



HAL
open science

Quantification des fibrés des états.

Jean Louis Jonot

► **To cite this version:**

Jean Louis Jonot. Quantification des fibrés des états.. [Rapport de recherche] Académie de Versailles. 2015. hal-01114487v5

HAL Id: hal-01114487

<https://hal.science/hal-01114487v5>

Submitted on 17 Jul 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

QUANTIFICATION DES FIBRÉS DES ÉTATS

JONOT JEAN LOUIS

ABSTRACT. A chaque mesure physique est associée une observable d'un espace de Hilbert, les valeurs possibles correspondent aux valeurs propres de cette observable. Le but du travail, développé dans cet article, est d'appliquer ce principe à l'étude des états de l'univers Ω . Un état de l'univers est une section d'un fibré hilbertien ζ , de fibre un espace d'hilbert séparable \mathcal{H} et de base Ω . Une observable est une section du fibré $\mathcal{O}(\zeta)$ dont la fibre est formée de toutes les observables de \mathcal{H} . Le principe de quantification est donné par la théorie spectrale de Von Neumann et l'équation d'évolution correspondant à l'équation de Schrödinger est décrite de la façon suivante. Sur ζ , on définit une section de Dirac γ et une connexion ∇ . L'opérateur équivalent à l'halmiltonien s'écrit

$$\gamma \otimes \nabla,$$

et l'équation d'évolution le long d'un champ chronologique local T peut être défini à partir d'une métrique de Lorentz locale si γ est une section de Dirac à trace. L'équation de Schrödinger est

$$\gamma \otimes \nabla (s) = -i\lambda \nabla_T s,$$

où s est une section d'état de l'univers Ω et λ est une fonction de densité d'état.

Si le fibré d'état de l'univers est de dimension finie, les états possibles d'une particule en $\omega \in \Omega$, sont en nombre fini. Ces états dépendent du groupe fondamental de l'univers Ω et deux états sont liés par des chemins qui sont les relèvements des classes d'homotopie de $\pi_1(\Omega)$.

Ensuite, on introduit des outils mathématiques sur les fibrés des états ζ , tels que les notions de distributions et la diagonalisation d'un endomorphisme de fibré ζ pour définir deux quantifications supersymétriques

$$\{\mathcal{F}(\zeta, \xi), Q_L, \mathcal{L}, \Gamma\}$$

et

$$\{\mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{K}), Q_{\bar{L}}, \bar{\mathcal{L}}, \Gamma\}.$$

La deuxième quantification fait intervenir les espaces de Sobolev et une forme volume μ induite par une métrique riemannienne qui rend l'opérateur L densément défini et fermé.

1. LES ÉTATS DE L'UNIVERS Ω

Un espace de Banach complexe induit une structure de Banach réel en se restreignant à la multiplication d'un réel par un vecteur. Une application linéaire d'un espace de Banach dans un autre sera \mathbb{R} -linéaire si l'un au moins des deux espaces est réel, \mathbb{C} -linéaire sinon. Le produit d'un espace de banach par un autre est un espace de banach réel si l'un au moins des deux est réel, complexe sinon. Une bonne référence sur les notions de variété banachique, de fibré de banach et de

Date: Le 5 Janvier 2015 .

Key words and phrases. Connexion. Espace de Bose-Fermi-Fock. Distributions. Fibré hermitien. Espace de Hilbert. Espace de Sobolev. Section de Dirac. Variété de Banach.

C^∞ différentiabilité sur les variétés banachiques est développée dans les annexes de [13] page 143.

L'univers Ω est une C^∞ -variété, connexe, de dimension 4. Un fibré sur l'univers Ω est un fibré de fibre un espace d'hilbert *séparable* \mathcal{H} , noté

$$\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{H})$$

où E est l'espace total de ζ . Par la suite, on ne parlera que du fibré E , s'il n'y a aucune confusion.

L'espace E est modelé sur $\mathbb{R}^4 \times \mathcal{H}$ qui a une structure d'espace de banach réel. On peut appliquer la théorie des fibrés des espaces de banach au fibré des états de l'univers. Sur chaque fibre E_ω , il existe un produit scalaire hermitien de classe C^∞ , c'est-à-dire, pour toutes sections s et t de $\Gamma(E)$, l'application

$$\omega \rightarrow \langle s(\omega) | t(\omega) \rangle_\omega$$

est C^∞ comme application de Ω dans \mathbb{C} .

Ce fibré ζ est muni d'une connexion ∇ , c'est-à-dire, d'une application \mathbb{C} -linéaire continue

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(\Lambda^1 \Omega \otimes E)$$

qui vérifie la relation de Leibnitz

$$\nabla(\phi s) = d\phi \otimes s + \phi \nabla s, \forall \phi \in C^\infty(\Omega).$$

On rappelle que l'espace vectoriel des sections de E , noté $\Gamma(E)$, est formé des C^∞ -applications d'une variété de banach dans une autre, $s : \Omega \rightarrow E$ telles que

$$\pi \circ s = Id_\Omega.$$

La continuité de ∇ est définie dans le sens suivant, pour chaque compact K , l'application de restriction à K

$$\nabla_K : s|_K \rightarrow \nabla s|_K$$

est continue pour les normes $\|s\|_K = \sup \{ \sqrt{\langle s(\omega) | s(\omega) \rangle_\omega} : \omega \in K \}$ et

$$\|d \otimes s\|_K = \sup \{ \|s\|_K, \|d\|_K \}$$

sur le fibré $\Lambda^1 \Omega \otimes E$, où

$$\|d\|_K = \sup \{ \|d_\omega\| : \omega \in K \}$$

avec

$$\|d_\omega\| = \sup \{ |d_\omega(u)| : g(\omega)(u, u) \leq 1, u \in T_\omega \Omega \}$$

et g est une métrique riemannienne fixée sur Ω .

Sur $\Lambda^1 \Omega \otimes E$, les fibres ont une structure complexe définie par

$$\lambda.(d(\omega) \otimes s(\omega)) = d(\omega) \otimes (\lambda s(\omega)), \lambda \in \mathbb{C}$$

on peut parler de la \mathbb{C} -linéarité.

La connexion ∇ a une autre représentation notée encore ∇ ,

$$\nabla : \Gamma(T\Omega) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E), (X, s) \rightarrow \nabla_X s$$

$\nabla_X s$ est la dérivée covariante de s , le long du champ X et vérifie

$$\nabla_{fX+gY} s = f \nabla_X s + g \nabla_Y s,$$

$$\nabla_X (s+t) = \nabla_X s + \nabla_X t,$$

et

$$\nabla_X (fs) = df(X)s + f \nabla_X s. \tag{1.1}$$

Dans cette représentation on impose à la forme bilinéaire

$$\nabla_K : (X, s) |_K \rightarrow \nabla_X s |_K$$

qu'elle soit continue pour les normes $\|X\|_K$ et $\|s\|_K$ définies sur tout compact K , la norme $\|X\|_K$ est définie par

$$\|X\|_K = \sup \{g(\omega)(X(\omega) | X(\omega)) : \omega \in K\}$$

où g est la métrique riemannienne sur Ω donnée plus haut. Les deux notions précédentes sont équivalentes.

On se fixe ensuite une section de Dirac γ de E , c'est-à-dire, un élément de

$$\text{Hom}(\Lambda^1 \Omega \otimes E, E) \approx \text{Hom}(\Lambda^1 \Omega, \text{End}(E)),$$

$$\omega \rightarrow \gamma(\omega) : T_\omega^* \Omega \otimes E_\omega \rightarrow E_\omega.$$

On pose γ^d , l'endomorphisme de Dirac associé à $d \in \Lambda^1 \Omega$

$$\gamma^d(\omega) : E_\omega \rightarrow E_\omega, \gamma^d(\omega)(v) = \gamma(\omega)(d(\omega) \otimes v), \forall v \in E_\omega$$

on suppose que $\gamma^d(\omega)$ est un opérateur borné pour la structure de Hilbert de E_ω pour tout $\omega \in \Omega$ et l'application

$$\omega \rightarrow \gamma^d(\omega)$$

est C^∞ dans le sens suivant, pour toute section s de E l'application

$$\omega \rightarrow \gamma^d(\omega)(s(\omega))$$

est C^∞ comme application entre la variété Ω et la variété de banach E .

