

Brouillage thermique d'un gaz cohérent de fermions

H. Kurkjian, Y. Castin & A. Sinatra

Laboratoire Kastler Brossel, ENS-PSL, UPMC, CNRS,
UPMC-Sorbonne Universités, Collège de France, Paris, France

Les gaz cohérents d'atomes froids dans des pièges immatériels non dissipatifs sont des exemples uniques de systèmes quantiques macroscopiques isolés. Se pose alors le problème de leur temps de cohérence intrinsèque. Cette question fondamentale présente également un intérêt pratique, pour toutes les applications qui mettent à profit la cohérence macroscopique, par exemple en interférométrie [1] ou en ingénierie quantique où l'on crée des états intriqués non triviaux par évolution cohérente [2–4]. Des mesures de temps de cohérence sont déjà accessibles avec des gaz de bosons [5–7]. Les expériences sur les gaz de fermions qui se sont pour l'instant concentrées sur les propriétés thermodynamiques [8, 9], donc sur les aspects traditionnels du problème à N -corps, commencent à s'intéresser aux mesures de corrélations et de cohérence [10], ce qui ouvrira un nouveau domaine de recherche, y compris dans le régime d'interaction forte : l'optique quantique fermionique [11]. Cependant, il n'y a à ce jour aucune prédiction sur le temps de cohérence d'un condensat de paires de fermions, sauf à température nulle [12]. Dans cet article nous présentons la première théorie microscopique permettant de combler ce vide théorique en toute généralité. Notre résultat vaut pour d'autres systèmes physiques, tels que les jonctions de Josephson mésoscopiques, pourvu qu'on arrive à réduire suffisamment la décohérence due à l'environnement.

Position du problème : pour un gaz de bosons condensé, le temps de cohérence est déterminé par l'étalement de la distribution de probabilité de la phase du condensat. À température nulle et en présence d'interactions, cet étalement, balistique, est dû aux fluctuations du nombre de particules. Cet effet a été observé par interférence de deux condensats initialement cohérents, dont le nombre de particules fluctue du fait du bruit de partition [5, 7]. Contrairement au cas du laser, qui est un système quantique ouvert, et de façon inattendue [13], un étalement balistique de la phase subsiste dans ces systèmes isolés pour un nombre de particules fixé si le gaz est à température non nulle [14, 15], les fluctuations de cette autre quantité conservée qu'est l'énergie remplaçant celles du nombre de particules.

Dans le cas d'un gaz non polarisé de fermions condensés par paires, l'étude du temps de cohérence présuppose une définition claire de la phase du condensat, et une construction explicite de l'opérateur $\hat{\theta}_0$ correspondant [12]. À température non nulle elle requiert en outre de pouvoir inclure dans la vitesse de variation de la phase la contribution des deux branches d'excitation, celle fermionique (par brisure des paires) et celle bosonique (par excitation du centre de masse des paires). Pour la branche fermionique, la RPA d'Anderson [16] suffit. Pour la branche bosonique en revanche, nous avons besoin d'un équivalent pour les fermions de la méthode de Bogolioubov permettant de construire les opérateurs de création \hat{b}_α^\dagger et d'annihilation \hat{b}_α de quasi-particules et d'exprimer $d\hat{\theta}_0/dt$ en termes de ces opérateurs. Qui plus est, il faut prendre en compte les interactions entre les quasi-particules dans l'évolution des \hat{b}_α . Ceci est une conséquence non évidente du fait que la fonction d'onde du condensat de paires dépend du nombre total de particules N , même dans un système spatialement homogène, et va au-delà du programme de la RPA.

Décroissance de la fonction de cohérence : Aux

températures inférieures à la température critique, la fonction de cohérence temporelle du champ de paires $\hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r})\hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}')$, où $\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r})$ est l'opérateur champ fermionique pour la composante de spin σ , est dominée aux temps longs par celle du condensat :

$$g_1(t) = \langle \hat{a}_0^\dagger(t) \hat{a}_0(0) \rangle \quad (1)$$

où $\hat{a}_0 = \int d^3r d^3r' \varphi_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}')$ est la composante du champ de paires sur la fonction d'onde du condensat [12]. Comme le système à l'équilibre est dans un mélange statistique d'états propres à N corps $|\psi_\lambda\rangle$, avec des poids Π_λ , nous sommes ramenés à l'étude de la fonction de cohérence $g_1^\lambda(t)$ dans l'état propre $|\psi_\lambda\rangle$, d'énergie E_λ et de nombre de particules N_λ . Pour tirer parti des faibles fluctuations relatives du nombre de paires condensées pour un grand système, on utilise la décomposition [12] en les opérateurs hermitiens phase et module

$$\hat{a}_0 = e^{i\hat{\theta}_0} \hat{N}_0^{1/2}, \quad (2)$$

et on approxime \hat{N}_0 par sa valeur moyenne \bar{N}_0 dans l'état d'équilibre du système, pour obtenir

$$g_1^\lambda(t) \simeq \bar{N}_0 e^{iE_\lambda t/\hbar} \langle \psi_\lambda | e^{-i(\hat{H} + \hat{W})t/\hbar} | \psi_\lambda \rangle \quad (3)$$

où l'opérateur \hat{W} , différence entre le transformé de \hat{H} par $e^{i\hat{\theta}_0}$ et \hat{H} ,

$$\hat{W} = e^{-i\hat{\theta}_0} \hat{H} e^{i\hat{\theta}_0} - \hat{H} = -i[\hat{\theta}_0, \hat{H}] - \frac{1}{2}[\hat{\theta}_0, [\hat{\theta}_0, \hat{H}]] + \dots \quad (4)$$

est approximativement N fois plus petit que \hat{H} . En effet, comme \hat{a}_0 , $e^{i\hat{\theta}_0}$ change le nombre total de particules d'un $O(N^0)$. Alors que \hat{H} est une observable extensive, \hat{W} est un opérateur intensif.

Il apparaît formellement dans l'équation (3) un opérateur d'évolution correspondant au hamiltonien \hat{H}

perturbé par \hat{W} , restreint à l'état propre $|\psi_\lambda\rangle$ de \hat{H} . La fonction g_1^λ/\bar{N}_0 est donc, à un facteur de phase près, proportionnelle à l'amplitude de probabilité que le système initialement préparé dans $|\psi_\lambda\rangle$ y soit encore au bout d'un temps t . Une approche naturelle pour obtenir une approximation non perturbative de cette amplitude est celle des fonctions de Green ou de l'opérateur résolvante $\hat{G}(z) = \left(z\hat{1} - (\hat{H} + \hat{W})\right)^{-1}$ du hamiltonien perturbé. Par la méthode des projecteurs [17], on définit un hamiltonien effectif non hermitien $\hat{H}_{\text{eff}}(z)$ gouvernant l'évolution restreinte à $|\psi_\lambda\rangle$, donc tel que $\langle\psi_\lambda|\hat{G}(z)|\psi_\lambda\rangle = \left(z - \langle\psi_\lambda|\hat{H}_{\text{eff}}(z)|\psi_\lambda\rangle\right)^{-1}$. En se limitant dans $\hat{H}_{\text{eff}}(z)$ à l'ordre deux en \hat{W} et en négligeant sa dépendance en z (approximation du pôle), $\hat{H}_{\text{eff}}(z) \approx \hat{H}_{\text{eff}}(E_\lambda + i0^+)$, on obtient [33]

$$g_1^\lambda(t) \simeq \bar{N}_0 e^{-it\langle\psi_\lambda|\hat{W}|\psi_\lambda\rangle/\hbar} e^{-(i\delta_\lambda + \gamma_\lambda)t} \quad (5)$$

avec, en termes de $\hat{Q}_\lambda = \hat{1} - |\psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda|$, projecteur orthogonal à $|\psi_\lambda\rangle$, et de la notation $\langle\hat{A}\rangle_\lambda \equiv \langle\psi_\lambda|\hat{A}|\psi_\lambda\rangle$:

$$\hbar(\delta_\lambda - i\gamma_\lambda) = \langle\hat{W}\hat{Q}_\lambda \frac{\hat{Q}_\lambda}{(E_\lambda + i0^+)\hat{Q}_\lambda - \hat{Q}_\lambda\hat{H}\hat{Q}_\lambda} \hat{Q}_\lambda\hat{W}\rangle_\lambda \quad (6)$$

