Analyse et jeu musical en tempérament juste adaptatif

Frédéric Faure, Malik Mezzadri, Alexandre Ratchov

▶ **To cite this version:**

Frédéric Faure, Malik Mezzadri, Alexandre Ratchov. Analyse et jeu musical en tempérament juste adaptatif. 2015. hal-01119499

HAL Id: hal-01119499
https://hal.science/hal-01119499

Preprint submitted on 23 Feb 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Analyse et jeu musical en tempérament juste adaptatif

Frédéric Faure
Institut Fourier, UMR 5582
100 rue des Maths, BP74
FR-38402 St Martin d'Hères, FRANCE
frederic.faure@ujf-grenoble.fr
http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure
et Malik Mezzadri
http ://www.magicmalik.com
et Alexandre Ratchov
http ://caoua.org/alex/

23 février 2015

Résumé

On explore d'un point de vue théorique et pratique un système musical construit sur des intervalles justes, c'est à dire dont les rapports entre les fréquences des notes sont des nombres rationnels simples. On montre comment jouer avec un "tempérament juste adaptatif" c'est à dire qui s'adapte au notes présentes au cours du jeu. Pour cela on introduit une fonction "dissonance" qui est une fonction sur les fréquences. Le choix d'une nouvelle note est fait de sorte à minimiser la dissonance totale de l'accord. Tout cela se représente sur le "réseau Tonnetz" multidimensionnel de Euler. Un accord de dissonance minimale correspond à un ensemble de points du réseau qui minimise les distances mutuelles donc qui est bien compact.

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Perception de la voix et intervalles justes **3**
2.1 Perception du spectre et des harmoniques sous forme de timbre 3
2.2 Intervalles musicaux 7
2.3 Convention de notation musicale 9

3 Présentation des nombres rationnels (intervalles justes) 11
3.1 Le verger d'Euclide 11
3.2 Fonction Dissonance 14
3.3 Le tonnetz 16

4 Accord juste 17

5 Tempérament adaptatif 24
5.1 Variantes possibles 28

6 Observation d'exemples 29
6.1 La résolution du triton 29
6.2 La cadence majeure $IIm7 - V7 - I$ 29
6.3 La cadence mineure $II\varnothing 7 - V7 - Im$ 29

A Fonction dissonance 32
A.1 Fonction dissonance sur différentes octaves 32
A.2 Sélection des décompositions en nombres premiers 34
[1]

1 Introduction

Dans une première partie, on discute le rôle important en musique des **intervalles justes** c'est à dire des couples de notes dont le rapport des fréquences est un nombre rationnel "simple". Un **accord juste** est un ensemble de notes dont les intervalles relatifs sont justes. Notre perception de ces intervalles comme étant consonants pourrait être reliée à notre perception de la voix humaine [2]. La représentation des nombres rationnels sur l'échelle des fréquences a une **structure fractale** (fonction de Thomae) et cet article explore les manifestations de la structure de cette fractale sur notre perception des intervalles et des accords justes en musique. Pour cela on utilise la décomposition d'un nombre rationnel en facteurs premiers pour représenter un accord juste par un ensemble de points sur le réseau $\mathbb{Z}^P$, $P = \{2, 3, 5, 7, \ldots\}$. Ce réseau a été introduit en musique sous le nom du **" tonnetz "** par Euler (1735). Une distance naturelle sur ce réseau permet de définir la "**dissonance**" $D(A)$ d'un accord juste A comme étant la somme des distances mutuelles. Par analogie, un accord composé de notes est comme une molécule composée d'atomes et sa dissonance $D(A)$ correspond à l'énergie de la molécule.

Dans une deuxième partie on exploite l'étude précédente pour concevoir un système musical, c'est à dire un choix d'échelles de notes privilégiées et mettre en évidence des relations entre ces notes. L'idée est que si n notes sont présentes et forment un accord A, alors une nouvelle note de fréquence x qui se rajoute formera un accord à $n + 1$ notes,

1. 2010 Mathematics Subject Classification: 00A65 Mathematics and music, 97M80 Arts, music, language, architecture.
Mots clefs : intonation musicaletempérament

noté $A + x$, et l'on définit la fonction dissonance par $D_A(x) := D(A \cup x)$. Cette fonction admet des minima locaux qui seront donc des choix de fréquences x à privilégier pour cette nouvelle note. On définit un **tempérament adapté** à l'accord A comme étant le choix de x qui minimise $D_A(x)$ dans chaque intervalle de demi-ton. On parle alors de **tempérament musical adaptatif** car il est modifié au fur et à mesure du temps chaque fois qu'une nouvelle note est jouée ou est éteinte.

Notes :

- Il s'agit d'un document en cours d'élaboration. Pour la plupart des références courantes on renvoie à wikipedia sous forme de lien hypertexte.
- Dans certains cas on utilise un langage un peu formel (mathématique) afin de pouvoir définir clairement les choses et en discuter. Cela ne concerne que la partie formelle du système musical étudié.

Références

- Le sujet abordé dans cet article est un sujet de recherche avec une vaste littérature et nous conseillons l'ouvrage [1] pour la partie mathématiques et musique. Nous conseillons l'ouvrage [2] concernant les questions de perception du son en neurologie cognitive.

Remerciements Nous tenons à remercier Stéphanie de Berthet musique et Patrice Ballet (UJF) pour leur aide précieuse concernant l'élaboration d'une flûte au tempérament adaptable. Pour les aspects artistiques, nous remercions les soutiens de Jean-François Braun directeur de la source à fontaine et de Antoine Conjart directeur de l'hexagone de Meylan. Nous remercions le soutient financier de Persyval, LabEx PERSYVAL-Lab (ANR-11-LABX-0025-01), et en particulier Anne Laure Bernardin pour les nombreux services.

2 Perception de la voix et intervalles justes

Dans cette Section on essaye de présenter une relation entre notre perception de la voix humaine et notre aptitude ou sensibilité à certains intervalles musicaux.

2.1 Perception du spectre et des harmoniques sous forme de timbre

2.1.1 Harmoniques

Dans l'oreille interne, il y a de l'ordre de 15000 cellules ciliées. Chacune d'entre elle informe le système nerveux de l'énergie sonore détectée sur un petit intervalle temporel et un petit intervalle en fréquences [2]. En termes simplifiés, l'oreille mesure le module de la transformée de Fourier fenetrée en temps du son.

Lorsque que l'on prononce des voyelles (voix ou son chanté), les " cordes vocales" vibrent. Les cordes vocales n'ont pas la géométrie d'une corde mais un phénomène d'oscillations par

relaxation (entretenu par le souffle des poumons) leur permettent d'osciller à une fréquence précise f. Le signal sonore émit par la personne sera donc en première approximation un signal périodique $s(t) = s(t+T)$ de période $T = 1/f$ et son spectre de Fourier contient donc des pics aux fréquences $f, 2f, 3f, 4f, \ldots$, la série de Fourier, appelée harmoniques en musique. Dans cet article on appellera **pitch de la note** la valeur de f (ou de T, ou plus précisément de $x = 69 + \frac{12}{\log 2} \log\left(\frac{f}{440}\right)$ qui est l'unité midi).

Le paragraphe suivant que l'on peut sauter présente un exemple.

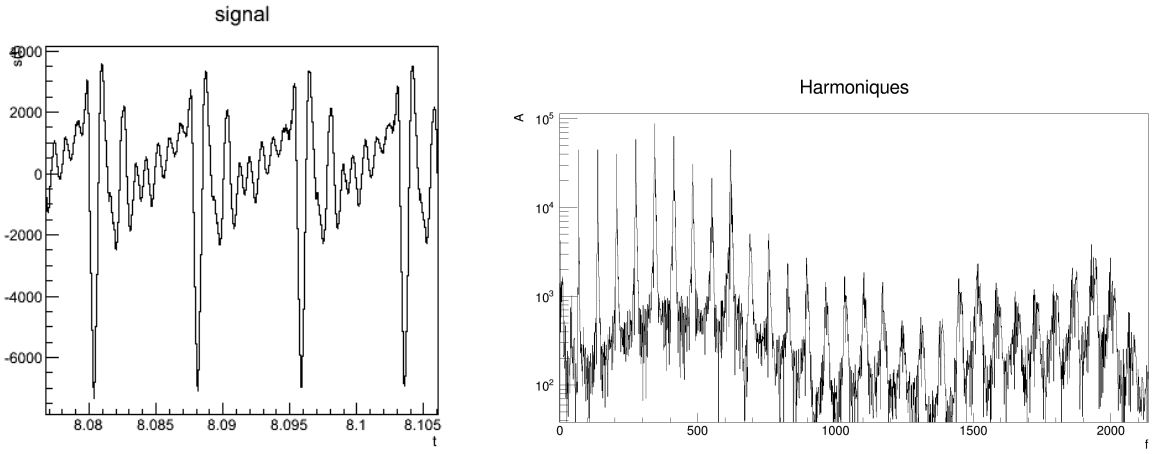


FIGURE 2.1 – Signal $s(t)$ de la voyelle "A" chantée par Malik et sa transformée de Fourier, montrant les harmoniques qui sont des pics aux fréquences $f, 2f, 3f, 4f, \ldots$ où f est la fréquence fondamentale.

2.1.2 Exemples

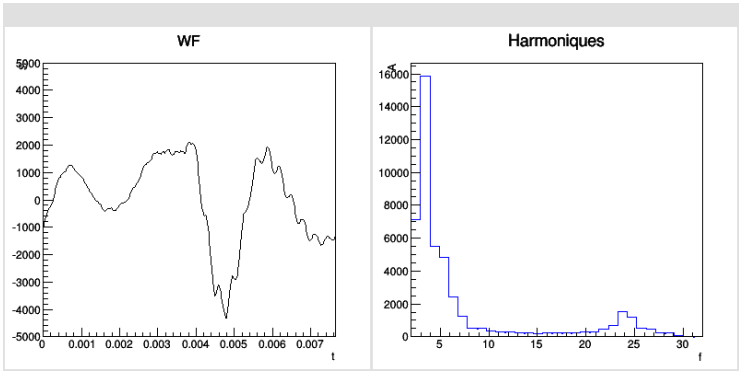
Écouter **Voix.wav** qui est la voix de Malik avec un timbre très marqué. Il prononce plusieurs voyelles sur une durée totale de 8 secondes.

Dans cet enregistrement, on entend les voyelles suivantes :

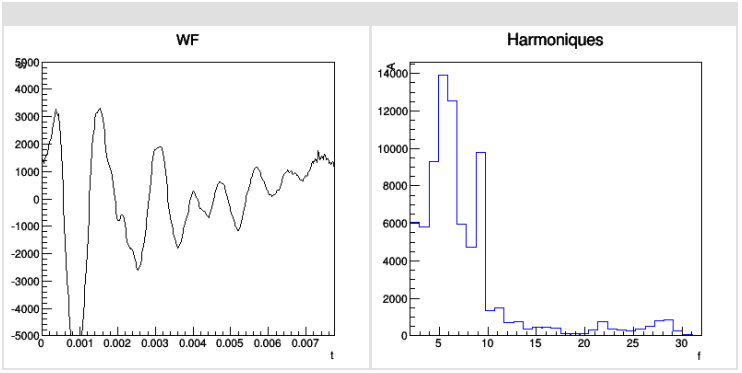
Son :	O	ON	E	I	é	è	A
t :(s.) du début	0	1.5	2.7	4	5	6.3	7.4

Le signal $s(t)$ n'est pas strictement périodique mais presque (dans une première approximation). Pour chaque voyelle, on appelle "wave form" $WF(t)$, le signal $s(t)$ restreint à une période. On présente ci-dessous $WF(t)$ et les harmoniques qui sont le module $|F(i)|$ des coefficients de Fourier de $WF(t)$, pour les premières harmoniques $i = 1 \to 32$.

- à la date $t = 2s$. **Voyelle « ON ».**



- à la date $t = 8s$. **Voyelle « A ».**



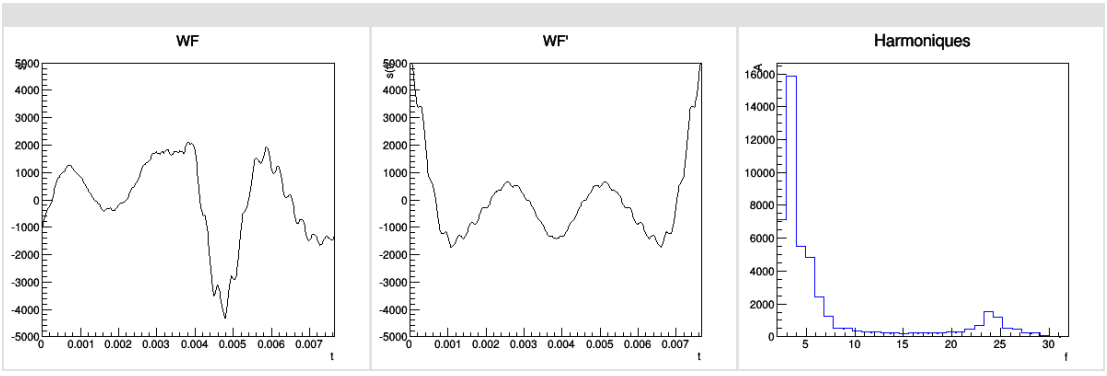
2.1.3 Les phases de la transformée de Fourier sont inaudibles

D'après les explications ci-dessus, l'audition humaine ne perçoit pas les phases des modes de Fourier. Il s'agit de l'insensibilité à la phase. Pour le démontrer, on fait l'expérience suivante.

