots * p_{h(i)} * p_{h(i+1)} * \dots(y) \\ p_s(y) &= \prod_i p_{h(i)}(y) \text{ (produit de convolution)} \end{aligned} \quad (5.155)$$

On pourra utiliser avantageusement les propriétés de la transformée de Fourier d'un signal continu pour étudier cette loi de probabilité. En effet, grâce au théorème de Plancherel et à la propriété de dilatation, on aura la transformée de Fourier de $p_s(y)$:

$$P_s(\omega) = \prod_i P(h(i)\omega) \text{ (produit simple)} \quad (5.156)$$

Si la loi de probabilité de X est une gaussienne (**bruit blanc gaussien**) d'écart type σ alors la loi dilatée $p_{h(i)}$ est aussi gaussienne d'écart type $|h(i)|\sigma$:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \\ p_{h(i)} &= \frac{1}{|h(i)|}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2h^2(i)\sigma^2}} \end{aligned} \quad (5.157)$$

La transformée de Fourier d'une gaussienne d'écart type σ est une gaussienne d'écart type $\frac{\pi}{\sigma}$. La transformée de Fourier $P_s(\omega)$ sera proportionnelle à :

$$\begin{aligned} P_s(\omega) &\propto \prod_i e^{-\frac{h^2(i)\omega^2}{2\pi^2}\sigma^2} \\ P_s(\omega) &\propto e^{-\frac{\omega^2}{2\pi^2}\sigma^2[\sum_i h^2(i)]} \end{aligned} \quad (5.158)$$

L'original sera donc une gaussienne de variance :

$$\sigma_s^2 = \sigma^2 \left[\sum_i h^2(i) \right] \quad (5.159)$$

Le résultat concernant la variance confirme le calcul général de l'énergie du processus de sortie.

Le résultat nouveau est que **la réponse d'un filtre linéaire à un processus gaussien est un processus gaussien**. Cette importante propriété reste vraie pour les processus non blancs[4]. La simplicité de ce résultat donne tout son intérêt aux processus gaussiens pour la modélisation des bruits réels.

Cependant, dans le cas général, comme on le verra dans l'exemple suivant, le processus de sortie n'a pas la même loi de probabilité que le processus d'entrée.

5.6.4.3 Loi constante Cas d'un processus blanc de loi constante sur un intervalle centré de largeur Δ .

Considérons un processus d'entrée, blanc, de loi de probabilité $p(x)$:

$$p(x) = \frac{1}{\Delta} \left[u\left(x + \frac{\Delta}{2}\right) - u\left(x - \frac{\Delta}{2}\right) \right] \quad (5.160)$$

La loi dilatée sera également constante sur un intervalle :

$$p_{h(i)}(x) = \frac{1}{\Delta |h(i)|} \left[u\left(x + \frac{\Delta h(i)}{2}\right) - u\left(x - \frac{\Delta h(i)}{2}\right) \right] \quad (5.161)$$

Le produit de convolution des fonctions «box» de différentes largeurs conduit à une fonction polynômiale par morceaux (type B-spline). Le degré maximum des polynômes est égal au nombre moins un de coefficients non nuls de la réponse impulsionnelle du filtre ; la longueur du support de la loi de probabilité est finie et égale à :

$$\sum_i |h(i)| \Delta \quad (5.162)$$

La transformée de Fourier de la loi de probabilité en sortie est un produit de fonctions sinc :

$$P_s(\omega) = \prod_i \frac{\sin \pi \omega h(i)}{\pi \omega h(i)} \quad (5.163)$$

Exemple 34 Traitons le cas simple d'un filtre à deux coefficients :

$$H(z) = 1 + az \text{ avec } a \geq 1 \quad (5.164)$$

La loi de probabilité du processus de sortie sera :

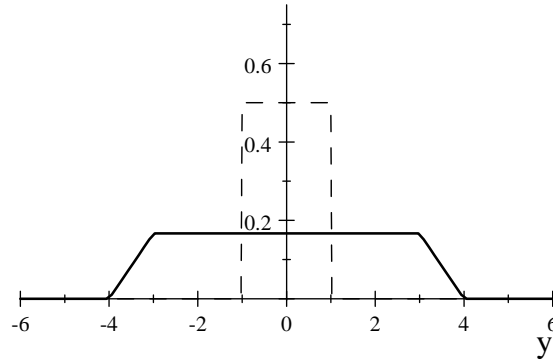
$$p_s(y) = \frac{1}{\Delta^2 a} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{+\frac{\Delta}{2}} \left[u\left(y - x - \frac{\Delta a}{2}\right) - u\left(y - x + \frac{\Delta a}{2}\right) \right] dx \quad (5.165)$$

d'où :

$$p_s(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < -\frac{\Delta}{2}(1+a) \\ \frac{1}{a\Delta} \left(\frac{2}{\Delta}y + a + 1 \right) & \text{si } -\frac{\Delta}{2}(1+a) \leq y < -\frac{a\Delta}{2} \\ \frac{1}{a\Delta} & \text{si } -\frac{a\Delta}{2} \leq y < \frac{a\Delta}{2} \\ -\frac{1}{a\Delta} \left(\frac{2}{\Delta}y - a - 1 \right) & \text{si } \frac{a\Delta}{2} \leq y \leq \frac{\Delta}{2}(1+a) \\ 0 & \text{si } y > \frac{\Delta}{2}(1+a) \end{cases} \quad (5.166)$$

Le graphique de la figure 35 donne un exemple de loi obtenue ($\Delta = 2$ et $a = 3$) avec en trait fin la loi du processus d'entrée.

Exemple 35 Filtre récursif du premier ordre



35. Loi de probabilité en sortie du filtre moyennneur

Soit le filtre de fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (5.167)$$

avec $|a| < 1$

Sa mise en œuvre passe par un calcul récursif déterminé par l'équation aux différences :

$$y(n) = x(n) + ay(n-1) \quad (5.168)$$

qui peut être développée suivant :

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) + ax(n-1) + a^2x(n-2) + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k x(n-k) \end{aligned} \quad (5.169)$$

Si la loi de probabilité du processus d'entrée est constante sur un support de longueur Δ alors la loi de probabilité du processus Y en sortie aura un support de longueur finie :

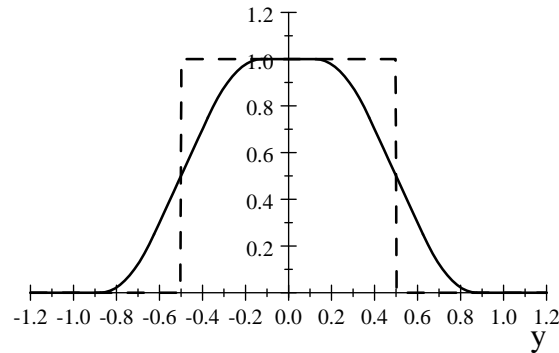
$$\sum_{k=0}^{\infty} |a^k| \Delta = \frac{\Delta}{1 - |a|} \quad (5.170)$$

Si le processus X est centré, le processus de sortie aura comme loi :

$$p(y) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta |a^k|} \left[u\left(x + \frac{\Delta a^k}{2}\right) - u\left(x - \frac{\Delta a^k}{2}\right) \right] \quad (5.171)$$

le produit \prod est un produit de convolution.

Ce qui conduit à une fonction polynômiale par morceaux dont l'allure est représentée sur le graphique de la figure 36 avec $\Delta = 1$ et $a = 0,5$ (la loi initiale rectangulaire est donnée sur le même graphique). Le calcul pour le graphe a été mené jusqu'à $k = 4$ mais l'approximation obtenue en se limitant à $k = 2$ est déjà excellente car la convergence est très rapide.



36. Loi de probabilité en sortie d'un filtre récursif du premier ordre

5.7 Bruit de calcul

Nous étudierons dans ce paragraphe les erreurs liées à la mise en œuvre des filtres numériques linéaires. Cette mise en œuvre fait appel directement ou indirectement (mise en œuvre logicielle) à des circuits électroniques. Ces circuits ne peuvent manipuler que des données quantifiées sur un nombre fini prédéterminé de niveaux. Les variables réelles utilisées dans les opérations décrites dans les paragraphes précédents devront donc être arrondies ou tronquées pour être codées sur un nombre fini de bits. Les résultats des différentes opérations arithmétiques, additions, multiplications, devront eux aussi être codés sur un nombre fini prédéterminé de bits, il y aura donc là aussi, des arrondis et/ou troncatures à effectuer. La conséquence de ces mutilations du signal réel est que le signal de sortie du filtre réel différera de celui du filtre théorique étudié préalablement. Il convient d'estimer ces erreurs afin de dimensionner correctement les opérateurs et les mots binaires utilisés dans les circuits de calcul.

5.7.1 Représentation des nombres

Pour la mise en œuvre des filtres numériques, les nombres réels et entiers seront codés en mots binaires. De nombreux modes de codage existent, nous ne présenterons que les deux plus courants, la représentation en virgule fixe et la notation scientifique en virgule flottante.

5.7.1.1 Virgule fixe Dans la représentation en virgule fixe, le nombre quantifié X de valeur (X) est codé sous la forme suivante :

$$X = (b_{-A}, \dots, b_{-1}, b_0, b_1, \dots, b_B)_r$$

soit :

$$(X) = \sum_{i=-A}^B b_i r^{-i} \quad (5.172)$$

b_i représente un symbole (chiffre) de la base r utilisée. Dans notre cas, nous nous restreindrons à la base binaire, $r = 2$ et $b_i = 0$ ou 1 .

$$\begin{aligned} X &= (b_{-A}, \dots, b_{-1}, b_0, b_1, \dots, b_B)_2 \\ (X) &= \sum_{i=-A}^B b_i 2^{-i} \end{aligned} \quad (5.173)$$

On dira que b_{-A} est le bit le plus significatif (**MSB**) et b_B le bit le moins significatif (**LSB**).

Si le nombre est signé, on rencontre principalement les trois modes de codage suivants :

$$\begin{cases} \text{MSB} = \text{bit de signe} + |(X)| \\ \text{MSB} = \text{bit de signe} + \overline{X} & (\text{complément à 1 de } X) \\ \text{MSB} = \text{bit de signe} + 2 - |(X)| & (\text{complément à 2 de } X) \end{cases} \quad (5.174)$$

5.7.1.2 Virgule flottante La représentation en virgule flottante est indispensable pour manipuler des nombres très petits ou très grands. Le nombre est décomposé en utilisant la notation scientifique : $[M$ (mantisse), E (exposant)]. Soit en base 2 :

$$(X) = (M) \cdot 2^{(E)} \quad (5.175)$$

Mantisse et exposant sont codés en virgule fixe sous forme signée ou non.

Une règle se dégage parmi toutes les possibilités : la norme **IEEE 754**. Dans cette norme, la mantisse est positive, un bit de signe (S) est ajouté en MSB et l'exposant est signé, codé sur 8 bits en complément à 127 :

$$(X) = (-1)^S \cdot (M) \cdot 2^{(E)-127} \quad (5.176)$$

Le nombre se présente donc sous la forme :

$$X = \boxed{S \quad E \quad M} \quad (5.177)$$

5.7.2 Erreurs d'arrondi et de troncature

L'analyse des erreurs d'arrondi et de troncature est très dépendante du mode de représentation des nombres utilisée. Nous ne présenterons ici que le cas de la représentation en virgule fixe qui correspond à la pratique de la mise en œuvre matérielle sous forme de circuits électroniques des filtres numériques.

Dans ces conditions, si le nombre x , initialement codé sur b_u bits devient $Q(x)$ quand il est codé sur seulement b bits, l'erreur commise dépend de la méthode utilisée pour réduire la dynamique : troncature $Q_t(x)$ ou arrondi $Q_r(x)$.

L'erreur commise sera :

$$E = Q(x) - x \quad (5.178)$$

En cas de **troncature**, l'erreur maximum en valeur absolue est obtenue si on perd $b_u - b$ bits tous à 1. L'erreur est toujours négative pour un nombre x positif car on obtient une valeur par défaut :

$$-(2^{-b} - 2^{-b_u}) \leq E_t \leq 0 \quad (5.179)$$

- En complément à 1 l'erreur pour un nombre négatif est la même mais de signe opposé.
- En complément à 2 l'erreur est toujours négative.

En cas d'**arrondi**, l'erreur Q_r ne concerne que la valeur du nombre, elle est donc indépendante de la représentation signée choisie :

$$-\frac{1}{2}(2^{-b} - 2^{-b_u}) \leq E_r \leq \frac{1}{2}(2^{-b} - 2^{-b_u}) \quad (5.180)$$

On supposera très souvent que la représentation initiale de x n'est pas limitée : $b_u = \infty$, on aura alors en résumant :

$$-2^{-b-1} \leq E_r \leq 2^{-b-1} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -2^{-b} \leq E_t \leq 0 & \text{en complément à 2} \\ -2^{-b} \leq E_t \leq 2^{-b} & \text{en complément à 1} \\ & \text{ou bit de signe} \end{cases} \quad (5.181)$$

Dans tous les cas l'erreur exacte n'est prévisible que pour des données x connues à l'avance. Pour obtenir une analyse générale du comportement de l'opérateur mis en œuvre nous supposerons qu'il n'en est rien et

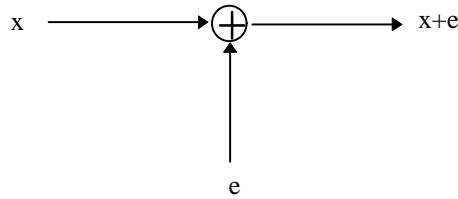
nous seront alors conduits à considérer l'erreur commise comme la réalisation e d'un processus stochastique E résultant de l'opération de quantification (bruit de calcul) :

$$Q(x) = x + e \quad (5.182)$$

Ce qui correspond à l'opérateur suivant :

$$x \longrightarrow \boxed{Q(x)} \longrightarrow x + e \quad (5.183)$$

ou :



La densité de probabilité de e sera, en général, supposée constante sur l'intervalle défini $\{e_1, e_2\}$ plus haut (voir figure 37). L'amplitude de la densité de probabilité est telle que la probabilité totale soit égale à 1 :

$$\int_{e_1}^{e_2} P(e) de = 1 \quad (5.184)$$

D'où :

$$P(e) = \frac{1}{e_2 - e_1} = \frac{1}{\Delta} \quad (5.185)$$

si Δ est l'intervalle d'erreur. Le processus stochastique E est manifestement ergodique et stationnaire. On peut admettre également que ce processus est entièrement décorrélé, de sorte que sa fonction d'autocorrélation se réduit à un Dirac d'amplitude égale à l'énergie du processus :

$$r_{ee}(n) = \delta(n) \cdot r_{ee}(0) = \delta(n) \cdot E_e \quad (5.186)$$

De sorte que la densité spectrale d'énergie sera constante :

$$R_{ee}(\omega) = \sum_n \delta(n) \cdot E_e \cdot e^{-jn\omega} = E_e \quad (5.187)$$

Le processus est donc un bruit blanc. Son énergie est donnée par :

$$E_e = r_{ee}(0) = E[e^2(n)] \quad (5.188)$$

Si on admet toujours que b_u est très grand, l'erreur e est une grandeur qui varie continûment sur l'intervalle Δ , de sorte que :

$$r_{ee}(0) = \int_{e_1}^{e_2} e^2 P(e) de$$

donc :

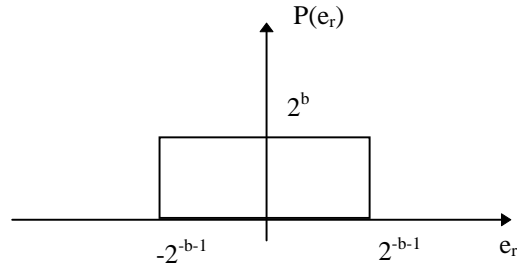
$$E_e = \frac{e_2^3 - e_1^3}{3(e_2 - e_1)} \quad (5.189)$$

Quant à l'espérance du processus :

$$m_e = \int_{e_1}^{e_2} e P(e) de$$

soit :

$$m_e = \frac{e_2 + e_1}{2} \quad (5.190)$$



Erreur d'arrondi par exemple

37. Erreur d'arrondi

On peut résumer tous ces résultats dans le tableau suivant :

	Arrondi	Troncature en complément à 2	Troncature en complément à 1 ou avec bit de signe
e_2	2^{-b-1}	0	2^{-b}
e_1	-2^{-b-1}	-2^{-b}	2^{-b}
E_e	$\frac{2^{-2b}}{12}$	$\frac{2^{-2b}}{3}$	$\frac{2^{-2b}}{3}$
m_e	0	-2^{-b-1}	0

L'avantage de l'arrondi sur la troncature apparaît de façon évidente. Cette opération a cependant un coût de mise en œuvre qui peut ne pas être négligeable. Ce coût devra être comparé à celui lié à l'augmentation du nombre de bits de codage nécessaires pour atteindre les mêmes performances avec une simple troncature.