Definition 1. 1) Un fibré d'état de l'univers Ω est un fibré $\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{H})$ muni d'un produit hermitien C^∞ , d'une connexion ∇ et d'une section de Dirac γ à trace.

2) La section de Dirac est une section à trace si pour toute carte U de Ω et toute 1-forme d définie sur cette carte, l'application $\gamma^d(\omega)$ est un opérateur borné à trace de E_ω pour tout $\omega \in U \subset \Omega$.

On choisit une section de Dirac à trace. Sur une carte U où le fibré tangent est trivialisable, on pose $\{\partial_\mu, \mu = 1, 2, 3, 4\}$ le "local frame" associé à la carte U , $\{d^\mu, \mu = 1, 2, 3, 4\}$ le "local frame" dual et $\gamma^\mu = \gamma^{d^\mu}$ les endomorphismes de Dirac associés à la base duale d^μ . Le tenseur de Poisson est défini par

$$\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{8} \text{Trace}(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}) = \frac{1}{4} \text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\nu). \quad (1.2)$$

Pour chaque $\omega \in \Omega$, $\gamma^\mu(\omega)$ est un opérateur de l'espace d'hilbert E_ω qui est un opérateur borné à trace de E_ω pour $\mu = 1, 2, 3, 4$, ils forment un idéal des opérateurs bornés donc 1.2 a un sens. Le tenseur de Poisson est un tenseur symétrique, on suppose que la matrice $(\gamma^{\mu\nu})$ est inversible et que sa matrice inverse $(\gamma_{\mu\nu})$ définit, sur la carte U , une métrique de Lorentz g_γ par

$$g_\gamma(\partial_\mu, \partial_\nu) = \gamma_{\mu\nu}. \quad (1.3)$$

Definition 2. La section des groupes de Dirac est définie par

$$\mathcal{D} = \{\gamma^d : d \in \Lambda^1 \Omega\}$$

où

$$\mathcal{D}(\omega) = \{\gamma^d(\omega) : E_\omega \rightarrow E_\omega : d \in \Lambda^1 \Omega\}$$

avec

$$\gamma^d(\omega)(\nu) = \gamma(\omega)(d(\omega) \otimes \nu), \nu \in E_\omega.$$

On s'inspire de l'article [4], pour fixer des conditions supplémentaires sur \mathcal{D} . Les hypothèses sont les suivantes, si on munit Ω d'une métrique Lorentzienne h , on veut localement sur toute carte

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2h^{\mu\nu} Id_E. \quad (1.4)$$

Remark 1. Avec une base de 1-formes $\{\delta_\mu\}$ pour laquelle

$$\frac{1}{4} \text{Trace}(\{\gamma^{\delta_\mu}, \gamma^{\delta_\nu}\}) = \delta_{\mu\nu} \text{ si } (\mu, \nu) \neq (1, 1) \text{ et } \frac{1}{4} \text{Trace}(\{\gamma^{\delta_1}, \gamma^{\delta_1}\}) = -1$$

l'opérateur

$$J = \gamma^{\delta_1}$$

définit une structure presque complexe sur le fibré d'état restreint à U , noté $E(U)$, quand la relation 1.4 est vérifiée.

L'opérateur

$$\gamma \otimes \nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$$

défini par

$$\gamma \otimes \nabla(s)(\omega) = \gamma(\omega)(\nabla s(\omega)), \omega \in \Omega$$

est l'opérateur d'état du fibré E associé à la connexion ∇ et à la section de Dirac γ . L'équation d'état est donnée localement sur un ouvert U par une équation de la forme

$$\gamma \otimes \nabla(s)(\omega) = \lambda(\omega) s(\omega), \omega \in U$$

on écrira simplement

$$\gamma \otimes \nabla(s) = \lambda s, \quad (1.5)$$

sans préciser l'ouvert U où cette équation est définie.

L'équation d'évolution du fibré le long d'un champ chronologique T est définie par

$$\gamma \otimes \nabla(s) = \lambda \nabla_T s, \quad (1.6)$$

cette équation d'évolution le long du champ chronologique T est définie localement, la fonction λ est appelée fonction de densité d'état complexe.

Remark 2. Si on prend la dérivée covariante, le long du champ chronologique T , l'équation 1.6 permet d'écrire

$$\nabla_T \circ (\gamma \otimes \nabla)(s) = \nabla_T(\gamma \otimes \nabla(s)) = d\lambda(T)s + \lambda \nabla_T s. \quad (1.7)$$

Dans l'article [7], l'équation 1.7 a été nommée équation de Dirac-Weyl-Fock. Cette terminologie prête à confusion puisque l'équation de Dirac-Weyl-Fock est déjà définie dans certains articles sous une autre forme, on peut consulter [12].

Les équations 1.6 et 1.7 peuvent être comparées aux équations données dans [12], dans le cas où $E = T\Omega \otimes \mathbb{C}$. Par analogie, l'équation de Dirac classique est de la forme 1.6.

Sur Ω on a une métrique pseudo-riemannienne qui permet de définir une forme volume μ . Dans une carte, si Ω est orientable cette forme volume s'écrit

$$\mu = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} d^1 \wedge d^2 \wedge d^3 \wedge d^4,$$

les sections s telles que

$$\int_{\Omega} \langle s | s \rangle \mu = \int_{\Omega} \langle s(\omega) | s(\omega) \rangle_{\omega} \mu(\omega) < +\infty$$

sont les sections de carré intégrable, le complété de ces sections est étudié comme un espace de Sobolev particulier dans la section espaces de Sobolev associé au fibré des états de l'univers.

Definition 3. *Pour cette métrique pseudo-riemannienne, la probabilité de trouver la particule dans une région V de l'univers Ω dans l'état s est*

$$p(V) = \frac{\int_V \langle s | s \rangle \mu}{\int_{\Omega} \langle s | s \rangle \mu}.$$

Remark 3. *Les sections d'état telles que $\int_{\Omega} \langle s | s \rangle \mu = 1$ sont les sections unitaires pour la métrique g .*

2. LES PRINCIPES DE QUANTIFICATION D'UN FIBRÉ DES ÉTATS

Principe 1: *L'état d'un système physique est défini, par une section s d'un fibré hilbertien E , dit fibré des états.*

Principe 2: *A toute observable \mathcal{A} est associée une section \mathcal{A}_E de $\mathcal{O}(E)$, formée des éléments de $\text{End}(E)$, self-adjoints. On dit que \mathcal{A}_E est l'observable quantique de la grandeur physique \mathcal{A} .*

Principe 3: *Quelque soit la section s du système où l'on effectue la mesure de la grandeur \mathcal{A} , les seuls résultats possibles sont les fonctions propres de \mathcal{A}_E .*

Principe 4: *Si s représente l'état normalisé du système, la probabilité de trouver la fonction λ lors d'une mesure de \mathcal{A} dans Δ est*

$$P_{s, \mathcal{A}_E}(\lambda) = P_{s, \mathcal{A}_E}(\Delta)$$

où

$$P_{s, \mathcal{A}_E}(\Delta)(\omega) = P_{s(\omega), \mathcal{A}_E(\omega)}(\Delta(\omega))$$

avec $\Delta(\omega) =]\lambda_1(\omega), \lambda_2(\omega)]$ si le spectre de s est continu. Si le spectre est discret, cette probabilité est

$$P_{s, \mathcal{A}_E}(\lambda)(\omega) = P_{s(\omega), \mathcal{A}_E(\omega)}(\lambda(\omega)).$$

Principe 5: *L'état du système immédiatement après une mesure ayant donnée la fonction λ est*

$$\tilde{s} = \frac{P_{E_{\lambda}}(s)}{\|P_{E_{\lambda}}(s)\|},$$

où $\tilde{s}(\omega) = P_{E_{\lambda(\omega)}}(s(\omega))$ et $P_{E_{\lambda(\omega)}}$ est le projecteur sur le sous-espace propre $E_{\lambda(\omega)}$ associé à la valeur propre $\lambda(\omega)$ de $\mathcal{A}_E(\omega)$.