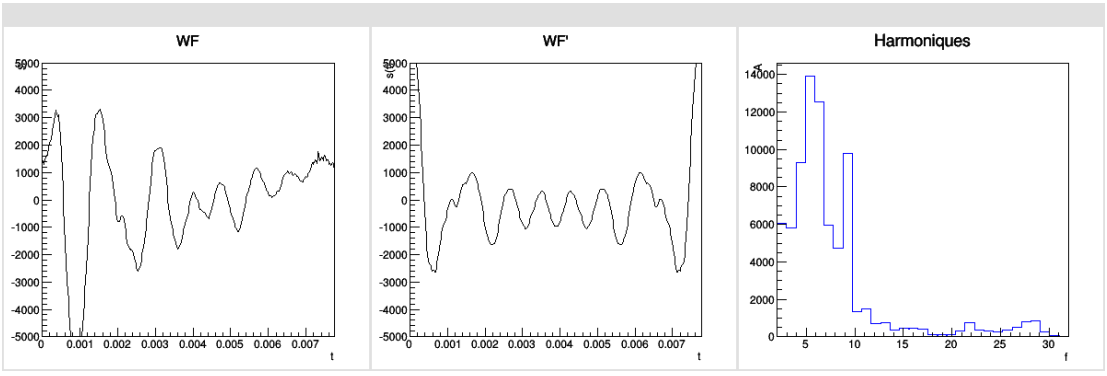
1. On part du signal original $s(t)$.
2. On détecte la période T à chaque instant t.
3. pour intervalle d'une période $t \in [t'; t' + T]$ on fait une T.F. qui donne des coefficients de Fourier $F(i) \in \mathbb{C}$. On remplace $F(i)$ par son module $F'(i) := |F(i)| \geq 0$.
4. On fait la transformée de Fourier inverse de $F'(i) = |F(i)|$ qui donne une wave form $WF'(t)$.
5. On reconstruit un signal $s'(t)$ en concaténant les wave form $WF'(t)$.

Exemples Le signal de départ $s(t)$ est **Voix.wav.** Voici des exemples de wave form $WF(t)$ et $WF'(t)$. Le signal reconstruit $s'(t)$ est **Voix_module.wav,** à écouter.

à la date $t = 2s$. Voyelle « on ».



Autre exemple à la date $t = 8s$. Voyelle « a ».



Observations :

- A l'écoute on ne distingue pas les deux signaux **Voix.wav** et **Voix_module.wav**. Pourtant les wave formes sont très différentes.
- Il est normal que $WF'(t)$ soit maximal en $t = 0$.
- Cette expérience démontre que la phase des modes de Fourier est inaudible.
- La raison physiologique est probablement que les détecteurs dans l'oreille décomposent en fréquences et envoie dans le cerveau seulement $|\tilde{s}(t, f)|$ (module de la Transformée de Fourier fenêtrée) appelé « spectre de puissance ».
- Cela est remarquable car les processus qui génère le signal $s(t)$ pour la voix (ou instruments à vent) font que le wave-form a une forme très spécifique et reproductible. Cette forme se traduit par les coefficients de Fourier complexes (module et phase). Cependant on ne perçoit pas cette forme entièrement car on ne perçoit pas les phases.

2.1.4 Importance des harmoniques élevées pour la reconnaissance du timbre.

Dans cette Section on présente d'autres exemples que l'on commente ensuite. On part du même signal original **Voix.wav.**

Coupures hautes fréquences :

- Dans le fichier **Voix_1_20_Mod.wav**, on garde les harmoniques i=1 $\rightarrow$ 20. On entend encore bien les voyelles.
- Dans le fichier **Voix_1_5_Mod.wav** , gardant les harmoniques i=1 $\rightarrow$ 5. On ne distingue plus les voyelles. On peut conclure que dans cet exemple l'information sur les voyelles se trouve dans les harmoniques $i = 6 \rightarrow 20$.

Coupures basses fréquences :

- Dans le fichier **Voix_9_20_Mod.wav**, en gardant les harmoniques i=9 $\rightarrow$ 20. On entend encore les voyelles, cela confirme l'observation précédente. Curieusement, on entend (ou on devine) le pitch alors que la fondamentale n'est pas présente. C'est l'illusion de la fondamentale absente et Fondamentale absente. Cette remarque est en relation avec la basse virtuelle définit plus loin.

2.2 Intervalles musicaux

2.2.1 Intervalles juste dans la voix humaine

D'après les exemples précédents, on constate que notre perception auditive est très sensible au spectre des harmoniques d'un signal périodique, et analyse de façon inconsciente ce spectre. Consciemment on le perçoit comme "un tout" que l'on appelle "timbre" de la note. En particulier on a vu que notre perception est capable d'identifier un timbre si seulement les harmoniques $i = 9 \rightarrow 20$ sont présentes.

Ces constats peuvent se reformuler de la manière équivalente suivante :

- lorsque un ensemble de fréquences (pures) $f_1, f_2, \dots f_N$ est un sous ensemble de $\{f, 2f3f, \dots 20f\}$ avec une certaine "fréquence fondamentale" f, alors on perçoit un timbre unique.

Ce qui va nous intéresser est une conséquence immédiate de cette proposition :

- Si des fréquences (pures) $f_1, f_2, \dots f_N$ participent à un timbre (cad que $f_1, f_2, \dots f_N \in \{f, 2f3f, \dots 20f\}$ avec $f > 0$) alors elles sont en rapports rationnels, c'est à dire que pour tout i, j, on a $f_i/f_j = a/b$ avec des entiers $a, b \leq 20$.

Remarques :

- la réciproque n'est pas vraie. C'est à dire que si $f_1, f_2, \dots f_N$ vérifient que pour tout i, j, on a $f_i/f_j = a/b$ avec des entiers $a, b \leq 20$, alors cela n'implique pas qu'il existe une fondamentale $f > 0$ telle que $f_1, f_2, \dots f_N \in \{f, 2f3f, \dots 20f\}$ (par contre c'est vrai en remplaçant 20 par un entier plus grand dans la dernière liste, mais cela n'a plus de sens pratique). Cette remarque sera importante dans la suite, car on verra que l'on perçoit ces accords différemment. (Comme "mineure" ou "subtiles").
- Question [2] : dans la physiologie de l'oreille ou du cerveau qu'elle partie est responsable de cette perception ? Est-ce qu'il y a des connexions neuronales (axones) qui connectent les cellules cillées de fréquences f et $\frac{a}{b}f$ à un même neurone ?

Posons la définition suivante,

Définition 2.1. Deux notes de fréquence f_1, f_2 forment un **intervalle juste** si $f_1/f_2 = a/b$ avec $a, b \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ nombres entiers, c'est à dire que $a/b \in \mathbb{Q}$ est un nombre rationnel.

En pratique il faut bien sûr que a, b ne soient pas trop grands, par exemple $a, b \leq 20$ comme discuté plus haut. On quantifiera cela dans la Section 3.

Pour des références historiques sur l'association des nombres rationnels à la musique, voir texte.

2.2.2 Intervalles justes en musique

Il est bien connu que les intervalles justes définit ci-dessus sont importants en musique. La figure 2.2 présente précisément la liste des intervalles justes les plus simples, donc les plus importants. Ces intervalles apparaissent comme rapport d'harmoniques dans le spectre d'un signal périodique.

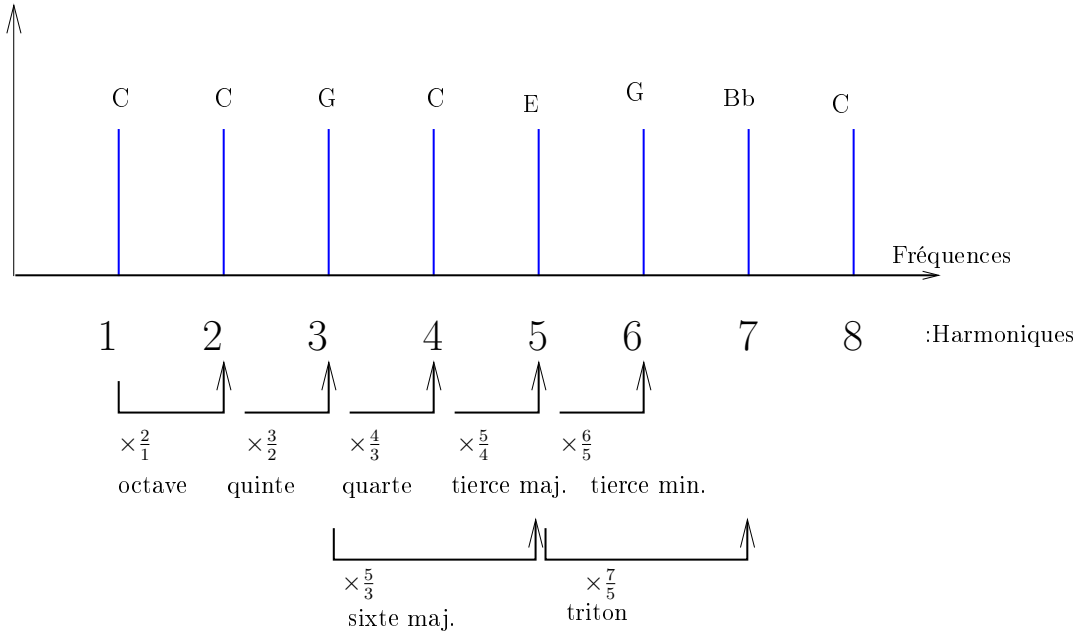


FIGURE 2.2 – Fractions obtenues à partir des premières harmoniques d'un signal périodique (ex : voix). On associe le nom de l'intervalle juste musical. (Les lettres sont des noms de notes pour indication, voir Section 2.3.1).

Dans la suite, on étudiera les intervalles justes avec des fractions plus importantes. (Cela est suggéré par les remarques précédentes que les harmoniques plus élevées sont aussi perceptibles par l'audition).

2.3 Convention de notation musicale

2.3.1 Le tempérament égal

La notation musicale contemporaine est basée sur l'utilisation tempérament égal. Par convention, l'ensemble des notes permises s'appelle la gamme chromatique. Voir figure 2.3.

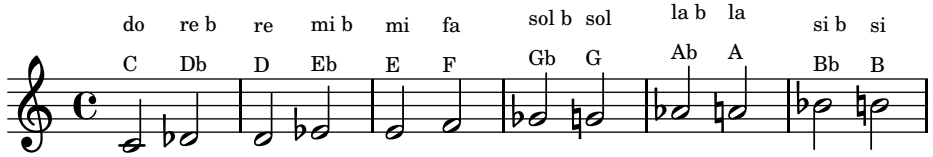


Figure 2.3: La gamme chromatique. Nous avons mis le nom des notes dans la notation française ($do, ré♭, ré, etc$) et anglaise ($C, D♭, D, etc$). Dans la suite de l'article nous utiliserons la notation anglaise qui est internationnale.

Dans la gamme chromatique, la fréquence de chaque note f_i est reliée à la fréquence f_{i+1} de la note suivante par la formule :

$$f_{i+1} = 2^{1/12} f_i$$

Ainsi après douze notes on a donc l'intervalle d'une octave juste :

$$f_{i+12} = \frac{2}{1} \cdot f_i$$

On a ainsi la définition :

Définition 2.2. Les fréquences des notes de la gammes chromatique (ou tempérament égal) sont

$$f_j = f_A . 2^{\frac{1}{12}(j - j_{La})}, \quad j \in \mathbb{Z}, \qquad f_A = 440\text{Hz} \tag{2.1}$$

où j_A est l'indice de la note A de fréquence $f_A = 440$Hz qui sert de référence.

Remarque 2.3.

- Avec la convention du système MIDI, l'indice du A est $j_A = 69$.
- On remarque dans ce système musical tempéré que seule l'intervalle d'octave est juste. En effet le rapport de fréquence $f_{i+k}/f_i = 2^{\frac{1}{12}k}$ est un nombre rationnel seulement si k est un multiple de 12. Par contre l'intervalle de 7 demi-tons

$$\frac{f_{i+7}}{f_i} = 2^{7/12} = 1.498.. \simeq 1.5 = \frac{3}{2}$$

est très proche de la quinte juste et de même pour 5 demi-tons

$$\frac{f_{i+5}}{f_i} = 2^{5/12} = 1.335.. \simeq \frac{4}{3}$$

qui est proche de la quarte juste. Ces différences sont imperceptible à l'audition. Par contre l'intervalle de 4 demi-tons :

$$\frac{f_{i+4}}{f_i} = 2^{4/12} = 1.26.. \simeq 1.25 = \frac{5}{4}$$

est proche de la tierce majeure juste mais la différence est audible.
Voir la figure 3.4.