5.7.3 Erreurs dues à la quantification du filtre

Parmi les erreurs liées à la quantification des données lors de la mise en œuvre des filtres numériques, on distingue les erreurs commises lors de la quantification des coefficients de la réponse impulsionnelle du filtre et les erreurs qui résultent de la quantification des données dans les calculs et qui proviennent en particulier de la limitation du nombre de bits utilisés lors des opérations et du codage de leurs résultats.

Nous considérons dans ce paragraphe les erreurs provenant de la quantification des coefficients du filtre. Nous nous limiterons dans cet exposé introductif au cas des filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF). Le lecteur intéressé trouvera plus de détail dans [3] et dans [17].

La fonction de transfert du filtre théorique est écrite sous la forme :

$$H(z) = \sum_{n=-N}^N h(n)z^{-n} \quad (5.191)$$

Les coefficients quantifiés du filtre réel seront :

$$\hat{h}(n) = h(n) + e_h(n) \quad (5.192)$$

Cette erreur sera en général une erreur d'arrondi et on pourra s'arranger pour que sa moyenne soit à peu près nulle. C'est d'ailleurs d'autant plus facile que le nombre de coefficients du filtre est grand.

La réponse fréquentielle du filtre réel sera :

$$\widehat{H}(\omega) = H(\omega) + E_h(\omega) \quad (5.193)$$

avec un spectre de l'erreur donné par :

$$E_h(\omega) = \sum_{n=-N}^N e_h(n) e^{-jn\omega}$$

et :

$$E_h(0) = m_{e_h} \simeq 0 \quad (5.194)$$

Il s'agit d'un signal stochastique continu, centré, ergodique et stationnaire. Sa variance sera :

$$\sigma_{E_h}^2 = \text{Esp} [E_h(\omega) E_h^*(\omega)] \quad (5.195)$$

$$= \text{Esp} \left[\left(\sum_{n=-N}^N e_h(n) e^{-jn\omega} \right) \left(\sum_{k=-N}^N e_h(k) e^{jk\omega} \right) \right] \quad (5.196)$$

ou :

$$\sigma_{E_h}^2 = \sum_{n=-N}^N \sum_{k=-N}^N \text{Esp} [e_h(n) e_h(k)] e^{-jn\omega} e^{jk\omega} \quad (5.197)$$

Si on admet que le processus est décorrélé :

$$\sigma_{E_h}^2 = \sum_{n=-N}^N \sum_{k=-N}^N \text{Esp} [e_h^2(n)] \delta(n-k) e^{j(k-n)\omega} \quad (5.198)$$

et donc :

$$\sigma_{E_h}^2 = (2N+1) \text{Esp} [e_h^2]$$

soit :

$$\sigma_{E_h}^2 = (2N+1) \frac{2^{-2b}}{12} \quad (5.199)$$

Cette variance caractérise l'erreur commise sur la réponse fréquentielle du filtre.

Si ce dernier a été déterminé à partir de la donnée d'une réponse fréquentielle, ce résultat est tout à fait pertinent. Mais si le filtre a été défini à partir de la donnée d'une réponse impulsionnelle, cette information présente moins d'intérêt. On s'intéressera dans ce cas plutôt à l'erreur commise sur la sortie du filtre.

La réponse du filtre réel à un signal $x(n)$ s'écrit :

$$\widehat{y}(n) = \widehat{h} * x(n)$$

soit :

$$\widehat{y}(n) = h * x(n) + e_h * x(n) \quad (5.200)$$

d'où :

$$\widehat{y}(n) = y(n) + e_y(n) \quad (5.201)$$

avec :

$$e_y(n) = e_h * x(n) \quad (5.202)$$

qui représente l'erreur sur le signal de sortie. Cette erreur est un processus stochastique ergodique, stationnaire (si l'entrée est stationnaire), de moyenne nulle car la moyenne du processus d'arrondi est nulle (voir le tableau du paragraphe 5.7.2) :

$$m_{e_y} = m_{e_h} \cdot \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K/2}^{K/2} x(n) = 0 \quad (5.203)$$

La fonction d'autocorrélation de ce processus sera :

$$\begin{aligned} \widehat{r_{e_y e_y}}(n) &= r_{e_h e_h} * r_{xx}(n) & (5.204) \\ \widehat{r_{e_y e_y}}(n) &= \frac{2^{-2b}}{12} \sum_k \delta(n-k) r_{xx}(k) \\ \widehat{r_{e_y e_y}}(n) &= \frac{2^{-2b}}{12} r_{xx}(n) \end{aligned}$$

On aura en particulier la variance de l'erreur :

$$\sigma^2 = \frac{2^{-2b}}{12} E_x \quad (5.205)$$

On pourra, pour caractériser l'erreur en sortie du filtre, utiliser comme signal test d'entrée un processus stochastique, centré, blanc, de variance σ_x^2 , alors :

$$\sigma^2 = \frac{2^{-2b}}{12} \sigma_x^2 \quad (5.206)$$

5.7.4 Erreurs dues à la quantification dans les calculs

Nous n'étudierons pas les effets non-linéaires dus aux dépassements de capacité lors des calculs ; ces effets se traduisent souvent par des oscillations et des phénomènes de cycle limite. Nous n'envisagerons pas non plus les conséquences des mises à l'échelle nécessaires pour éviter ces dépassements. Tous ces phénomènes doivent être considérés mais leur étude nous semble en dehors du cadre d'un cours général de traitement du signal numérique.

Nous traiterons dans ce paragraphe le problème de l'erreur liée à la quantification des données dans les calculs à travers un exemple typique. Chaque forme de mise en œuvre d'un type de filtre est un cas particulier. On pourra s'inspirer de la méthode utilisée dans le cas traité ici pour aborder d'autres problèmes.

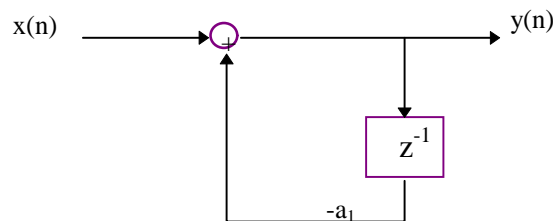
Nous choisissons de travailler, dans un premier temps, sur une cellule récursive du premier ordre :

$$H(z) = \frac{1}{1 + az^{-1}} \quad (5.207)$$

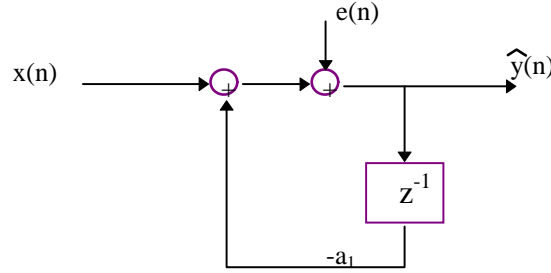
correspondant à l'équation aux différences :

$$y(n) = x(n) - ay(n-1) \quad (5.208)$$

Ce qui correspond au schéma de mise en œuvre suivant :



L'effet de la quantification du résultat de l'addition et de la multiplication est modélisé par l'ajout d'un processus stochastique (bruit de calcul $e(n)$) en sortie de l'additionneur, de telle sorte que la sortie du filtre réel sera $\hat{y}(n)$.



$$\hat{y}(n) = x(n) - a\hat{y}(n-1) + e(n) \quad (5.209)$$

soit :

$$\hat{y}(n) = x(n) - ay(n-1) - ae_y(n-1) + e(n) \quad (5.210)$$

si on pose :

$$\hat{y}(n) = y(n) + e_y(n) \quad (5.211)$$

On aura donc finalement :

$$e_y(n) = -ae_y(n-1) + e(n) \quad (5.212)$$

Le bruit de calcul est filtré de la même façon que le signal d'entrée et on peut écrire :

$$e_y(n) = h * e(n) \quad (5.213)$$

L'erreur en sortie sera donc un processus stochastique, ergodique et stationnaire de moyenne proportionnelle à l'espérance du bruit perturbateur (arrondi ou troncature) et au gain statique du filtre :

$$m_{e_y} = m_e \cdot \sum_n h(n) = m_e \cdot h_o \quad (5.214)$$

La fonction d'autocorrélation de ce bruit en sortie de filtre sera :

$$\begin{aligned} r_{e_y e_y}(n) &= r_{hh} * r_{ee}(n) \\ r_{e_y e_y}(n) &= E_e \cdot r_{hh}(n) \end{aligned} \quad (5.215)$$

D'où l'énergie du bruit en sortie :

$$\begin{aligned} E_{e_y} &= E_e \cdot r_{hh}(0) \\ E_{e_y} &= E_e \sum_n h^2(n) \end{aligned} \quad (5.216)$$

ou :

$$E_{e_y} = \frac{E_e}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} |H(\omega)|^2 d\omega \quad (5.217)$$

Donc dans notre cas (voir le résultat de l'exemple 3.1.3) :

$$E_{e_y} = \frac{E_e}{1-a^2} \quad (5.218)$$

Ce résultat devra être explicité en fonction du cas envisagé : arrondi ou troncature.

Exemple 36 Dans le cas d'une erreur d'arrondi, le bruit en sortie sera à moyenne nulle et de variance :

$$\sigma^2 = \frac{2^{-2b}}{12} \frac{1}{1-a^2} \quad (5.219)$$

On pourra aussi spécifier le rapport signal sur bruit en sortie du filtre :

$$SNR = \frac{E_y}{E_{e_y}} = \frac{E_x}{E_e} \quad (5.220)$$

On constate que le résultat ne dépend que de l'énergie du signal d'entrée et du bruit de calcul (cette énergie est d'ailleurs bornée par les risques de dépassement dans les opérateurs). Ce résultat était prévisible puisque nous avons vu que le bruit de calcul subissait le même filtrage que le signal d'entrée, son effet est donc identique à celui d'un bruit ajouté à l'entrée du filtre. On retrouve un comportement tout à fait identique à celui des filtres continus et un phénomène comparable à l'influence du bruit des composants électroniques qui les constituent. Le bruit de calcul des filtres numériques joue donc un rôle semblable à ce bruit d'origine physique et il serait tout à fait abusif de prétendre que l'absence de bruit est la caractéristique du traitement discret du signal.

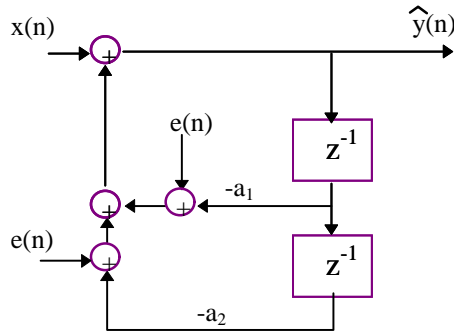
Exemple 37 Nous examinons, dans un deuxième temps et à titre d'exemple, le cas d'une cellule réursive causale du deuxième ordre :

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (5.221)$$

L'équation aux différences sera :

$$y(n) = x(n) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) \quad (5.222)$$

Le bruit résultant de la quantification des calculs, en particulier des opérations de multiplication, est modélisé par un bruit ajouté en sortie des opérateurs parfaits suivant le schéma suivant :



On peut, de la même façon que pour la cellule du premier ordre, ramener les générateurs de bruit à l'entrée. Pour tenir compte du fait qu'ils sont parfaitement décorrélés, nous les différencions et le signal de sortie $\hat{y}(n)$ du filtre réel s'écrira :

$$\hat{y}(n) = y(n) + e_y(n) \quad (5.223)$$

avec :

$$\begin{aligned} e_y(n) &= h * e_1(n) + h * e_2(n) \\ &= h * (e_1 + e_2)(n) \end{aligned} \quad (5.224)$$

Le bruit de calcul est filtré par l'ensemble du filtre comme dans la cellule du premier ordre. L'erreur en sortie sera donc un processus stochastique, ergodique et stationnaire de moyenne proportionnelle à l'espérance du bruit perturbateur (arrondi ou troncature) et au gain statique du filtre. L'espérance et l'autocorrélation du bruit sera la somme des espérances et des autocorrélations, et si le processus de troncature ou arrondi est le même pour les deux sources de bruit, on aura :

$$m_{e_y} = 2m_e \cdot \sum_n h(n) = 2m_e \cdot h_o \quad (5.225)$$

La fonction d'autocorrélation de ce bruit en sortie de filtre sera :

$$\begin{aligned}r_{e_y e_y}(n) &= 2r_{hh} * r_{ee}(n) \\r_{e_y e_y}(n) &= 2E_e \cdot r_{hh}(n)\end{aligned}\tag{5.226}$$

D'où l'énergie du bruit en sortie :

$$E_{e_y} = 2E_e \cdot r_{hh}(0)\tag{5.227}$$

Le calcul de la fonction d'autocorrélation du filtre du deuxième ordre est plus lourd que pour le premier ordre, il pourra être mené sur un exemple numérique à titre d'exercice.

Chapitre 6

Détermination des filtres

La détermination des filtres numériques est un vaste sujet qui est l'objet de nombreux travaux de recherche. Nous nous contenterons de présenter quelques «pistes» choisies parmi les techniques les plus classiques. La méthode la plus traditionnelle consiste à procéder comme avec les filtres analogiques, on cherchera alors à obtenir une réponse fréquentielle donnée [8]. On pourra aussi essayer de construire une réponse impulsionnelle facile à mettre en œuvre et qui soit la plus proche possible d'un modèle donné. La détermination d'un filtre est, enfin, souvent menée en fonction d'un objectif de filtrage sur un signal donné ; il faudra, dans ce cas, assurer l'optimalité vis à vis de certains critères, le filtre dit adapté fait partie de cette famille au même titre que les filtres adaptatifs (filtrage de Kalman, filtre de Wiener,...)[5][15] qui ne rentrent pas vraiment dans la catégorie des filtres linéaires.

6.1 Détermination des filtres par fonctions modèles

Cette approche consiste à essayer de reproduire des fonctions de filtrage identiques à celles connues dans le cas des filtres analogiques. On cherchera une correspondance entre des fonctions de transfert définies dans l'espace de Laplace et des fonctions de transfert définies dans l'espace des z . Cette correspondance devra conserver la stabilité, la causalité et le caractère du filtre analogique qui sert de modèle. Un filtre passe bas devra rester passe bas, un passe haut analogique se transformera en passe haut numérique, etc. Une remarque fondamentale a guidé la recherche des méthodes les plus connues : la fonction de transfert d'un filtre analogique stable et causal a ses pôles à gauche de l'axe imaginaire, tandis que pour un filtre numérique ayant les mêmes propriétés, les pôles de la fonction de transfert doivent être dans le cercle unité. Une bonne idée est donc de chercher une transformation qui «envoie» le demi-plan gauche dans le cercle unité et qui conserve la relation d'ordre de l'axe imaginaire dans sa transformation en cercle unité. Nous retenons trois méthodes parmi les plus utilisées qui ont chacune des avantages et des inconvénients et un champ d'application privilégié.

