



HAL
open science

Une inégalité en géométrie affine des courbes planes

Jacques Lafontaine

► **To cite this version:**

| Jacques Lafontaine. Une inégalité en géométrie affine des courbes planes. 2015. hal-01128887

HAL Id: hal-01128887

<https://hal.science/hal-01128887>

Preprint submitted on 10 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une inégalité en géométrie affine des courbes planes

Jacques Lafontaine

10 mars 2015

Résumé

K. Pankrashkin recently proved a nice geometric inequality. Namely, for any simple smooth curve enclosing a domain of area A , the maximum curvature k_{\max} satisfies $k_{\max} \geq \sqrt{\pi/A}$, and the equality holds if and only if the curve is a circle. In this note, we prove an analogous *affine* geometric inequality.

1 Introduction

Rappelons l'inégalité suivante due à Konstantin Pankrashkin (voir [3] et [4]). Soit c une courbe C^2 fermée simple du plan euclidien, bordant un domaine d'aire $A(c)$, et soit $k_{\max}(c)$ le maximum de sa courbure. Alors

$$k_{\max}(c) \geq \sqrt{\frac{\pi}{A(c)}},$$

l'égalité étant réalisée si et seulement si c est un cercle. Il existe une version affine de cette inégalité.

Théorème. *Soit c une courbe C^3 fermée et convexe du plan affine, bordant un domaine d'aire $A(c)$, et soit $\kappa_{\min}(c)$ le minimum de sa courbure affine. Alors*

$$\kappa_{\min}(c) \leq \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{A(c)}},$$

l'égalité étant réalisée si et seulement si c est une ellipse.

La preuve suit de très près les arguments de K. Pankrashkin. Notons au passage que c'est ici un exemple de plus où une inégalité en géométrie affine va en sens contraire de son analogue euclidienne.

2 Rappels de géométrie équiaffine

Pour les bases de la géométrie différentielle affine des courbes, voir [5] ou même le délicieux livre d'Elie Cartan [1].

Nous nous plaçons dans un plan affine réel muni d'un élément d'aire désigné par ω . Soit c une courbe C^3 birégulière. La forme différentielle cubique

$$\omega(c'(t), c''(t)) dt^3$$

ne dépend pas du paramètre t . Il existe donc (c'est là qu'intervient l'hypothèse de birégularité) un paramètre σ , défini à une constante additive près, appelé *l'abscisse curviligne affine* tel que

$$\omega(c'(\sigma), c''(\sigma)) = 1$$

Dans ces conditions, $c'(\sigma)$ et $c^{(3)}(\sigma)$ sont colinéaires. La courbure (équif) affine $\kappa(\sigma)$ est définie par la relation

$$c^{(3)}(\sigma) = -\kappa(\sigma)c'(\sigma)$$

La fonction $\kappa(\sigma)$ détermine la courbe à une transformation équiaffine près. Les courbes à courbure affine nulle sont les paraboles, les courbes à courbure affine constante positive (resp. négative) sont les ellipses (resp. les hyperboles).

Si la courbe c est fermée, elle est nécessairement convexe. La période d'un paramétrage par l'abscisse curviligne affine s'appelle la *longueur affine* $L_{\text{aff}}(c)$ de la courbe. Si elle borde un domaine d'aire $A(c)$, *l'inégalité isopérimétrique affine* (voir [2]) assure que

$$L_{\text{aff}}^3(c) \leq 8\pi^2 A(c),$$

l'égalité étant réalisée si et seulement si c est une ellipse.

Remarque. Si l'élément d'aire est donné par une structure euclidienne, et si la courbe c est paramétrée par la longueur d'arc correspondante s , ce qui précède montre que

$$d\sigma^3 = k(s) ds^3$$

où $k(s)$ désigne la courbure euclidienne. En partant du fait que la longueur euclidienne est de dimension 1, on voit que la longueur affine est de dimension $2/3$ (d'où la puissance 3 dans l'inégalité isopérimétrique affine). On vérifie facilement que la courbure affine est de dimension $-2/3$.

3 Preuve de l'inégalité

Elle suit de très près les arguments de [3] et [4] (en fait K. Pankrashkin commence par prouver son inégalité pour les courbes étoilées par rapport à un point, et c'est cette démonstration que nous adaptons).

Soit c une courbe fermée convexe C^3 paramétrée par l'abscisse curviligne affine. On a

$$\kappa(\sigma)\omega(c(\sigma), c'(\sigma)) = -\omega(c(\sigma), c^{(3)}(\sigma)) = -\frac{d}{d\sigma}\omega(c(\sigma), c''(\sigma)) + 1,$$

soit en intégrant

$$\int_0^{L_{\text{aff}}(c)} \kappa(\sigma)\omega(c(\sigma), c'(\sigma))d\sigma = L_{\text{aff}}(c).$$

Par ailleurs

$$\int_0^{L_{\text{aff}}(c)} \kappa(\sigma)\omega(c(\sigma), c'(\sigma))d\sigma \geq \kappa_{\min} \int_0^{L_{\text{aff}}(c)} \omega(c(\sigma), c'(\sigma))d\sigma = 2\kappa_{\min}A(c).$$

Autrement dit

$$L_{\text{aff}}(c) \geq 2\kappa_{\min}A(c).$$

En utilisant l'inégalité isopérimétrique affine, on voit que

$$2\pi^{\frac{2}{3}}A(c)^{\frac{1}{3}} \geq L_{\text{aff}}(c) \geq 2\kappa_{\min}A(c),$$

d'où l'inégalité cherchée.

Le cas d'égalité se traite en suivant à la trace les inégalités précédentes.

Références

- [1] E. Cartan, La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle, traitées par la méthode du repère mobile, réimprimé par Jacques Gabay, Paris.
- [2] A.-M Li, U. Simon, Global Affine Differential Geometry of Hypersurfaces, deGruyter.
- [3] K. Pankrashkin, H. Popoff, *Mean curvature bounds and eigenvalues of Robin Laplacians*, Preprint arXiv :1407.3087 (2014).
- [4] K. Pankrashkin, *An inequality for the maximum curvature of planar curves with applications to some eigenvalues problems*, Preprint arXiv :1501.03792v1, 15 Jan 2015.
- [5] M. Spivak, A comprehensive introduction to differential geometry, vol. 2.

Institut de Mathématiques et Modélisation de Montpellier. Université de Montpellier et CNRS, UMR 5149.