2.3.2 Convention de notation musicale

Dans cet article, on utilisera la convention suivante :

Définition 2.4. "**Notation musicale**". Une fréquence f_{ref} sert de **référence**. Les autres fréquences utilisées seront de la forme

$$f = \frac{a}{b} f_{ref}, \quad \text{avec } \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}.$$

Sur une partition on représente la fraction a/b associée à la note tempérée i la plus proche de f c'est à dire minimisant l'écart $|\log f - \log f_i|$. On peut changer de référence au cours du morceau, et cela est indiquée par la fraction qui est entourée. Elle devient donc associée à la fraction 1/1. Elle ne correspond pas forcément à une note présente. Voir figure 2.4.

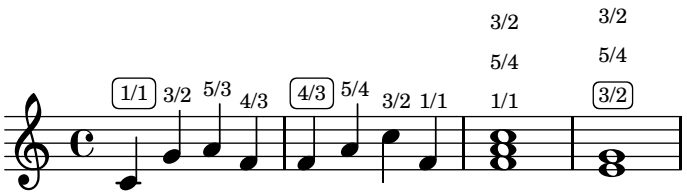


Figure 2.4: Exemple de notation musicale d'après la définition 2.4. Dans cet exemple en début de deuxième mesure, le F devient la note de référence, c'est à dire que sa fraction qui était 4/3 devient 1/1 (mais le 1/1 n'est pas indiqué). En principe les fractions seules suffisent à déterminer la hauteur de la note. La figure de note indique la hauteur approximative, aussi la durée. Dans la dernière mesure, la référence est 3/2 du "F" précédent, c'est donc le "C", qui n'apparaît pas comme note.

Remarque 2.5.

- Il n'est pas équivalent de minimiser $\min_i |f - f_i|$ et $\min_i |\log f - \log f_i|$. C'est donc une convention que de choisir l'échelle logarithmique. Sur la figure 3.4, la gamme chromatique est représentée par les traits bleus et l'axe horizontal est $\log\left(\frac{a}{b}\right)$. Donc sur ce schéma, pour une fréquence donnée a/b, la convention consiste à associer la note chromatique (trait bleu) la plus proche de la fraction.
- Sur la figure 3.3 par exemple, les fractions 6/5 et 7/6 sont toutes les deux représentées (approximées) par la même figure note E ♭.

3 Présentation des nombres rationnels (intervalles justes)

Dans cette Section nous étudions spécifiquement les nombres rationnels dans le but de les associer à des intervalles justes, conformément à la définition 2.1.

On rappelle qu'un nombre rationnel positif est par définition un nombre $x = a/b$ qui est le rapport de deux entiers a, b.

D'après le théorème fondamental de l'aritmétique, un nombre rationnel se décompose de façon unique comme produit de puissances (positive ou négative) de nombres premiers :

$$\frac{a}{b} = 2^{n_0} 3^{n_1} 5^{n_2} 7^{n_3} \ldots = \prod_{j \geq 0} p_j^{n_j} \tag{3.1}$$

avec des entiers relatifs $(n_0, n_1, n_2 \ldots) \in \mathbb{Z}^P$, seul un nombre fini des n_j sont non nuls. Il apparaît donc qu'un nombre rationnel a trois présentations possibles équivalentes et dans la suite nous utiliserons ces trois représentations :

1. Le couple (a, b) formé par des entiers premiers entre eux. On utilisera cette représentation avec le "**verger d'Euclide**".
2. La suite d'entiers $n = (n_0, n_1, n_2, \ldots) \in \mathbb{Z}^P$. On utilisera cette représentation avec le réseau **"tonnetz"**.
3. La valeur numérique $a/b \in \mathbb{R}$. On utilisera cette représentation pour afficher la **"fonction dissonance"**.

Par exemple (voir figure 2.2) l'intervalle de quinte est associée à la fraction $\frac{3}{2} = 2^{-1}3^1 = 1.5$ et la suite d'entier est donc $n = (-1, 1)$ (on convient ici et par la suite d'écrire la suite $n = (n_0, n_1 \ldots)$ jusqu'au dernier terme non nul).

3.1 Le verger d'Euclide

Il est naturel de représenter un nombre rationnel positif a/b par un point (a, b) sur le réseau $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. La valeur numérique $a/b \in \mathbb{R}$ correspond à la pente de la droite passant par (a, b). Partant de l'origine, le premier couple [2] (a, b) que cette droite correspond à une fraction irréductible. Voir figure 3.1.

2. Remarquer que si la droite passe par (a, b) et si $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est un entier, alors $\frac{na}{nb} = \frac{a}{b}$ donc la droite passe aussi par (na, nb).

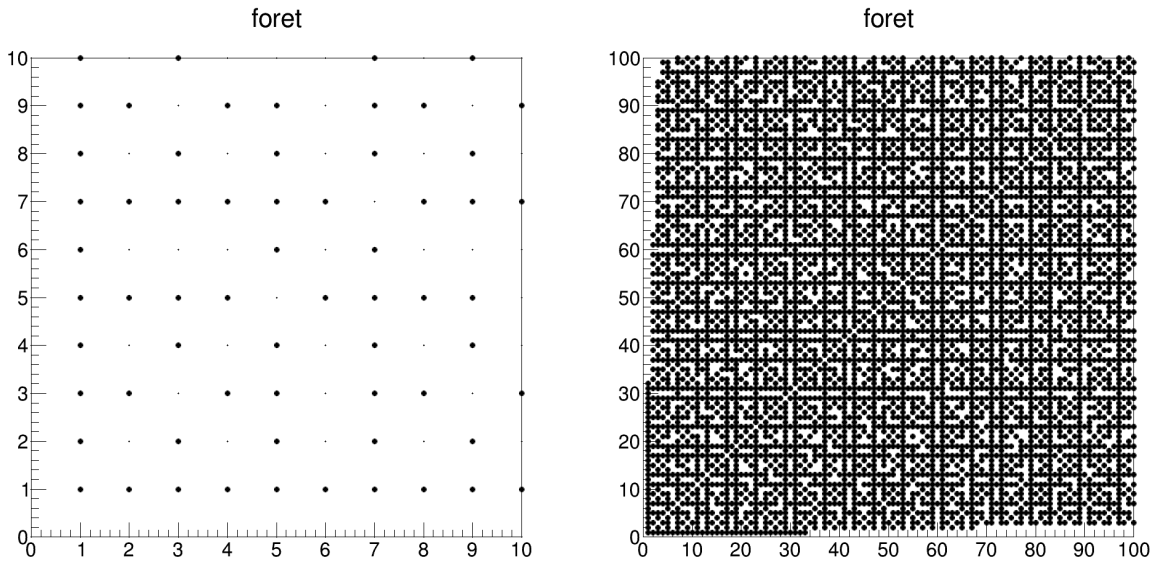


FIGURE 3.1 – (a) Le verger d'Euclide. En termes imagés, considérons un verger où tous les arbres sont plantés alignés sur un réseau infini. On repère chaque arbre par ses coordonnées (a, b) par rapport à un arbre (arbitraire) d'origine $(0, 0)$. Supposons que l'on se place en $(0, 0)$ à la place de l'origine et que l'on observe les autres arbres autour de nous. On en voit une infinité, mais certains arbres (les gros points) en cachent d'autres (les petits points). Les gros points correspondent aux « fractions irréductibles » a/b et cachent les petits points qui correspondent aux "fractions réductibles". Par exemple $(1, 1)$ cache $(2, 2)$ et $(3, 3)$ etc. De même $(2, 1)$ cache $(4, 2)$ et $(3, 2)$ cache $(6, 4)$. Dans la littérature, cette forêt s'appelle le verger d'Euclide.
(b) : même image à plus grande échelle.

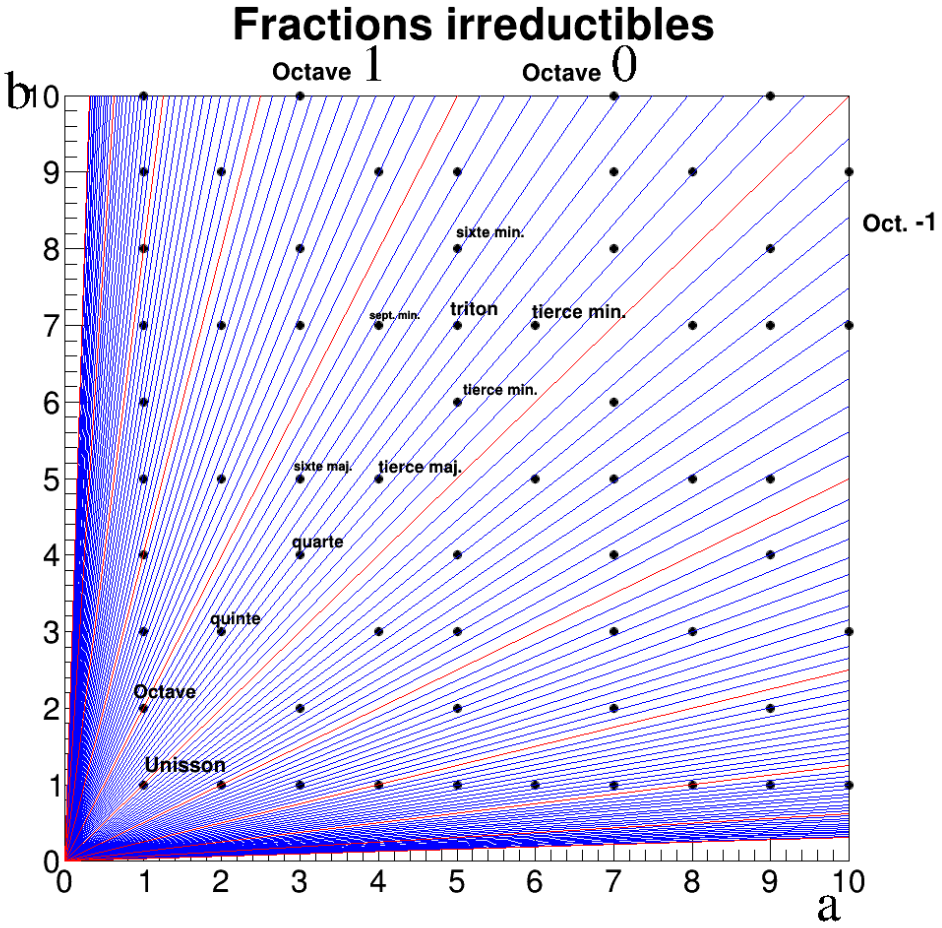


FIGURE 3.2 – Les points noirs aux coordonnées (a, b) entières correspondent aux fractions a/b irréductibles. Les traits rouges sont les droites de pente 2^k avec $k \in \mathbb{Z}$. Cela correspond aux intervalles d'octave. Les traits bleus sont les droites de pente $2^{k/12}$, correspondant au intervalles de 1/2 ton. On a associé un nom aux fractions les plus simples et situées dans la première octave : 1/1 (unisson) 2/1 octave, 3/2 quinte, 4/3 quarte, 5/3 sixte, 5/4 tierce majeure, etc

3.2 Fonction Dissonance

Il est naturel d'après ce schéma d'associer une importance à ces fractions (a, b) en fonction de la distance à l'origine qui est $\sqrt{a^2+b^2}$. Il y a plusieurs définitions possibles, on verra dans la suite que elles sont équivalentes en un certain sens. D'un point du vue musical cette distance correspond à la dissonance de l'intervalle juste. Comme la fonction $\log(.)$ est croissante on peut définir la dissonance par

$$D_E(a,b) := \log\left(\sqrt{a^2+b^2}\right) = \frac{1}{2}\log\left(a^2+b^2\right).$$

Il sera parfois plus simple d'utiliser la définition suivantes :

Définition 3.1. Si a/b est une fraction irréductible, sa **dissonance** est

$$D(a,b) := \log(a \cdot b) \tag{3.2}$$

Remarque 3.2.

- Par exemple la dissonance de l'unisson $1/1$ est $D(1,1) = \log(1) = 0$. La dissonance de l'octave est $D(2,1) = \log 2 \simeq 0.7$ de la quinte $D(3,2) = \log(3.2) = \log 2 + \log 3 \simeq 1.8$. Plus généralement, d'après (3.1) la dissonance de la fraction $\frac{a}{b}$ est

$$\text{si } \frac{a}{b} = \prod_j p_j^{n_j} \text{ alors } D(a,b) = \sum_{j=0}^{\infty} |n_j| \log p_j \tag{3.3}$$

  Pour apprécier la valeur de la dissonance, il faut avoir en tête les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{llllll} \log 2 \simeq 0.7, & \log 3 \simeq 1.1, & \log 5 \simeq 1.6, & \log 7 \simeq 1.9, & \log 11 \simeq 2.4, \\ \log 13 \simeq 2.6, & \log 17 \simeq 2.8\ldots & & & \end{array}$$

- La fonction dissonance $D(a,b)$ est donc une fonction définie sur les nombres rationnels $a/b \in \mathbb{Q}$. Voir la figure 3.4. Cette fonction est directement reliée à la fonction de Thomae 1875, en arithmétique.
- Voir figure 3.2, 3.4, 3.3 et tableau 1 qui montrent les dissonances des intervalles les plus simples.
- Remarque : la fonction dissonance $D(a,b)$ semble directement reliée à la **fonction de dissonance de Helmholtz**, voir Ici, qui semble s'obtenir en lissant $-D(a/b)$ à une petite échelle δ. Nous utiliserons cela dans la partie programmation et instrumentation.