6.1.1 Approximation des dérivées

Une opération de dérivation dans le domaine analogique (variable t) se traduit par une dilatation dans l'espace de Laplace (variable s) :

$$\frac{dx}{dt} \xrightarrow{\text{Laplace}} sX(s) \quad (6.1)$$

L'opération la plus directement analogue à la dérivation dans le cas discret sera la différence :

$$\frac{x(n) - x(n-1)}{\tau} \xrightarrow{z} \frac{1 - z^{-1}}{\tau} X(z) \quad (6.2)$$

Le paramètre τ permet de contrôler le «gain» de l'opération. Remplacer la dérivation du cas analogique par la différence du cas discret revient à transformer la fonction de transfert dans Laplace en fonction de transfert en z . La relation de correspondance qui permet cette transformation est la suivante :

$$s \equiv \frac{1 - z^{-1}}{\tau} \quad (6.3)$$

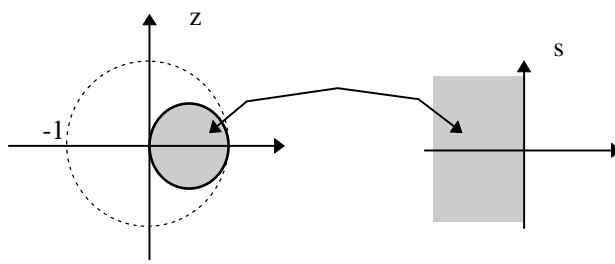
ou :

$$z \equiv \frac{1}{1 - \tau s} \quad (6.4)$$

On peut vérifier que dans cette transformation l'axe imaginaire correspond à un cercle situé dans le cercle unité. En effet, si $s = j\omega_a$, alors :

$$z = \frac{1}{1 + \omega_a^2 \tau^2} + j \frac{\omega_a \tau}{1 + \omega_a^2 \tau^2} \quad (6.5)$$

qui est l'équation d'un cercle de centre $z = \frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$. L'intérieur de ce cercle correspond au demi plan situé à gauche de l'axe imaginaire (voir figure 38).



38. Correspondance entre le plan des z et le plan de Laplace pour l'approximation des dérivées

Les pôles du filtre analogique seront ainsi «envoyés» à l'intérieur de ce cercle dans le plan des z . Ils ne correspondront donc qu'à des pulsations de coupure limitées ($< \frac{\pi}{2}$), et les filtres réalisés par cette méthode ne pourront pas être des passe-haut. Cette transformation ne sera donc utilisable que pour les filtres passe-bas.

La transformation des pulsations est évaluée en déterminant la pulsation ω_d de la réponse fréquentielle du filtre numérique qui correspond à chaque point de l'axe des pulsations analogiques (axe imaginaire pour le plan de Laplace $s = j\omega_a$) :

$$j\omega_a = \frac{1 - |z| e^{-j\omega_d}}{\tau}$$

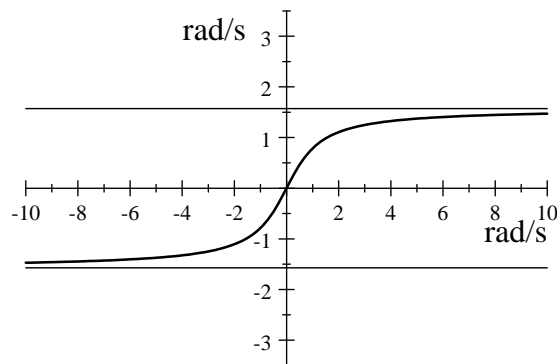
or :

$$|z| e^{j\omega_d} = \frac{\sqrt{1 + \omega_a^2 \tau^2}}{1 + \omega_a^2 \tau^2} e^{j \arctan \omega_a \tau} \quad (6.6)$$

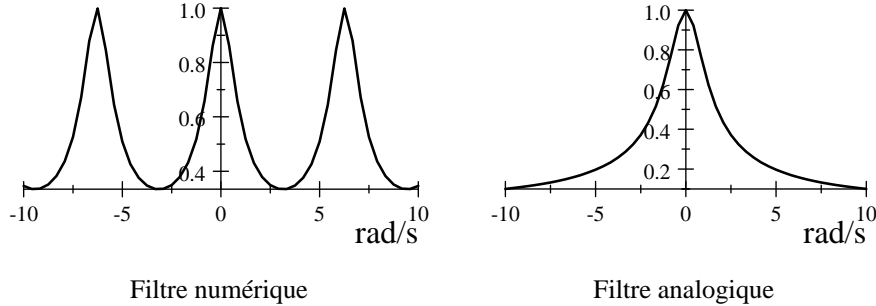
donc :

$$|z| e^{j\omega_d} = \frac{1}{1 - j\omega_a \tau} \implies \tan \omega_d = \omega_a \tau \quad (6.7)$$

La transformation des pulsations est illustrée par la courbe de la figure 39.



39. Pulsation numérique (ω_d) en fonction de la pulsation analogique ($\omega_a \tau$)



3. Réponses fréquentielles des filtres passe-bas numériques et analogiques

On vérifie bien que la pulsation de coupure de la réponse fréquentielle du filtre numérique obtenu ne peut pas dépasser $\pm \frac{\pi}{2}$. D'autre part, la distorsion de l'axe des pulsations devient considérable à l'approche de cette limite. Cette transformation est cependant parfois utilisée pour des filtres passe-bas car elle conduit souvent à des fonctions de transfert de mise en œuvre très simple.

Exemple 38 Soit la fonction de transfert d'un passe-bas analogique du premier ordre de pulsation de coupure $\frac{1}{\tau}$:

$$\frac{1}{1 + s\tau} \quad (6.8)$$

La fonction de transfert du filtre numérique correspondant sera :

$$\frac{1}{2 - z^{-1}} = \frac{1/2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (6.9)$$

Sa pulsation de coupure sera :

$$\omega_{dc} = \arctan\left(\frac{1}{\tau} \cdot \tau\right) = \frac{\pi}{4} \quad (6.10)$$

Les deux courbes du tableau de figures 3 permettent de comparer les réponses fréquentielles des deux filtres.

La distorsion fréquentielle apparaît clairement au voisinage de $\frac{\pi}{2}$. L'équation aux différences du filtre est :

$$y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + \frac{1}{2}x(n) \quad (6.11)$$

Remarque 27 Si la pulsation de coupure du filtre numérique est imposée dans le cahier des charges, il conviendra de fixer la pulsation de coupure du filtre analogique modèle à partir de la relation :

$$\omega_a = \frac{1}{\tau} \tan \omega_d \quad (6.12)$$

Si le traitement concerne des signaux intrinsèquement discrets, on pourra prendre $\tau = 1$; si le signal traité provient d'un échantillonnage, il faudra prendre la période d'échantillonnage comme valeur de τ , cette valeur servira d'unité de temps pour le choix de la pulsation de coupure numérique.

6.1.2 Transformation bilinéaire

On cherche à remédier au défaut de la méthode précédemment exposée en essayant de trouver une correspondance numérique à l'opération analogique d'intégration :

$$y(t) = \int x(t) dt \longrightarrow Y(s) = \frac{1}{s} X(s) \quad (6.13)$$

Ce qui donne dans le domaine numérique en employant la méthode du trapèze pour «intégrer» de $n - 1$ à n et sans oublier ni la «constante d'intégration», ni le gain τ :

$$y(n) = \tau \frac{x(n) + x(n-1)}{2} + y(n-1) \quad (6.14)$$

d'où dans l'espace des transformées en z :

$$Y(z)(1 - z^{-1}) = X(z) \frac{\tau}{2} (1 + z^{-1}) \quad (6.15)$$

La relation de correspondance sera donc :

$$s \equiv \frac{2}{\tau} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

ou :

$$z \equiv \frac{2 + \tau s}{2 - \tau s} \quad (6.16)$$

Nous allons vérifier que, cette fois, la correspondance entre l'intérieur du cercle unité dans l'espace des z et le demi-plan gauche de l'espace de Laplace est assurée.

Si on pose :

$$z = r e^{j\omega_d} \text{ et } s = \sigma + j\omega_a \quad (6.17)$$

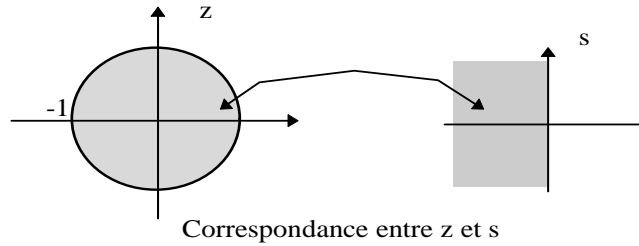
La loi de correspondance ?? conduit à :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{2}{\tau} \frac{r^2 - 1}{1 + r^2 + 2r \cos \omega_d} \\ \omega_a = \frac{2}{\tau} \frac{2r \sin \omega_d}{1 + r^2 + 2r \cos \omega_d} \end{cases} \quad (6.18)$$

Le dénominateur est compris entre $(1 - r)^2$ et $(1 + r)^2$, il est donc toujours positif. ce qui implique que :

$$\begin{aligned} \sigma < 0 &\iff r^2 < 1 \\ \sigma = 0 &\iff r^2 = 1 \end{aligned} \quad (6.19)$$

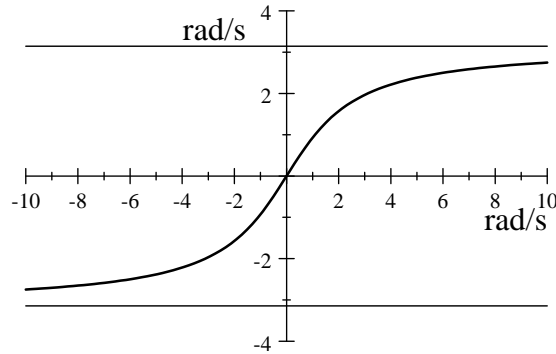
On peut donc conclure que l'intérieur du cercle unité correspond bien au demi-plan gauche.



La correspondance fréquentielle est obtenue en faisant : $\sigma = 0$ et $r = 1$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \omega_a &= \frac{2}{\tau} \tan \frac{\omega_d}{2} \\ \text{ou} \\ \omega_d &= 2 \arctan \frac{\omega_a \tau}{2} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Le graphe de la figure 40 illustre ce résultat en donnant ω_d en fonction de $\omega_a \tau$.



40. Pulsation numérique ω_d en fonction de $\omega_a \tau$

La pulsation numérique obtenue par la transformation peut varier sur toute la gamme accessible (rappelons que la transformation de Fourier d'un signal numérique est périodique de période 2π). La zone où la relation est quasi linéaire dépasse assez largement $\frac{\pi}{2}$ et on peut espérer conserver sur toute cette zone l'allure de la réponse fréquentielle du filtre analogique qui a servi de modèle. On préférera donc ce type de transformation à l'approximation de la dérivée, en particulier pour les filtres passe-bande et pour les filtres passe-haut. Il est entendu que pour ces derniers, l'approximation sera forcément grossière et la bande passante du filtre numérique limitée dans les hautes fréquences. Le prix à payer pour cette meilleure fidélité de la transformation sera une plus grande complexité du filtre numérique.

Ceci est illustré par l'exemple suivant qui reprend la même fonction modèle que celle utilisée pour illustrer l'approximation de la dérivée. La remarque du paragraphe précédent (remarque 27) concernant les choix de la constante τ et de la pulsation de coupure reste valable.

Exemple 39 On reprend la fonction modèle :

$$\frac{1}{1 + s\tau} \quad (6.21)$$

Ce qui, avec la transformation bilinéaire (relation ??), donne :

$$H(z) = \frac{1/3(1 + z^{-1})}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad (6.22)$$

et une pulsation de coupure :

$$\omega_{dc} = 2 \arctan \frac{1}{2} = 0,9273 \quad (6.23)$$

Les modules des réponses fréquentielles des filtres numériques et du filtre analogique modèle sont illustrés sur les courbes de la figure ??.

On vérifie l'amélioration de la fidélité par rapport à l'approximation de la dérivée, du moins tant que $\omega_d < \frac{\pi}{2}$. L'équation aux différences du filtre a, en revanche, un terme de plus :

$$y(n) = \frac{1}{3}y(n-1) + \frac{1}{3}x(n) + \frac{1}{3}x(n-1) \quad (6.24)$$

Exemple 40 Soit un filtre modèle de type passe-haut du premier ordre, de pulsation de coupure $1/\tau$ et de fonction de transfert :

$$\frac{s\tau}{1 + s\tau} \quad (6.25)$$

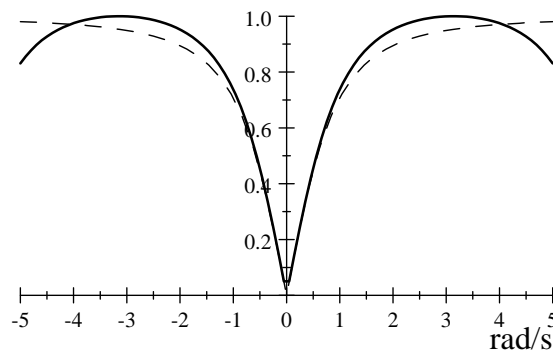
Le filtre numérique construit à partir de la transformation bilinéaire aura la fonction de transfert suivante :

$$H(z) = \frac{2}{3} \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad (6.26)$$

C'est un filtre récursif RII du deuxième ordre d'équation aux différences :

$$y(n) = \frac{1}{3}y(n-1) + \frac{2}{3}x(n) - \frac{2}{3}x(n-1) \quad (6.27)$$

Le module de sa réponse fréquentielle est donné sur le graphe de la figure 41. On constate que la courbe obtenue est fidèle au modèle sur toute la gamme $[-\pi, \pi]$.



41. Réponse fréquentielle d'un filtre numérique passe-haut (filtre modèle en trait fin)

6.1.3 Echantillonnage de la réponse impulsionnelle

Une troisième méthode a aussi ses partisans, c'est peut-être la plus naturelle car elle consiste à passer de la réponse analogique à la réponse du filtre numérique par simple échantillonnage dans l'espace des pulsations.

Si on note $h_a(t)$ la réponse impulsionnelle du filtre analogique modèle, sa réponse fréquentielle sera :

$$H_a(\omega_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_a(t) e^{-j\omega_a t} dt \quad (6.28)$$

La version discrète du filtre $h(n)$ aura une réponse fréquentielle :

$$H(\omega_d) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) e^{-jn\omega_d} \quad (6.29)$$

de période 2π . Donc, pour éviter le phénomène de repliement du spectre dans la bande utile (*aliasing*), il faut que la réponse fréquentielle soit limitée à $[-\pi, +\pi]$. Si la période d'échantillonnage de la réponse analogique $h_a(t)$ est τ , l'unité de pulsation numérique ω_d correspondra en analogique à $\omega_a \tau$. La limite fréquentielle utile de la fonction modèle sera donc :

$$-\frac{\pi}{\tau} < \omega_a < \frac{\pi}{\tau} \quad (6.30)$$

Remarque 28 On retrouve évidemment une conséquence du théorème de Shannon.

Dans ces conditions, la version échantillonnée $h_e(t)$ de $h_a(t)$ est donnée par :

$$h_e(t) = h_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau) \quad (6.31)$$

d'où la fonction de transfert de la version échantillonnée du filtre modèle :

$$\begin{aligned} H_e(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[h_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau) \right] e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_a(t) \delta(t - n\tau) e^{-st} dt \\ H_e(s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_a(n\tau) e^{-sn\tau} \end{aligned} \quad (6.32)$$

Il suffit de prendre pour coefficient de rang k de la réponse impulsionnelle du filtre numérique la valeur de l'échantillon numéro k de la réponse analogique échantillonnée :

$$h(k) = h_e(k\tau) \quad (6.33)$$

$$= h_a(k\tau) \quad (6.34)$$

Or la fonction de transfert du filtre numérique est :

$$H(z) = \sum_n h(n) z^{-n} \quad (6.35)$$

La correspondance avec la réponse fréquentielle de la fonction modèle échantillonnée ($H_e(s)$) est parfaite si la règle de transformation est :

$$z \equiv e^{\tau s}$$

ou :

$$s \equiv \frac{1}{\tau} \ln z \quad (6.36)$$

Remarque 29 On retrouve une conséquence de l'échantillonnage dans le fait que la correspondance n'est pas biunivoque, il existe un nombre infini de valeurs complexes de s qui conduisent à la même valeur de z . La méthode donnera donc lieu à un phénomène de repliement (aliasing) de la fonction de transfert ce qui en limitera l'intérêt, pour les filtres passe-haut notamment.

On vérifie encore que la correspondance entre l'intérieur du cercle unité dans l'espace des z et le demi-plan gauche de l'espace de Laplace est assurée.

