HAL
open science

Reconstruction de la coloration d'un graphe à partir des projections des voisinages

Marie-Christine Costa, Dominique de Werra, Christophe Picouleau, Bernard Ries

To cite this version:

Marie-Christine Costa, Dominique de Werra, Christophe Picouleau, Bernard Ries. Reconstruction de la coloration d'un graphe à partir des projections des voisinages. FRANCORO/ROADEF'07, Feb 2007, Grenoble, France. pp.87-88. hal-01125264

HAL Id: hal-01125264

https://hal.science/hal-01125264v1

Submitted on 28 Nov 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Reconstruction de la coloration d'un graphe à partir des projections des voisinages

M.-C. Costa[1], D. de Werra[2], C. Picouleau[1], et B. Ries[2]

[1] Laboratoire CEDRIC, CNAM, 292 rue saint Martin, 75003 Paris
{costa,chp}@cnam.fr
[2] EPFL, Lausanne (Suisse)
{dominique.dewerra,bernard.ries}@epfl.ch

De nombreuses extensions du problème de la coloration de graphes ont été proposées et étudiées par de nombreux auteurs tant du point de vue théorique que du point de vue des applications (en systèmes de communication, ordonnancements, création d'emploi du temps, tomographie, etc).

Nous nous intéressons à une catégorie de problèmes de coloration pour laquelle le nombre d'occurrences de chaque couleur est imposé dans une collection $\mathcal{P}$ de sous-ensembles P_i de sommets du graphe.

Dans [5], une extension du problème de reconstruction d'une image polychromatique, bien connu en tomographie discrète, est étudiée : dans ce cas, les sous-ensembles P_i consistent en des chaînes. Cette étude est motivée par un problème d'ordonnancement des opérations de maintenance dans un métro.

Ici nous allons considérer des colorations, i.e. des partitions des sommets du graphe, telles que dans un voisinage de chaque sommet x, le nombre d'occurrences de chaque couleur i est un entier h_x^i.

De façon plus formelle, nous considérons un graphe connexe non-orienté $G = (V, E)$ avec n sommets et m arêtes. Etant donnés deux sommets x et y, $d(x, y)$ est la distance entre x et y (la longueur d'une plus courte chaîne). Nous notons par $N_d(x)$ le d-voisinage de $x \in V$, c'est-à-dire l'ensemble des sommets y tel que $d(x, y) = d$. Lorsque $d = 1$ nous notons $N(x)$ le 1-voisinage (le voisinage usuel) de x, i.e. les sommets y tels que $[x, y] \in E$. Nous définissons également $N_d^+(x) = \cup_{0 \leq l \leq d} N_l(x)$ l'ensemble des sommets à distance inférieure où égale à d de x.

Nous avons également un ensemble de couleurs $1, 2, \ldots, k$ et un ensemble H de vecteurs $h(x) = (h_x^1, \ldots, h_x^k) \in N^k,\ x \in V$.

Dans notre premier problème, nous cherchons une k-partition $V^1, V^2, \ldots, V^k$ de V telle que

$$|N(x) \bigcap V^i| = h_x^i \ \ \textit{pour tout } x \in V \textit{ et tout } i \leq k. \tag{1}$$

Nous notons ce problème $\mathcal{P}(G, H)$. Si de plus nous voulons obtenir une coloration propre (deux sommets adjacents sont dans deux ensembles distincts V^i et V^j), le problème est noté $\mathcal{P}^*(G, H)$.

Nous étudions également la version *bornée* de ces problèmes : nous remplaçons l'ensemble H par un ensemble B de vecteurs $b(x) = (b_x^1, \ldots, b_x^k) \in N^k,\ x \in V$. Alors nous cherchons une k-partition $V^1, V^2, \ldots, V^k$ of V telle que

$$|N(x) \bigcap V^i| \leq b_x^i \ \ \textit{pour tout } x \in V \textit{ et tout } i \leq k. \tag{2}$$

Ces problèmes sont notés $\mathcal{BP}(G, B)$ and $\mathcal{BP}^*(G, B)$, respectivement.