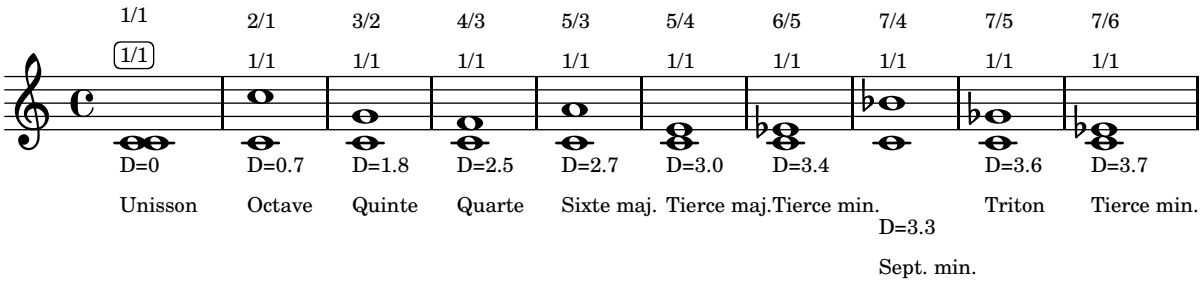


Figure 3.3: Intervalles et leur dissonances en notation musicale (Définition 2.4). Dans ces exemples, la note de référence 1/1 est le do. Remarquer que les fractions 6/5 et 7/6 sont toutes les deux représentées par la même figure de mi ♭.

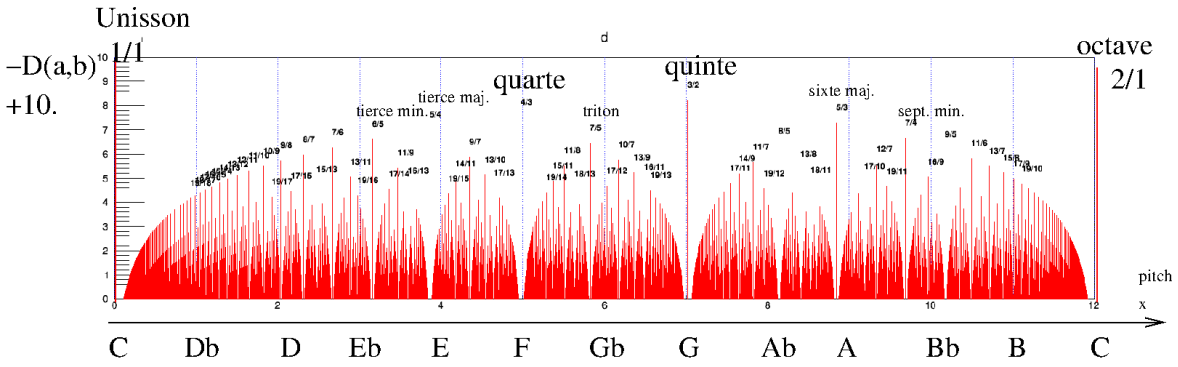


FIGURE 3.4 – On représente la fonction "résonance" $R(a/b) := 10 - D(a,b)$ associée à chaque intervalle juste (a/b) où $D(a,b)$ est la fonction dissonance (3.2). En abscisse, on a utilisé l'échelle des "pitchs" qui est $x = \frac{12}{\log 2} \log(a/b)$. Ainsi l'intervalle $x = 0 \to 12$ correspond à $a/b = \frac{1}{1} \to \frac{2}{1}$ qui est l'intervalle d'une octave. Les traits bleus sont les intervalles des demi-ton chromatiques. Cette figure est à mettre en relation avec la figure 3.2. Voir annexe A pour la représentation de cette fonction dans les octaves supérieures et inférieures. Pour indication, on a ajouté le nom des notes chromatiques en partant de C.

Nom :	Unisson	Octave	quinte	quarte	sixte maj.
a/b	$1/1$	$2/1$	$3/2$	$4/3$	$5/3$
$n = (n_0, n_1, \ldots)$	0	(1)	$(-1, 1)$	$(2, -1)$	$(0, -1, 1)$
Dissonance $D(a, b)$	0	$\log 2$ $\simeq 0.7$	$\log 2 + \log 3$ $\simeq 1.8$	$2\log 2 + \log 3$ $\simeq 2.5$	$\log 3 + \log 5$ $\simeq 2.7$

Nom :	tierce maj.	tiere min.	sept. min.	triton	tiere min.
a/b	$5/4$	$6/5$	$7/4$	$7/5$	$7/6$
$n = (n_0, n_1, \ldots)$	$(-2, 0, 1)$	$(1, 1, -1)$	$(-2, 0, 0, 1)$	$(0, 0, -1, 1)$	$(-1, -1, 0, 1)$
Dissonance $D(a, b)$	$2\log 2 + \log 5$ $\simeq 3.0$	$\log 2 + \log 3 + \log 5$ $\simeq 3.4$	$2\log 2 + \log 7$ $\simeq 3.3$	$\log 5 + \log 7$ $\simeq 3.6$	$\log 2 + \log 3 + \log 7$ $\simeq 3.7$

TABLE 1 – D'après la figure 3.4, voici la dissonance associée aux intervalles justes les plus simples

3.3 Le tonnetz

On a vu en (3.1) qu'un nombre rationnel a/b se représente de façon unique par une suite d'entiers $n = (n_0, n_1, n_2 \ldots) \in \mathbb{Z}^P$, définis par

$$\frac{a}{b} = 2^{n_0} 3^{n_1} 5^{n_2} 7^{n_3} \ldots = \prod_{j \geq 0} p_j^{n_j} =: P^n \tag{3.4}$$

avec $p_j \in P = \{2, 3, 5, 7, \ldots\}$ ensemble des nombres premiers. L'espace $\mathbb{Z}^P$ est un réseau de dimension infinie que l'on appelle **le tonnetz** ("réseau des notes" d'après Euler). Voir figure 3.5.

En pratique on ne représentera que les composantes (n_1, n_2) correspondant aux composantes $(3, 5)$ ou (n_1, n_2, n_3) correspondant aux composantes $(3, 5, 7)$. En d'autres termes on oublie le facteur $\times 2$ qui correspond à des changements d'octaves (et ne change donc pas le nom de la note). Voir figure 3.5(b) et figure 3.6.

Remarquer que la fonction dissonance $D(a, b)$ donnée par (3.3) est simplement une "distance l^1 avec poids" sur le tonnetz :

$$D(a, b) = \sum_{j=0}^{\infty} |n_j| \log p_j$$

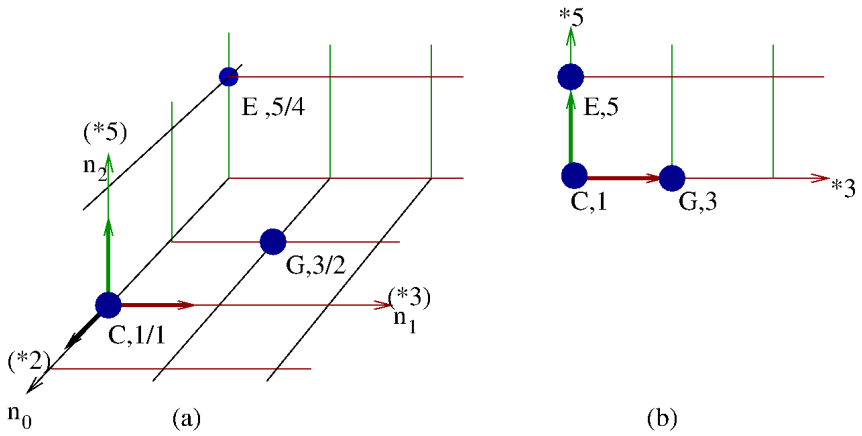


FIGURE 3.5 – (a) Le **réseau Tonnetz** $(2,3,5)$**.** Les trois axes sont associés aux facteurs premiers $(2,3,5)$. La fraction $1/1 = 2^0 3^0 5^0$ se trouve à l'origine, ici note "C". (Le nom des notes est ici seulement à titre indicatif). Pour une fraction $a/b = 2^{n_0} 3^{n_1} 5^{n_2} 7^{n_3} \dots$ on ne représente que ses composantes (n_0, n_1, n_2). Ainsi on peut représenter l'intervalle de quinte $\frac{3}{2} = 2^{-1} 3^1 5^0$ (note G) associée au point $n = (-1, 1, 0)$ et l'intervalle de tièrce majeure $\frac{5}{4} = 2^{-2} 3^0 5^1$ (note E) au point $n = (-2, 0, 1)$.
(b) Le **réseau Tonnetz** $(3,5)$**.** Pour une fraction $a/b = 2^{n_0} 3^{n_1} 5^{n_2} 7^{n_3} \dots$ on ne représente que ses composantes (n_1, n_2). C'est donc une projection du réseau $(2,3,5)$ (a) sur le plan $(3,5)$. On a représenté la triade majeure C-E-G qui forme un triangle.

4 Accord juste

Définition 4.1. Un **accord juste** est un ensemble de fréquences $A = (f_1, f_2, \dots f_N)$ dont les rapports mutuels sont des nombres rationnels : $f_i/f_j \in \mathbb{Q}$. La **dissonance de l'accord** est

$$\mathcal{D}_A = \mathcal{D}(f_1, f_2, \dots f_N) := \frac{1}{2} \sum_{i,j} D(f_i/f_j)$$

où D est la fonction dissonance d'un nombre rationnel défini par (3.2). Comme il y a $N!$ couples de notes, on posera

$$d_A := \frac{1}{N!} \mathcal{D}_A$$

appelée la **dissonance moyenne de l'accord**.
Si f est une nouvelle fréquence telle que $f/f_j \in \mathbb{Q}$, on pose :

$$\mathcal{D}_A(f) := \mathcal{D}(f_1, f_2, \dots f_N, f)$$

appelée **fonction dissonance de l'accord** A**.**

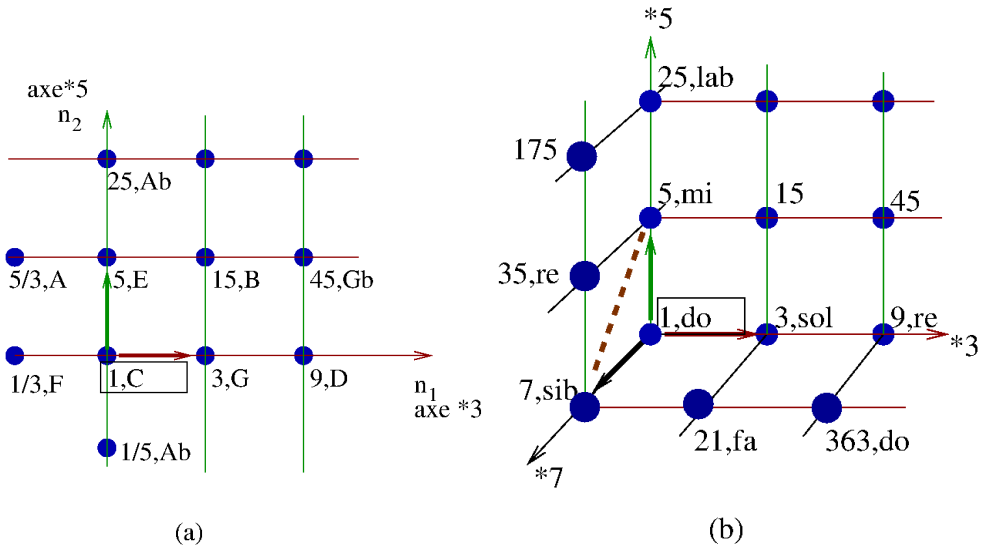


FIGURE 3.6 – (a) Le **réseau Tonnetz** $(3,5)$**.** La fraction 1/1 se trouve à l'origine, ici note "do". (Le nom des notes est ici seulement à titre indicatif). Pour une fraction $a/b = 2^{n_0}3^{n_1}5^{n_2}7^{n_3}\ldots$ on ne représente que ses composantes (n_1, n_2). Ainsi l'intervalle de quinte $\frac{3}{2} = 2^{-1}3^{1}5^{0}$ est associé au vecteur $n = (1,0)$ en rouge. L'intervalle de tierce majeure $\frac{5}{4} = 2^{-2}3^{0}5^{1}$ est associé au vecteur $n = (0,1)$ en vert.
(b) Le **réseau Tonnetz** $(3,5,7)$**.** Pour une fraction $a/b = 2^{n_0}3^{n_1}5^{n_2}7^{n_3}\ldots$ on ne représente que ses composantes (n_1, n_2, n_3). Ainsi l'intervalle de septième mineure $\frac{7}{4} = 2^{-2}3^{0}5^{0}7^{1}$ est associé au vecteur $n = (0,0,1)$ en noir. L'intervalle de triton $\frac{7}{5} = 2^{0}3^{0}5^{-1}7^{1}$ est associé au vecteur $n = (0,-1,1)$ en marron pointillés.