Le terme dominant sous l'exponentielle dans (5) est $\langle\psi_\lambda|\hat{W}|\psi_\lambda\rangle$, d'ordre N^0 comme \hat{W} . Afin de l'interpréter, on constate d'abord que, d'après le développement (4), $\hat{W} = \hbar d\hat{\theta}_0/dt + O(1/N)$. On utilise ensuite une propriété cruciale établie dans la suite par un calcul variationnel, et qui donne la moyenne temporelle à gros grains, notée $\overline{\quad}^t$, de $d\hat{\theta}_0/dt$ dans un gaz avec une faible densité d'excitations :

$$-\overline{\frac{\hbar}{2} \frac{d\hat{\theta}_0}{dt}}^t = \mu_0(\hat{N}) + \sum_{s=F,B} \sum_{\alpha} \frac{d\epsilon_{s,\alpha}}{dN} \hat{n}_{s,\alpha} \quad (7)$$

La somme au second membre porte sur les deux branches d'excitation, celle des quasi-particules fermioniques (α inclut un indice de spin et un indice orbital, $\alpha = \mathbf{k}, \sigma$ pour un système spatialement homogène) qui présente une bande interdite, et celle des quasi-particules bosoniques (α est uniquement orbital, $\alpha = \mathbf{q}$ dans l'exemple précédent) dont le départ, à la limite thermodynamique et pour un système homogène, est phononique. La moyenne temporelle à gros grains est prise sur un temps long devant l'inverse des pulsations propres $\epsilon_{s,\alpha}/\hbar$ de ces quasi-particules mais court devant leur temps de collision, c'est-à-dire le temps typique de variation des $\hat{n}_{s,\alpha}$, ce qui suppose que ces quasi-particules sont dans le régime faiblement collisionnel de Knudsen. Enfin $\mu_0(N)$ est le potentiel chimique à température nulle du gaz non polarisé à N particules. $d\hat{\theta}_0/dt$ s'interprète donc comme une dérivée adiabatique de l'énergie, c'est-à-dire à populations des quasi-particules fixées. En prenant la moyenne de l'équation (7) dans $|\psi_\lambda\rangle$ et en utilisant l'hypothèse de

thermicité des états propres [18] pour identifier moyenne dans un état propre et moyenne d'ensemble microcanonique, on fait ainsi apparaître la dérivée adiabatique de l'énergie par rapport à N , c'est-à-dire le potentiel chimique microcanonique μ_{mc} à l'énergie E_λ et au nombre de particules N_λ :

$$\langle\psi_\lambda|\hbar \frac{d\hat{\theta}_0}{dt}|\psi_\lambda\rangle = -2\mu_{\text{mc}}(E_\lambda, N_\lambda) \quad (8)$$

Le terme suivant sous l'exponentielle dans (5) est d'ordre N^{-1} donc sous-dominant. Pour le voir, on le relie à la fonction de corrélation temporelle de $d\hat{\theta}_0/dt$ dans l'état $|\psi_\lambda\rangle$:

$$\gamma_\lambda + i\delta_\lambda = \int_0^{+\infty} dt \left[\left\langle \frac{d\hat{\theta}_0(t)}{dt} \frac{d\hat{\theta}_0(0)}{dt} \right\rangle_\lambda - \left\langle \frac{d\hat{\theta}_0}{dt} \right\rangle_\lambda^2 \right] \quad (9)$$

qui redonne bien (6) après injection d'une relation de fermeture sur les états propres de \hat{H} . L'intégrande a comme valeur initiale $\text{Var}_\lambda(d\hat{\theta}_0/dt) = O(1/N)$ (ceci s'obtient en additionnant les variances des nombres de quasi-particules, ce qui correspond à un gaz parfait de quasi-particules dans l'ensemble canonique et surestime donc la variance microcanonique) et décroît sur le temps typique de corrélation τ_c des $\hat{n}_{s,\alpha}$, c'est-à-dire le temps typique de collision entre les quasi-particules. Ceci permet d'estimer $|\gamma_\lambda + i\delta_\lambda| \approx \tau_c \text{Var}(d\hat{\theta}_0/dt) = O(1/N)$. Le déplacement δ_λ est donc du même ordre en N que le terme sous-dominant $[\hat{\theta}_0, [\hat{\theta}_0, \hat{H}]]$ dans \hat{W} , et N fois plus faible que (8); on le néglige pour un grand système. En revanche γ_λ , qui correspond au coefficient de diffusion de la phase lorsque le système est préparé dans l'ensemble microcanonique correspondant à $|\psi_\lambda\rangle$, $\gamma_\lambda = D(E_\lambda, N_\lambda)$, est le seul à conduire à une décroissance exponentielle de la fonction de cohérence microcanonique g_1^λ et doit être conservé. Nous retenons finalement :

$$g_1^\lambda(t) \simeq \bar{N}_0 e^{[2i\mu_{\text{mc}}(E_\lambda, N_\lambda)/\hbar - D(E_\lambda, N_\lambda)]t} \quad (10)$$

Il nous reste maintenant à effectuer la moyenne statistique sur les états $|\psi_\lambda\rangle$ constituant l'état du système. Aux grands N , on suppose que l'ensemble généralisé donné par les Π_λ conduit à des fluctuations de l'énergie totale et du nombre de particules très faibles en valeur relative autour de leur valeur moyenne \bar{E} et de \bar{N} (c'est le cas par exemple des ensembles canonique et grand canonique). On en prend donc une approximation gaussienne et on linéarise μ_{mc} autour de (\bar{E}, \bar{N}) . À cet ordre, on peut remplacer D , déjà sous-dominant d'un facteur N , par $D(\bar{E}, \bar{N})$. On obtient alors le résultat central de ce travail :

$$g_1(t) \simeq \bar{N}_0 e^{2i\mu_{\text{mc}}(\bar{E}, \bar{N})t/\hbar} e^{-t^2/2t_{\text{br}}^2} e^{-D(\bar{E}, \bar{N})t} \quad (11)$$

Aux temps longs, le brouillage thermique prend la forme d'une décroissance gaussienne de la fonction de cohérence

$g_1(t)$, avec un temps caractéristique

$$(2t_{\text{br}}/\hbar)^{-2} = \text{Var} \left(N \frac{\partial \mu_{\text{mc}}}{\partial N}(\bar{E}, \bar{N}) + E \frac{\partial \mu_{\text{mc}}}{\partial E}(\bar{E}, \bar{N}) \right) \quad (12)$$

qui diverge en $N^{1/2}$ pour des fluctuations normales. Le coefficient de diffusion de la phase D donne, quant à lui, un temps de décroissance caractéristique qui diverge en N ; c'est donc bien une contribution sous-dominante aux temps longs, sauf dans l'ensemble microcanonique où elle est la seule qui amortisse encore g_1 .

Dérivation microscopique de l'équation fondamentale d'évolution de la phase : Comme promis, nous donnons maintenant à notre connaissance la première démonstration microscopique de l'équation (7), reliant la vitesse de variation de la phase d'un condensat de paires à ce que l'on peut qualifier d'opérateur potentiel chimique puisque sa moyenne microcanonique conduit à (8).

La contribution de la branche d'excitation fermionique à $d\hat{\theta}_0/dt$ peut s'obtenir par des équations du mouvement linéarisées pour de faibles fluctuations des opérateurs de paires $\hat{\psi}_\downarrow \hat{\psi}_\uparrow$, $\hat{\psi}_\uparrow^\dagger \hat{\psi}_\downarrow^\dagger$ et $\hat{\psi}_\downarrow^\dagger \hat{\psi}_\sigma$ autour de l'état de champ moyen, ce qui constitue la RPA d'Anderson [16]. En effet, en calculant la moyenne temporelle de $d\hat{\theta}_0/dt$ grâce à l'équation (120) de la référence [12] et en réécrivant l'équation (86) de cette référence en termes des nombres d'occupation des quasi-particules fermioniques [34], on obtient

$$-\frac{\hbar}{2} \frac{d\hat{\theta}_0}{dt} \Big|_{\text{RPA}} = \mu(\bar{N}) + \frac{d\mu}{dN}(\hat{N} - \bar{N}) + \sum_{\alpha=\mathbf{k},\sigma} \frac{d\epsilon_{F,\alpha}}{dN} \hat{n}_{F,\alpha} \quad (13)$$

où $\epsilon_{F,\mathbf{k},\sigma}$ est le spectre d'excitation BCS, ici pour un système spatialement homogène, et \bar{N} le nombre moyen BCS de particules dans l'ensemble grand canonique de potentiel chimique μ [35].