Principe 6: *Soit $s(\omega_0)$, l'état du système en ω_0 dans une carte U de Ω , tant que le système n'est soumis à aucune observation, son évolution le long d'un champ chronologique T associé au tenseur de Poisson $\gamma^{\mu\nu}$ est localement*

$$Hs = -i\lambda\nabla_T s$$

, où $H = \gamma \otimes \nabla$, γ est la section de Dirac et ∇ est la connexion qui sont associées au fibré des états, de condition initiale $s(\omega_0)$. Le champ chronologique T est défini à partir de la métrique de Lorentz g_{γ} dont la matrice dans le local frame est $(\gamma_{\mu\nu})$. La fonction λ est une fonction C^{∞} qui est à valeur réelle, appelée densité d'état réelle.

Le théorème de Von Neumann permet de définir une mesure spectrale pour l'opérateur self-adjoint ou autoadjoint $\mathcal{A}_E(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. On peut consulter [6] sur ce principe de quantification. Pour la définition d'un champ chronologique par rapport à une métrique de Lorentz on peut consulter [8].

3. DENSITÉS D'ÉTAT DE L'UNIVERS ET STRUCTURE COMPLEXE

Pour un fibré d'état $\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{H})$, $\mathcal{O}(\zeta)$ est le sous-fibré de $\text{End}(\zeta)$ dont la fibre est formée des éléments de $\text{End}(\mathcal{H})$ qui sont autoadjoints. Soit \mathcal{A}_E un élément de $\Gamma(\mathcal{O}(\zeta))$, pour chaque $\omega \in \Omega$, l'application

$$\mathcal{A}_E(\omega) : E_\omega \rightarrow E_\omega$$

est une observable de E_ω . Une fonction $\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction localement propre de \mathcal{A}_E si en chaque point $\omega_0 \in \Omega$, il existe une carte U et une section locale s sur U , non nulle sur U pour laquelle

$$\mathcal{A}_E(\omega)(s(\omega)) = \lambda(\omega)s(\omega)$$

pour tout $\omega \in U$. La section s est une section locale propre associée à la fonction λ . On note $E_\omega(\lambda)$, le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda(\omega)$. Soit

$$E(\lambda) = \cup_{\omega \in \Omega} E_\omega(\lambda),$$

et

$$\zeta(\lambda) = (E(\lambda), \pi_\lambda, \Omega)$$

où $\pi_\lambda = \pi|_{E(\lambda)}$. Si $\zeta(\lambda)$ est un sous-fibré de ζ , on dit que λ est une fonction propre et $\zeta(\lambda)$ est le sous-fibré propre associé à la fonction propre λ , $\dim \zeta(\lambda)$ est la dimension de $\zeta(\lambda)$. La section \mathcal{A}_E de $\mathcal{O}(\zeta)$ est diagonalisable s'il existe une suite $\{\lambda_j\}$ de fonctions propres telles que ζ soit la somme de Whitney des sous-fibrés propres $\zeta(\lambda_j)$

$$\zeta = \oplus_j \zeta(\lambda_j).$$

Proposition 1. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une section \mathcal{A}_E de $\mathcal{O}(\zeta)$ soit diagonalisable est qu'il existe une suite de fonctions propres $\{\lambda_j\}$ telle que*

$$\mathcal{H} = \oplus_j \mathcal{H}_j,$$

où \mathcal{H}_j est la fibre du fibré hilbertien $\zeta(\lambda_j)$.

Proof. Chaque fibre $E_\omega(\lambda_j) = \text{Ker}(\mathcal{A}_E(\omega) - \lambda_j(\omega) \text{Id}_{E_\omega})$ est hilbertienne comme sous-espace fermé de E_ω . La condition $\mathcal{H} = \oplus_j \mathcal{H}_j$ est réalisée si et seulement si sur chaque fibre

$$E_\omega = \oplus_j E_\omega(\lambda_j),$$

et

$$\zeta = \oplus_j \zeta(\lambda_j).$$

□

Remark 4. 1) Si ∇^j est une connexion définie sur $\zeta(\lambda_j)$ alors

$$\nabla s = \nabla^j s_j \tag{3.1}$$

avec $s = \sum_j s_j$ est une connexion sur ζ . Une connexion ∇ qui vérifie l'équation 3.1 est une \mathcal{A} -connexion.

2) Si $\dim(\zeta) < +\infty$ et L est une section de $\text{End}(\zeta)$ alors L est diagonalisable, au sens des fibrés vectoriels si

$$\dim(\zeta) = \sum_{\lambda \in \text{Spect}(L)} \dim \zeta(\lambda),$$

où $\text{Spect}(L)$ est formé des fonctions propres de L .

Definition 4. Une densité d'état de l'observable \mathcal{A}_E est une fonction propre λ de \mathcal{A}_E .

Remark 5. On peut définir une représentation géométrique de l'univers Ω , en utilisant la densité des fonctions de Morse pour la C^∞ -topologie fine de Whitney dans $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. On approche chaque fonction λ de densité d'état par une fonction de Morse Λ , et on applique le procédé de géométrisation développé dans [8].

Definition 5. La forme différentielle d est γ -diagonalisable si et seulement si γ^d est diagonalisable au sens des fibrés.

Si d est γ -diagonalisable alors toute section s peut s'écrire localement

$$s = \sum_j s^j,$$

où s^j est une section locale de $E(\lambda_j)$ associée à la fonction propre λ_j et

$$\gamma^d(s) = \sum_j \lambda_j s^j = \lambda_j s^j,$$

en utilisant le principe de sommation d'Einstein au somme infinie. Si γ est une section de Dirac à trace

$$\text{Trace } \gamma^d = \sum_j n_j \lambda_j \text{ et } \det \gamma^d = \prod_j \lambda_j^{n_j},$$

où $n_j(\omega) = \dim E(\lambda_j(\omega)) < +\infty$, avec

$$\sum_j n_j(\omega) |\lambda_j(\omega)| < +\infty \text{ et } \prod_j |\lambda_j(\omega)|^{n_j(\omega)} < +\infty$$

pour tout $\omega \in \Omega$.

Une C^∞ -section polynomiale est une section du fibré de base Ω et de fibre $\mathbb{C}[X]$

$$\omega \rightarrow P(\omega), P(\omega)(X) \in \mathbb{C}[X]$$

où $P(\omega)(X)$ est un polynôme de degré fini de la variable X , noté $\deg P(\omega)$. La notion de C^∞ -section est définie dans le sens suivant,

$$(\omega, X) \rightarrow P(\omega)(X)$$

est C^∞ comme application $\Omega \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. En particulier, $\deg P(\omega)$ est indépendant du choix de ω , on le note $\deg P$.

La section polynomiale P , de degré minimal, pour laquelle

$$P(\omega)(\gamma^d(\omega)) = 0,$$

est la section minimale associée à γ^d . Si

$$P(\omega)(X) = X^2 + 1$$

on dit que γ^d définit une structure presque complexe sur le fibré des états ζ .