Si on pose comme précédemment :

$$z = r e^{j\omega_d} \text{ et } s = \sigma + j\omega_a \quad (6.37)$$

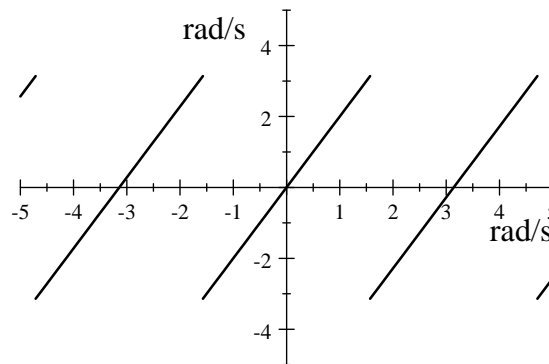
on a, en identifiant module et argument :

$$\begin{cases} r = e^{\tau\sigma} \\ \omega_d + 2k\pi = \omega_a\tau \end{cases} \quad (6.38)$$

donc le demi-plan gauche est projeté dans le cercle unité :

$$r \leq 1 \iff \sigma \leq 0 \quad (6.39)$$

La correspondance des pulsations, dans la limite imposée de $[-\pi, \pi]$ est parfaitement linéaire (voir figure 42).



42. Pulsation numérique ω_d en fonction de $\omega_a\tau$

La transformation obtenue semble donc idéale par rapport au cahier des charges annoncé. Il y a malheureusement un prix à payer qui est souvent rédhibitoire si on veut appliquer directement la correspondance trouvée entre s et z , c'est la complexité de la fonction de transfert du filtre numérique et sa difficulté de mise en œuvre pratique. En effet, cette fonction de transfert ne se présentera pas sous forme de fraction rationnelle en z et la mise en œuvre devra passer par une première phase de développement de la fonction de transfert en série de puissances de z .

D'une façon générale, au cours de cette étape, on sera conduit à admettre une certaine approximation dans le développement pratique retenu pour que le filtre soit réalisable. Cette approximation se traduira par une déformation de la réponse fréquentielle qui ne suivra donc pas exactement la fonction modèle. On pourra, cependant,

choisir la complexité du filtre en fonction de la fidélité désirée. Si on renonce à appliquer la transformation directement, il est possible de trouver des fonctions de transfert correspondant à des filtres à réponse impulsionnelle infinie mais dont la mise en œuvre par équation aux différences est possible. Cette fonction de transfert se présente en effet sous la forme d'un rapport de polynômes. La méthode dans ce cas est baptisée, "**invariance de la réponse impulsionnelle**". Malheureusement, le phénomène de repliement conduit souvent à une déformation sérieuse de la réponse fréquentielle et rend l'utilisation de la méthode impossible pour les filtres passe-haut ou réjecteurs et souvent également pour les filtres passe-bande. Il faut donc transformer les spécifications initiales (en temps continu) pour construire un passe-bas puis appliquer à la fonction de transfert numérique (temps discret) obtenue une transformation qui permet de changer le type du filtre et de revenir approximativement aux spécifications initiales. Un premier exemple est donné ci-après, on en trouvera un second dans le paragraphe consacré à la détermination directe par la réponse impulsionnelle.

Signalons, enfin, qu'une mise en œuvre dans Fourier du filtre numérique obtenu est envisageable. La réponse fréquentielle du filtre sera échantillonnée et on calculera la transformée de Fourier discrète du signal avant d'effectuer le produit des transformées pour obtenir la transformée de Fourier discrète du signal de sortie. La méthode est présentée plus en détail dans le chapitre 7 consacré à la transformée de Fourier discrète.

Exemple 41 Reprenons le filtre passe-bas déjà utilisé comme modèle dans les deux méthodes précédentes. La relation de correspondance conduit à la fonction de transfert d'un filtre numérique donnée par l'équation suivante :

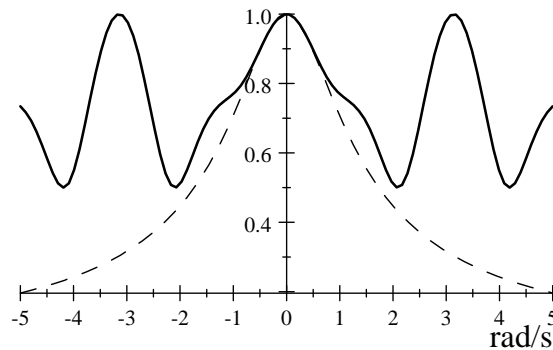
$$H(z) = \frac{1}{1 + \ln z} \quad (6.40)$$

Un développement en série de puissances de z^{-1} au voisinage de 1 conduit à une approximation à l'ordre 4 :

$$H(z) \simeq \frac{1}{3} + \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{1}{3}z^{-3} + \frac{1}{6}z^{-4} \quad (6.41)$$

On obtient un filtre RIF de longueur 5. La réponse fréquentielle du filtre correspondant est peu satisfaisante comme le montre le graphique de la figure 43 où on trouve, pour comparaison, la réponse fréquentielle du filtre analogique modèle. Pour obtenir un résultat de qualité acceptable il faudrait pousser le développement beaucoup plus loin ce qui conduirait à un filtre de mise en œuvre très lourde.

En réalité la méthode par échantillonnage n'est que très rarement utilisable dans la pratique.



43. Filtre numérique passe-bas et filtre analogique modèle (en trait fin)

Exemple 42 Examinons cependant le cas du filtre passe-haut du premier ordre. Le filtre analogique modèle sera :

$$\frac{s\tau}{1+s\tau} \quad (6.42)$$

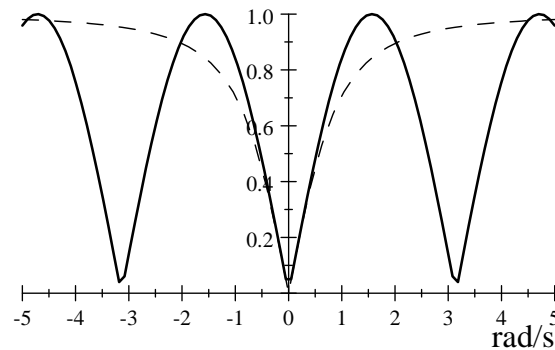
d'où la fonction de transfert du filtre numérique obtenu par échantillonnage :

$$H(z) = \frac{\ln z}{1 + \ln z} \quad (6.43)$$

Un développement à l'ordre 2 donne :

$$H(z) \simeq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^{-2} \quad (6.44)$$

La réponse fréquentielle du filtre numérique (voir figure 44) est acceptable jusqu'à $\pm \frac{3\pi}{4}$ environ ; les perfor-



44. Réponse d'un filtre numérique passe-haut (modèle analogique en trait fin)

mances se dégradent ensuite rapidement. Ce résultat illustre bien la difficulté qu'il y a à mettre au point des filtres numériques passe-haut par cette méthode. En revanche, dans cet exemple, le filtre numérique est de mise en œuvre simple.

Exemple 43 Détermination d'un filtre passe-bas du premier ordre par la méthode de l'invariance de la réponse impulsionnelle. La fonction de transfert du filtre analogique modèle est:

$$H_a(s) = \frac{1}{1+s}$$

sa réponse impulsionnelle est:

$$h_a(t) = e^{-t}u(t)$$

donc

$$h_a(n\tau) = e^{-n\tau}u(n\tau)$$

donc la réponse impulsionnelle du filtre numérique est:

$$h(n) = e^{-n}u(n)$$

La transformation en z nous donne directement la fonction de transfert de ce filtre:

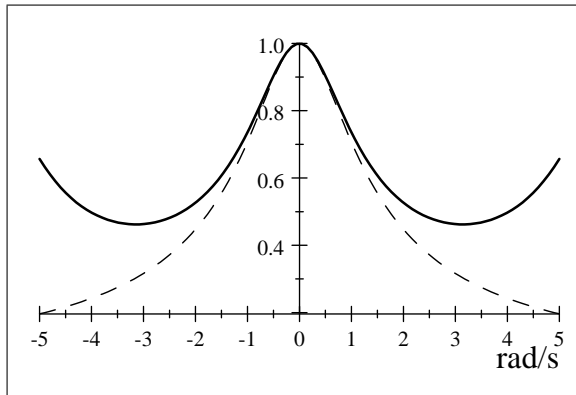
$$H(z) = \sum_0^{\infty} e^{-n}z^{-n}$$

donc

$$H(z) = \frac{1}{1 - e^{-1}z^{-1}}$$

Notons que si on veut retrouver le gain statique du filtre analogique il est nécessaire de corriger la fonction de transfert sous la forme suivante:

$$H(z) = \frac{1 - e^{-1}}{1 - e^{-1}z^{-1}}$$



Réponse fréquentielle d'un filtre numérique passe-bas (réponse du filtre modèle en pointillés)

La réponse fréquentielle est illustrée par la figure 43. On constate que même si les réponse impulsionnelles coïncident, les réponses fréquentielles peuvent différer notablement.

6.1.4 Détermination directe par transformée de Fourier inverse

L'inconvénient majeur de la méthode par échantillonnage de la réponse impulsionnelle que nous venons de voir est que la fonction de transfert obtenue est sous une forme de mise en œuvre délicate et souvent coûteuse. Nous allons voir que c'est aussi le défaut de la méthode présentée dans ce paragraphe qui permet pourtant de construire des filtres numériques de réponse fréquentielle parfaitement spécifiée.

Nous supposons donnée la réponse fréquentielle du filtre recherché :

$$H(\omega) = \sum_n h(n)e^{-jn\omega} \quad (6.45)$$

La réponse impulsionnelle sera obtenue directement par transformée de Fourier inverse :

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H(\omega)e^{jn\omega} d\omega \quad (6.46)$$

Ces coefficients seront déterminés soit analytiquement soit, quand le calcul est impossible, par une approximation numérique de l'intégration.

En règle générale, le filtre obtenu est sous forme RII. Il n'est qu'exceptionnellement sous forme récursive et ne peut donc pas être mis en œuvre sans approximation. Cette approximation conduira à tronquer la réponse impulsionnelle et souvent à la modéliser sous une forme récursive. Cette forme pourra être obtenue par une approximation au sens des moindres carrés (voir paragraphe 6.2).

Exemple 44 Soit à déterminer un filtre passe-bas idéal à phase nulle de réponse fréquentielle :

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{\pi}{4} \leq \omega \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.47)$$

Il est entendu que la réponse fréquentielle est périodique de période 2π .

La réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} e^{jn\omega} d\omega \quad (6.48)$$

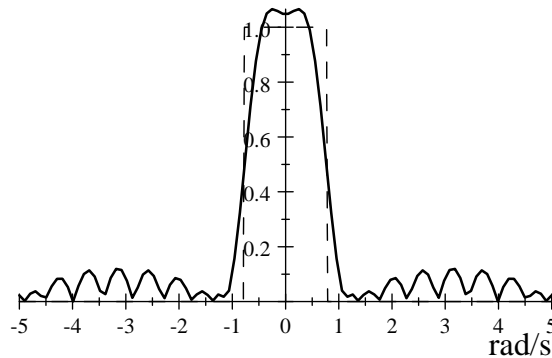
soit :

$$h(n) = \frac{1}{\pi n} \sin \frac{n\pi}{4} \quad (6.49)$$

La liste des premiers coefficients est donnée dans le tableau ci-après :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$h(n)$	0,25	0,2251	0,1592	0,075	0	-0,0045	-0,053	-0,0032

La linéarité en phase du filtre implique que sa réponse impulsionnelle est paire. Si on tronque la réponse impulsionnelle à 15 coefficients ($2 \times 7 + 1$) on obtient un filtre passe-bas dont la réponse fréquentielle est présentée sur la figure 45. La comparaison avec la réponse du filtre passe-bas idéal (courbe en trait fin) illustre



45. Filtre passe-bas obtenu après troncature de $h(n)$

le résultat de la troncature de la réponse impulsionnelle. Il faut noter que le filtre retenu est déjà de mise en œuvre lourde car le nombre de coefficients est élevé (15) et ils sont définis avec 4 chiffres significatifs (13 bits si on compte un bit de signe).

6.2 Approximation au sens des moindres carrés

Cette famille de méthodes peut s'appliquer à la détermination par fonction fréquentielle modèle mais son caractère plus général nous incite à la présenter dans un paragraphe à part. Il s'agit d'un algorithme numérique permettant d'ajuster les coefficients d'une fonction quelconque pour que ses valeurs en une série de points prédéfinis (fournis par le modèle) soient les plus proches possibles du modèle au sens des moindres carrés. C'est à dire pour que l'écart quadratique entre le modèle et la fonction soit minimum aux points de contrôle.

Nous présentons tout d'abord la méthode des moindres carrés sur le plan général.

Soit un ensemble de K points de contrôle définis par le vecteur \mathbf{C} de composantes c_i , i variant de 1 à K . Soit une fonction $f(t)$ dépendant de N paramètres x_n formant le vecteur \mathbf{X} à N composantes.

On définit un vecteur d'erreur \mathbf{E} à K composantes e_i :

$$e_i = f(t_i) - c_i \quad (6.50)$$

On cherche à minimiser la quantité suivante :

$$e = \sum_{i=1}^K [f(t_i) - c_i]^2 = \sum_{i=1}^K e_i^2 \quad (6.51)$$

qui représente l'écart quadratique entre les données (\mathbf{C}) et le modèle (f). Cette minimisation est menée en faisant varier les paramètres \mathbf{X} du modèle. On considérera que l'écart quadratique e est fonction de \mathbf{X} . L'algorithme recherché doit permettre de déterminer la variation $d\mathbf{X}$ à appliquer au vecteur \mathbf{X} pour que l'écart diminue.

La règle des accroissements finis nous donne :

$$e(\mathbf{X}+d\mathbf{X}) = e(\mathbf{X}) + \sum_{n=1}^N \frac{\partial e(\mathbf{X})}{\partial x_n} dx_n \quad (6.52)$$

(si la fonction d'erreur est continue et si les accroissements sont infinitésimaux). Nous cherchons $d\mathbf{X}$ qui correspond à $e(\mathbf{X}+d\mathbf{X})$ minimum, il faut donc que tous les termes

$$\frac{\partial e(\mathbf{X}+d\mathbf{X})}{\partial x_i} \quad (6.53)$$

soient nuls :

$$\frac{\partial e(\mathbf{X}+d\mathbf{X})}{\partial x_i} = \frac{\partial e(\mathbf{X})}{\partial x_i} + \sum_{n=1}^N \frac{\partial^2 e(\mathbf{X})}{\partial x_n \partial x_i} dx_n = 0, \forall i \quad (6.54)$$

On a :

$$\frac{\partial e(\mathbf{X})}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^K 2e_k \frac{\partial e_k}{\partial x_i} \quad (6.55)$$

et :

$$\frac{\partial e_k}{\partial x_i} = \frac{\partial (f(t_k) - c_k)}{\partial x_i} \quad (6.56)$$

$$= \frac{\partial (f(t_k))}{\partial x_i} \quad (6.57)$$

On construit la matrice \mathbf{A} dont les éléments a_{ik} sont les dérivées partielles de la fonction modèle par rapport aux paramètres estimés x_i aux points de contrôle t_k :

$$a_{ik} = \frac{\partial (f(t_k))}{\partial x_i} \quad (6.58)$$

$$= \frac{\partial e_k}{\partial x_i} \quad (6.59)$$

Donc :

$$\frac{\partial e(\mathbf{X})}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^K 2e_k \cdot a_{ik} \quad (6.60)$$

$$= \mathbf{A}\mathbf{E} \quad (6.61)$$

et :

$$\frac{\partial^2 e(\mathbf{X})}{\partial x_n \partial x_i} = \sum_{k=1}^K 2a_{kn} \cdot a_{ik} = \mathbf{A}\mathbf{A}^t \quad (6.62)$$

L'équation 6.54 s'écrit finalement :

$$\mathbf{A}\mathbf{E} + \mathbf{A}\mathbf{A}^t d\mathbf{X} = 0 \quad (6.64)$$

Le vecteur $d\mathbf{X}$ recherché est donné par l'équation matricielle :

$$d\mathbf{X} = -(\mathbf{A}\mathbf{A}^t)^{-1} \cdot \mathbf{A}\mathbf{E} \quad (6.65)$$

L'algorithme sera le suivant :

- Initialisation des paramètres \mathbf{X}

Calcul de \mathbf{E}

– Tant que $\mathbf{E} >$ consigne

 Calcul de la matrice \mathbf{A}

 Inversion de $\mathbf{A}\mathbf{A}^t$

 Faire $\mathbf{X} = \mathbf{X} - (\mathbf{A}\mathbf{A}^t)^{-1} \cdot \mathbf{A}\mathbf{E}$

 Calcul de \mathbf{E}

 Fin

- Fin

Pour le calcul des dérivées partielles de l'erreur (coefficients de \mathbf{A}) une approximation numérique est indispensable et le choix du pas pour cette approximation doit assurer la stabilité de calcul.