Le résultat (13) n'inclut pas la contribution de la branche de phonons car à l'ordre linéaire de la RPA, la phase du condensat (formé de paires au repos) n'est pas couplée aux opérateurs de paires en mouvement. On pourrait espérer obtenir ce couplage en allant à l'ordre quadratique. Malheureusement, les opérateurs introduits dans la RPA, bien que linéairement indépendants, sont liés par des relations non linéaires, comme on le voit en dissociant et réassociant les opérateurs de paires grâce aux relations d'anticommutation fermioniques [36]. Ainsi, on peut certes définir un opérateur de création de phonon $\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger$ par combinaison linéaire des variables de la RPA mais, si l'on injecte la décomposition modale dans une expression non linéaire telle que $d\hat{\theta}_0/dt$, le coefficient de $\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}}$ n'est pas univoque. Nous avons alors choisi de traiter la non-linéarité de manière variationnelle avec un état cohérent de paires dépendant du temps, dont les variables ont le bon goût d'être indépendantes et canoniquement conjuguées.

Le point de départ est l'état BCS normalisé le plus général pour un gaz non polarisé, incluant en particulier

des paires en mouvement,

$$|\psi\rangle = \mathcal{N}(t) \exp \left(b^6 \sum_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} \Gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}';t) \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}') \right) |0\rangle, \quad (14)$$

écrit ici après discrétisation de l'espace réel en un réseau cubique de pas b (que l'on fait tendre vers 0 à la fin des calculs), les opérateurs champ obéissant alors à des relations d'anticommutation du type $\{\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}), \hat{\psi}_{\sigma'}^\dagger(\mathbf{r}')\} = \delta_{\sigma,\sigma'} \delta_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}/b^3$. Le jeu de variables canoniquement conjuguées associé, $\Phi(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \Phi^*(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ est construit dans la référence [19]. Le champ Φ n'est pas relié de façon simple, en tout cas linéaire, au champ de paires plus habituel $\langle \hat{\psi}_\downarrow \hat{\psi}_\uparrow \rangle$ [37]. Le hamiltonien régissant son évolution

$$\mathcal{H}(\Phi, \Phi^*) = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle \quad (15)$$

pourrait être explicité à l'aide du théorème de Wick, mais nous aurons ici besoin seulement de son invariance par changement de phase globale $\Phi(\mathbf{r},\mathbf{r}') \rightarrow e^{i\gamma} \Phi(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, $\forall \gamma \in \mathbb{R}$ (symétrie $U(1)$), qui découle de la conservation du nombre total de particules \hat{N} par \hat{H} . On obtient par un calcul simple la relation exacte entre la norme au carré du champ Φ et le nombre moyen N de particules dans $|\psi\rangle$:

$$\frac{N}{2} = \|\Phi\|^2 \equiv b^6 \sum_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} |\Phi(\mathbf{r},\mathbf{r}';t)|^2 \quad (16)$$

À température nulle, le champ $\Phi(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ à N fixé est figé, à une phase globale près, dans le minimiseur $\Phi_0(\mathbf{r},\mathbf{r}') = (N/2)^{1/2} \phi_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ de \mathcal{H} , où ϕ_0 , réel et normalisé à l'unité, dépend de N même dans le cas spatialement homogène. ϕ_0 diffère de la fonction d'onde du condensat φ_0 de la même manière que Φ diffère du champ de paires $\langle \hat{\psi}_\downarrow \hat{\psi}_\uparrow \rangle$. À température suffisamment faible, on peut développer \mathcal{H} en puissances des petites déviations de Φ par rapport au cercle $\gamma \mapsto e^{i\gamma} \Phi_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, lieu des minima de \mathcal{H} à N fixé. On décompose donc le champ en ses composantes colinéaire et orthogonale à ϕ_0 :

$$\Phi(\mathbf{r},\mathbf{r}') = e^{i\theta} [n^{1/2} \phi_0(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \Lambda(\mathbf{r},\mathbf{r}')] \quad (17)$$

où l'excursion de la phase θ peut être arbitrairement grande, contrairement à celle de Λ . Ce cadre permet de développer une théorie perturbative systématique en puissances du champ Λ (*cf.* Annexe A), qui est l'analogue pour les fermions de la théorie de Bogolioubov sans brisure de symétrie $U(1)$ pour les bosons [20]. Comme nous le verrons, la phase θ reste proche de la phase θ_0 du condensat si Λ est assez petit. On écrit donc les équations du mouvement pour θ et pour les champs de l'espace orthogonal Λ, Λ^* . Dans la forme finale des équations, on fait systématiquement disparaître le mode du condensat grâce à la relation $n = \|\Phi\|^2 - \|\Lambda\|^2$, conséquence de (16), et on se limite à l'ordre 2 en Λ, Λ^* .

La difficulté centrale de notre problème provient de l'existence d'un terme linéaire en Λ, Λ^* dans $d\theta/dt$, conséquence de la dépendance de ϕ_0 en le nombre de paires [12]. En l'absence de ce terme linéaire, il suffirait de développer le champ Λ sur les modes propres de ses petites oscillations linéaires, déduits de l'approximation quadratique du hamiltonien \mathcal{H} à N fixé :

$$\begin{pmatrix} \Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) \\ \Lambda^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) \end{pmatrix} = \sum_{\alpha} b_{\alpha}(t) \begin{pmatrix} u_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ v_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{pmatrix} + b_{\alpha}^*(t) \begin{pmatrix} v_{\alpha}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ u_{\alpha}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{pmatrix} \quad (18)$$

où la somme porte sur les modes propres d'énergie positive ϵ_{α} , avec la normalisation $\|u_{\alpha}\|^2 - \|v_{\alpha}\|^2 = 1$. À cet ordre, $b_{\alpha}(t) = b_{\alpha}(0)e^{-i\epsilon_{\alpha}t/\hbar}$. Il n'y aurait qu'à injecter la décomposition (18) dans $d\theta/dt$ et à prendre une moyenne temporelle à gros grains pour tuer les termes de battement entre les modes ; $\overline{d\theta/dt}$ contiendrait alors la combinaison linéaire attendue des nombres de quasi-particules bosoniques $n_{B,\alpha} = |b_{\alpha}|^2$. La réalité est plus subtile : à cause de l'interaction entre les quasi-particules, $\overline{b_{\alpha}^{-t}}$ n'est pas nul mais d'ordre deux en Λ et Λ^* , si bien que le terme linéaire dans $d\theta/dt$ contribue à la même hauteur que les termes quadratiques. On doit donc calculer $\overline{b_{\alpha}^{-t}}$, ce que l'on fait dans l'Annexe A, en utilisant en particulier le caractère borné du champ Λ , conséquence du respect de la symétrie $U(1)$ dans le développement (17), puis en appliquant le théorème de Hellmann-Feynman, pour trouver :

$$-\frac{\hbar}{2} \frac{d\overline{\theta}}{dt} = \mu_0(N) + \sum_{\alpha} \frac{d\epsilon_{\alpha}}{dN} |b_{\alpha}|^2 + O(\|\Lambda\|^3) \quad (19)$$

Discutons brièvement le spectre ϵ_{α} dans le cas d'un système spatialement homogène, à la limite continue $b \rightarrow 0$ pour une interaction de contact dans l'onde s de longueur de diffusion fixée entre fermions de spin opposé. Pour chaque valeur du vecteur d'onde total \mathbf{q} , il se compose d'au plus une énergie discrète $\epsilon_{B,\mathbf{q}}$, et d'un continuum paramétré par deux vecteurs d'onde $(\mathbf{k}_1, \uparrow; \mathbf{k}_2, \downarrow) \mapsto \epsilon_{F,\mathbf{k}_1,\uparrow} + \epsilon_{F,\mathbf{k}_2,\downarrow}$ de somme fixée ($\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{q}$), où $\epsilon_{F,\mathbf{k},\sigma}$ est la relation de dispersion BCS. La branche $q \mapsto \epsilon_{B,\mathbf{q}}$ coïncide bien avec celle de la référence [21], comme nous l'avons vérifié. De départ phononique, elle correspond aux excitations élémentaires bosoniques du gaz de fermions dont nous cherchions la contribution à la dynamique de phase. Elle doit donc être gardée dans (19). En revanche, le continuum correspond à l'excitation de deux quasi-particules fermioniques ; celles-ci ne peuvent en effet être excitées que par paires à partir du fondamental car le hamiltonien \hat{H} contient un nombre pair de facteurs $\hat{\psi}$ et $\hat{\psi}^{\dagger}$, qui détruisent ou créent chacun une quasi-particule. Ces biexcitations ne sont pas physiquement indépendantes [38], et font double emploi avec la contribution de la RPA à $d\hat{\theta}_0/dt$. Il ne faut donc pas les inclure dans (19).