Une structure complexe sur le fibré des états $\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{H})$ est un automorphisme de fibré

$$J : E \rightarrow E$$

tel que

$$J^2 = -Id,$$

c'est-à-dire, de polynôme minimal $X^2 + 1$.

Les fonctions propres de J sont les fonctions constantes

$$\lambda = i \text{ et } \bar{\lambda} = -i,$$

les sous-fibrés propres $\zeta^{1,0}$ et $\zeta^{0,1}$ associés vérifient

$$\zeta = \zeta^{1,0} \oplus \zeta^{0,1},$$

on définit un scindage de ζ , toute section s s'écrit

$$s = s^{1,0} + s^{0,1}, \quad s^{1,0} = \frac{1}{2}(s - iJs) \text{ et } s^{0,1} = \frac{1}{2}(s + iJs).$$

Les sections s de bidegré $(1,0)$ sont les sections de $\zeta^{1,0}$ et les sections s de bidegré $(0,1)$ formées des sections de $\zeta^{0,1}$, alors

$$\Gamma(\zeta) = \Gamma(\zeta^{1,0}) \oplus \Gamma(\zeta^{0,1}).$$

L'application

$$\mathcal{Q} : \Gamma(\zeta^{1,0}) \rightarrow \Gamma(\zeta^{0,1}), \quad \mathcal{Q}(s^{1,0}) = s^{0,1}$$

est l'opération de conjugaison. Sur ζ , on a défini un produit scalaire hermitien C^∞ , c'est-à-dire, pour toutes sections s et t , l'application

$$\omega \rightarrow \langle s(\omega) | t(\omega) \rangle_\omega$$

est C^∞ comme application de Ω dans \mathbb{C} . Le fibré dual de ζ , noté ζ^* , donne un isomorphisme canonique de $\Gamma(\zeta)$ dans $\Gamma(\zeta^*)$ défini par

$$\mathcal{R} : \Gamma(\zeta) \rightarrow \Gamma(\zeta^*), \quad \mathcal{R}(s) = s^*$$

avec

$$s^*(\omega)(v) = \langle s(\omega) | v \rangle_\omega, \quad v \in E_\omega(\zeta).$$

Cet isomorphisme est appelé isomorphisme de Riesz. L'opérateur J induit un opérateur, noté J^* , défini par

$$J^*(\omega)(\xi(\omega))(w) = \xi(\omega)\left(J(\omega)^{-1}(w)\right) = -\xi(\omega)(J(\omega)(w)), \quad w \in E_\omega(\zeta)$$

pour toute $\xi \in \Gamma(\zeta^*)$ et $\omega \in \Omega$. L'automorphisme J^* du fibré ζ^* définit une structure complexe sur ζ^* . On a le scindage

$$\wedge^r \zeta = \bigoplus_{p+q=r} \wedge^{p,q} \zeta$$

où

$$\wedge^{p,q} \zeta = \wedge^p (\zeta^{1,0})^* \wedge^q (\zeta^{0,1})^*,$$

les formes différentielles de ζ de bidegré (p,q) sont les sections $\wedge^{p,q} \zeta$. L'opération de conjugaison s'étend à

$$\mathcal{Q} : \wedge^{p,q} \zeta \rightarrow \wedge^{q,p} \zeta, \quad \mathcal{Q}(\xi) = \bar{\xi}.$$

On a pour tout $\xi \in \wedge^r \zeta$,

$$J^* \xi(s_1, \dots, s_r) = (-1)^r \xi(Js_1, \dots, Js_r)$$

et ainsi

$$J^{*2} |_{\wedge^r \zeta} = (-1)^r Id_{\wedge^r \zeta}.$$

Si $\xi \in \wedge^{p,q} \zeta$ alors

$$J^* \xi = (-1)^{p+q} i^{p-q} \xi,$$

avec cette convention le dual de $\zeta^{1,0}$ est le sous-espace complexe des formes ξ telles que

$$J^* \xi = -i\xi$$

et

$$\zeta^* = (\zeta^{1,0})^* \oplus (\zeta^{0,1})^*$$

toute forme différentielle ξ du fibré d'état s'écrit

$$\xi = \eta + \bar{\eta}$$

avec

$$\eta = \frac{1}{2}(\xi + iJ^*\xi) \text{ et } \bar{\eta} = \frac{1}{2}(\xi - iJ^*\xi).$$

Definition 6. Soit L un automorphisme diagonalisable du fibré ζ . On dit qu'une connexion ∇ est une L -connexion si et seulement si il existe sur chaque fibré propre $E(\lambda_j)$ une connexion ∇_j telle que

$$\nabla s = \nabla_j s^j$$

où

$$s = \sum_j s^j, s^j \in \Gamma(E(\lambda_j)).$$

Proposition 2. Pour une J -connexion ∇ , si $\nabla_{1,0}$ est la connexion de $\zeta^{1,0}$ associée à ∇ et $\nabla_{0,1}$ est la connexion de $\zeta^{0,1}$ associée à ∇ alors

$$\nabla_{1,0} = \frac{1}{2}(\nabla - i\nabla J) = \frac{1}{2}\nabla \circ (Id - iJ) \text{ et } \nabla_{0,1} = \frac{1}{2}(\nabla + i\nabla J) = \frac{1}{2}\nabla \circ (Id + iJ).$$

Remark 6. Pour toute métrique riemannienne g , on peut définir l'isomorphisme de Riesz sur le fibré tangent $T\Omega$ en posant

$$\mathcal{R}_g : \Gamma(T\Omega) \rightarrow \Gamma(T^*\Omega), \mathcal{R}_g(X) = d_X$$

où

$$d_X(\omega)(v) = g(\omega)(X(\omega), v),$$

pour tout $v \in T_\omega\Omega$. Ainsi, à partir d'une métrique riemannienne g , on construit une section de Dirac γ

$$\gamma(d \otimes s) = \gamma^d(s) = \nabla_{\mathcal{R}_g^{-1}(d)} s$$

et on prolonge par \mathbb{C} -linéarité sur chaque fibre. On impose que γ soit $C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ -linéaire, c'est-à-dire, on admet l'existence d'une section $\alpha \in \Gamma\left(\left(\wedge^1\Omega \otimes E\right)^*, E\right)$ telle que

$$\gamma(t)(\omega) = \alpha(t(\omega)),$$

pour tout $t \in \Gamma(\wedge^1\Omega \otimes E)$ et $\omega \in \Omega$. On peut consulter [5] pour une preuve de l'existence et l'unicité de α en dimension finie.

5. LES FIBRÉS DES ÉTATS DE L'UNIVERS EN DIMENSION FINIE

Dans ce qui suit $\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{H})$ est un fibré hermitien de dimension finie. Sur une carte U où le fibré tangent et le fibré d'état sont trivialisables, on pose $\{\partial_\mu, \mu = 1, 2, 3, 4\}$ le "local frame" associé à la carte U et $\{s_\nu, \nu = 1, 2, \dots, m\}$ une base de sections du fibré des états restreint à U . On pose $\{d^\mu, \mu = 1, 2, 3, 4\}$ le "local frame" dual et $\gamma^\mu = \gamma^{d^\mu}$ les endomorphismes de Dirac associés, représentés par

des matrices carrées d'ordre m dans la base $\{s_\nu, \nu = 1, 2, \dots, m\}$. Le tenseur de Poisson est défini par

$$\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{8} \text{Trace}(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}),$$

il est indépendant du choix de la base $\{s_\nu, \nu = 1, 2, \dots, m\}$.