Cette méthode d'approximation pourra permet d'envisager la construction d'un filtre numérique de réponse fréquentielle déterminée sous une forme choisie pour une mise en œuvre efficace. La réponse fréquentielle souhaitée (modèle) doit être échantillonnée pour donner les points de contrôle :

$$c_i = H_a\left(\frac{i}{\tau}\right) \quad (6.66)$$

τ est le pas d'échantillonnage. La réponse fréquentielle du filtre est la fonction d'approximation :

$$f(\omega_i) = H\left(\frac{i}{\tau}\right) \quad (6.67)$$

On pourra choisir une forme a priori quelconque pour la fonction de transfert du filtre $H(z)$. Si on choisit par exemple un filtre causal, récursif de degré N avec une partie non récursive de longueur M :

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{n=1}^N a_n z^{-n}} \quad (6.68)$$

Le vecteur d'erreur \mathbf{E} sera fonction du vecteur \mathbf{X} à $N + M + 1$ composantes :

$$\mathbf{X} = (b_0, b_1, \dots, b_M, a_1, \dots, a_N)^t \quad (6.69)$$

On pourra aussi utiliser cette méthode pour rechercher un filtre de réponse impulsionnelle voisine d'un modèle analogique donné. L'intérêt est de pouvoir dans le même temps imposer une forme de mise en œuvre facile pour le filtre numérique. L'approximation obtenue sera optimale du point de vue de l'écart quadratique par rapport à la contrainte.

6.3 Détermination par la réponse impulsionnelle

La détermination d'un filtre numérique peut être menée à partir de la donnée d'une réponse impulsionnelle analogique modèle. Celle-ci est définie a priori ou par un procédé d'optimisation vis-à-vis de certaines contraintes relatives aux caractéristiques du signal que le filtre doit aider à mettre en évidence. Dans le premier cas il s'agit souvent de réponses connues pour leurs performances dans le domaine analogique. Pour le deuxième cas on peut penser aux filtres destinés à détecter des signaux particuliers dans un fond bruité. Dans tous les cas, la technique est la même, on se contente d'échantillonner la réponse impulsionnelle analogique modèle. Si le résultat donne une fonction de transfert de mise en œuvre possible le processus est terminé, sinon, il faut ensuite procéder à une approximation par un filtre de forme prédéterminée par une méthode quelconque, du type moindres carrés par exemple.

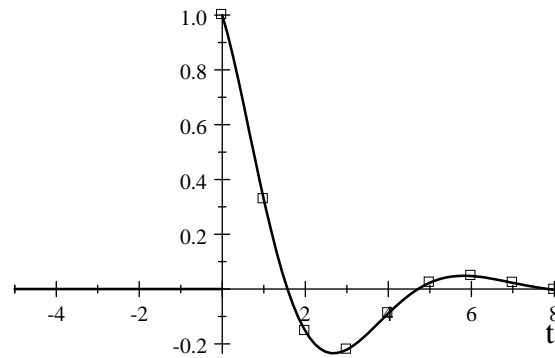
Il faut savoir cependant que si la réponse impulsionnelle est bien reproduite par cette technique, il n'en est pas forcément de même pour la réponse fréquentielle.

Nous illustrons cette méthode par deux exemples choisis dans les deux catégories envisagées.

Exemple 45 Cas d'un filtre passe-bas causal à réponse impulsionnelle modèle du 2^{ème} ordre. La réponse impulsionnelle est donnée par l'équation 6.70 et est illustrée par le graphique de la figure 46.

$$h_a = e^{-\frac{t}{2}} \cos t \cdot u(t) \quad (6.70)$$

Cette réponse impulsionnelle correspond à un filtre analogique du deuxième ordre de type passe-bande dont la



46. Réponse impulsionnelle et points d'échantillonnage

fonction de transfert est :

$$H_a(s) = \frac{s + \frac{1}{2}}{\frac{5}{4} + s + s^2} \quad (6.71)$$

Nous échantillonsons cette réponse avec un pas unité $T_e = 1s$ (voir la courbe 46) et la réponse impulsionnelle du filtre numérique est :

$$h(n) = e^{-\frac{n}{2}} \cos n \cdot u(n) \text{ avec } n \in \mathbb{Z} \quad (6.72)$$

La table de transformées 4.6 nous donne directement la transformée en z et donc la fonction de transfert du filtre :

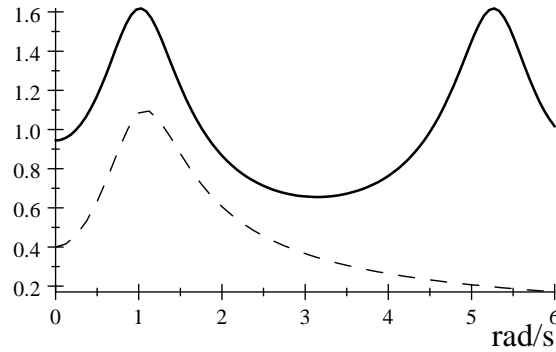
$$H(z) = \frac{1 - e^{-0,5}z^{-1} \cos 1}{1 - 2e^{-0,5}z^{-1} \cos 1 + e^{-0,5}z^{-2}} \quad (6.73)$$

ou numériquement :

$$H(z) = \frac{1 - 0,33z^{-1}}{1 - 0,66z^{-1} + 0,37z^{-2}} \quad (6.74)$$

On pourra vérifier à titre d'exercice que le filtre est stable.

Les tracés (voir graphique de la figure 47) des réponses fréquentielles du filtre numérique et du modèle analogique montrent que si les réponses impulsionnelles coïncident (aux points d'échantillonnage), c'est loin d'être le cas pour ces réponses fréquentielles, même si l'allure générale de la courbe est conservée. Le phénomène de repliement est responsable pour l'essentiel de la distorsion que l'on observe



47. Réponse du filtre numérique "passe-bas" (modèle en trait fin).

Exemple 46 *Filtre détecteur de contour.* Il s'agit d'un filtre destiné à détecter les contours de régions homogènes dans une image ; ces contours sont caractérisés par un fort gradient de luminance, le filtre est donc essentiellement un dérivateur associé à un passe-bas destiné à éviter un renforcement du bruit inévitablement présent sur des images du monde réel. C'est, bien entendu, une version unidimensionnelle de ce filtre que nous étudions ici. La réponse impulsionnelle proposée par Shen et Castan en 1987 est déterminée par une optimisation, dans le domaine analogique, du compromis rapport signal/bruit après détection et localisation du contour :

$$h_a(t) = \begin{cases} -e^{\alpha t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ e^{-\alpha t} & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad (6.75)$$

Le paramètre α permet de régler la « largeur » du filtre, pour l'exemple nous choisissons : $e^{-\alpha} = 0,5$.

Avec un pas d'échantillonnage de 1 la réponse impulsionnelle du filtre numérique est :

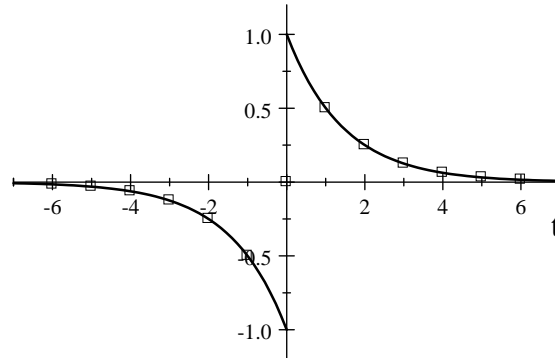
$$h(n) = \begin{cases} -0,5^{-n} & \text{si } n < 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ 0,5^n & \text{si } n > 0 \end{cases} \quad (6.76)$$

Le filtre est à phase égale à $\frac{\pi}{2}$, sa réponse impulsionnelle est impaire (voir courbe 48), on considère séparément sa partie causale et sa partie anticausale :

$$h(n) = h^+(n) + h^-(n) \quad (6.77)$$

avec :

$$\begin{aligned} h^+(n) &= -0,5^{-n}u(-n) \\ h^-(n) &= 0,5^n u(n) \end{aligned} \quad (6.78)$$



48. Réponse impulsionnelle analogique et points d'échantillonnage du filtre Shen et Castan

Les fonctions de transfert correspondantes sont obtenues facilement :

$$H^-(z) = \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}} \quad (6.79)$$

$$\begin{aligned} H^+(z) &= -H^-(z^{-1}) \\ &= \frac{-1}{1 - 0,5z} \end{aligned} \quad (6.80)$$

Donc :

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}} + \frac{-1}{1 - 0,5z} \quad (6.81)$$

Dans une mise en œuvre sous forme parallèle, la sortie sera calculée à partir des équations aux différences suivantes :

$$\begin{aligned} y^-(n) &= 0,5y^-(n-1) + x(n) \\ y^+(n) &= 0,5y^+(n+1) - x(n) \\ y(n) &= y^+(n) + y^-(n) \end{aligned} \quad (6.82)$$

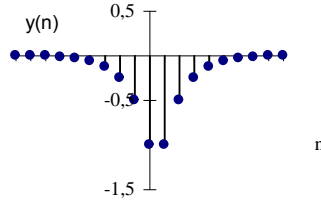
La fonction détection de contour du filtre est illustrée par sa réponse indicielle présentée sur le graphique de la figure 49. Il est intéressant de noter que les valeurs initiales choisies pour les parties causales et anticausales du filtre correspondent aux valeurs finales stables de chaque partie du filtre pour l'entrée correspondante :

$$x(-\infty) = 0 \text{ et } y^-(-\infty) = 0 \quad (6.83)$$

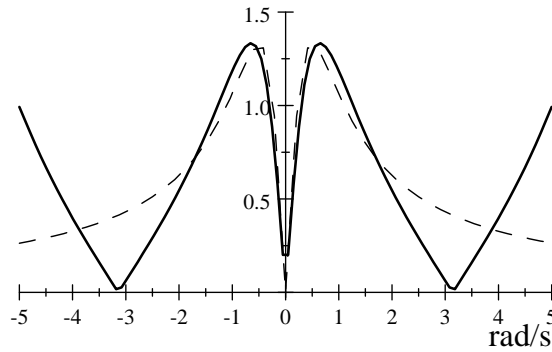
pour la partie causale,

$$x(\infty) = 1 \text{ et } y^+(\infty) = -2 \quad (6.84)$$

pour la partie anticausale. La réponse fréquentielle du filtre numérique présentée sur le graphique de la figure 50 montre le comportement passe-bande (combinaison passe-bas, passe-haut) du filtre de Shen et Castan. On trouvera sur le même graphique, en trait fin, la réponse fréquentielle du filtre analogique qui a servi de modèle ; l'amplitude a été choisie pour avoir la meilleure correspondance possible entre les deux courbes. On constatera cependant que la différence entre les réponses fréquentielles reste notable.



49. Réponse indicielle du filtre de Shen et Castan



50. Module de la réponse fréquentielle du filtre de Shen et Castan

6.3.1 Filtre adapté

Nous terminerons ce chapitre par la présentation du filtre dit «adapté» dont la construction est typique de la démarche d'optimisation qui est souvent suivie pour atteindre un objectif de filtrage pour un signal donné dans un contexte spécifié.

On cherche à détecter la présence d'un signal $s(n)$, connu a priori, noyé dans un bruit additif blanc $e(n)$. La réponse $y(n)$ du filtre sera simplement seuillée et c'est le dépassement du seuil choisi qui fournira l'information recherchée. La réponse impulsionnelle du filtre est $h(n)$ et la sortie $y(n)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} y(n) &= (s + e) * h(n) & (6.85) \\ &= s * h(n) + e * h(n) \\ y(n) &= y_s(n) + y_e(n) \end{aligned}$$

Le critère à optimiser est le rapport signal sur bruit défini comme le rapport du carré de la réponse du filtre au signal, sur l'énergie de bruit en sortie du filtre :

$$SNR = \frac{y_s(n)^2}{E_{y_e}} \quad (6.86)$$

Comme le bruit est blanc d'énergie E_e , l'énergie de bruit en sortie sera (voir paragraphe 5.6.4) :

$$E_{y_e} = E_e \sum_n [h(n)]^2 \quad (6.87)$$

donc :

$$\begin{aligned} SNR &= \frac{[s * h(n)]^2}{E_e \sum_n h^2(n)} \\ &= \frac{[\sum_k h(k)s(n-k)]^2}{E_e \sum_n h^2(n)} \end{aligned} \quad (6.88)$$

La relation d'inégalité triangulaire (relation de Schwarz) permet de trouver un majorant à ce rapport signal sur bruit :

$$\begin{aligned} SNR &\leq \frac{\sum_k h^2(k) \sum_k s^2(n-k)}{E_e \sum_n h^2(n)} \\ SNR &\leq \frac{\sum_k s^2(n-k)}{E_e} \end{aligned} \quad (6.89)$$

ou encore :

$$SNR \leq \frac{\sum_k s^2(k)}{E_e} \quad (6.90)$$

Or si on choisit la réponse impulsionnelle du filtre telle que :

$$h(k) = s(n-k) \quad (6.91)$$

alors le rapport signal sur bruit sera :

$$\begin{aligned} SNR &= \frac{[\sum_k s(n-k)s(n-k)]^2}{E_e \sum_n s^2(n-k)} \\ &= \frac{\sum_k s^2(n-k)}{E_e} \end{aligned} \quad (6.92)$$

Le majorant est ainsi atteint.

La solution proposée est donc optimale et le filtre construit à l'aide du signal retourné autour de n conduit à une détection optimale à l'instant n .

$$s_n(k) = s(n-k) \quad (6.93)$$

La réponse du filtre au signal seul sera :

$$\begin{aligned} y_s(m) &= s_n * s(m) \\ &= \sum_k s(n-k)s(m-k) \\ &= \sum_l s(l)s(m-n+l) \end{aligned} \quad (6.94)$$

Ce qui correspond à la fonction d'autocorrélation du signal estimée en $m-n$:

$$y_s(m) = r_{ss}(m-n) \quad (6.95)$$

Or on sait (voir paragraphe 3.1) que cette fonction est maximum en 0, donc pour $m = n$. L'amplitude du signal de sortie est donc bien maximum à l'instant n . On peut d'ailleurs remarquer que cette détection est d'autant plus précise et efficace que cette fonction d'autocorrélation se rapproche du Dirac. Pour utiliser au mieux cette propriété on peut construire des séquences périodiques ayant une fonction d'autocorrélation circulaire constituée d'un Dirac périodisé : on les appelle des séquences pseudoaléatoires. Ces séquences et le filtrage adapté sont largement utilisés dans les systèmes de télécommunications synchronisés dont les canaux de transmission sont bruités (canaux hertziens par exemple).

Chapitre 7

Transformée de Fourier discrète (TFD)

7.1 Généralités et rappels

La transformée de Fourier d'un signal numérique $x(n)$ est, si elle existe, la transformée en z évaluée sur le cercle unité $X(e^{j\omega})$ que l'on note abusivement $X(\omega)$ (voir paragraphe 4.8) :

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega} \quad (7.1)$$

Il s'agit d'un signal analogique continu qui ne peut être obtenu par un calcul numérique exact complet (les valeurs de la variable varient continûment), il ne peut donc être utilisé pour une mise en œuvre pratique, dans un algorithme de filtrage par exemple, ou dans l'étude d'une réponse fréquentielle. Une version numérique de cette transformation a été mise au point pour résoudre cette difficulté. Le signal discret ainsi obtenu donne accès à une analyse fréquentielle (approximative) du signal numérique ; la transformée discrète conserve, moyennant quelques adaptations, les propriétés fondamentales de la transformée de Fourier vis-à-vis des produits de convolution et des fonctions de corrélation. Des algorithmes rapides (de complexité $N \log N$) permettent le calcul de la transformée de Fourier discrète. Tout ceci a fait de la transformée de Fourier discrète un outil important et efficace en traitement du signal numérique.

La TFD (transformée de Fourier discrète) est obtenue par simple échantillonnage de la transformée de Fourier continue. Pour des raisons qui seront plus claires quand on envisagera l'inversion de la transformée, on souhaite disposer de N échantillons pour la TFD d'un signal de longueur N . La transformée de Fourier étant périodique, de période 2π le pas d'échantillonnage devra être :

$$\frac{2\pi}{N} \quad (7.2)$$

Et le signal numérique obtenu par échantillonnage de la transformée de Fourier sera appelé **transformée de Fourier discrète** de $x(n)$ de longueur N et sera noté :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \quad (7.3)$$

Ce signal est calculable en un nombre fini d'opérations, il est, bien entendu, unique et il est **périodique de période N** .