Remarque 4.2.

- En d'autres termes, un accord juste est formé d'intervalles justes.
- Les minima locaux de la fonction $\mathcal{D}_A(f)$ signifient que la fréquence f résonne avec l'accord A.

Proposition 4.3. *Voici quelques propriétés immédiates de cette fonction dissonance d'un accord.*

1. *C'est une fonction totalement symétrique par rapport à ses entrées.*
2. *On a*
$$\mathcal{D}_A = \sum_{i<j} D(f_i/f_j) \tag{4.1}$$
3. *On a la formule*
$$\mathcal{D}_A(f) = \mathcal{D}_A + \mathcal{E}_A(f)$$
avec
$$\mathcal{E}_A(f) := \sum_{i=1}^{N} D(f/f_i) \tag{4.2}$$
qui sera utile pour calculer $\mathcal{D}_A(f)$ et que l'on appellera ***fonction dissonance réduite*** *de l'accord A.*
4. *Invariance par dilatation (i.e. transposition) :*
$$\forall \lambda > 0, \quad \mathcal{D}(\lambda f_1, \dots \lambda f_N) = \mathcal{D}(f_1, \dots f_N).$$

Définition 4.4. Soit un accord juste $A = (f_1, f_2, \dots f_N)$ et supposons que $f_1 < f_2 \dots < f_N$. On note $f_j = \frac{a_j}{b_j} f_1$ et $\frac{a_j}{b_j} = P^{n(j)}$, $n(j) \in \mathbb{Z}^P$ pour tous $j = 1 \dots N$.

- La **basse virtuelle de l'accord** est la note de fréquence

$$f_B = \frac{a_B}{b_B} f_1, \quad \frac{a_B}{b_B} = P^{n(B)}$$

avec

$$(n(B))_i = \min_j \left((n(j))_i \right).$$

(autrement dit f_B est la fréquence la plus haute telle que toutes les f_j soient parmi ses multiples (harmoniques) car $f_j = P^{n(j)-n(B)} f_B$ avec $P^{n(j)-n(B)} \in \mathbb{N}$).

- Le **sifflet de l'accord** est la note de fréquence

$$f_S = \frac{a_S}{b_S} f_1, \quad \frac{a_S}{b_S} = P^{n(S)}$$

avec

$$(n(S))_i = \max_j \left((n(j))_i \right).$$

(autrement dit f_S est la plus petite fréquence qui soit multiple (harmonique) de touts les f_j car $f_S = P^{n(S)-n(j)} f_j$ avec $P^{n(S)-n(j)} \in \mathbb{N}$).

- La **profondeur de l'accord** est

$$p := \frac{f_1}{f_B} \geq 1$$

- Plus généralement, la **chambre de l'accord** est l'ensemble des notes de fréquence $f = \frac{a}{b} f_1$ avec $\frac{a}{b} = P^n$, $n \in \mathbb{Z}^P$ vérifiant

$$n(B) \leq n \leq n(S)$$

Ainsi la basse et le sifflet sont les notes extrêmes situées dans la chambre de l'accord. Chaque note de l'accord est située dans la chambre. La **dimension de l'accord** $d(A)$ est le nombre de termes non nuls de $n(S) - n(B) \in \mathbb{Z}^P$. La chambre est un hyper-cube avec $2.d(A)$ côtés et $\mathcal{N} = \prod_j \left(n(S)_j - n(B)_j + 1 \right)$ éléments. On peut aussi s'intéresser aux autres coins.

- La **dissonance de la fréquence f_i interne à l'accord** est :

$$\mathcal{D}_{f_i,A} := \mathcal{E}_{A \setminus f_i}(f_i) = \sum_j D(f_i/f_j) \tag{4.3}$$

ainsi $\mathcal{D}_A = \frac{1}{2} \sum_i \mathcal{E}_{A \setminus f_i}(f_i)$. La **note de dissonance minimale** est la note f_i de l'accord qui minimise $\mathcal{E}_{A \setminus f_i}(f_i)$. Géométrique, sur le tonnetz, c'est la note la plus centrale de l'accord.

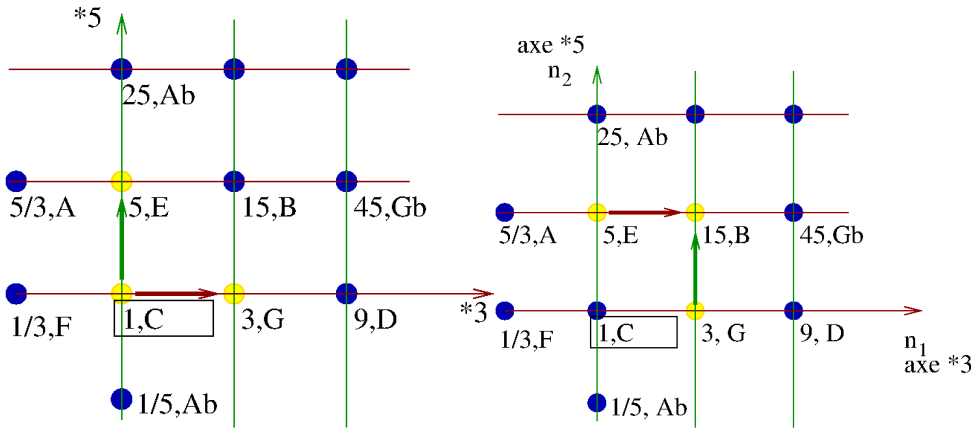
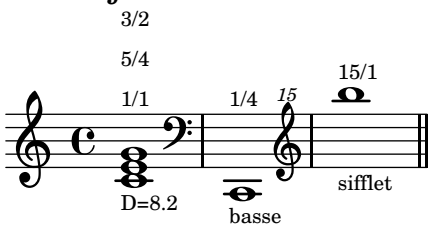


FIGURE 4.1 – Schéma sur le tonnetz 3-5 de la triade majeure juste (do-mi-sol) et mineure juste (mi-sol-si). On calcule qu'elles ont même dissonance $\mathcal{D} \simeq 8.2$ mais des profondeurs respectives :$p = 4$ et $p = 10$.

Exemples très simples détaillés

- La **triade Majeure** (penser C-E-G, voir figure 4.2) est constituée des fractions (on écrit parfois $\frac{a}{b}$ ou $n \in \mathbb{Z}^P$ de façon équivalente) :

$$A = \frac{1}{1}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2} \equiv (0,0,0), (-2,0,1), (-1,1,0)$$



Il y a un intervalle E-G qui est $\frac{3}{2}.\frac{4}{5} \equiv (1,1,-1)$. On déduit d'après (4.1) que la dissonance est

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_A &= D\left(\frac{5}{4}\right) + D\left(\frac{3}{2}\right) + D\left(\frac{6}{5}\right) \\ &= D(-2,0,1) + D(-1,1,0) + D(1,1,-1) \\ &= 4\log 2 + 2\log 3 + 2\log 5 \\ &\simeq 8.2\end{aligned}$$

$$d_A = \frac{1}{3!}\mathcal{D}_A = \frac{1}{6}\mathcal{D}_A \simeq 1.4$$

La basse virtuelle est

$$n(B) = (-2,0,0) \equiv \frac{1}{4} \qquad \equiv do$$

La profondeur de l'accord est donc $p = 4$ soit $p \equiv 2$ octaves. Le sifflet de l'accord est

$$n(S) = (0, 1, 1) \equiv 15 \qquad \equiv si$$

On a $n(S) - n(B) = (2, 1, 1)$. La chambre de l'accord est donc de dimension $d = 3$ avec 12 éléments.
Les dissonances interne de C, E, G sont d'après (4.3) respectivement :

$$D_{f_1,A} = D\left(\frac{5}{4}\right) + D\left(\frac{3}{2}\right) = 3\log 2 + \log 3 + \log 5 = 4.78$$

$$D_{f_2,A} = D\left(\frac{5}{4}\right) + D\left(\frac{6}{5}\right) = 3\log 2 + \log 3 + 2\log 5 = 6.39$$

$$D_{f_3,A} = D\left(\frac{6}{5}\right) + D\left(\frac{3}{2}\right) = 2\log 2 + 2\log 3 + \log 5 = 5.19$$

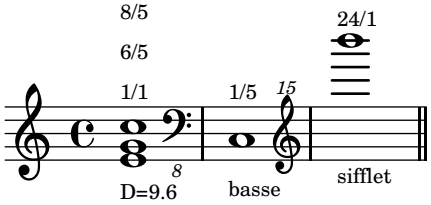
donc la note de dissonance minimale est *do*, la plus centrale à l'accord.

- **Premier renversement du la triade majeure** (penser E,G,C, voir figure 4.2) :

$$A = \frac{1}{1}, \frac{6}{5}, \frac{8}{5} \equiv (0, 0, 0), (1, 1, -1), (3, 0, -1)$$

avec intervalle G-C : $\frac{8}{5}.\frac{5}{6} \equiv (2, -1, 0)$.

Triade maj. 1er renv.



Sa dissonance est

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_A &= D(1, 1, -1) + D(3, 0, -1) + D(2, -1, 0) \\ &= 6\log 2 + 2\log 3 + 2\log 5 \\ &\simeq 9.6\end{aligned}$$

$$d_A = \frac{1}{3!}\mathcal{D}_A \simeq 1.6$$

(Plus généralement, un renversement d'accord consiste à changer des notes d'octave donc ajoute/retranche seulement des multiples de $\log 2$ à la dissonance). La basse virtuelle est

$$n(B) = (0, 0, -1) \equiv \frac{1}{5} \qquad \equiv do$$

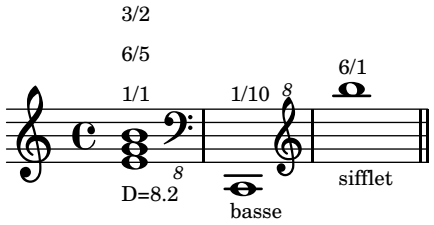
La profondeur de l'accord est donc $p = 5$ soit $p \equiv 2$ octaves et une tierce maj. Le sifflet de l'accord est

$$n(S) = (3, 1, 0) \equiv 24 \qquad \equiv si$$

On a $n(S) - n(B) = (3,1,1)$ qui a augmenté. La chambre est de dimension $d = 3$ avec 16 éléments.

- La **triade mineure** (penser E,G,B, voir figure voir figure 4.3) est constitué des fractions :

$$A = \frac{1}{1}, \frac{6}{5}, \frac{3}{2} \equiv (0,0,0), (1,1,-1), (-1,1,0)$$



On déduit d'après (4.1) que la dissonance est comme pour la triade majeure

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_A &= D(-2,0,1) + D(-1,1,0) + D(1,1,-1) \\ &= 4\log 2 + 2\log 3 + 2\log 5 \\ &\simeq 8.2\end{aligned}$$

$$d_A = \frac{1}{3!}\mathcal{D}_A \simeq 1.4$$

La basse virtuelle est

$$n(B) = (-1,0,-1) \equiv \frac{1}{10} \qquad \equiv do$$

La profondeur de l'accord est donc $p = 10$ soit $p \equiv 3$ octaves et une tierce maj. Le sifflet de l'accord est

$$n(S) = (1,1,0) \equiv 6 \qquad \equiv si$$

Comme pour la triade majeure, on a $n(S) - n(B) = (2,1,1)$. La chambre est de dimension $d = 3$ avec 12 éléments. Les dissonances interne de E, G, B sont d'après (4.3) respectivement :

$$D_{f_1,A} = D\left(\frac{6}{5}\right) + D\left(\frac{3}{2}\right) = 2\log 2 + 2\log 3 + \log 5 = 5.19$$

$$D_{f_2,A} = D\left(\frac{5}{4}\right) + D\left(\frac{6}{5}\right) = 3\log 2 + \log 3 + 2\log 5 = 6.39$$

$$D_{f_3,A} = D\left(\frac{5}{4}\right) + D\left(\frac{3}{2}\right) = 3\log 2 + \log 3 + \log 5 = 4.78$$

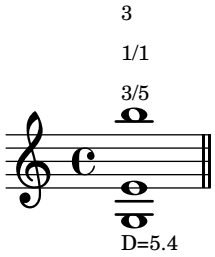
donc la note de dissonance minimale est si, la plus centrale à l'accord.

- **Renversement le moins dissonant de la triade mineure** (penser E,G,B, voir figure 4.3). Fractions :

$$A = \frac{1}{1}, 2^{k_1}\frac{3}{5}, 2^{k_2}3 \equiv (0,0,0), (k_1,1,-1), (k_2,1,0)$$

où $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ sont recherchés.

Triade min.