Deux dernières remarques nous séparent de (7). (i) Les champs $\langle \hat{\psi}_{\downarrow} \hat{\psi}_{\uparrow} \rangle$ et Φ sont distincts, aussi les phases $\hat{\theta}_0$ et θ ne coïncident-elles pas exactement. Leur valeur

moyenne temporelle à gros grains ne diffèrent cependant que par un terme d'ordre $\|\Lambda\|^2$, borné, négligeable aux temps longs, ne contribuant pas au brouillage de phase du condensat de paires. (ii) La phase de notre approche variationnelle est une variable classique, alors que $\hat{\theta}_0$ dans (7) est un opérateur quantique. Ce hiatus est comblé par application au résultat (19) de la procédure de quantification du chapitre 11 de la référence [19], puisque les b_{α} y sont remplacés par des opérateurs bosoniques \hat{b}_{α} , $[\hat{b}_{\alpha}, \hat{b}_{\alpha}^{\dagger}] = 1$. Nous pensons que la validité de l'équation (7), reliant $d\hat{\theta}_0/dt$ à l'opérateur potentiel chimique, et donc du résultat (11), dépasse celle de notre dérivation microscopique variationnelle et inclut le régime d'interaction forte pourvu que les quasi-particules aient une durée de vie beaucoup plus longue que l'inverse de leur fréquence propre, ce qui est le cas à température suffisamment basse. Dans le cas limite où l'on peut négliger la branche d'excitation fermionique et se limiter à la partie phononique de la branche bosonique, c'est bien ce que prédit la variante irrotationnelle de la théorie de l'hydrodynamique quantique de Landau et Khalatnikov [22] (voir Annexe B).

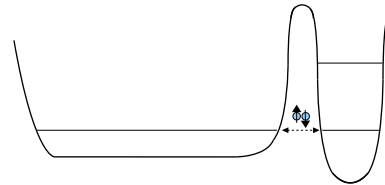


FIGURE 1: Configuration de piégeage proposée pour mesurer $g_1(t)$ par interférométrie de Ramsey : le condensat de paires de fermions est confiné dans le piège principal (à fond plat sur la figure) ; on transfère un petit nombre d'atomes (sous forme de dimères) dans le piège secondaire (très étroit) par effet tunnel résonnant d'amplitude ajustable par une barrière de hauteur variable ; on crée ainsi une référence de phase avec laquelle on fait interférer le condensat de paires après un temps d'évolution t .

Esquissons maintenant un protocole de mise en évidence expérimentale du brouillage thermique d'un condensat de paires. L'idée centrale est, dans les phases de préparation et de mesure, de bosoniser de manière adiabatique réversible [23] les paires de Cooper atomiques sous forme de dimères fortement liés et faiblement interagissants, en ajustant la longueur de diffusion à une faible valeur positive grâce à une résonance de Feshbach magnétique. Ceci permet (i) de produire un échantillon à nombre faiblement fluctuant de dimères, en faisant fondre une phase de Mott préparée par réalisation du modèle de Hubbard bosonique [24], (ii) de créer un couplage tunnel entre le piège principal renfermant les N particules et un piège secondaire très étroit, à travers une barrière de hauteur ajustable [3] (Fig.1), (iii) de détecter par fluorescence un dimère unique [25] dans ce piège secondaire. Pour mesurer la fonction $g_1(t)$, nous adaptons [26] aux paires de fermions la méthode interférométrique de Ramsey où sont appliquées deux impulsions de Rabi

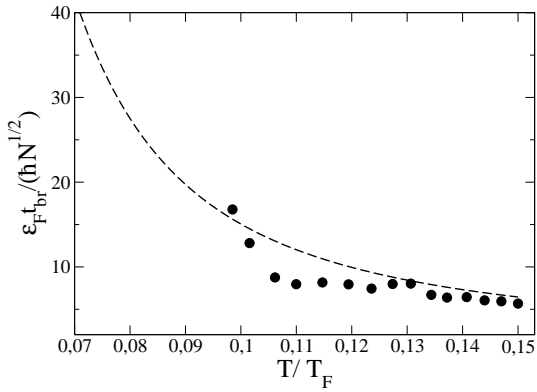


FIGURE 2: Temps de brouillage thermique pour un gaz cohérent de fermions à la limite unitaire dans l'ensemble canonique, en fonction de la température T en unités de la température de Fermi $T_F = \epsilon_F/k_B$. Disques : à partir de l'équation d'état mesurée dans la référence [9]. Ligne tiretée : formule (20) qui utilise une approximation de l'équation d'état décrite dans le texte.

à un intervalle de temps t . On prépare initialement les paires bosonisées dans le piège principal. La première impulsion est d'angle ϵ suffisamment faible pour transférer en moyenne moins d'un dimère dans le piège secondaire et éviter ainsi le bruit de partition qui masquerait le brouillage thermique. On ajuste ensuite les interactions à la valeur à laquelle on souhaite étudier la dynamique de phase du condensat de paires, et on laisse évoluer pendant le temps t . On rebosonise et on applique une seconde impulsion d'angle ϵ avant de mesurer le nombre n_{sec} de dimères dans le piège secondaire. Alors la valeur moyenne de n_{sec} sur les réalisations présente, en fonction du temps t , des oscillations de demi-pulsation la différence (sur \hbar) des potentiels chimiques entre les deux zones de piégeage, et de contraste $|g_1(t)/g_1(0)|$.

Pour finir, donnons une estimation du temps de brouillage pour un gaz unitaire préparé dans l'ensemble canonique, donc avec des fluctuations d'énergie de variance $\text{Var } E = k_B T^2 \partial_T \bar{E}$. En utilisant l'équation d'état du gaz unitaire non polarisé mesurée dans la référence [9] nous trouvons, pour un système spatialement homogène (dans un piège à fond plat [27]) les temps de brouillage thermiques t_{br} représentés par des disques sur la figure 2. Ainsi, à une température $T = 0,12 T_F \simeq 0,7 T_c$,

on trouve $t_{\text{br}} \approx 7N^{1/2}\hbar/\epsilon_F$, ce qui correspond à 20 millisecondes pour une température de Fermi typique $T_F = \epsilon_F/k_B = 1\mu\text{K}$ et un nombre d'atomes typique $N = 10^5$. On peut aussi comme dans la référence [28] estimer l'équation d'état du gaz unitaire à partir de relations de dispersion simples pour les excitations élémentaires. Pour la branche bosonique, on prend [28] $\epsilon_{B,\mathbf{q}} = \hbar c q$ avec c la vitesse du son à $T = 0$, $mc^2 = \frac{2}{3}\xi\epsilon_F$, et ξ le paramètre de Bertsch. Pour la branche fermionique, on prend [29] $\epsilon_{F,\mathbf{k},\sigma} = \Delta + (\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \epsilon_0)^2/(2\phi_0)$, où Δ est le *gap* et où ϵ_0 et ϕ_0 donnent la position du minimum et la courbure de la relation de dispersion. En gardant pour chaque branche sa contribution d'ordre dominant à basse température comme dans la référence [28], et en utilisant les valeurs expérimentales [9, 30] $\xi = 0,376$, $\Delta = 0,44\epsilon_F$, $\epsilon_0 = 0,85\epsilon_F$ et la valeur théorique [29] $\phi_0 = 0,846\epsilon_F$, nous trouvons

$$\frac{N\hbar^2}{(t_{\text{br}}\epsilon_F)^2} \simeq \left(\frac{\theta}{0,296}\right)^5 \frac{(1+2r)^2}{9(1+r)} \quad (20)$$

où $\theta = T/T_F$ et où $r \simeq \left(\frac{0,316}{\theta}\right)^{9/2} e^{-0,44/\theta}$ mesure l'importance relative des deux branches d'excitation. Cette formule, représentée en tireté sur la figure 2, donne un équivalent exact de t_{br} quand $\theta \rightarrow 0$ [39].