Notre second problème consiste à trouver une k-partition $V^1, V^2, \ldots, V^k$ de V telle que

$$|N_1^+(x) \bigcap V^i| = h_x^i \ \ \textit{pour tout } x \in V \textit{ et tout } i \leq k. \tag{3}$$

Nous notons respectivement $\mathcal{P}_1^+(G, H)$ et $\mathcal{P}_1^{+*}(G, H)$ ce problème et la version dans laquelle la coloration est propre.

Nous nous intéressons aussi aux problèmes $\mathcal{P}_2(G, H)$ et $\mathcal{P}_2^*(G, H)$ consistant à chercher une k-partition $V^1, V^2, \ldots, V^k$ de V telle que

$$|N_2(x) \bigcap V^i| = h_x^i \ \ \textit{pour tout } x \in V \textit{ et tout } i \leq k. \tag{4}$$

Notons que notre formulation contient le problème de coloration avec contrainte de cardinalité qui consiste à déterminer si un graphe $G = (V, E)$ a une k-coloration propre $(S_1, ..., S_k)$ avec des

cardinalités $s_i = |S_i|$ données pour chaque classe de couleur S_i (se référer à [2] pour ce problème) : il suffit de choisir d supérieur au diamètre de G, et de considérer l'ensemble $N_d^+(x)$ (car $\bigcup_{l=0}^{d} N_l(x) = V$ pour tout x) avec $h_x^i = s_i$ pour tout x et tout $i \leq k$.

Ces problèmes sont proches des problèmes connus sous le nom de $L(h,k)$-Labelling (voir [4]). Le problème consiste à affecter un entier positif aux sommets du graphe de sorte que deux sommets adjacents reçoivent des couleurs qui diffèrent d'au moins h unités et que deux sommets reliés par une chaîne de longueur 2 reçoivent des couleurs qui diffèrent d'au moins k unités (même lorsqu' il existe une arête reliant ces sommets). Des applications à l'affectation de fréquences sont mentionnées dans [4]. Avec l'hypothèse $b_x^i = 1$, $\forall i$, $\forall x$, les problèmes $\mathcal{BP}^*(G,H)$ et $L(1,1)$-Labelling sont équivalents.

Nous rappelons également que les modèles de colorations non propre ont été utilisés dans des contextes d'allocation de fréquences dans lesquels les interférences doivent être minimisées (voir [6]). Des applications à l'ordonnancement sont également mentionnées dans cette référence.

Références

1. R.K. Ahuja, T.L. Magnanti, J.B. Orlin, *Network flows*, Prentice-Hall, (Englewood Cliffs, 1993).
2. B.S. Baker and E.G. Coffman (1996), *Mutual exclusion scheduling*, Theoretical Computer Science 162, 225-243.
3. C. Berge, *Graphes*, Gauthier-Villars, (Paris, 1983).
4. T. Calamoneri (2006), *The $L(h,k)$-Labelling Problem : A Survey and Annotated Bibliography*, The Computer Journal, to appear.
5. C. Bentz, M.C. Costa, D. de Werra, C. Picouleau, B. Ries (2006), *On a graph coloring problem arising from discrete tomography*, submitted.
6. L. Cowen, W. Goddard, C.E. Jesurum (1997), *Defective Coloring Revisited*, Journal of Graph Theory 23 (3), 205-219.
7. D. P. Dailey (1980), *Uniqueness of Colorability and Colorability of Planar 4-regular Graphs are NP-complete*, Discrete Mathematics 30, 289-293.
8. G. Fertin, A. Raspaud, B. Reed (2004), *Star Coloring of Graphs*, Journal of Graph Theory 47 (3), 163-182.
9. M.R. Garey and D.S. Johnson, *Computers and Intractability, a Guide to the Theory of NP-Completeness*, ed. Freeman, (New York 1979).
10. I. Holyer (1981), *NP-completeness of edge-coloring*, SIAM Journal on Computing 10, 718-720.
11. C. Moore, J.M. Robson (2001), *Hard tiling problems with simple tiles*, Discrete Comput. Geom. 26, 573-590.