Intervalle intermédiaire est sol-si $2^{k_1}\frac{3}{5}$. $\left(2^{k_2}3\right)^{-1} \equiv (k_1 - k_2, 0, -1)$. La dissonance de l'accord est

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_A &= D(k_1,1,-1) + D(k_2,1,0) + D(k_1-k_2,0,-1)\\ &= (|k_1| + |k_2| + |k_1-k_2|)\log 2 + 2\log 3 + 2\log 5\end{aligned}$$

Le minimum est obtenu pour $k_1, k_2 = 0$, ce qui donne le renversement $\left(\frac{1}{1}, \frac{3}{5}, 3\right) \equiv G_0, E_1, B_2$. (avec numéro d'octave en indice) avec la dissonance

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_A &= D(0,0,-1) + D(0,1,0) + D(0,1,-1)\\ &= 2\log 3 + 2\log 5\\ &\simeq 5.4\end{aligned}$$

$$d_A = \frac{1}{3!}\mathcal{D}_A \simeq 0.9$$

Sa basse virtuelle est $n(B) = (0,0,-1)$ et sa profondeur $p = (0,1,0) = 3$.

5 Tempérament adaptatif

Dans les Sections précédentes on a vu que dans un intervalle de fréquence il y a une infinité de "notes justes" c'est à dire qui sont en rapport de fréquence rationnel avec les autres. L'idée du tempérament adaptatif est de choisir parmi cette infinité de notes, la note de dissonance minimale, dans chaque intervalle de largeur "un demi-ton". On peut penser que c'est comme ré-accorder chaque note k du piano en lui assignant une nouvelle

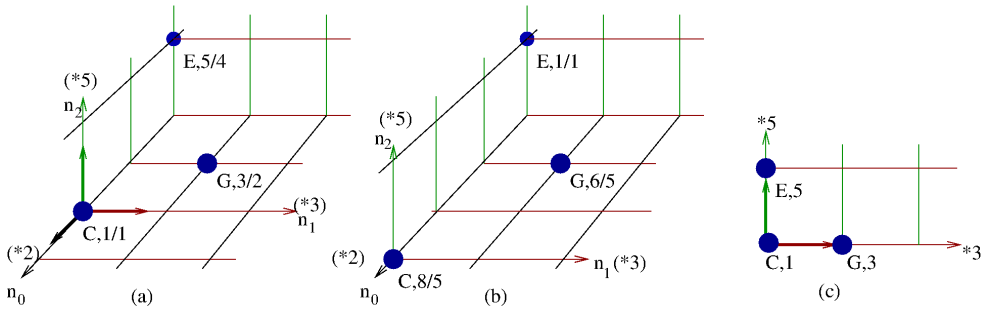


FIGURE 4.2 – (a) Sur le réseau Tonnetz $(2, 3, 5)$ on représente la triade majeure C$\left(\frac{1}{1}\right)$, E $\left(\frac{5}{4}\right)$, G $\left(\frac{3}{2}\right)$.
(b) La triade majeure E$\left(\frac{6}{5}\right)$, G$\left(\frac{6}{5}\right)$, B $\left(\frac{8}{5}\right)$ qui est un renversement de la précédente. La note C est passée à l'octave supérieure.
(c) Les deux accords précédents ont la même projection sur le réseau Tonnetz $(2, 3)$.

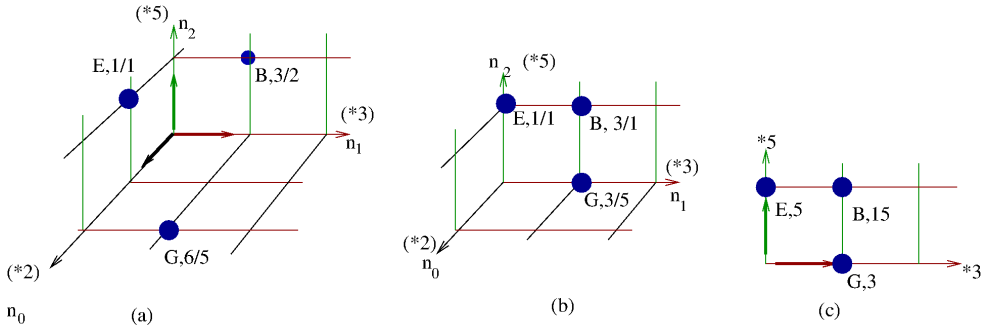


FIGURE 4.3 – (a) Sur le réseau Tonnetz $(2, 3, 5)$ on représente la triade mineure E$\left(\frac{1}{1}\right)$, G $\left(\frac{6}{5}\right)$, B $\left(\frac{3}{2}\right)$.
(b) La triade mineure G$\left(\frac{6}{5}\right)$, E$\left(\frac{6}{5}\right)$, B $\left(\frac{8}{5}\right)$ est un renversement de la précédente. Elle est moins dissonante.
(c) Les deux accords précédents ont la même projection sur le réseau Tonnetz $(2, 3)$.

fréquence $f_A(k)$ en fonction de l'accord A (ensemble de notes) qui sonne déjà. (Problème de notation : ne pas confondre l'accord A avec la note A).

Rappelons que d'après (2.1) les notes $k \in \mathbb{Z}$ de la gamme tempérée ont les fréquences $f(k) > 0$ données par

$$f(k) = f_A 2^{\frac{1}{12}(k-k_{La})}.$$

Cette fonction $k \to f(k)$ s'appelle le **tempérament égal**.

Dans la suite on prendra la convention habituelle MIDI qui est que $k_A = 69$ et $f_A = 440\text{Hz}$.

On définit des intervalles I_k centrés sur les fréquences $f(k)$ (en échelle log) et de largeur $\delta \equiv \pm\frac{1}{4}$ ton, c'est à dire :

$$I_k := \left\{ f \in \mathbb{R}, \quad \text{t.q. } \log f \in [\log f(k) - \delta; \log f(k) + \delta[, \quad \delta := \frac{1}{2}\frac{\log 2}{12} \right\}.$$

Ces intervalles de largeur $1/2$ ton chacun donnent une partition de l'échelle des fréquences :

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_k \tag{5.1}$$

Définition 5.1. Le **tempérament adapté à l'accord juste** $A = (f_1, f_2, \dots f_N)$ (voir Définition 4.1) ou **fonction d'accordage** est la fonction

$$k \in \mathbb{Z} \to f_A(k) \in \mathbb{R} \tag{5.2}$$

telle que $f_A(k)$ minimise la fonction de dissonance $\mathcal{E}_A(f)$, Eq.(4.2), dans l'intervalle de fréquences I_k autour de $f(k)$.

L'intérêt de la définition précédente est qu'il permet de jouer en "intonation juste" à partir d'un clavier (ou instrument à clefs) où l'on sélectionne seulement le numéro des touches $k \in \mathbb{Z}$. Pour cela on définit d'abord :

Définition 5.2. Une **séquence d'évènements MIDI** est une suite d'intervalles $I_j = [t_{j,-}, t_{j,+}]$ avec $t_{j,-} < t_{j,+}$ indicés par $j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. A chaque intervalle I_j est associé $k_j \in \mathbb{Z}$. On supposera que $\forall j \neq j'$,

$$k_j = k_{j'} \Rightarrow I_j \cap I_{j'} = \emptyset \tag{5.3}$$

On suppose les intervalles ordonnés de sorte que

$$\forall j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad t_{j,-} < t_{j+1,-}$$

On suppose les valeurs $\{t_{j,-}, t_{j,+}, j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\}$ toutes distinctes.

Voici l'interprétation d'une séquence (voir figure 5.1) : chaque intervalle I_j correspond à la touche k_j qui est appuyée à la date $t_{j,-}$ et se relâche à $t_{j,+}$. L'hypothèse (5.3) signifie que la même touche ne peut être appuyée deux fois simultanément.

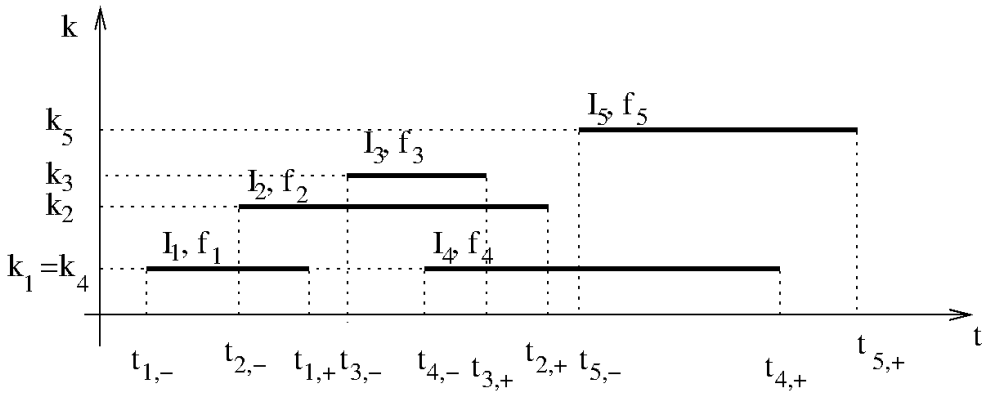


FIGURE 5.1 – Schéma d'une séquence d'évènements MIDI d'après la définition 5.2 : des numéros de touches k_j sont associés à chaque intervalles temporels $I_j = [t_{j,-}, t_{j,+}]$ avec $j \geq 1$. L'algorithme du tempérament adaptatif de la définition 5.3 consiste à assigner une fréquence f_j à chaque intervalle I_j.

La définition suivante de tempérament adaptatif permet d'associer une fréquence f_j à chaque intervalle I_j. Les fréquences seront en rapport rationnel et formeront des accords "peu dissonant".

Définition 5.3. "Algorithme du tempérament adaptatif". Supposons donnée une séquence d'évènements MIDI. A la date $t = t_{1,-}$ (de la première note) on assigne arbitrairement la fréquence $f_1 = f(k_1)$ (note tempérée), et on part donc d'un accord à une note $A_1 = \{f_1\}$. Cela définit la fonction d'accordage $f_{A_1}(k)$. Ensuite pour une date ultérieure de la forme $t = t_{j,\pm}$, on suppose qu'il y a un accord noté A avec N notes. Il y a deux types d'évènements possibles :

1. Si $t = t_{j,-}$, c'est à dire que la touche k_j est appuyée, alors ajoute la fréquence $f_j := f_A(k_j)$ à l'accord A :
$$A' := A \cup \{f_j\}$$
qui devient le nouvel accord A.
2. Si $t = t_{j,+}$, c'est à dire que la touche k_j est relâchée, alors on enlève la fréquence f_j précédente à l'accord A :
$$A' := A \backslash \{f_j\}$$
qui devient le nouvel accord A.
3. Règle de "mémoire du tempérament" : en (2), si A' devient l'ensemble vide, on convient de conserver la fonction $f_A(k)$ pour la suite.

Par récurrence cela associe une fréquence f_j à chaque intervalle I_j, qui se trouve à moins de $\delta = \pm\frac{1}{4}$ de ton de la fréquence tempérée $f(k_j)$.

Remarque 5.4.

1. A priori l'algorithme du tempérament adaptatif est non commutatif. C'est à dire que la séquence k_1, k_2, k_3 peut associer des fréquences f_1, f_2, f_3 et la séquence k_1, k_3, k_2 peut associer des fréquences f_1, f_2', f_3' différentes. Voir exemples ci-dessous.
2. Suite à la remarque précédente, on peut s'intéresser à l'accord de dissonance minimale pour un ensemble de touches $\{k_1, k_2, \dots k_N\}$ donnée. Voir Section **??**.

5.1 Variantes possibles

5.1.1 Intervalle de précision δ

Dans la définition 5.1, on a choisit un intervalle de précision $\delta = \frac{1}{2}\frac{\log 2}{12}$ correspondant à $1/4$ de ton. Il est possible d'augmenter δ ce qui a pour effet de sélectionner les fréquences moins dissonantes sur un intervalle plus large. Au contraire on peut réduire δ ce qui permet d'aller sélectionner des fréquences plus dissonantes mais dans ce cas il faudrait rajouter des touches k dans l'octave pour couvrir toute l'octave.

5.1.2 Dimension du réseau des rationnels

Dans la définition (5.2) de la fonction d'accordage $f_A(k)$, on choisit la valeur rationnelle $a/b \in \mathbb{Q}$ qui minimise la fonction $\mathcal{E}_A(f)$. On pourrait choisir la valeur a/b non pas parmi

tous les rationnels $\mathbb{Q}$ mais seulement parmi ceux du "tonnetz 2,3,5" (de dimension 3) c'est à dire de la forme :

$$\frac{a}{b} = 2^{n_0}3^{n_1}5^{n_2} \in \mathbb{Q}_{\{2,3,5\}}, \qquad (n_0, n_1, n_3) \in \mathbb{Z}^3$$

ou parmi ceux du "tonnetz 2,3,5,7" (de dimension 4) c'est à dire de la forme :

$$\frac{a}{b} = 2^{n_0}3^{n_1}5^{n_2}7^{n_3} \in \mathbb{Q}_{\{2,3,5,7\}}, \qquad (n_0, n_1, n_3, n_4) \in \mathbb{Z}^3$$

etc

6 Observation d'exemples

Dans cette Section on choisit certaines séquences d'évènements MIDI (Définition 5.2) et on observe le mouvement sur le réseau tonnetz obtenu par l'algorithme 5.3. On rappelle que cet algorithme propose l'interprétation en musique juste qui minimise la dissonance. On rappelle aussi que cet algorithme dépend de la précision "1/2 ton" pour découper l'échelle des fréquences en intervalles dans (5.1).