Conclusion : Nous avons présenté la première théorie microscopique du brouillage thermique de la phase d'un condensat de paires de fermions (11), et mis en évidence un brouillage balistique et une diffusion de phase sous-dominante. Le temps de brouillage dépend de la variance de l'énergie totale du gaz, ainsi que de la dérivée du potentiel chimique microcanonique du gaz par rapport à l'énergie. Pour établir ce résultat, nous avons utilisé de façon centrale le fait que la vitesse de variation de la phase du condensat de paires est reliée à l'opérateur potentiel chimique du gaz par l'équation (7), dont nous avons donné une dérivation microscopique incluant les deux branches d'excitation du gaz, bosonique et fermionique. Nous avons enfin proposé un protocole expérimental réaliste de mesure de ce temps, que nous avons estimé être de l'ordre de la dizaine de millisecondes pour un gaz cohérent de fermions préparé à la limite unitaire dans l'ensemble canonique.

Remerciements : Ce travail a bénéficié d'un financement européen *via* le projet QIBEC.

Annexe A: Compléments sur le calcul variationnel avec un état cohérent de paires

Il est commode dans un premier temps de traiter la variable réelle n et le champ complexe Λ comme des variables indépendantes, c'est-à-dire de ne pas fixer $\|\Phi\|$. Pour inclure les interactions entre les quasi-particules, il faut aller jusqu'à l'ordre trois en Λ et Λ^* , si bien que

$$\mathcal{H}(\Phi, \Phi^*) = \mathcal{T}_0[n, \phi_0(N)] + \sum_{j=1}^3 \mathcal{T}_j[n, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*) + O(\|\Lambda\|^4) \quad (A1)$$

où le tenseur \mathcal{T}_j , de rang j si bien que $\mathcal{T}_j(\Lambda, \Lambda^*)$ est d'ordre exactement j en Λ et Λ^* , peut s'exprimer en termes de la différentielle $j^{\text{ème}}$ de \mathcal{H} prise en $(\Phi, \Phi^*) = (n^{1/2}\phi_0, n^{1/2}\phi_0)$ restreinte au sous-espace orthogonal à $(\phi_0, 0)$ et $(0, \phi_0)$, et ne dépend pas de la phase θ du fait de la symétrie $U(1)$. À nombre total de particules fixé, l'énergie ne varie pas au premier ordre autour du minimiseur si bien que $\mathcal{T}_1[N/2, \phi_0(N)] = 0$. Cette innocente équation n'est autre que la célèbre équation du gap lorsque le système est spatialement homogène. De plus, on vérifie que $\partial_n \mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N)] = 2\mu_0(N)$ où $\mu_0(N) = dE_0(N)/dN$ est le potentiel chimique du gaz à température nulle, $E_0(N) = \mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N)]$ étant l'énergie de l'état fondamental.

Les variables phase et module au carré de l'amplitude du champ Φ dans le mode ϕ_0 sont canoniquement conjuguées, si bien que $-\hbar d\theta/dt = \partial_n \mathcal{H}(\Phi, \Phi^*)$. Une fois effectuée cette dérivée dans (A1) à Λ et Λ^* fixés, on peut fixer la norme de Φ à $(N/2)^{1/2}$ (c'est-à-dire le nombre total de particules à N) et éliminer n grâce à la relation $n = \|\Phi\|^2 - \|\Lambda\|^2$; le champ Λ reste alors la seule variable dynamique du problème. L'expression est utile seulement jusqu'à l'ordre deux en Λ, Λ^* :

$$-\hbar \frac{d\theta}{dt} = \partial_n \mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N)] - \|\Lambda\|^2 \partial_n^2 \mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N)] + \sum_{j=1}^2 \partial_n \mathcal{T}_j[N/2, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*) + O(\|\Lambda\|^3) \quad (\text{A2})$$

Le hamiltonien régissant l'évolution de Λ à nombre de particules fixé s'obtient en remplaçant n par $N/2 - \|\Lambda\|^2$ dans (A1) et en développant jusqu'à l'ordre trois en Λ, Λ^* :

$$\mathcal{H}_N(\Lambda, \Lambda^*) = E_0(N) + \check{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*) + \mathcal{T}_3[N/2, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*) - \|\Lambda\|^2 \partial_n \mathcal{T}_1[N/2, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*) + O(\|\Lambda\|^4) \quad (\text{A3})$$

où la forme quadratique $\check{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*)$ est obtenue en soustrayant $2\mu_0(N)\|\Lambda\|^2$ à $\mathcal{T}_2[N/2, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*)$. Il est astucieux d'écrire alors directement la dérivée temporelle de la partie imaginaire du champ Λ projetée sur la fonction $(N/2)^{1/2} d\phi_0/dN$,

$$Y = \frac{b^6}{2i} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2} \frac{d\phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{dN} (\Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \Lambda^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \quad (\text{A4})$$

Comme $i\hbar \partial_t \Lambda = b^{-6} \partial_{\Lambda^*} \mathcal{H}_N(\Lambda, \Lambda^*)$, il vient

$$-2\hbar \frac{dY}{dt} = D \cdot \mathcal{H}_N(\Lambda, \Lambda^*) = D \cdot \check{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*) + D \cdot \mathcal{H}_N^{\text{cub}}(\Lambda, \Lambda^*) + O(\|\Lambda\|^3) \quad (\text{A5})$$

où $\mathcal{H}_N^{\text{cub}}$ est la partie de \mathcal{H}_N d'ordre trois en Λ, Λ^* . On a introduit l'opérateur différentiel

$$D = \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2} \frac{d\phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{dN} (\partial_{\Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} + \partial_{\Lambda^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}) \quad (\text{A6})$$

Nous allons maintenant mettre à profit en cascade deux relations vérifiées pour tout Λ orthogonal à $\phi_0(N)$:

$$\partial_n \mathcal{T}_1(\Lambda, \Lambda^*) + 2D \cdot \check{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*) = 0 \quad (\text{A7})$$

$$2D \cdot \mathcal{H}_N^{\text{cub}}(\Lambda, \Lambda^*) = 2 \frac{d}{dN} \check{\mathcal{T}}_2(\Lambda, \Lambda^*) - \partial_n \mathcal{T}_2(\Lambda, \Lambda^*) + \|\Lambda\|^2 \partial_n^2 \mathcal{T}_0 \quad (\text{A8})$$

où tous les tenseurs sont évalués en $[n = N/2, \phi_0(N)]$ ou simplement en N dans le cas de $\check{\mathcal{T}}_2$. On établit ces relations en considérant formellement un champ Φ' à $N + \delta N$ particules et en obtenant de deux façons différentes l'approximation quadratique en Λ' et Λ'^* de $\mathcal{H}_{N+\delta N}(\Lambda', \Lambda'^*)$ où Λ' est comme dans (17) (écrite pour $N + \delta N$ particules) la composante de Φ' orthogonale à $\phi_0(N + \delta N)$. D'une part, on remplace simplement N par $N + \delta N$ et Λ par Λ' dans (A3), puis on développe au premier ordre en δN , ce qui fait apparaître $d\check{\mathcal{T}}_2/dN[N]$. D'autre part, on applique à $\mathcal{H}(\Phi', \Phi'^*)$ le développement (A1) autour de $\Phi_0(N)$ sachant qu'au premier ordre en δN , la composante de Φ' orthogonale à $\phi_0(N)$ contient, en plus de celle Λ'_\perp de Λ' , une contribution venant de $d\phi_0/dN$:

$$\Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta N \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2} \frac{d\phi_0}{dN}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \Lambda'_\perp(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + O(\delta N^2, \|\Lambda'\|^2, \delta N \|\Lambda'\|) \quad (\text{A9})$$

C'est ce décalage infinitésimal proportionnel à δN dans la direction de $d\phi_0/dN$ qui fait apparaître l'opérateur D . Les équations (A7) et (A8) résultent de l'identification aux ordres un et deux en Λ' et Λ'^* des deux expressions de $\mathcal{H}_{N+\delta N}(\Lambda', \Lambda'^*)$ obtenues.