Il faut maintenant déterminer les conditions d'inversibilité de cette transformée, étudier ses propriétés relativement aux opérations linéaires classiques (convolution, corrélation) et caractériser son action sur l'énergie des signaux numériques transformés. Nous présenterons, enfin, la famille des algorithmes de calcul rapides (TFR ou FFT en anglais) qui ont été développés pour sa détermination.

7.2 Inversion, périodicité de la TFD

Pour inverser la transformée de Fourier discrète, il faut déterminer le signal unique de longueur N finie dont la TFD est le signal de longueur N , $X(k)$.

Essayons une approche empirique en imitant la formule d'inversion du cas continu ; calculons donc :

$$\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} ik} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jn k \frac{2\pi}{N}} e^{j \frac{2\pi}{N} ik} \quad (7.4)$$

ce qui donne :

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} k(i-n)}} \quad (7.5)$$

Considérons la partie soulignée :

$$\begin{aligned} \star \text{si } i &= n \text{ alors } \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} k(i-n)} = N & (7.6) \\ \star \text{si } i &\neq n \text{ alors } \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} k(i-n)} = \frac{1 - e^{j \frac{2\pi}{N} N(i-n)}}{1 - e^{j \frac{2\pi}{N} (i-n)}} = 0 \end{aligned}$$

(la deuxième égalité est obtenue en utilisant la formule de sommation d'une série géométrique).

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} ik} &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot N \cdot \delta(i-n) & (7.7) \\ &= N \cdot x(i) \end{aligned}$$

En regardant de plus près les équations, il apparaît que ce résultat est obtenu chaque fois que :

$$i = n \text{ mod } N \quad (7.8)$$

car $e^{j \frac{2\pi}{N} (i-n)} = 1$ pour toutes ces valeurs. On a ainsi :

$$x(i) = x(i + N) = x(i + 2N) = \dots \quad (7.9)$$

Le signal reconstruit est une version périodisée, de période N , du signal original. Cette périodicité correspond à la périodicité de la transformée discrète :

$$x(i) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} ik} \quad (7.10)$$

La TFD est donc inversible dans un espace de signaux numériques périodiques. Toutes les modifications de propriétés de la TFD par rapport à la transformée de Fourier continue sont liées à cette contrainte. Les traitements utilisant la TFD ne pourront donc concerner (rigoureusement) que des signaux numériques de longueur finie ou périodiques. Si on est en présence de signaux de longueur infinie, on peut découper le signal en tronçons de durées finies, mais dans ce cas, les TFD seront affectées par des effets de bords qui rendent l'interprétation des résultats parfois difficile et qui parasitent les opérations de filtrage.

On note souvent les racines n -ièmes de l'unité :

$$W_N = e^{j \frac{2\pi}{N}} \quad (7.11)$$

Les TFD directe et inverse s'écrivent :

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{-nk} \\ x(k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n)W_N^{nk} \end{aligned} \quad (7.12)$$

Remarque 30 Le facteur $\frac{1}{N}$ qui apparaît dans la transformée inverse peut être considéré comme un terme de normalisation et des variantes de la TFD peuvent être définies en répartissant différemment ce terme de normalisation entre TFD directe et inverse.

Remarque 31 La TFD d'un signal périodique est invariante par translation de la fenêtre de calcul :

$$\begin{aligned} \sum_{n=i}^{i+N-1} x(n)e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} &= \sum_{n=i}^{N-1} x(n)e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} + \sum_{n=N}^{N+i-1} x(n)e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} \\ &= \sum_{n=i}^{N-1} x(n)e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} + \sum_{n=N}^{N+i-1} x(n-N)e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} \\ &= \sum_{n=i}^{N-1} x(n)e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} + \sum_{l=0}^{i-1} x(l)e^{-j(l+N)k\frac{2\pi}{N}} \end{aligned} \quad (7.13)$$

donc finalement :

$$\sum_{n=i}^{i+N-1} x(n)e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} = \sum_{n=i}^{N-1} x(n)e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} + \sum_{l=0}^{i-1} x(l)e^{-jl k\frac{2\pi}{N}} \quad (7.14)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} \\ &= X(k) \end{aligned} \quad (7.15)$$

7.3 Propriétés de linéarité et de symétrie

Pour les raisons évoquées dans le paragraphe précédent, nous ne considérerons ici que des signaux périodiques de période N . Si le signal de départ est de longueur finie, il sera simplement périodisé par répétition de la séquence originale. Dans ces conditions, la TFD possède les propriétés suivantes :

- Valeur moyenne

La valeur moyenne d'un signal numérique de période N est :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \quad (7.16)$$

or :

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \quad (7.17)$$

donc :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot X(0) \quad (7.18)$$

- Périodicité.

$$\begin{cases} h(n+N) = h(n) & \forall n \in \mathbb{Z} \\ H(k+N) = H(k) & \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (7.19)$$

- Linéarité.

$$\text{si } \begin{cases} x_1(n) \longleftrightarrow X_1(n) \\ x_2(n) \longleftrightarrow X_2(n) \end{cases} \quad (7.20)$$

alors :

$$a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \longleftrightarrow a_1 X_1(n) + a_2 X_2(n) \quad \forall a_1, a_2 \quad (7.21)$$

- Symétrie circulaire et parité.

Le signal $x(n)$ est périodique donc :

$$x(-n) = x(N-n) \quad (7.22)$$

ce qui a des conséquences particulières en cas de signal pair ou impair pour la TFD.

Tout d'abord, et de façon générale, on a :

$$\begin{aligned} \text{pour un signal pair : } & x(n) = x(-n) = x(N+n) = x(N-n) \dots \\ \text{pour un signal impair : } & x(n) = -x(-n) = x(N+n) = -x(N-n) \dots \end{aligned} \quad (7.23)$$

et on peut toujours décomposer un signal quelconque en la somme d'un signal pair et d'un signal impair :

$$x(n) = x_p(n) + x_i(n) \quad (7.24)$$

avec :

$$\begin{aligned} x_p(n) &= \frac{x(n) + x(-n)}{2} \\ x_i(n) &= \frac{x(n) - x(-n)}{2} \end{aligned} \quad (7.25)$$

La TFD d'un signal réel a les mêmes propriétés de symétrie que la transformée de Fourier continue :

$$\begin{aligned} |X(n)| &= |X(-n)| \\ \arg [X(n)] &= -\arg [X(-n)] \end{aligned} \quad (7.26)$$

donc :

$$X(-n) = X(N-n) = X^*(n) \quad (7.27)$$

Si le signal $x(n)$ est réel et pair $x(n) = x(N-n)$ donc

$$\begin{aligned} X(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x(N-k) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \\ &= \sum_{l=N}^1 x(l) e^{-j \frac{2\pi}{N} (N-l)n} \end{aligned} \quad (7.28)$$

d'où :

$$X(n) = \sum_{l=1}^N x(l) e^{j \frac{2\pi}{N} ln} = X(-n) = X^*(n) \quad (7.29)$$

donc $X(n)$ est un signal pair et la partie imaginaire de $X(n)$ est nulle :

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cos \frac{2\pi}{N} kn \quad (7.30)$$

Comme $X(n)$ est pair et réel, la propriété est la même pour la transformée inverse :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cos \frac{2\pi}{N} kn \quad (7.31)$$

Si le signal $x(n)$ est réel et impair le même raisonnement conduit aux formules simplifiées suivantes pour la TFD :

$$X(n) = -j \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \sin \frac{2\pi}{N} kn \quad (7.32)$$

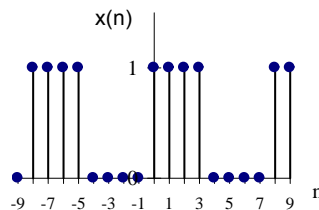
et :

$$x(n) = \frac{j}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sin \frac{2\pi}{N} kn \quad (7.33)$$

Exemple 47 Soit le signal numérique $x(n)$:

$$x(n) = \{\dots, 0, \underline{1}, 1, 1, 1, 0, \dots\} \quad (7.34)$$

Déterminons la TFD du signal $x(n)$ périodisé sur une durée $N = 8$ représentée sur la figure 51.



51. Signal périodisé

$$X(n) = \sum_{k=0}^3 e^{-j \frac{2\pi}{8} nk} \quad (7.35)$$

ce qui donne :

$$X(n) = \frac{1 - e^{-j\pi n}}{1 - e^{-j \frac{\pi}{4} n}} \quad (7.36)$$

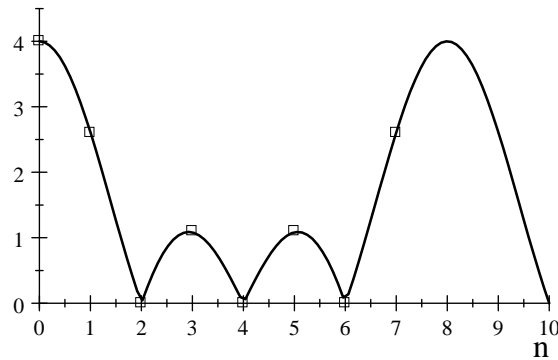
D'où les 8 coefficients complexes de la TFD :

n	$X(n)$	$ X(n) $	$\arg [X(n)]$
0	4	4	0
1	$1 - j(1 + \sqrt{2})$	2,613	-1,1781
2	0	0	0
3	$1 + j(1 - \sqrt{2})$	1,082	-0,3927
4	0	0	0
5	$1 - j(1 - \sqrt{2})$	1,082	0,3927
6	0	0	0
7	$1 + j(1 + \sqrt{2})$	2,613	1,1781

On ne manquera pas de noter que les différentes propriétés de symétrie de la TFD d'un signal réel sont vérifiées. De la transformée en z du signal non périodisé nous déduisons la transformée de Fourier continue :

$$H(\omega) = 1 + e^{-j\omega} + e^{-2j\omega} + e^{-3j\omega} \quad (7.37)$$

On trouvera sur le graphique de la figure 52 une représentation du module de la transformée de Fourier continue du signal $x(n)$ non périodisé (l'unité utilisée sur l'axe des pulsations est $\frac{2\pi}{8}$) et, superposée, la TFD du signal périodisé sur une période égale à 8. On vérifie la parfaite coïncidence de la courbe continue et des points



52. Spectre de $x(n)$ et TFD de $x(n)$ périodisé (points)

d'échantillonnage correspondant à la TFD, mais on constate également que l'information spectrale fournie par la TFD seule est difficile à interpréter en terme de représentation fréquentielle du signal numérique. Cette interprétation est plus claire si la longueur imposée par la périodisation est plus longue.

7.4 Convolution et corrélation circulaires, théorème de Parseval

7.4.1 Produit de convolution de séquences périodiques

Soient deux signaux numériques périodiques $x_1(n)$ et $x_2(n)$, de période N , le produit de convolution circulaire

de ces deux séquences est défini par :

$$\begin{aligned} y(n) &= x_1 * x_2(n) \\ y(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)x_2(n-k) \end{aligned} \quad (7.38)$$

Le signal $y(n)$ est périodique, de période N :

$$\begin{aligned} y(n+N) &= \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)x_2(n+N-k) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)x_2(n-k) = y(n) \end{aligned} \quad (7.39)$$

La TFD de $y(n)$ est :

$$Y(i) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)x_2(n-k)e^{-j\frac{2\pi}{N}in} \quad (7.40)$$

On fait le changement de variable $l = n - k$:

$$\begin{aligned} Y(i) &= \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k) \sum_{l=-k}^{-k+N-1} x_2(l)e^{-j\frac{2\pi}{N}i(l+k)} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}ik} \sum_{l=-k}^{-k+N-1} x_2(l)e^{-j\frac{2\pi}{N}il} \end{aligned} \quad (7.41)$$

donc, comme la TFD est invariante par translation de la fenêtre de calcul (voir paragraphe 7.2), on retrouve un théorème analogue au théorème de Plancherel :

$$Y(n) = X_1(n) \cdot X_2(n) \quad (7.42)$$

Cette propriété fondamentale ouvre la porte à l'**utilisation de la TFD pour la mise en œuvre des filtres numériques**. La réponse $y(n)$ d'un filtre numérique de réponse impulsionnelle $h(n)$ à un signal $x(n)$ peut être déterminée par inversion de sa TFD calculée comme le produit simple de deux signaux numériques périodiques :

$$Y(n) = H(n) \cdot X(n) \quad (7.43)$$

Le procédé est cependant limité par une contrainte sévère : la réponse impulsionnelle du filtre doit être de durée finie pour pouvoir être périodisée.

Dans ce cas le problème des conditions aux limites (ou valeurs initiales) ne se pose pas car tous les signaux sont soit périodiques soit périodisés. On choisira simplement l'étendue du plus étendu d'entre eux ($x(n)$ ou $h(n)$) comme période commune N .

Le produit de convolution entre signaux réels est ainsi remplacé par un produit simple entre des signaux complexes (mais dotés de symétries). Nous verrons que l'utilisation d'un algorithme de calcul rapide pour la TFD peut largement compenser l'obligation de procéder à des TFD directes et inverses avant et après le calcul.

Exemple 48 Reprenons le problème de la mise en œuvre du filtre passe-bas idéal envisagé dans l'exemple 44. La réponse fréquentielle recherchée est :

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{\pi}{4} \leq \omega \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.44)$$

La TFD sur une période N (de $-\frac{N}{2}$ à $\frac{N}{2}$) de la réponse impulsionnelle est obtenue en échantillonnant la réponse fréquentielle avec un pas de $\frac{2\pi}{N}$, ce qui donne (en supposant que N est un multiple de 8) :

$$H(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } |n| \leq \frac{N}{8} \\ 0 & \text{si } \frac{N}{8} < |n| < \frac{N}{2} \end{cases} \quad (7.45)$$

La TFD de la réponse du filtre à un signal $x(n)$ de longueur N est donnée par :

$$Y(n) = H(n)X(n) \quad (7.46)$$

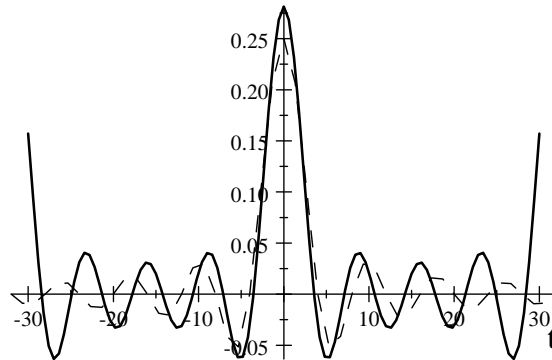
Le signal de sortie $y(n)$ est obtenu par TFD inverse. La réponse impulsionnelle du filtre numérique est l'inverse par TFD de $H(n)$:

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{8}}^{\frac{N}{8}} e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (7.47)$$

soit :

$$h(n) = \frac{1}{N} \frac{\sin n\pi(\frac{1}{N} + \frac{1}{4})}{\sin \frac{\pi}{N}n} \quad (7.48)$$

Le graphique de la figure 53 donne l'enveloppe de la réponse impulsionnelle pour $N = 32$ (la variable n est, en réalité, discrète). Cette réponse impulsionnelle est bien entendu périodique de période N . La réponse



53. Exemple de réponse impulsionnelle pour $N=32$ (en pointillés la réponse impulsionnelle idéale)

impulsionnelle du filtre analogique équivalent est représentée sur le même graphique en trait fin. La différence entre les deux courbes sera d'autant plus grande que N sera petit. Il est en effet facile de vérifier que $h(n)$ tend bien vers :

$$h_a(t) = \frac{\sin n\pi/4}{n\pi} \quad (7.49)$$

quand N tend vers l'infini. Nous verrons (paragraphe 7.5.2) que cette méthode de calcul pour le filtrage numérique est intéressante dans le cas des filtres de réponse impulsionnelle comportant au moins une trentaine de coefficients non nuls.

7.4.2 Fonctions de corrélation circulaires

Il s'agit là d'un complément au paragraphe 3.1.4.