L'équation 1.3 permet d'écrire une équation entre la courbure de Ricci, la courbure scalaire et le tenseur de Poisson associé à la section de Dirac γ si on fait l'hypothèse pour g_γ d'être une métrique qui vérifie l'équation relativiste d'Einstein, on obtient

$$\text{Ric}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \gamma_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} + \Lambda \gamma_{\mu\nu} \quad [6], \quad (5.1)$$

où $(\gamma_{\mu\nu}) = (\gamma^{\mu\nu})^{-1}$.

Si on suppose que la fibre F est une C^∞ -variété, une connexion généralisée ∇ sur un fibré $\zeta = (E, \pi, \Omega, F)$, de fibre F et de groupe structural $\mathcal{G} \subset \text{Diff}(F)$, est la donnée pour tout $x \in E$, d'un sous-espace vectoriel $\tau(x)$ contenu dans $T_x E$ tel que

$$\tau(x) \xrightarrow{T_x \pi} T_{\pi(x)} \Omega$$

soit un isomorphisme et $x \rightarrow \tau(x)$ est C^∞ , c'est-à-dire, localement il existe une famille libre de champs $\{s_\mu\}$ de E telle que

$$\tau(x) = \text{Vect}\{s_\mu(x)\},$$

et les changements de repère sont à valeurs dans \mathcal{G}

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathcal{G}.$$

Remark 7. *En général, la fibre est un groupe de Lie.*

Localement, la connexion est définie en fixant un nombre fini de formes différentielles sur E . Si

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, \dots, y_m), \quad \dim F = m$$

un système de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) correspond aux coordonnées horizontales et (y_1, \dots, y_m) correspond aux coordonnées verticales qui est un système de coordonnées sur la variété F . On est sur une carte U où le fibré est trivialisable. Dans ce système de coordonnées toute forme différentielle s'écrit, en utilisant le principe de sommation d'Einstein,

$$\lambda_\alpha = a_{\alpha\mu} d^\mu + b_{\alpha\nu} \delta^\nu, \quad d^\mu = dx_\mu \quad \text{et} \quad \delta^\nu = dy_\nu. \quad (5.2)$$

La connexion généralisée $\tau(x)$ est l'intersection de ces formes, la condition de transversabilité aux fibres est donnée par l'inversibilité de la matrice

$$(b_{\alpha\nu}).$$

Si une particule parcourt le chemin paramétré par

$$\gamma : I = [0; 1] \rightarrow \Omega,$$

et l'état de la particule est $e_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$, on peut décrire l'état de la particule en $\gamma(1)$, que l'on note e_1 , comme suit.

Theorem 1. *Avec les hypothèses précédentes, il existe un unique chemin de changement des états de la particule, $\Gamma : [0; 1] \rightarrow E$ vérifiant*

$$\Gamma(0) = e_0,$$

$$\pi \circ \Gamma = \gamma,$$

et

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} \in \tau(\Gamma(t)), \forall t \in I.$$

Proof. Localement, $x_\mu = \gamma_\mu(t)$, on veut définir $y_\nu = \Gamma_\nu(t)$,

$$\lambda_\alpha(\gamma) = \sum_{\mu=1}^4 a_{\alpha\mu} \frac{d\gamma_\mu}{dt} + \sum_{\nu=1}^m b_{\alpha\nu} \frac{d\Gamma_\nu}{dt} = 0, \forall \alpha = 1, \dots, m. \quad (5.3)$$

On est donc amené à résoudre, si $b_\alpha = -\sum_{\mu=1}^4 a_{\alpha\mu} \frac{d\gamma_\mu(t)}{dt}$, le système

$$\sum_{\nu=1}^m b_{\alpha\nu} \frac{d\Gamma_\nu}{dt} = b_\alpha,$$

la matrice $B = (b_{\alpha\nu})$ est inversible, donc

$$\left(\frac{d\Gamma_\nu}{dt} \right) = B^{-1}(b_\alpha).$$

On en déduit, $\frac{d\Gamma_\nu}{dt}$ et Γ_ν , l'unicité est fixée par l'état initial e_0 . \square

Definition 7. Avec les notations précédentes, l'état final e_1 de la particule est

$$e_1 = \Gamma(1).$$

On note pour une particule en $\omega \in \Omega$

$$\Omega_\omega = \{\gamma : I \rightarrow \Omega : \gamma(0) = \gamma(1) = \omega\}.$$

Pour chaque chemin $\gamma \in \Omega_\omega$, on peut définir un difféomorphisme de la fibre des états $\pi^{-1}(\omega)$ comme suit

$$H_\gamma(e) = \Gamma_e(1)$$

où Γ_e est l'unique relèvement Γ de γ pour l'état e , c'est-à-dire, $\Gamma(0) = e$. L'application d'holonomie associée est

$$H_\omega : \Omega_\omega \rightarrow \text{Diff } \pi^{-1}(\omega), \gamma \rightarrow H_\omega(\gamma).$$

Proposition 3. 1) $H_\omega(\gamma_1\gamma_2) = H_\omega(\gamma_2)H_\omega(\gamma_1)$ et $H_\omega(\mathbf{1}) = \text{Id}_F$.

2) Si γ_1 et γ_2 sont homotopes $H_\omega(\gamma_1) = H_\omega(\gamma_2)$, l'application

$$\Pi : \pi_1(\Omega) \rightarrow \text{Diff } F, \Pi(\tilde{\gamma}) = p_\omega \circ H_\omega(\gamma)$$

est homomorphisme de groupe, p_ω est le difféomorphisme canonique de $\pi^{-1}(\omega)$ sur F .

Remark 8. Dans l'hypothèse où le système de Pfaff $x \rightarrow \tau(x)$ est involutif, c'est-à-dire, quand la connexion ∇ est plate et si la fibre F est une variété fermée on peut reconstituer géométriquement l'espace total des états E ,

$$E \simeq \frac{\tilde{\Omega} \times F}{\pi_1(\Omega)}$$

$\tilde{\Omega}$ représente le revêtement universel de l'univers Ω .

Si deux chemins γ_1 et γ_2 de Ω_ω sont homotopes alors

$$H_\omega(\gamma_1) = H_\omega(\gamma_2),$$

en particulier, si l'un des états de la particule est e en l'événement $\omega \in \Omega$, les autres états possibles de cette particule sont

$$H_\gamma(e), \tilde{\gamma} \in \pi_1(\Omega, \omega),$$

le groupe $\pi_1(\Omega, \omega)$ est discret et l'ensemble des états possibles de la particule est discret. Le groupe fondamental de l'univers Ω décrit l'ensemble des états d'une particule comme le groupe

$$G_{\omega, e} = \{H_\omega(\gamma)(e) : \tilde{\gamma} \in \pi_1(\Omega, \omega)\},$$

muni du produit canonique induit par $\pi_1(\Omega, \omega)$. On pose

$$H_{\omega, e} : \pi_1(\Omega, \omega) \rightarrow G_{\omega, e} \text{ où } H_{\omega, e}(\tilde{\gamma}) = H_\omega(\gamma)(e),$$

alors on a l'isomorphisme

$$G_{\omega, e} \simeq \frac{\pi_1(\Omega, \omega)}{\ker(H_{\omega, e})}.$$

6. LA RELATION FONDAMENTALE ENTRE LA CONNEXION ∇ ET LA CONNEXION GÉNÉRALISÉE

Soit $\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{H})$ un fibré d'état de l'univers Ω , pour chaque section s de ζ ,

$$s : \Omega \rightarrow E, \quad \pi \circ s = Id_\Omega$$

on a

$$Ts : T\Omega \longrightarrow TE, \quad T\pi \circ Ts = Id_{T\Omega},$$

l'espace tangent $T_{s(\omega)}E$ contient l'espace tangent à la fibre E_ω , à savoir $T_{s(\omega)}E_\omega$, qui est le noyau de $T_{s(\omega)}\pi$ et est canoniquement isomorphe à E_ω . La suite