Le plus gros du travail a été accompli. Il reste à combiner les équations (A2), (A5), (A7), et (A8), ou plus précisément leur moyenne temporelle à gros grains (sur une échelle de temps longue devant la période d'oscillation des amplitudes modales b_α mais courte devant le temps d'évolution des nombres de quasi-particules $|b_\alpha|^2$) pour obtenir

$$-\frac{\hbar}{2} \frac{d\overline{\theta}^t}{dt} = \mu_0(N) + \frac{d\overline{\mathcal{T}}_2^t}{dN}[N](\Lambda, \Lambda^*) + O(\|\Lambda\|^3) \quad (\text{A10})$$

où nous avons utilisé de façon cruciale la nullité de $\overline{d\Lambda/dt}^t$ (et donc de $\overline{dY/dt}^t$) pour le champ Λ , dont l'excursion est bornée. La forme quadratique $\overline{\mathcal{T}}_2[N]$ est représentée par la matrice $\eta\mathcal{L}[N]$ avec $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, soit, en notation par blocs et avec le produit scalaire \langle, \rangle dont découle la norme $\|\cdot\|$:

$$\overline{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*) = \frac{1}{2} \left\langle (\Lambda \ \Lambda^*), \eta\mathcal{L}[N] \begin{pmatrix} \Lambda \\ \Lambda^* \end{pmatrix} \right\rangle \quad (\text{A11})$$

Il reste à injecter la décomposition modale (18) dans l'équation (A11) préalablement dérivée par rapport à N , les ϵ_α et (u_α, v_α) , $-\epsilon_\alpha$ et (v_α^*, u_α^*) étant les valeurs propres et vecteurs propres de \mathcal{L} . La valeur moyenne à gros grains $\overline{\quad}^t$ se charge d'éliminer les termes croisés et le théorème d'Hellmann-Feynman assure que [40] $\langle (u_\alpha^*, -v_\alpha^*), \frac{d\mathcal{L}[N]}{dN} \begin{pmatrix} u_\alpha \\ v_\alpha \end{pmatrix} \rangle = d\epsilon_\alpha/dN$, et permet ainsi de conclure sur l'équation (19).

Annexe B: Hydrodynamique quantique irrotationnelle

En 1949, pour calculer la viscosité de l'hélium superfluide à basse température, Landau et Khalatnikov ont développé la théorie de l'hydrodynamique quantique [22, 31], qui permet de déterminer, de manière exacte à l'ordre dominant en T , les effets d'une température non nulle sur les observables d'un fluide quantique, du moins sur celles dépendant seulement des faibles échelles d'énergie et des grandes échelles de longueur. De façon remarquable, le seul ingrédient spécifique est l'équation d'état du fluide à température nulle, c'est-à-dire ici la densité volumique d'énergie $e_0(\rho)$ de l'état fondamental du système spatialement homogène de densité ρ .

Afin d'obtenir la dérivée temporelle de l'opérateur phase du condensat de paires de fermions, nous apportons deux raffinements à la théorie, une régularisation des divergences ultraviolettes et une spécialisation au cas irrotationnel.

D'une part, nous résolvons les problèmes de divergence du niveau d'énergie fondamental du hamiltonien de Landau-Khalatnikov, due à l'énergie quantique de point zéro des modes propres du système, en discrétisant l'espace en un réseau cubique de pas b , sous-multiple de la longueur L de la boîte de quantification, beaucoup plus petit que la longueur d'onde typique $2\pi/q_{\text{th}}$ des excitations du fluide peuplées thermiquement, mais beaucoup plus grand que la distance moyenne $\rho^{-1/3}$ entre particules,

$$\rho^{-1/3} \ll b \ll q_{\text{th}}^{-1} \quad (\text{B1})$$

ce qui est réalisable à suffisamment basse température ; ce maillage souscrit au régime de validité de l'hydrodynamique, celui d'une description spatiale à gros grains, et fournit une coupure naturelle ultraviolette dans l'espace des vecteurs d'onde \mathbf{q} , en les restreignant à la première zone de Brillouin [41] $\mathcal{D} = [-\pi/b, \pi/b]^3$. Dans le hamiltonien, il faut alors remplacer les opérateurs différentiels (gradient, divergence, laplacien) par leurs équivalents discrets, comme il sera implicitement fait plus bas, et il faut utiliser la densité volumique d'énergie *nue* $e_{0,0}(\rho)$, fonction du pas du réseau b ; suivant les idées de la renormalisation, l'énergie quantique de point zéro des modes, formellement divergente lorsque $b \rightarrow 0$, s'ajoute alors à $e_{0,0}(\rho)$ pour reconstruire précisément la densité volumique d'énergie *effective* ou *vraie* $e_0(\rho)$, indépendante de b , et qui est celle mesurée expérimentalement.

D'autre part, nous spécialisons la théorie au cas d'un opérateur champ de vitesse $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$ irrotationnel, qu'on peut donc écrire comme le gradient d'un opérateur champ de phase $\hat{\phi}(\mathbf{r}, t)$, canoniquement conjugué à l'opérateur champ de densité $\hat{\rho}(\mathbf{r}, t)$:

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \text{grad} \hat{\phi}(\mathbf{r}, t) \quad \text{avec} \quad [\hat{\rho}(\mathbf{r}, t), \hat{\phi}(\mathbf{r}', t)] = i \frac{\delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}}{b^3} \quad (\text{B2})$$

Ceci revient à négliger la composante transverse du champ $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$, comme l'a fait la référence [22] pour déterminer l'interaction entre phonons et avancer dans le calcul de la viscosité. Dans le cas particulier invariant d'échelle du gaz de fermions unitaire, une justification en est donnée dans la référence [32] dans le cadre de la théorie effective des

champs. Notons en passant que la densité de quasi-particules fermioniques, exponentiellement petite en $1/T$, est elle directement omise par la théorie hydrodynamique.

La suite est assez classique. On part des équations du mouvement des champs en représentation de Heisenberg, respectivement l'équation de continuité quantique et l'équation d'Euler quantique sur le potentiel (dont le gradient donne l'équation d'Euler quantique sur la vitesse) :

$$\partial_t \hat{\rho} + \text{div} \left[\frac{1}{2} \{ \hat{\rho}, \hat{\mathbf{v}} \} \right] = 0 \quad (\text{B3})$$

$$\hbar \partial_t \hat{\phi} = -\frac{1}{2} m \hat{\mathbf{v}}^2 - \mu_{0,0}(\hat{\rho}) \quad (\text{B4})$$

où $\{ \hat{A}, \hat{B} \} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ est l'anticommutateur de deux opérateurs et

$$\mu_{0,0}(\rho) = \frac{d}{d\rho} e_{0,0}(\rho) = e'_{0,0}(\rho) \quad (\text{B5})$$

est le potentiel chimique nu de l'état fondamental à la densité ρ . Les fluctuations spatiales de densité et de phase sont faibles, parce que $\rho^{1/3}b$ est assez grand si elles sont quantiques, parce que $q_{\text{th}}b$ est de plus assez petit si elles sont thermiques [42]. On peut donc, comme dans [22], linéariser les équations du mouvement autour de la solution spatialement uniforme :

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}, t) = \hat{\rho}_0 + \delta\hat{\rho}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{B6})$$

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) = \hat{\phi}_0(t) + \delta\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{B7})$$