La fonction d'intercorrélation circulaire de deux signaux périodiques $x(n)$ et $y(n)$ de période commune N est définie par :

$$\begin{aligned} r_{xy}(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k+n)y(k) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x(kn)y(k-n) \end{aligned} \quad (7.50)$$

La fonction d'autocorrélation circulaire de $x(n)$ sera :

$$r_{xx}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k+n)x(k) \quad (7.51)$$

Ces fonctions de corrélation circulaires sont périodiques de même période N que les signaux de départ. Les TFD de ces fonctions de corrélation circulaires sont donc telles que :

$$R_{xy}(n) = X(n) \cdot Y^*(n) \quad (7.52)$$

et :

$$R_{xx}(n) = |X(n)|^2 \quad (7.53)$$

Elles pourront être considérées comme des versions discrètes de la densité spectrale d'énergie (voir paragraphe 4.8).

Les fonctions de corrélation circulaires sont simplement proportionnelles (facteur N) aux fonctions de corrélation des signaux périodiques définies au paragraphe 3.1.4.

7.4.3 Théorème de Parseval

On peut définir l'énergie (correspondant à $N \times$ (Puissance moyenne)) d'un signal numérique périodique par :

$$E_x = r_{xx}(0) \quad (7.54)$$

$$E_x = \sum_{k=0}^{N-1} x^2(k) \quad (7.55)$$

Par TFD inverse, on a :

$$r_{xx}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} R_{xx}(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (7.56)$$

donc :

$$r_{xx}(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} R_{xx}(k) \quad (7.57)$$

On obtient ainsi la loi de transformation (conservation) de l'énergie entre l'espace direct et l'espace transformé, que l'on appelle parfois le théorème de Parseval :

$$E_x = \sum_{k=0}^{N-1} x^2(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \quad (7.58)$$

On peut conclure, en résumé, que la TFD garde toutes les propriétés de la transformée de Fourier continue à condition de ne considérer que des signaux périodiques.

7.5 Algorithmes de TFD rapide, TFR (ou FFT)

Le calcul de la transformée de Fourier discrète d'un signal de longueur N par application directe de la formule :

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)W_N^{-nk} \quad (7.59)$$

implique, pour chaque coefficient :

$$\begin{cases} N \text{ multiplications complexes} \\ N - 1 \text{ additions complexes} \end{cases}$$

ce qui représente au total :

$$\begin{cases} N^2 \text{ multiplications complexes} \\ N(N - 1) \text{ additions complexes} \end{cases}$$

On dit que l'algorithme est de complexité N^2 .

Il existe une famille d'algorithmes dits rapides qui ont été développés à partir d'une proposition de Cooley et Tukey (1965) et qui peuvent être adaptés pour un certain nombre de transformations unitaires (Hadamard, Haar, cosinus, Hartley,...). Ces algorithmes permettent le calcul de la TFD avec une complexité :

$$N \log N \quad (7.60)$$

qui est notablement inférieure à la complexité initiale. Il s'agit essentiellement d'algorithmes récursifs qui sont basés sur la mise en œuvre d'une opération simple ne mettant en œuvre à chaque application que deux données. Une conséquence est que ces algorithmes trouvent leur efficacité maximum si le nombre total de données à traiter est une puissance de deux, de sorte que le partage des données puisse être mené sans cas particulier. Nous présenterons en détail un exemple d'un tel algorithme et nous nous contenterons de donner des indications sur les adaptations à apporter pour traiter les autres cas.

Il existe plusieurs versions de l'algorithme de base dont certaines semblent un peu plus performantes pour certaines applications. Le lecteur intéressé pourra trouver quelques détails dans [1].

Nous supposerons que le signal à transformer $x(n)$ est périodique de période N ou de longueur finie N telle que :

$$N = 2^m \quad (7.61)$$

Le principe de l'algorithme est de partager la TFD de dimension N en un certain nombre de TFD élémentaires de dimension 2. Ce partage peut se faire de deux façons, en temps ou en fréquence suivant que le partage concerne $x(n)$ ou $X(n)$. Nous choisissons arbitrairement de présenter le partage suivant le temps.

7.5.1 Partage en deux et opération papillon

Dans la relation :

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)W_N^{-nk} \quad (7.62)$$

on partage les coefficients de $x(k)$ en deux parties, l'une contenant les coefficients de rang pair ($k = 2i$), l'autre les coefficients impairs ($k = 2i + 1$). Comme N est pair, il y aura $\frac{N}{2}$ coefficients dans chaque «paquet».

$$X(n) = \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2i)W_N^{-2in} + \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2i+1)W_N^{-(2i+1)n} \quad (7.63)$$

Or il est facile de constater que :

$$W_N^{-2in} = W_{\frac{N}{2}}^{-in} \quad (7.64)$$

et que :

$$W_N^{-(2i+1)n} = W_N^{-n} \cdot W_{\frac{N}{2}}^{-in} \quad (7.65)$$

donc :

$$X(n) = \underbrace{\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2i)W_{\frac{N}{2}}^{-in}} + W_N^{-n} \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2i+1)W_{\frac{N}{2}}^{-in}} \quad (7.66)$$

Le premier terme est une TFD de longueur $\frac{N}{2}$ sur la suite $x(2i)$ des coefficients de rang pair et le deuxième terme est aussi une TFD de longueur $\frac{N}{2}$ sur la suite des coefficients de rang impair. Nous appelons le premier terme $X_1^p(n)$ et le deuxième $X_1^i(n)$, de sorte que :

$$X(n) = X_1^p(n) + W_N^{-n} \cdot X_1^i(n) \quad (7.67)$$

Les deux signaux numériques $X_1^p(n)$ et $X_1^i(n)$ sont périodiques de période $\frac{N}{2}$ par construction (TFD de longueur $N/2$), donc

$$X(n + \frac{N}{2}) = X_1^p(n) + W_N^{-(n+\frac{N}{2})} \cdot X_1^i(n) \quad (7.68)$$

Les propriétés des racines de l'unité permettent de simplifier :

$$W_N^{-(n+\frac{N}{2})} = W_N^{-n} W_N^{-\frac{N}{2}} = W_N^{-n} W_2^{-1} \quad (7.69)$$

$$= -W_N^{-n} \quad (7.70)$$

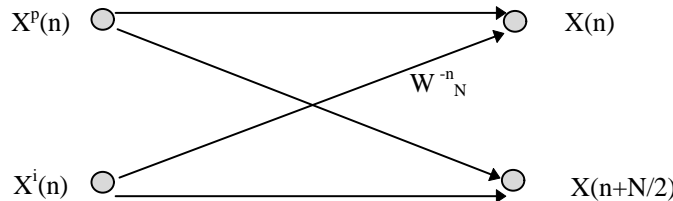
donc

$$X(n + \frac{N}{2}) = X_1^p(n) - W_N^{-n} \cdot X_1^i(n) \quad (7.71)$$

En résumé :

$$\begin{cases} X(n) = X_1^p(n) + W_N^{-n} \cdot X_1^i(n) \\ X(n + \frac{N}{2}) = X_1^p(n) - W_N^{-n} \cdot X_1^i(n) \end{cases} \quad (7.72)$$

L'ensemble de ces deux opérations est regroupé dans un graphe de fluence qui symbolise l'opération élémentaire appelée **opération papillon** (voir figure 54).



54. Opération papillon

Si $N = 2$, n varie de 0 à 1, et :

$$X_1^p(0) = x(0) \quad (7.73)$$

tandis que :

$$X_1^i(0) = x(1) \quad (7.74)$$

On constate que l'opération papillon permet de calculer les coefficients de la TFD de longueur 2 ; il s'agit alors de la TFD élémentaire. Cette opération demande 1 multiplication et 2 additions complexes.

7.5.2 Généralisation

Comme $N = 2^m$, ce partage en deux peut être mené de façon récursive m fois.

Au premier partage, il y a $\frac{N}{2}$ opérations papillon : $\frac{N}{2}$
 Au deuxième ———, il y a $2 \times \frac{N}{4}$ opérations papillon : $\frac{N}{2}$
 Au troisième ———, ——— $8 \times \frac{N}{16}$ ——— : $\frac{N}{2}$

 Au m -ième partage, ——— $2^m \times \frac{N}{2^{m+1}}$ ——— : $\frac{N}{2}$

Au total il y aura donc $m \cdot \frac{N}{2}$ **opérations papillon**

Comme $m = \text{Log}_2 N$, le coût total du calcul de la TFD pour un signal de longueur N sera :

$$\begin{array}{ll} \frac{N}{2} \text{Log}_2 N & \text{multiplications complexes} \\ N \text{Log}_2 N & \text{additions complexes} \end{array}$$

On obtient bien un algorithme de la complexité annoncée.

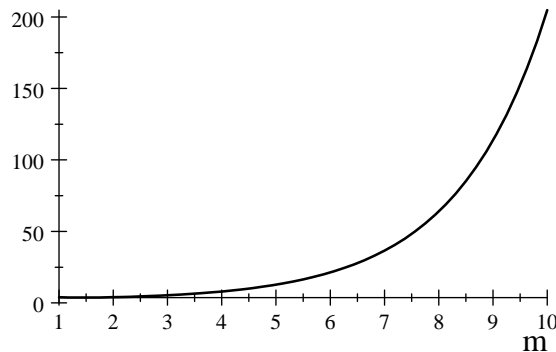
On estime le gain de l'algorithme par rapport au calcul direct en ne considérant que l'opération la plus lourde, la multiplication complexe qui représente 4 multiplications réelles et 2 additions réelles. Ce gain est défini comme le rapport des nombres de multiplications complexes :

$$\eta = \frac{2N^2}{N \text{Log}_2 N}$$

soit :

$$\eta = 2 \frac{N}{\text{Log}_2 N} \tag{7.75}$$

La courbe de la figure 55 présente la variation de ce gain en fonction de m .



55. Gain apporté par la FFT en fonction de m

Nous avons vu que la TFD permettait d'envisager la mise en œuvre des filtres numériques dans l'espace de Fourier (voir paragraphe 7.4.1) par simple multiplication des TFD du signal et de la réponse impulsionnelle du filtre.

Il faut déterminer les conditions dans lesquelles cet algorithme est avantageux par rapport aux méthodes directes présentées au chapitre 5.

Pour une estimation précise des coûts de calcul, il faudrait considérer les algorithmes en détail ; nous nous contenterons d'une approche grossière qui suffit pour fixer les idées.

Soit un signal de longueur N à filtrer par un filtre numérique de même longueur N (les signaux sont, au besoin, complétés par des coefficients nuls).

Par la méthode directe, c'est à dire en faisant l'évaluation directe du produit de convolution :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)h(n-k) \quad (7.76)$$

le coût de calcul est de :

Méthode directe : N^2 multiplications réelles

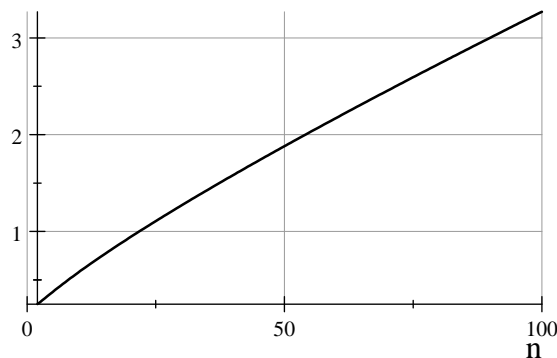
En passant par la TFD, il faut effectuer 2 TFD de longueurs N (une directe et une inverse) et N multiplications complexes pour faire le produit dans l'espace de Fourier. Soit au total :

Méthode TFD : $4(N \log_2 N + N)$ multiplications réelles

Le gain de la méthode TFD est donc :

$$\rho = \frac{N}{4(\log_2 N + 1)} \quad (7.77)$$

Le graphique de la figure 56 illustre ce résultat.



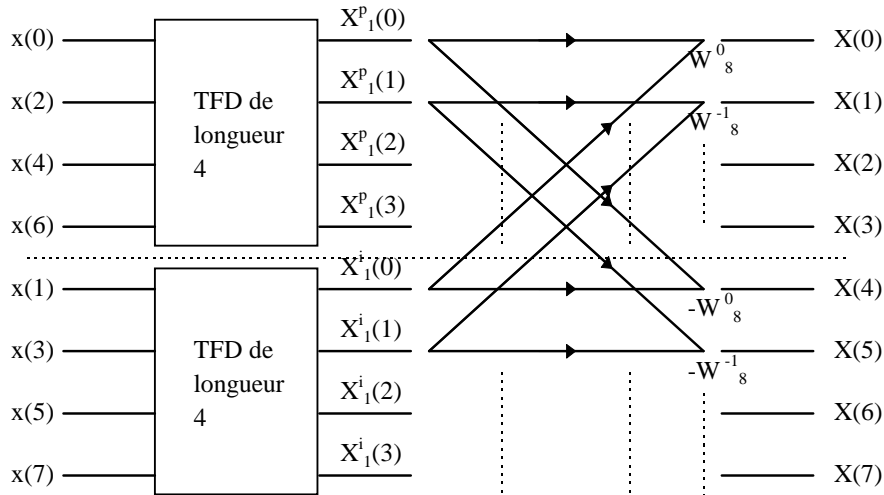
56. Gain apporté par la TFD pour le filtrage numérique

Cette courbe de gain montre que la méthode de mise en œuvre des filtres numériques par la TFD n'est intéressante que pour des filtres de réponse impulsionnelle de longueur supérieure à 30 environ.

7.5.3 Algorithme pratique

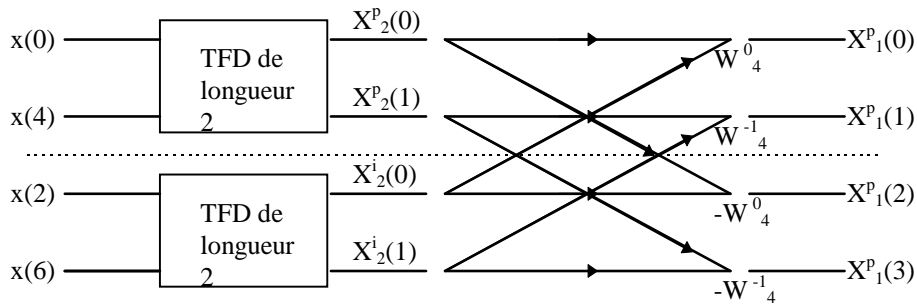
Pour que les détails de l'algorithme pratique soient bien clairs, le plus sûr est de présenter en détail un cas simple qui peut être déroulé «à la main». Nous choisirons $N = 2^3 = 8$.

1^{er} partage :



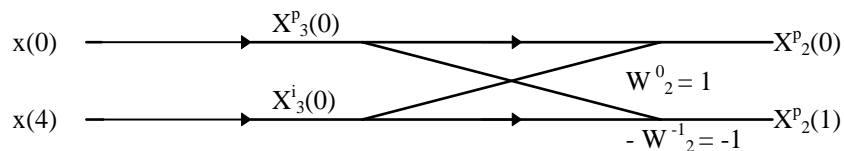
2^e partage

Nous ne présentons que le graphe de fluence relatif aux coefficients de rang pair.



3^e partage

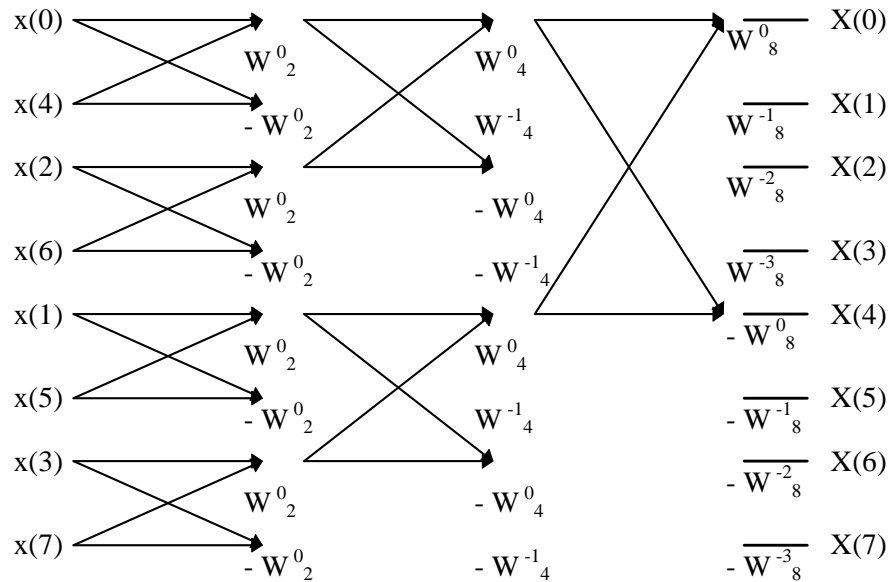
Pour cette dernière phase, il ne reste que des TFD de longueur 2 qui, comme nous l'avons vu, ne nécessitent qu'une opération papillon chacune.