$$o \rightarrow E_\omega \rightarrow T_{s(\omega)}E \xrightarrow{T_{s(\omega)}\pi} T_\omega\Omega \rightarrow o$$

est exacte car $T\pi \circ Ts = Id_{T\Omega}$. Lorsque cette suite est scindée, c'est-à-dire, lorsque

$$T_{s(\omega)}E \simeq E_\omega \oplus T_\omega\Omega$$

tel que l'inclusion $E_\omega = E_\omega \times \{o\} \subset T_{s(\omega)}E$ soit l'inclusion $E_\omega \rightarrow T_{s(\omega)}E$ et la seconde projection

$$T_{s(\omega)}E \simeq E_\omega \oplus T_\omega\Omega \rightarrow T_\omega\Omega$$

soit égale à $T_{s(\omega)}\pi$, on en déduit alors, de

$$T_\omega s \in \text{Hom}(T_\omega\Omega, T_{s(\omega)}E)$$

un élément de $\Lambda_\omega^1\Omega \otimes E_\omega \simeq \text{Hom}(T_\omega\Omega, E_\omega)$ défini par

$$pr_\omega \circ T_\omega s,$$

pr_ω est la projection sur E_ω parallèlement à $T_\omega\Omega$ dans le scindage

$$T_{s(\omega)}E \simeq E_\omega \oplus T_\omega\Omega.$$

Si on se fixe un sous-fibré du fibré tangent de E , noté $\tau(E)$, tel que

$$T(E) = \ker T\pi \oplus \tau(E)$$

et une application $\theta : x \in E \rightarrow \theta(x)$, $\theta(x)$ est un isomorphisme de $\ker T_x\pi$ sur $E_{\pi(x)}$, c'est-à-dire, une section d'homomorphismes de fibrés vectoriels de base E , d'espace total respectivement

$$\cup_{x \in E} \ker T_x\pi \text{ et } \cup_{x \in E} \{x\} \times E_{\pi(x)},$$

de projection $\pi|_{\cup_{x \in E} \ker T_x\pi}$ pour le premier fibré, qui est un sous-fibré du fibré tangent à E et $p(x, u) = x$ pour le second fibré. Pour toute section s de ζ , la valeur de la connexion ∇ en s est

$$\nabla s = \theta \circ pr \circ Ts,$$

où pr est la projection sur $\ker T\pi$ parallèlement à $\tau(E)$. L'isomorphisme

$$\theta(x) : \ker T_x\pi \rightarrow E_{\pi(x)}$$

est défini par, si $in_{\pi(x)}$ est l'inclusion naturelle de $E_{\pi(x)}$ dans E ,

$$T_x in_{\pi(x)} : T_x E_{\pi(x)} \rightarrow T_x E$$

est un isomorphisme de $T_x E_{\pi(x)}$ sur $\ker T_x\pi$ et

$$\theta(x) = pr_2(x) \circ (T_x in_{\pi(x)})^{-1}$$

où

$$pr_{\pi(x)} : T_x E_{\pi(x)} = E_{\pi(x)} \times E_{\pi(x)} \rightarrow E_{\pi(x)}, pr_{\pi(x)}(y, u) = u.$$

Theorem 2. *Une connexion est la donnée d'un scindage*

$$T_x E \simeq E_{\pi(x)} \oplus T_{\pi(x)}\Omega,$$

en tout point $x \in E$, variant de façon C^∞ avec x , qui est compatible avec la structure de fibré vectoriel de ζ .

Proof. La preuve est dans le théorème 2.3.2 [15]. □

Remark 9. *On note $\ker(\zeta)$ le fibré défini par*

$$\ker(\zeta) = (\cup_{x \in E} \ker T_x\pi, \pi, E, \mathcal{H}),$$

l'isomorphisme de fibré vectoriel θ permet de définir sur $\ker(\zeta)$ une structure de fibré hermitien. Pour chaque x de E , $\theta(x)^{-1}$ transporte le produit hermitien de $E_{\pi(x)}$ sur $\ker T_x\pi$. Si τ est une connexion généralisée sur le fibré ζ , le fibré $(\cup_x \tau(x), \pi, E, \mathbb{R}^4)$ permet de définir sur E une métrique dont la forme quadratique est définie par,

$$Q_E(X) = \langle X_1 | X_1 \rangle + Q(T\pi(X_2)),$$

où Q est la forme quadratique associée à la pseudo-métrique riemannienne sur Ω et $X = X_1 + X_2 \in \ker T\pi \oplus \tau(E)$ pour tout champ X de E .

Sous certaines conditions, le fibré tangent de E permet de définir l'univers Ω comme une feuille de l'espace total E du fibré des états ζ . On veut donner un caractère symétrique aux dimensions. La dimension de la fibre de TE est $4 + \dim \mathcal{H}$ pour un fibré d'état $\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{H})$ de l'univers Ω . On munit E d'une pseudo-métrique riemannienne g , de signature $(4, \dim \mathcal{H})$. La connexion de Levi-Civita associée à la pseudo-métrique g définit une connexion généralisée

$$\tau : x \in E \rightarrow \tau(x) \subset T_x E,$$

si le système de Pfaff est involutif, il définit un feuilletage de l'espace total E .

Theorem 3. *Le système de Pfaff est involutif si et seulement si la courbure de la connexion associée R^∇ est nulle.*

Proof. La preuve est donnée dans [5]. □

Si on suppose que l'espace total E du fibré ζ est une variété parallélisable, il existe une connexion plate ∇ . Le système de Pfaff associé est involutif, on peut feuilletter E , par des feuilles de dimension 4. Chaque feuille de ce fibré va décrire un exemplaire de Ω pour un choix convenable de ζ .

Definition 8. Une pseudo-métrie riemannienne de signature $(4, \dim \mathcal{H})$ est "invariante" si la signature de la restriction de g , à chaque feuille \mathcal{T} du feuilletage défini par τ , est constante. Une feuille \mathcal{T} du feuilletage a pour pseudo-métrie $g|_{\mathcal{T}}$ qui est de signature (p, q) avec $p+q=4$. Un fibré hermitien dont l'espace total est muni d'une pseudo-métrie de signature $(4, \dim \mathcal{H})$, invariante et plate est un fibré d'état stable.

La feuille \mathcal{T} de notre univers des états stables est une feuille de signature $(1, 3)$, la feuille de l'univers des états de signature $(2, 2)$ est l'univers mixte, la dimension temps est la même que celle d'espace. La signature $(0, 4)$ est une feuille état de type riemannien, le temps est de dimension nulle et enfin les feuilles d'états de signature $(3, 1)$ donne une dimension d'espace. On peut se poser la question de savoir si l'univers Ω est modelé sur \mathbb{C}^k , $k \geq 2$. On fait appel aux dimensions complexes en interprétant la notion de dimension espace comme une dimension de partie imaginaire nulle et la dimension temps étant une dimension de partie réelle nulle. Si on ne fait pas d'hypothèse "d'invariance" la notion d'espace et de temps varie localement.