L'opérateur $\hat{\rho}_0$ vaut simplement \hat{N}/L^3 , où \hat{N} est l'opérateur nombre total de particules; c'est une constante du mouvement. L'opérateur $\hat{\phi}_0$ est l'opérateur phase du condensat, ici

$$\hat{\phi}_0 = \hat{\theta}_0/2 \quad (\text{B8})$$

puisque l'opérateur phase $\hat{\theta}_0$ de l'équation (2) prend les paires pour objets élémentaires, alors que les équations (B3,B4) privilégient les particules fermioniques. Les fluctuations spatiales $\delta\hat{\rho}$ et $\delta\hat{\phi}$, d'intégrale (discrète) nulle sur tout l'espace, se développent seulement sur les ondes planes de vecteur d'onde \mathbf{q} non nul, et commutent avec $\hat{\rho}_0$. Après résolution des équations linéarisées sur $\delta\hat{\rho}$ et $\delta\hat{\phi}$, on dispose de l'habituel développement sur les modes propres :

$$\delta\hat{\rho}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{\rho}_0^{1/2}}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{q} \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^{3*} \cap \mathcal{D}} \left(\frac{\hbar q}{2m\hat{c}_{0,0}} \right)^{1/2} (\hat{B}_{\mathbf{q}} + \hat{B}_{-\mathbf{q}}^\dagger) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{B9})$$

$$\delta\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) = \frac{-i}{\hat{\rho}_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{q} \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^{3*} \cap \mathcal{D}} \left(\frac{m\hat{c}_{0,0}}{2\hbar q} \right)^{1/2} (\hat{B}_{\mathbf{q}} - \hat{B}_{-\mathbf{q}}^\dagger) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{B10})$$

où les opérateurs de création $\hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger$ et d'annihilation $\hat{B}_{\mathbf{q}}$ d'un phonon de vecteur d'onde \mathbf{q} et d'énergie $\hbar q \hat{c}_{0,0}$ obéissent aux relations de commutation bosoniques, par exemple $[\hat{B}_{\mathbf{q}}, \hat{B}_{\mathbf{q}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}$, et où l'on a introduit l'opérateur vitesse du son nue à température nulle

$$\hat{c}_{0,0} \equiv \left(\frac{\hat{\rho}_0 \mu'_{0,0}(\hat{\rho}_0)}{m} \right)^{1/2} \quad (\text{B11})$$

Il reste alors à développer le second membre de (B4) jusqu'à l'ordre deux inclus en $\delta\hat{\rho}$ et $\delta\hat{\theta}$, à en extraire la composante de Fourier de vecteur d'onde nulle, à effectuer une moyenne temporelle à gros grains pour supprimer les termes croisés oscillants $\hat{B}_{\mathbf{q}}\hat{B}_{-\mathbf{q}}$ et $\hat{B}_{-\mathbf{q}}^\dagger\hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger$, puis à reconnaître l'identité

$$\frac{d}{d\rho} [\rho \mu'_{0,0}(\rho)]^{1/2} = \frac{\mu'_{0,0}(\rho) + \rho \mu''_{0,0}(\rho)}{2[\rho \mu'_{0,0}(\rho)]^{1/2}} \quad (\text{B12})$$

pour obtenir

$$\overline{\frac{d}{dt} \hat{\phi}_0}^t = -\mu_{0,0}(\hat{\rho}_0) - \sum_{\mathbf{q} \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^{3*} \cap \mathcal{D}} \left(\hbar q \frac{d}{dN} \hat{c}_{0,0} \right) \left(\hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{B}_{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{B13})$$

À cet ordre du développement en les fluctuations spatiales, on peut regrouper dans (B13) la contribution de point zéro des modes (le terme $1/2$ entre parenthèses) avec le potentiel chimique nu $\mu_{0,0}(\hat{\rho}_0)$ pour former le potentiel chimique vrai $\mu_0(\hat{\rho}_0)$ du fluide à température nulle, et identifier $\hat{c}_{0,0}$ dans le préfacteur des opérateurs nombres de phonons $\hat{B}_q^\dagger \hat{B}_q$ avec la vitesse du son vraie à température nulle, $\hat{c}_0 \equiv [\hat{\rho}_0 \mu'_0(\hat{\rho}_0)/m]^{1/2}$. On obtient alors la limite phononique (de basse température) de la relation (7), et ceci sans hypothèse sur la force (ou la faiblesse) des interactions.

-
- [1] H. MÜNTINGA, H. AHLERS, M. KRUTZIK, A. WENZLAWSKI, S. ARNOLD, D. BECKER, K. BONGS, H. DITUS, H. DUNCKER, N. GAALOU, C. GHERASIM, E. GIESE, C. GRZESCHIK, T. W. HÄNSCH, O. HELLMIG, W. HERR, S. HERRMANN, E. KAJARI, S. KLEINERT, C. LÄMMERZAHN, W. LEWOCZKO-ADAMCZYK, J. MALCOLM, N. MEYER, R. NOLTE, A. PETERS, M. POPP, J. REICHEL, A. ROURA, J. RUDOLPH, M. SCHIEMANGK, M. SCHNEIDER, S. T. SEIDEL, K. SENGSTOCK, V. TAMMA, T. VALENZUELA, A. VOGEL, R. WALSER, T. WENDRICH, P. WINDPASSINGER, W. ZELLER, T. van ZOEST, W. ERTMER, W. P. SCHLEICH et E. M. RASEL : Interferometry with Bose-Einstein Condensates in Microgravity. *Phys. Rev. Lett.*, 110:093602, Feb 2013.
- [2] Markus GREINER, Olaf MANDEL, Theodor W. HANSCH et Immanuel BLOCH : Collapse and revival of the matter wave field of a Bose-Einstein condensate. *Nature*, 419(6902):51–54, 09 2002.
- [3] J. ESTEVE, C. GROSS, A. WELLER, S. GIOVANAZZI et M. K. OBERTHALER : Squeezing and entanglement in a Bose-Einstein condensate. *Nature*, 455(7217):1216–1219, 10 2008.
- [4] Max F. RIEDEL, Pascal BÖHI, Yun LI, Theodor W. HÄNSCH, Alice SINATRA et Philipp TREUTLEIN : Atom-chip-based generation of entanglement for quantum metrology. *Nature*, 464(7292):1170–1173, 04 2010.
- [5] G.-B. JO, Y. SHIN, S. WILL, T. A. PASQUINI, M. SABA, W. KETTERLE, D. E. PRITCHARD, M. VENGALATTORE et M. PRENTISS : Long phase coherence time and number squeezing of two Bose-Einstein condensates on an atom chip. *Phys. Rev. Lett.*, 98:030407, Jan 2007.
- [6] M. EGOROV, R. P. ANDERSON, V. IVANNIKOV, B. OPANCHUK, P. DRUMMOND, B. V. HALL et A. I. SIDOROV : Long-lived periodic revivals of coherence in an interacting Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A*, 84:021605, Aug 2011.
- [7] T. BERRADA, S. van FRANK, R. BÜCKER, T. SCHUMM, J.-F. SCHAFF et J. SCHMIEDMAYER : Integrated Mach-Zehnder interferometer for Bose-Einstein condensates. *Nature Communication*, 4, juin 2013.
- [8] S. NASCIMBÈNE, N. NAVON, K. J. JIANG, F. CHEVY et C. SALOMON : Exploring the thermodynamics of a universal Fermi gas. *Nature*, 463(7284):1057–1060, 02 2010.
- [9] Mark J. H. KU, Ariel T. SOMMER, Lawrence W. CHEUK et Martin W. ZWIERLEIN : Revealing the Superfluid Lambda Transition in the Universal Thermodynamics of a Unitary Fermi Gas. *Science*, 335(6068):563–567, 2012.
- [10] C. KOHSTALL, S. RIEDL, E. R. SÁNCHEZ GUARDADO, L. A. SIDORENKOV, J. HECKER DENSCHLAG et R. GRIMM : Observation of interference between two molecular Bose-Einstein condensates. *New Journal of Physics*, 13(6):065027, juin 2011.
- [11] Iacopo CARUSOTTO et Yvan CASTIN : Atom Interferometric Detection of the Pairing Order Parameter in a Fermi Gas. *Phys. Rev. Lett.*, 94:223202, juin 2005.
- [12] H. KURKJIAN, Y. CASTIN et A. SINATRA : Phase operators and blurring time of a pair-condensed Fermi gas. *Phys. Rev. A*, 88:063623, Dec 2013.
- [13] D. JAKSCH, C. W. GARDINER, K. M. GHERI et P. ZOLLER : Quantum kinetic theory. IV. Intensity and amplitude fluctuations of a Bose-Einstein condensate at finite temperature including trap loss. *Phys. Rev. A*, 58:1450–1464, Aug 1998.
- [14] A. SINATRA, Y. CASTIN et E. WITKOWSKA : Nondiffusive phase spreading of a Bose-Einstein condensate at finite temperature. *Phys. Rev. A*, 75:033616, 2007.
- [15] A. B. KUKLOV et Joseph L. BIRMAN : Orthogonality catastrophe and decoherence of a confined Bose-Einstein condensate at finite temperature. *Phys. Rev. A*, 63:013609, Dec 2000.
- [16] P.W. ANDERSON : Random-Phase Approximation in the Theory of Superconductivity. *Phys. Rev.*, 112:1900–1916, 1958.
- [17] C. COHEN-TANNOUDJI, J. DUPONT-ROC et G. GRYNBERG : *Processus d'interaction entre photons et atomes*. InterEditions et Éditions du CNRS, Paris, 1988.
- [18] Marcos RIGOL, Vanja DUNJKO et Maxim OLSHANII : Thermalization and its mechanism for generic isolated quantum systems. *Nature*, 452(7189):854–858, 04 2008.
- [19] Jean-Paul BLAIZOT et Georges RIPKA : *Quantum Theory of Finite Systems*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1985.
- [20] Yvan CASTIN et Ralph DUM : Low-temperature Bose-Einstein Condensates in Time-dependent traps. *Phys. Rev. A*, 57:3008–3021, 1998.
- [21] R. COMBESCOT, M. Yu. KAGAN et S. STRINGARI : Collective mode of homogeneous superfluid Fermi gases in the BEC-BCS crossover. *Phys. Rev. A*, 74:042717, Oct 2006.
- [22] Lev LANDAU et Isaak KHALATNIKOV : Teoriya vyazkosti Geliya-II. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 19:637, 1949.
- [23] M. BARTENSTEIN, A. ALTMAYER, S. RIEDL, S. JOCHIM, C. CHIN, J. HECKER DENSCHLAG et R. GRIMM : Crossover from a Molecular Bose-Einstein Condensate to a Degenerate Fermi Gas. *Phys. Rev. Lett.*, 92:120401, Mar 2004.
- [24] Markus GREINER, Olaf MANDEL, Tilman ESSLINGER, Theodor W. HANSCH et Immanuel BLOCH : Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature*, 415(6867):39–44, 01 2002.
- [25] Jacob F. SHERSON, Christof WEITENBERG, Manuel ENDRES, Marc CHENEAU, Immanuel BLOCH et Stefan KUHR : Single-atom-resolved fluorescence imaging of an