Le graphe de fluence complet est donné à la figure 57.

On constate que le calcul peut être mené en place, sans mise en mémoire de résultats intermédiaires.

Un deuxième point important est que si on souhaite obtenir les coefficients de la TFD dans leur ordre naturel, l'algorithme doit commencer par un rangement en ordre binaire renversé des coefficients du signal. Une simple



57. Graphe de fluence de la TFD rapide d'ordre 8

procédure de permutation suffit :

```

k = 0
pour j = 0 jusqu'à N - 1 par pas de 1
  si k > j
    z = x(k)
    x(k) = x(j)
    x(j) = z
  fin si
  l = N/2
  tant que k > l
    k = k - l
    l = l/2
  fin tant que
  k = k + l
fin pour
fin

```

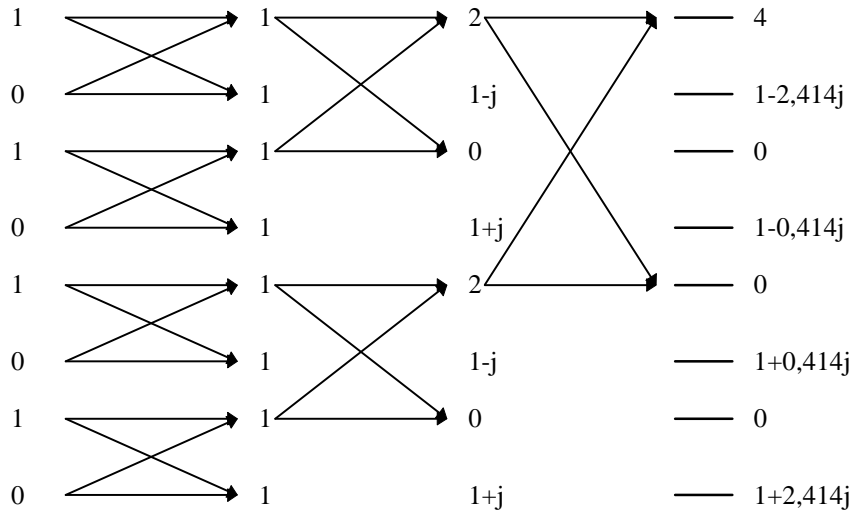
Exemple 49 Soit le signal périodique de longueur 8 de l'exemple précédent (47) :

$$x(n) = \{\dots, 0, \underline{1}, 1, 1, 1, 0, \dots\} \quad (7.78)$$

Les racines de l'unité s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 W_8^0 &= W_4^0 = W_2^0 = 1 \\
 W_8^1 &= e^{j\frac{\pi}{4}} \\
 W_8^{-1} &= e^{-j\frac{\pi}{4}} \\
 W_8^2 &= W_4^1 = -W_8^{-2} = -W_4^{-1} = j \\
 W_8^3 &= e^{j\frac{3\pi}{4}} \\
 W_8^{-3} &= e^{-j\frac{3\pi}{4}}
 \end{aligned} \tag{7.79}$$

Le graphe de fluence sera donc :



Le signal transformé que l'on trouve dans la dernière colonne est évidemment identique à celui trouvé par la méthode directe.

7.5.4 Cas d'un signal de longueur quelconque

Dans le cas où le signal $x(n)$ à transformer n'a pas une longueur égale à une puissance de deux, l'algorithme décrit ne peut pas être utilisé tel quel mais il peut être généralisé au prix d'une baisse de performance.

Tant que N n'est pas un nombre premier, on peut le décomposer en produit de deux facteurs :

$$N = N_1 \cdot N_2 \tag{7.80}$$

Dans ce cas les deux indices k et n qui permettent de balayer $x(k)$ et $X(n)$ peuvent être réécrits de la façon suivante (à la manière d'une méthode de numération à base N_1 ou N_2) :

$$\begin{cases} k = k_1 + k_2 N_1 & k_1 = 0, \dots, N_1 - 1 & k_2 = 0, \dots, N_2 - 1 \\ n = n_2 + n_1 N_2 & n_1 = 0, \dots, N_1 - 1 & n_2 = 0, \dots, N_2 - 1 \end{cases} \tag{7.81}$$

L'expression de la TFD devient :

$$X(n) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} x(k_1 + k_2 N_1) W_N^{-n(k_1 + k_2 N_1)} \tag{7.82}$$

or :

$$W_N^{-n(k_1+k_2N_1)} = W_N^{-nk_1} W_N^{-nk_2N_1} = W_N^{-nk_1} W_{N_2}^{-nk_2} \quad (7.83)$$

donc :

$$X(n) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} W_N^{-nk_1} \left[\sum_{k_2=0}^{N_2-1} x(k_1 + k_2N_1) W_{N_2}^{-nk_2} \right] \quad (7.84)$$

L'expression entre crochets représente N TFD de longueur N_2 .

On peut encore transformer l'expression 7.83 en décomposant n pour généraliser :

$$\begin{aligned} W_N^{-n(k_1+k_2N_1)} &= W_N^{-(n_2+n_1N_2)k_1} W_{N_2}^{-(n_2+n_1N_2)k_2} \\ &= W_N^{-n_2k_1} W_{N_1}^{-n_1k_1} W_{N_2}^{-n_2k_2} W_1^{-n_1k_2} \\ &= W_N^{-n_2k_1} W_{N_1}^{-n_1k_1} W_{N_2}^{-n_2k_2} \end{aligned} \quad (7.85)$$

D'où l'expression décomposée de la TFD :

$$X(n) = \underbrace{\sum_{k_1=0}^{N_1-1} W_{N_1}^{-n_1k_1} \left(\underbrace{W_N^{-n_2k_1} \left[\sum_{k_2=0}^{N_2-1} x(k_1 + k_2N_1) W_{N_2}^{-n_2k_2} \right]}_{N_1 \text{ TFD de longueur } N_2} \right)}_{N_2 \text{ TFD de longueur } N_1} \quad (7.86)$$

$N_1 N_2$ multiplications par $W_N^{-n_2k_1}$

La TFD initiale a ainsi été décomposée en TFD de longueurs moindres, le procédé peut être répété jusqu'à ce que les longueurs soient des nombres premiers. Il est facile de constater que le gain apporté par l'algorithme dans ce cas est plus beaucoup plus faible et on préférera souvent se ramener à des TFD de signaux de longueurs égales à des puissances de 2.

Bibliographie

- [1] M. Bellanger, «Traitement numérique du signal», 3^{ème} édition, Masson, Paris, 1987.
- [2] G. Blanchet, M. Charbit, «Traitement numérique du signal, *Simulation sous Matlab*», Hermès, Paris, 1998.
- [3] R. Boite, H. Leich, «Analyse et synthèse des filtres unidimensionnels», 3^{ème} édition, Masson, Paris, 1990.
- [4] P. Brémaud, «Signaux aléatoires pour le traitement du signal et les communications», Ellipses, Paris, 1993.
- [5] J.M. Brossier, «Signal et communication numérique», Hermès, Paris, 1997.
- [6] M. Charbit, «Eléments de théorie du signal : les signaux aléatoires», Ellipses, Paris, 1990.
- [7] J.P. Cocquerez, S. Philipp, «Analyse d'images : filtrage et segmentation», Masson, Paris, 1995.
- [8] D. Declercq, A. Quinquis, «Signaux et systèmes en questions», 4 titres chez Hermès, Paris, 1996.
- [9] P. Duvaut, «Traitement du signal», Hermès, Paris, 1994.
- [10] P. Duvaut, F. Michaut, M. Chuc, «Introduction au traitement du signal», Hermès, Paris, 1996.
- [11] M. Hasler, J. Neiryneck, «Filtres électriques», Dunod, Paris, 1981.
- [12] M. Kunt, «Traitement numérique des signaux», 3^{ème} édition, Dunod, Paris, 1981.
- [13] F. Manneville, J. Esquieu, «Systèmes bouclés linéaires de communication et de filtrage», Dunod, Paris, 1990.
- [14] F. Michaut, «Méthodes adaptatives pour le signal», Hermès, Paris, 1992.
- [15] M. Najim, «Modélisation et identification en traitement du signal», Masson, Paris, 1988.
- [16] A. Papoulis, «Probability, Random Variables, and Stochastic Processes», 3rd edition, McGraw-Hill, Inc., 1991.
- [17] J.G. Proakis, D.G. Manolakis, «Digital Signal Processing», 2nd edition, Macmillan Publishing Company, New York, 1992.

Index

- additionneur, 11
- anticausal, 13, 52, 63, 104
 - equation aux différences, 53
 - filtre stable, 52
 - SLI, 26
- arrondi, 80, 81, 83, 86
- associatif
 - convolution, 21
- autocorrélation, 14, 15, 18, 20, 27, 42, 48, 72, 74, 85, 88
 - définition, 17
- autocorrélation circulaire, 116
- autocovariance, 75

- Bairstow, 53
- bande passante, 93
- bilatéral, 45, 46, 62
 - filtre stable, 52
- bruit blanc, 76, 82
- bruit de calcul, 80, 82, 85–87

- Canny-Deriche
 - filtre, 70
- cascade, 25, 57, 58, 60, 63
- Cauchy
 - critère, 31
 - théorème des résidus, 33
- causal, 13, 52, 63, 102, 104
 - filtre stable, 51
 - SLI, 25
- cellule quadratique, 60, 63
- cepstre, 35, 49, 73
- cercle unité, 35, 41, 47, 51–53, 64, 66, 89, 92, 96
- commutatif
 - convolution, 21
- complément à 1, 81
- complément à 2, 81
- complexité, 117, 119
- condition initiale, 105, 114
- convergence
 - série, 31
- convolution
 - définition, 21
 - filtre linéaire, 51
 - SLI, 23

- transformée en z , 41
- convolution circulaire, 113
- convolution inverse, 41
- Cooley et Tukey, 117
- covariance, 14–16

- dépassement de capacité, 85, 87
- dérivateur, 104
- dérivation, 89
- densité spectrale d'énergie, 72, 116
- deuxième ordre, 87
- Dirac, 5, 9, 22, 23, 76, 82, 107
- distributivité
 - convolution, 21
- division de polynômes, 45

- écart quadratique
 - moindres carrés, 101
- échantillonnage
 - filtre analogique, 91
 - filtre passe-haut, 98
 - période, 95
 - réponse fréquentielle, 95, 102
 - réponse impulsionnelle, 103
 - transformation de Fourier, 108
- échelle
 - changement
 - transformée en z , 39
- élément neutre
 - convolution, 22
- éléments simples, 64
 - décomposition, 55
 - fractions partielles, 62
- énergie, 8, 18, 76
 - bruit de calcul, 82, 88
 - densité spectrale, 72
 - filtre, 27
 - puissance, 8
 - autocorrélation, 18
 - théorème de Parseval, 116
- équation aux différences, 52, 59
 - bilatéral, 62
 - définition, 52
 - filtre RII, 52
 - Shen et Castan, 105
- ergodique, 13, 15
 - processus, 74

- erreur
 - bruit de calcul, 84
 - espérance, 13, 74, 82, 87
 - Euler, 36, 55

- filtre adapté, 106
- filtre analogique, 89, 95
- filtre détecteur de contour, 104
- filtre impair, 69, 104
- filtre linéaire
 - SLI, 51
 - système linéaire invariant, 22
- filtre pair, 68
- filtre passe-bande, 93, 105
- filtre passe-bas, 91, 97, 100, 103, 114
- filtre passe-haut, 93, 94, 98
- filtre tout pôle, 59
- filtre tout zéro, 59
- fonction modèle, 89, 93, 95
- Fourier, 29, 35, 97, 108, 113
 - transformation, 30
- fraction rationnelle, 60
- fractions simples, 46

- gain statique, 74
 - filtre, 56
- graphe de fluence, 118, 121

- Heaviside, 5

- impair, 9, 111
- inégalité triangulaire, 24
- intégration, 92
- intercorrélation, 14, 18, 20, 21, 27, 47, 72
 - définition, 17
 - transformée en z , 42
- intercorrélation circulaire, 116
- invariant, 11

- Laplace, 89, 92, 96
- linéaire, 12
- linéaire en phase, 68, 69
- linéarité, 111

- mantisse
 - virgule flottante, 81
- masque de convolution
 - convolution, 26

- moindres carrés, 100, 103
- moment, 13
- moment statistique, 13
- moyenne, 28, 74, 110
 - espérance, 14
- multiplication par une constante, 11
- multiplieur, 11

- normalisation, 18, 110

- ordre
 - système, 52
- ordre binaire renversé, 121

- périodique, 8, 15, 20, 47, 109, 110, 116
- pôle, 34, 46, 51, 53, 59, 62, 64, 90
- pair, 9, 19, 111
- papillon (opération), 117, 118, 121
- parallèle, 25, 62, 105
- Parseval, 48, 76, 116
- Plancherel, 43, 48, 114
- point de contrôle, 102
 - moindres carrés, 100
- polynôme réciproque, 53
- premier ordre
 - bruit de calcul, 85
- processus gaussien, 78
- produit de convolution, 120
- produit simple
 - transformée en z , 43
- pseudoaléatoire, 107
- puissance, 8, 13, 15
 - énergie, 15
- pulsation de coupure, 90, 91, 93, 94

- quantification des données, 85
- quantification du filtre, 83

- récurrence, 52
- récuratif, 102
- réponse analogique, 103
- réponse fréquentielle, 73, 84, 89, 91, 95, 102
 - filtre, 66
- réponse impulsionnelle, 23, 51, 52, 95, 99, 102, 104, 115, 120
- réponse indicielle, 105
- résidus, 34, 62
- racine de l'unité, 109, 118, 123
- rapport signal sur bruit, 87

- filtre adapté, 106
- RDC, 30, 32, 33, 36, 40, 51
 - anneau de convergence, 31
 - convolution, 41
 - région de convergence, 29
- relation d'inégalité, 18
- repliement de spectre, 95
- représentation
 - des signaux numériques, 5
- représentation des nombres, 80
- représentation graphique, 11
- retard
 - théorème, 36
- retard unitaire, 37
 - translation, 11
- retournée
 - séquence, 9
- retournée (séquence), 40
- retournement
 - convolution, 22
- RIF, 26, 51, 53, 57
- RII, 26, 53, 58, 62, 99
- ROC, 29

- série de puissances, 96, 97
- série géométrique, 19
- Schür-Cohn, 53
- Schwarz, 107
- Shannon, 95
- Shen et Castan
 - filtre, 104
- signal numérique, 4
- SLI, 9, 23
 - causal/anticausal, 25
 - filtre linéaire
 - système linéaire invariant, 23
- sous-échantillonnage, 10, 11, 37
- spectre, 113
- stabilité
 - condition, 53
 - critère, 53
- stable, 13, 24, 51, 53
 - filtre linéaire, 51
 - SLI, 24
- stationnaire, 13, 15
- stochastique, 27, 84
 - aléatoire, 13

- signal, 74
- sur-échantillonnage, 10, 11, 38
- symétrie circulaire, 111
- système dynamique, 11
- système invariant
 - variant, 11
- système linéaire, 12
- système non linéaire, 12
- système statique, 11

- Taylor
 - série, 44
- TFD, 97, 108, 111, 120
 - définition, 108
 - directe
 - inverse, 110, 114
 - TFR
 - FFT, 117
- TFD inverse, 108
- TFR
 - FFT, 119, 120
- transfert, 52, 53, 56, 62, 96, 105
 - fonction, 51
- transformée de Fourier
 - inverse, 66
- transformée de Fourier discrète, 108
- transformée de Fourier inverse, 99
- transformée en z , 36, 51, 103, 113
 - définition, 29
 - inverse, 33, 44
- transformée en z (table), 43
- transformation bilinéaire, 92, 94
- transformation de Fourier
 - définition, 47
 - inverse, 48
- translation, 9
- troncature, 80, 81, 83, 100

- unilatéral, 45, 53
 - causal
 - anticausal, 33

- valeur finale, 56
 - filtre, 56
- variance, 14–16
 - bruit de calcul, 84, 85
- vecteur d'erreur
 - moindres carrés, 101

virgule fixe, 80
virgule flottante, 80, 81

Wiener-Kintchine
théorème, 68