7. LES ESPACES DE SOBOLEV ATTACHÉS AUX FIBRÉS DES ÉTATS

Chaque fibré d'état

$$\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{H})$$

de l'univers Ω est muni d'une section hermitienne, notée $\langle \bullet | \bullet \rangle$. Les fibres sont munies d'un produit scalaire hermitien. L'univers Ω est muni d'une orientation et d'une mesure Lebesguienne μ . En générale, cette mesure Lebesguienne est définie par une métrique pseudo-riemannienne g . On identifie chaque section s , à la classe des sections qui sont μ presque partout égales à s . Une section s est nulle μ -presque partout, si

$$\mu(\{\omega \in \Omega : s(\omega) \neq o_\omega\}) = 0.$$

On définit le produit scalaire

$$\langle s | t \rangle_\mu = \int_\Omega \langle s | t \rangle \mu, \quad (7.1)$$

s et t sont deux sections de ζ . Si ∇ est une connexion sur le fibré ζ et γ une section de Dirac sur ζ , on définit pour une section s la norme d'ordre p ,

$$\|s\|_p = \sqrt[p]{\int_\Omega |s|^p \mu}$$

avec, $|s| = \sqrt{\langle s | s \rangle}$ et on pose

$$\|s\|_{m,p} = \left(\sum_{k=0}^m \|\nabla_\gamma^k s\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < +\infty \text{ et } \nabla_\gamma^0 s = s \quad (7.2)$$

avec

$$\nabla_\gamma^n = \gamma_n \otimes \nabla_{n-1}$$

et

$$\nabla_\gamma^0 = Id.$$

Le sous-espace de $\Gamma(\zeta)$, noté $\Gamma^{m,p}(\zeta)$, est

$$\Gamma^{m,p}(\zeta) = \left\{ \phi \in \Gamma(\zeta) : \|s\|_{m,p} < +\infty \right\}.$$

Les espaces de type Sobolev attachés au fibré hermitien ζ sont définis par la complétion des espaces normés $\Gamma^{m,p}(\zeta)$ et sont notés

$$\mathcal{W}^{m,p}(\zeta).$$

Par construction, ces espaces sont des espaces de Banach. Si on pose

$$\mathcal{H}^m(\zeta) = \mathcal{W}^{m,2}(\zeta),$$

les espaces obtenus sont des espaces d'Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle s | t \rangle_m = \sum_{k=0}^m \int_{\Omega} \langle \nabla_{\gamma}^k s | \nabla_{\gamma}^k t \rangle \mu. \quad (7.3)$$

Remark 10. Les espaces de Hilbert $\mathcal{H}^m(\zeta)$ sont définis pour l'étude spectrale de l'extension de la dérivée de Lie aux champs complexes en identifiant \mathcal{L}_X à un opérateur

$$\mathcal{L}_X : \mathcal{H}^m(\zeta) \rightarrow \mathcal{H}^m(\zeta), \mathcal{L}_X(Y) = [X, Y]$$

avec $E(\zeta) = T\Omega \otimes \mathbb{C}$.

Dans [6], on définit les opérateurs γ_n et ∇_{n-1} comme suit. Le commutateur d'une famille finie d'endomorphismes de Dirac $\{\gamma^{d^i}\}$ est

$$\begin{aligned} & \left[\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n} \right] (\omega) \\ &= \sum_{s \in \text{Perm}\{1,2,\dots,n\}} \varepsilon(s) \gamma^{d^{s(1)}}(\omega) \circ \gamma^{d^{s(2)}}(\omega) \circ \dots \circ \gamma^{d^{s(n-1)}}(\omega) \circ \gamma^{d^{s(n)}}(\omega), \end{aligned}$$

et l'anticommutateur ou crochet de Poisson est défini par,

$$\begin{aligned} & \left\{ \gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n} \right\} (\omega) \\ &= \sum_{s \in \text{Perm}\{1,2,\dots,n\}} \gamma^{d^{s(1)}}(\omega) \circ \gamma^{d^{s(2)}}(\omega) \circ \dots \circ \gamma^{d^{s(n-1)}}(\omega) \circ \gamma^{d^{s(n)}}(\omega) \end{aligned}$$

pour tout $\omega \in \Omega$.

Le commutateur définit un endomorphisme de $\text{End}(\Lambda^n \Omega \otimes E, E)$. L'extension de rang n d'une section γ est l'endomorphisme $\gamma_n \in \text{End}(\Lambda^n(\Omega) \otimes E, E)$ où

$$\gamma_n(\omega) \left((d^1 \wedge d^2 \wedge \dots \wedge d^n)(\omega) \otimes s(\omega) \right) = \left[\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n} \right] (\omega) (s(\omega)),$$

pour tout $\omega \in \Omega$ et on prolonge γ_n par $C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ -linéarité sur $\Lambda^n(\Omega) \otimes E$.

Toute connexion sur ∇ a une extension

$$d_n^\nabla : \Gamma(\Lambda^n(\Omega) \otimes E) \rightarrow \Gamma(\Lambda^{n+1}(\Omega) \otimes E)$$

avec, $d_0^\nabla = \nabla$, $\Lambda^0(\Omega) \otimes E = E$ et

$$d_n^\nabla(\psi \otimes s) = d\psi \otimes s + (-1)^n \psi \wedge \nabla s, \psi \in \Lambda^n(\Omega).$$

L'opérateur ∇_γ^n est défini par

$$\nabla_\gamma^n(s) = \gamma_n \otimes \nabla_{n-1}(s) = \gamma_n(\nabla_{n-1}s) \text{ avec } \nabla_{n-1} = d_{n-1}^\nabla \circ \dots \circ d_0^\nabla$$

pour toute section s , c'est-à-dire, pour tout $\omega \in \Omega$

$$(\gamma_n \otimes \nabla_{n-1})(\omega)(s(\omega)) = \gamma_n(\omega)(\nabla_{n-1}s(\omega)).$$

Si on veut déterminer toutes les équations d'évolution d'ordre n du fibré des états $\zeta|_U$ où U est un ouvert Ω [6], il suffit de regarder l'opérateur d'évolution

$$\Phi_n = \gamma_n \otimes \nabla_{n-1}$$

comme un endomorphisme de l'espace de Banach $\mathcal{W}^{n,p}(\zeta|_U)$. Si cet endomorphisme est diagonalisable pour au moins un réel $p \geq 1$, on en déduit toutes les équations d'évolution possibles des sections s de $\mathcal{W}^{n,p}(\zeta|_U)$. On généralise la notion d'opérateur d'évolution comme un opérateur diagonalisable de $\mathcal{W}^{n,p}(\zeta|_U)$ qui devient une observable si $p = 2$.

On va étendre cette notion d'espace de Sobolev en définissant les espaces L^p d'un fibré et en présentant une théorie des distributions sur les fibrés. Dans la suite, l'ensemble des sections, non nécessairement différentiables, du fibré ζ est noté $\mathcal{S}(\zeta)$. On note

$$\mathcal{L}^p(\zeta, \mu) = \left\{ s \in \mathcal{S}(\zeta) : \int_{\Omega} |s|^p \mu < +\infty \right\},$$

où $|s| = \sqrt{\langle s | s \rangle}$ est μ -mesurable. \mathcal{O} est le sous-espace vectoriel formé par les sections nulles μ presque partout. L'espace $L^p(\zeta, \mu)$ est

$$L^p(\zeta, \mu) = \frac{\mathcal{L}^p(\zeta, \mu)}{\mathcal{O}}.$$

Proposition 4. $L^p(\zeta, \mu)$ est espace de Banach pour la norme $\|s\|_p = \sqrt[p]{\int_{\Omega} |s|^p d\mu}$ et $L^2(\zeta, \mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle s | t \rangle_{\mu} = \int_{\Omega} \langle s | t \rangle \mu.$$

On se propose de définir une théorie des distributions sur les fibrés d'états. Pour cela, on introduit l'espace vectoriel des sections test, défini par

$$\mathcal{D}(\zeta) = \{s \in \Gamma(\zeta) : \text{supp}(s) \text{ est compact}\},$$

on rappelle que

$$\text{supp}(s) = \text{Adh}\{\omega : s(\omega) \neq o_{\omega}\}.$$

Definition 9. Une distribution D est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\zeta)$. L'ensemble des distributions sur ζ est noté $\mathcal{D}'(\zeta)$.