- atomic Mott insulator. *Nature*, 467(7311):68–72, 09 2010.
- [26] Yvan CASTIN et Alice SINATRA : Spatial and Temporal Coherence of a Bose-condensed Gas. In M. MODUGNO et A. BRAMATI, éditeurs : *Quantum fluids : Hot topics and New Trends*. Springer, 2012.
- [27] Alexander L. GAUNT, Tobias F. SCHMIDTZ, Igor GOTLIBOVYCH, Robert P. SMITH et Zoran HADZIBABIC : Bose-Einstein Condensation of Atoms in a Uniform Potential. *Phys. Rev. Lett.*, 110:200406, May 2013.
- [28] Aurel BULGAC, Joaquín E. DRUT et Piotr MAGIERSKI : Spin 1/2 Fermions in the Unitary Regime : A Superfluid of a New Type. *Phys. Rev. Lett.*, 96:090404, Mar 2006.
- [29] Yusuke NISHIDA et Dam Thanh SON : ϵ -Expansion for a Fermi Gas at Infinite Scattering Length. *Phys. Rev. Lett.*, 97:050403, Aug 2006.
- [30] André SCHIROTZEK, Yong-il SHIN, Christian H. SCHUNCK et Wolfgang KETTERLE : Determination of the Superfluid Gap in Atomic Fermi Gases by Quasiparticle Spectroscopy. *Phys. Rev. Lett.*, 101:140403, Oct 2008.
- [31] Isaak M. KHALATNIKOV : *An Introduction to the Theory of Superfluidity*. Perseus Publishing, Cambridge, Massachusetts, 2000.
- [32] D.T. SON et M. WINGATE : General coordinate invariance and conformal invariance in nonrelativistic physics : Unitary Fermi gas. *Ann. Physics*, 321:197–224, 2006.
- [33] Il y a derrière l'approximation du pôle l'hypothèse que le continuum auquel $|\psi_\lambda\rangle$ est couplé est large en fréquence. Aussi (5) ne vaut-elle qu'aux temps longs devant l'inverse de cette largeur, c'est-à-dire ici devant le temps de corrélation τ_c des quasi-particules introduit plus bas.
- [34] On remarque que $\frac{\Delta_0}{\epsilon_{F,\mathbf{k},\sigma}} \hat{c}_{\mathbf{k}} = \hat{n}_{F,\mathbf{k},\uparrow} + \hat{n}_{F,-\mathbf{k},\downarrow}$ où le membre de gauche fait référence aux notations de [12], et on se sert de son équation (74) pour reconnaître $d\epsilon_{F,\mathbf{k},\sigma}/d\mu$.
- [35] L'équation (13) est écrite en réintroduisant le terme de phase trivial $-2\mu(\bar{N})t/\hbar$ qui n'apparaît pas dans la référence [12] du fait de l'utilisation du hamiltonien grand canonique.
- [36] Par exemple dans l'espace de Fourier et avec les notations d'Anderson [16], $\rho_{\mathbf{k}}\bar{\rho}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} = b_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 b_{\mathbf{k}}^0$, comme le montre l'égalité $c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger c_{\mathbf{k}\uparrow} c_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow} = c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow}$.
- [37] si $\underline{\Gamma}$ et $\underline{\Phi}$ sont les matrices de coefficients respectivement $b^3\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ et $b^3\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ alors $\underline{\Phi} = -\underline{\Gamma}(1 + \underline{\Gamma}^\dagger \underline{\Gamma})^{-1/2}$.
- [38] Exciter $\alpha = (\mathbf{k}_1, \uparrow; \mathbf{k}_2, \downarrow)$ et $\alpha' = (\mathbf{k}'_1, \uparrow; \mathbf{k}'_2, \downarrow)$ revient à exciter $\alpha'' = (\mathbf{k}'_1, \uparrow; \mathbf{k}_2, \downarrow)$ et $\alpha''' = (\mathbf{k}_1, \uparrow; \mathbf{k}'_2, \downarrow)$.
- [39] Le bon accord avec les données expérimentales est à relativiser car si l'on traite les deux branches du modèle à tous les ordres en $k_B T$, on obtient un décalage vers le haut de $t_{br}\epsilon_F/(\hbar N^{1/2})$ à peu près constant et égal à 5 sur l'intervalle de température de la figure 2.
- [40] $(u_\alpha, -v_\alpha)$ est le vecteur dual de (u_α, v_α) car $(\eta\mathcal{L})^\dagger = \eta\mathcal{L}$.
- [41] Il faut aussi que $mcb/\hbar > 1$, où c est la vitesse du son à $T = 0$, afin que les excitations élémentaires du système restent phononiques sur tout le domaine \mathcal{D} . Cette condition découle de celle déjà invoquée, $b\rho^{1/3} \gg 1$, dans le régime d'interaction forte ou dans la limite de BCS, puisque c y est d'ordre la vitesse de Fermi. Elle doit être ajoutée explicitement dans la limite dite de CBE, où les paires de fermions, assimilables à des bosons, forment un condensat en interaction faible.
- [42] On vérifie d'abord que les fluctuations de densité sur un même site sont faibles en valeur relative, en utilisant (B9). À $T = 0$, $\langle \delta\rho^2 \rangle / \rho^2 \approx \frac{\hbar}{mcb} \frac{1}{\rho b^3} \ll 1$, compte tenu de (B1) et de la note [41]. À $T > 0$ s'ajoute la contribution thermique $\approx \frac{\hbar}{mcb} \frac{(q_{th} b)^4}{\rho b^3}$, qui est de même $\ll 1$. On vérifie ensuite que les fluctuations de phase entre deux sites voisins sont faibles en valeur absolue. Pour cela, on constate d'abord, en utilisant (B10), que $b^2 \langle (\mathbf{grad} \delta\theta)^2 \rangle = (mcb/\hbar)^2 \langle \delta\rho^2 \rangle / \rho^2$. Il reste ensuite à utiliser la propriété $mc/(\hbar\rho^{1/3}) = O(1)$ qui vaut dans toute la zone de raccordement entre les limites de CBE et de BCS, ainsi que nos estimations précédentes de $\langle \delta\rho^2 \rangle / \rho^2$, pour conclure.