6.1 La résolution du triton

La résolution du triton est fondamentale en musique occidentale et peut être aussi dans d'autres cultures. Nous proposons (est-ce la première fois ?) une interprétation géométrique sur le tonnetz. Voir figure 6.1. Cette résolution combine deux mouvements de demi-tons qui sont différents : $\frac{20}{21}$ et $\frac{16}{15}$. (en Section **??** on présentera plus généralement les "mouvements attractifs" élémentaires).

6.2 La cadence majeure $IIm7 - V7 - I$

La cadence $IIm7 - V7 - I$ est très utilisée en musique occidentale et jazz. Le mouvement ci-dessous utilise les demi-tons $\frac{20}{21}$ et $\frac{16}{15}$ de la résolution du triton mais aussi le ton $\frac{9}{8}$. Voir figure 6.2.

6.2.1 La grande cadence majeure

C'est :

$$IM7 - IVM7 - VII\varnothing 7 - IIIm7 - VIm7 - IIm7 - V7 - IM7$$

Voir figure 6.3.

6.3 La cadence mineure $II\varnothing 7 - V7 - Im$

C'est :

$$II\varnothing 7 - V7 - ImM7$$

Voir figure 6.4.

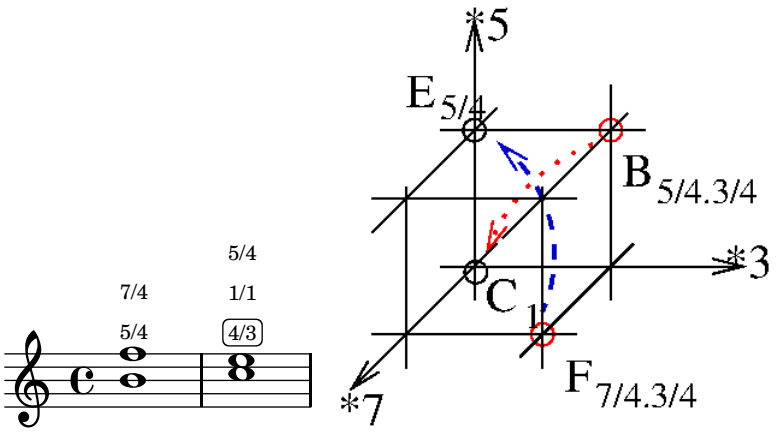


Figure 6.1: Dans cette **"résolution du triton"** vers la tierce majeure, il y a un mouvement d'un demi-ton de $F \to E$ en tirets dont la fraction est $\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{21} \simeq (1.050)^{-1}$. Il y a aussi un mouvement d'un demi-ton $B \to C$ en pointillés dont la fraction est $\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{15} \simeq 1.066$. (On rappelle que le demiton chromatique est $2^{1/12} \simeq 1.059$).

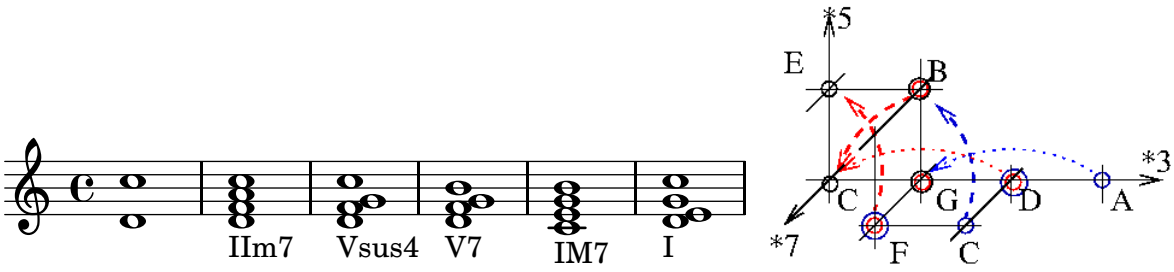


Figure 6.2: Pour la **cadence majeure** $IIm7-V7-I$, ici en C, on pose d'abord l'intervalle de septième D-C que l'on remplit par F-A. Puis on bouge les notes deux par deux.. Cela implique le mouvement sur le tonnetz représenté. Les trois accords sont respectivement en bleu, rouge, noir. Il y a deux mouvements de 1 ton : $A \to G$, $D \to C$, de fraction $\frac{8}{9} \simeq (1.125)^{-1}$, deux mouvements de demi-ton, $C \to B$, $F \to E$, de fraction 20/21 et un demi-ton $B \to C$ de fraction 16/15.

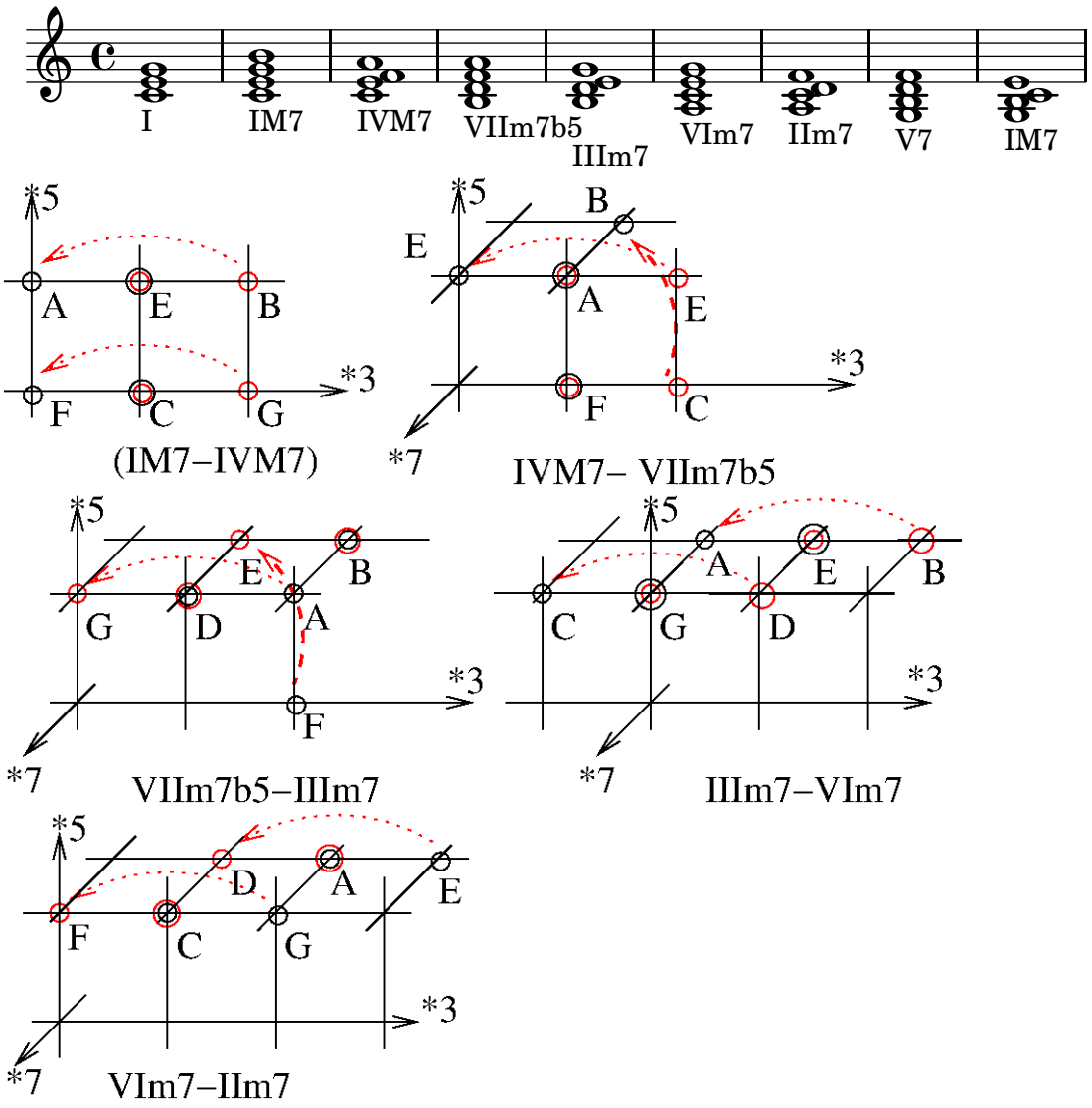


Figure 6.3: **Grande cadence majeure**. On présente séparement le schéma du passage IM7-IVM7 puis IVM7-VIIm7b5, puis VIIm7b5-IIIm7 puis IIIm7-VIm7 et VIm7-IIm7. La cadence se termine par IIm7-V7-IM7 présentée sur la figure 6.2. On observe dans toute cette cadence que n'interviennent seulement le mouvement élémentaire du 1 ton de fraction $\frac{8}{9} \simeq (1.125)^{-1}$ (petits pointillés) , et du demi-ton,de fraction 20/21 (gros pointillés).

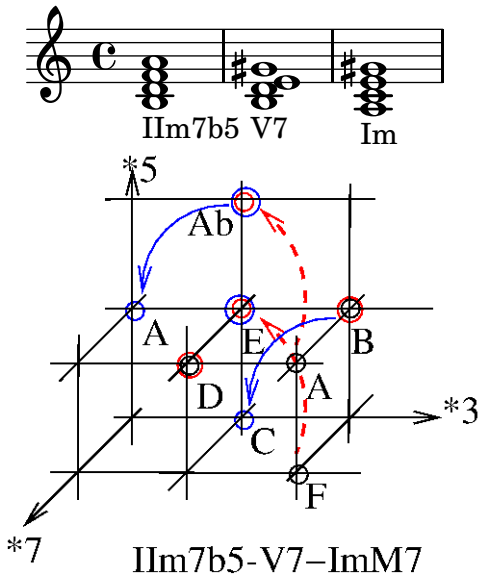


Figure 6.4: **Cadence mineure**. Elle fait intervenir deux mouvements de 1/2 ton : $B \to C$, $F \to E$, de fraction 20/21 en tirets et demi-ton $Ab \to A$, $B \to C$ de fraction 16/15 en traits pleins.

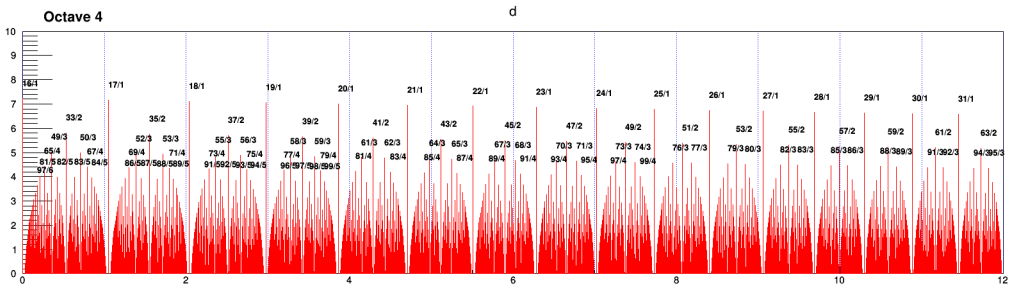
A Fonction dissonance

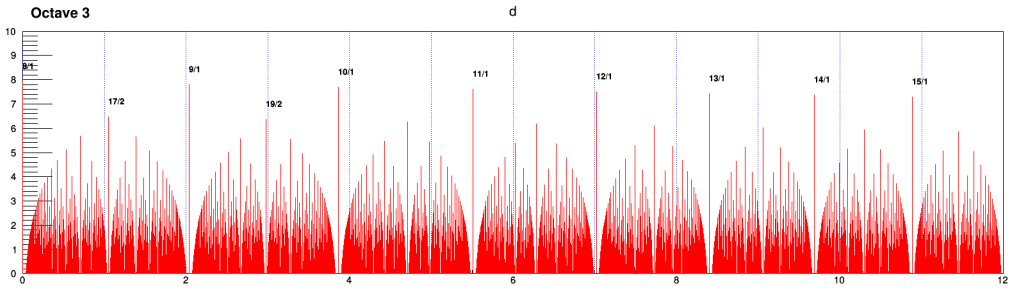
A.1 Fonction dissonance sur différentes octaves

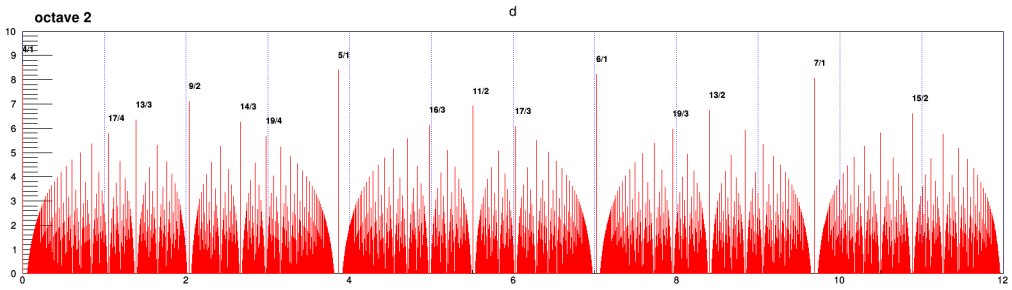
Dans cette annexe on présente les autres octaves de la fonction dissonance $D(a,b)$ définie en (3.2). En mathématique, cette fonction fractale est directement liée à la fonction de Thomae (1875).

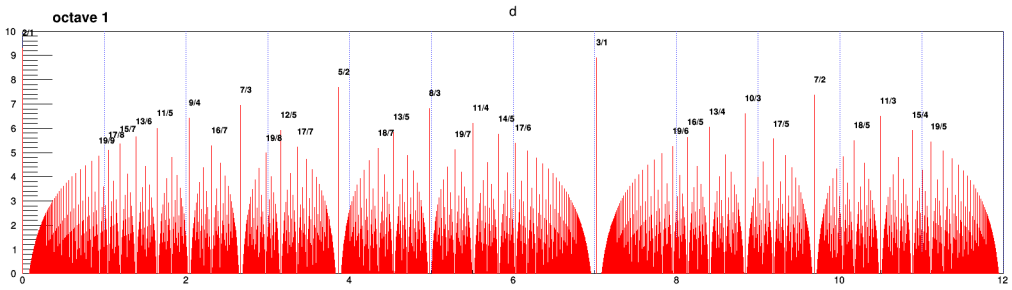
Interprétation des figures ci-dessous On représente la fonction "résonance" $R(a/b) := 10 - D(a,b)$ associée à chaque intervalle juste (a/b) où $D(a,b)$ est la fonction dissonance (3.2). En abscisse, on a utilisé l'échelle des "pitchs" qui est $x = \frac{12}{\log 2} \log(a/b)$. Ainsi l'intervalle $x = 0 \to 12$ correspond à $a/b = \frac{1}{1} \to \frac{2}{1}$ qui est l'intervalle d'une octave,appelée octave 0. L'intervalle $x = 12 \to 24$ est celui de l'octave suivante appelée octave 1, etc. Les traits bleus sont les intervalles des demi-ton chromatiques. Cette figure est à mettre en relation avec la figure 3.2.

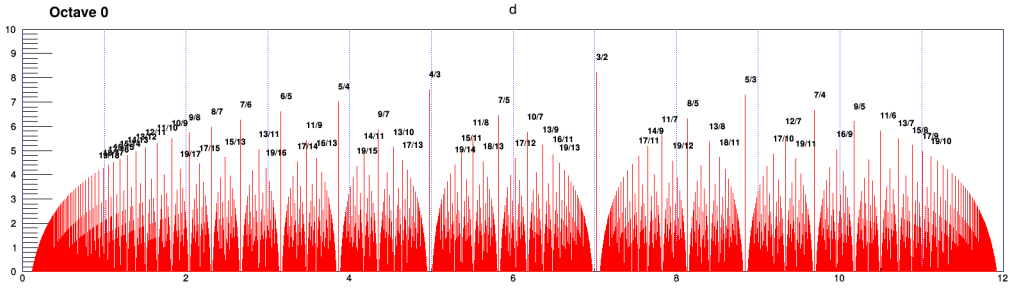
Observations : La structure fractale des fractions est assez claire. Dans l'octave 0, la quinte 3/2 domine alors que dans l'octave -1, la quarte 2/3 domine, etc.

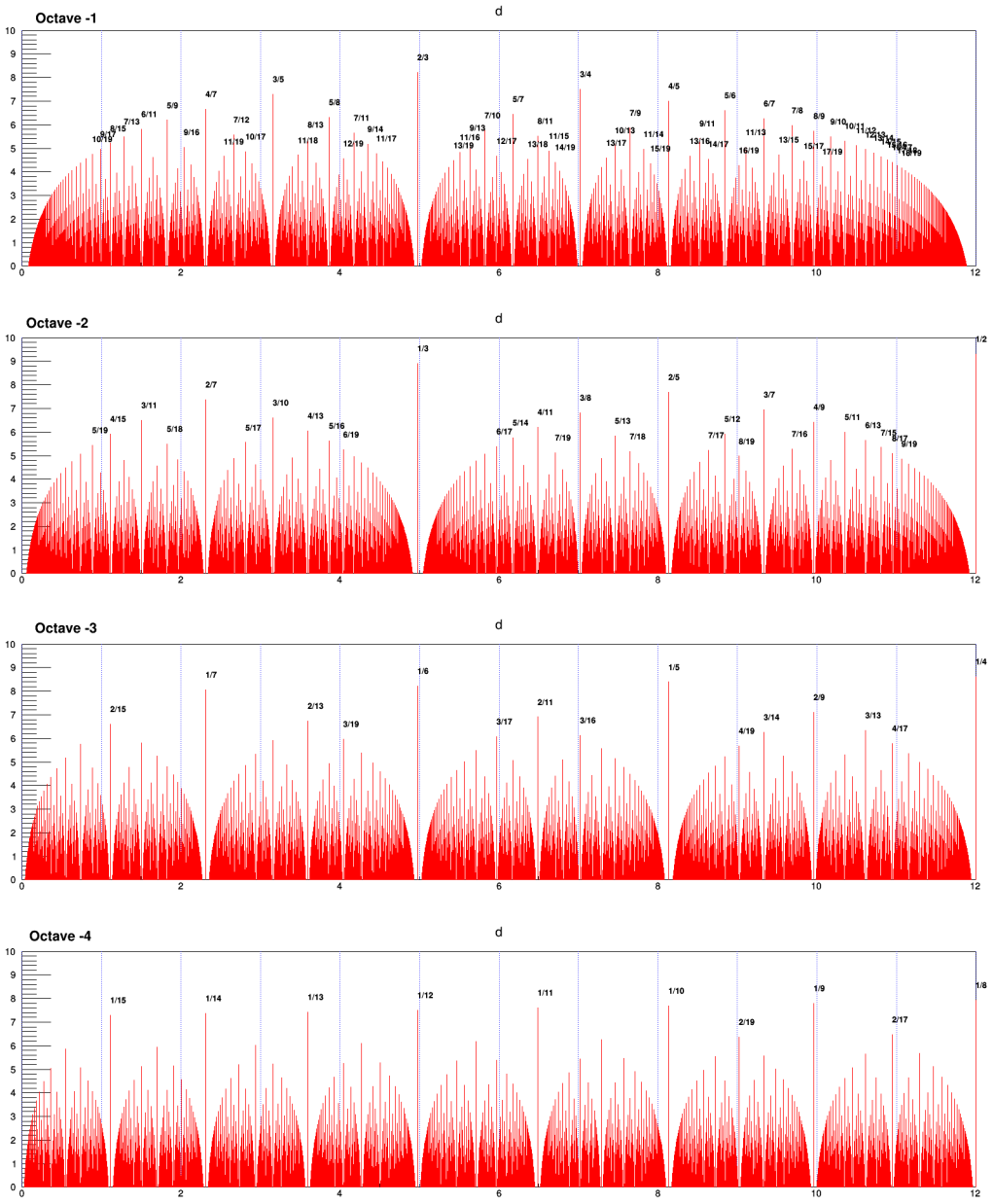

Octave 4
d


Octave 3
d


octave 2
d


octave 1
d

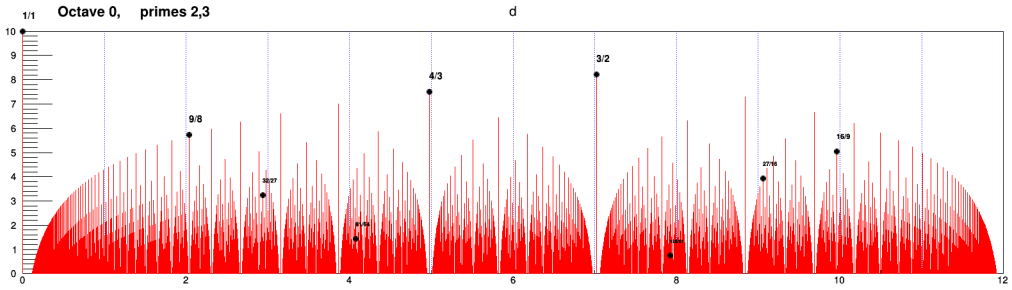

Octave 0
d



A.2 Sélection des décompositions en nombres premiers

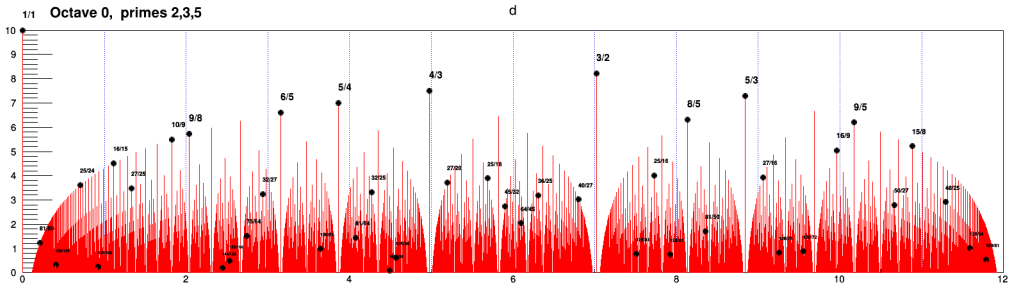
A.2.1 Échelle de Pythagore (2,3) :

On sélectionne ici seulement les fractions qui se décomposent avec les nombres premiers $2, 3$ (points noir). Cela correspond à "l'échelle de Pythagore". Le schéma suivant montre qu'elle est très incomplète pour la "musique juste".



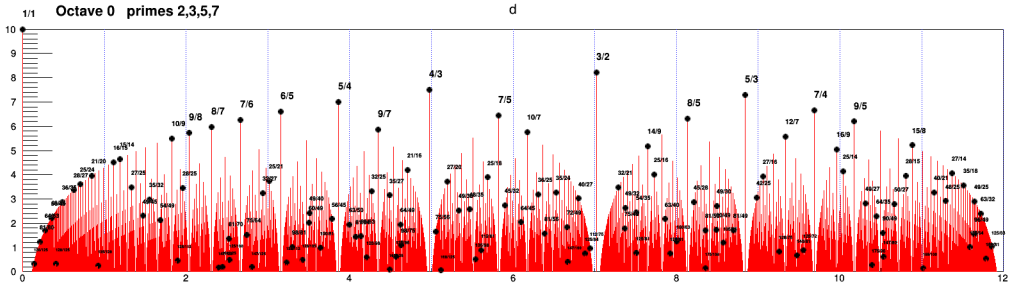
A.2.2 Échelle de Zarlino (2,3,5) :

On sélectionne ici seulement les fractions qui se décomposent avec les nombres premiers $2, 3, 5$ (points noir). Cela correspond à "l'échelle de Zarlino". Le schéma suivant montre qu'elle reproduit bien les pics importants mais en oublie certains.



A.2.3 Échelle $2, 3, 5, 7$

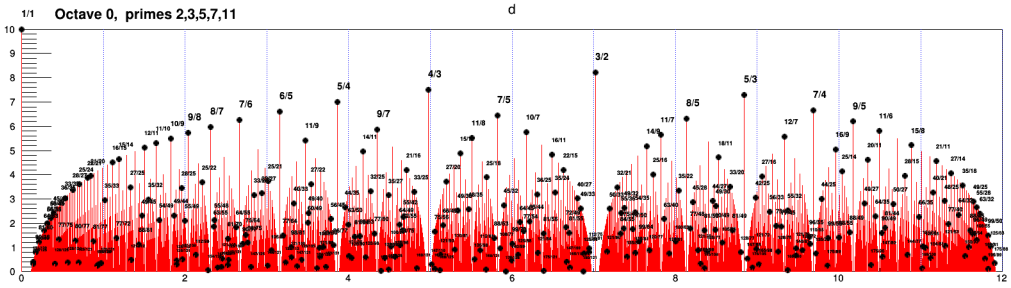
On sélectionne ici seulement les fractions qui se décomposent avec les nombres premiers $2, 3, 5, 7$ (points noir). Le schéma suivant montre qu'elle reproduit bien les pics importants à l'échelle du demi-ton, mais en oublie certains à une précision du quart de ton par exemple.



A.2.4 Échelle $2, 3, 5, 7, 11$

On sélectionne ici seulement les fractions qui se décomposent avec les nombres premiers $2, 3, 5, 7, 11$ (points noir). Le schéma suivant montre qu'elle reproduit bien les pics importants dans cette octave 0. Par contre dans les octaves supérieures ou inférieures, il apparaît

clairement sur les figures de la Section A.1 que les nombres premiers plus élevés ont une importance en terme de résonance.



References

[1] DJ Benson. Music: a mathematical offering. *Free pdf version on http://homepages.abdn.ac.uk/mth192/pages/html/maths-music.html.*

[2] Jan Schnupp, Israel Nelken, and Andrew King. *Auditory neuroscience: Making sense of sound.* MIT Press, 2011.