Pour une section $s \in \mathcal{S}(\zeta)$, localement intégrable, c'est-à-dire, une section s telle que pour tout compact K de Ω

$$\int_K |s| \mu < +\infty$$

on définit la distribution

$$D_s(t) = \langle D_s, t \rangle = \int_{\Omega} \langle s | t \rangle \mu. \quad (7.4)$$

Proposition 5. $D_s = o$ si et seulement si $s = o$ μ -presque partout.

On a une inclusion naturelle de $\frac{\mathcal{S}_{\text{loc}}(\zeta)}{\mathcal{O}}$ dans $\mathcal{D}'(\zeta)$ où $\mathcal{S}_{\text{loc}}(\zeta)$ est l'ensemble des sections localement intégrables. On a

$$L^p(\zeta, \mu) \subset \frac{\mathcal{S}_{\text{loc}}(\zeta)}{\mathcal{O}},$$

et un plongement naturel de $L^p(\zeta, \mu)$ dans $\mathcal{D}'(\zeta)$. On identifiera $L^p(\zeta, \mu)$ et son image dans $\mathcal{D}'(\zeta)$.

Remark 11. 1) Si 7.4 est vérifiée, on dit que la distribution est régulière et on identifie D_s à s . Dans cette situation, on note $\langle D_s, t \rangle = \langle s | t \rangle_\Omega$.

$$2) D_{\lambda s} = \bar{\lambda} D_s, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Definition 10. Le produit scalaire hermitien $\langle \bullet | \bullet \rangle$ est parallèle à la connexion ∇ si et seulement si pour tout champ X de Ω et pour toutes sections s et t de $\Gamma(\zeta)$

$$X \cdot \langle s | t \rangle = \langle \nabla_X s | t \rangle + \langle s | \nabla_X t \rangle, \quad (7.5)$$

où $X \cdot \langle s | t \rangle$ est la dérivée de Lie le long du champ X de la C^∞ -application

$$\omega \rightarrow \langle s(\omega) | t(\omega) \rangle_\omega.$$

Theorem 4. Si le produit scalaire $\langle \bullet | \bullet \rangle$ est parallèle à la connexion ∇ alors

$$\langle \nabla_X s, t \rangle = - \langle s | \operatorname{div}(X)t + \nabla_X t \rangle_\mu,$$

pour toutes sections test t et toute section $s \in \Gamma(\zeta)$.

Proof. Il suffit de vérifier que dans les hypothèses du théorème

$$I = \int_\Omega L_X(f) \mu = - \int_\Omega f \operatorname{div}(X) \mu$$

pour toute C^∞ -fonction f à support compact avec $L_X(f)$ est la dérivée de Lie le long du champ X de f . On peut se ramener à une carte en utilisant une partition de l'unité associée à un recouvrement de cartes U . Dans le local frame $\{\partial_\nu\}$ associé à la carte U , de dual $\{d^\nu\}$ la forme volume μ s'écrit

$$\mu = \theta d^1 \wedge d^2 \wedge d^3 \wedge d^4$$

avec θ fonction de classe C^∞ , non nulle, sur U . On a, si $X = X^\nu \partial_\nu$

$$I = \int_U X^\nu (\partial_\nu f) \theta d^1 \wedge d^2 \wedge d^3 \wedge d^4$$

et

$$I = \int_U \partial_\nu (X^\nu f \theta) d^1 \wedge d^2 \wedge d^3 \wedge d^4 - \int_U f \partial_\nu (X^\nu \theta) d^1 \wedge d^2 \wedge d^3 \wedge d^4.$$

La fonction f est à support compact dans U , donc

$$\int_U \partial_\nu (X^\nu f \theta) d^1 \wedge d^2 \wedge d^3 \wedge d^4 = 0.$$

Ensuite on écrit

$$\begin{aligned} & \int_U f \partial_\nu (X^\nu \theta) d^1 \wedge d^2 \wedge d^3 \wedge d^4 \\ &= \int_U f (\theta \partial_\nu X^\nu + d\theta(X)) d^1 \wedge d^2 \wedge d^3 \wedge d^4 \\ &= \int_U f \left(\partial_\nu X^\nu + \frac{d\theta(X)}{\theta} \right) \mu \end{aligned}$$

On en déduit $I = - \int_U f \operatorname{div}(X) \mu$ car $\operatorname{div}(X) = \partial_\nu X^\nu + \frac{d\theta(X)}{\theta}$ dans le local frame $\{\partial_\nu\}$. \square

Definition 11. $\operatorname{div}(X) = \operatorname{div}_\mu(X)$ est la divergence de X associée à la forme volume μ , c'est-à-dire, $\mathcal{L}_X(\mu) = \operatorname{div}(X) \cdot \mu$.

Si le produit scalaire est parallèle à la connexion, cela permet de définir la dérivée covariante d'une distribution D de ζ , le long d'un champ X par

$$\langle \nabla_X D, t \rangle = - \langle D, \operatorname{div}(X)t + \nabla_X t \rangle$$

pour tout $t \in \mathcal{D}(\zeta)$. On peut étendre la notion de dérivée covariante d'une section s localement intégrable quelconque, au sens des distributions le long du champ X , notée encore $\nabla_X s$, telle que

$$\nabla_X s = \nabla_X D_s.$$

Cette notion étend la notion de dérivée covariante, $\nabla_X s \in \mathcal{D}'(\zeta)$ car

$$\nabla_X s = -D \circ T_X$$

où

$$T_X(t) = \operatorname{div}(X)t + \nabla_X t,$$

qui est un opérateur borné de $\mathcal{D}(\zeta)$, pour tout compact $K \subset \Omega$, la restriction à K de

$$\nabla : (X, t) \rightarrow \nabla_X t$$

est continue pour les normes définies plus haut.

Proposition 6. 1) $\langle \nabla_{fX} D, t \rangle = \langle \nabla_X D, ft \rangle$ pour toute C^∞ -application f
2) $\nabla_X(fD) = f\nabla_X D$.

Proof. La seule difficulté est de vérifier 1). On a

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{fX} D, t \rangle &= - \langle D, \operatorname{div}(fX)t + \nabla_{fX} t \rangle \\ \operatorname{div}(fX)t + \nabla_{fX} t &= (f \operatorname{div}(X) + df(X))t + f\nabla_X t \\ (f \operatorname{div}(X) + df(X))t + f\nabla_X t &= \operatorname{div}(X)ft + \nabla_X(ft). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\langle \nabla_{fX} D, t \rangle = - \langle D, \operatorname{div}(X)ft + \nabla_X(ft) \rangle = \langle \nabla_X D, ft \rangle.$$

Cette égalité peut s'écrire si

$$\begin{aligned} H_f(t) &= ft, \quad H_f(t)(\omega) = f(\omega)t(\omega), \\ \nabla_{fX} D &= \nabla_X D \circ H_f. \end{aligned}$$

□

Remark 12. On dit que H_f est une homothétie de rapport f . Avec cette notation,

$$\nabla_X \circ H_f = H_f \circ \nabla_X \text{ sur } \mathcal{D}'(\zeta).$$

On se donne une famille de champs de Ω

$$\partial = \{\partial_j\}_{j \in \{1, \dots, q\}},$$

et pour tout k -uplets tels que

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k \text{ et } \nu = (\nu_1, \dots, \nu_k) \text{ avec } \nu_j \neq \nu_{j+1} \text{ et } \nu_j \in \{1, \dots, q\}$$

on définit les opérateurs

$$\nabla_\nu^\alpha = \nabla_{\nu_1}^{\alpha_1} \circ \dots \circ \nabla_{\nu_k}^{\alpha_k} \text{ où } \nabla_j^\alpha = \nabla_{\partial_j} \circ \dots \circ \nabla_{\partial_j},$$

la composition se fait sur α opérateurs égaux à ∇_{∂_j} , avec $\nabla_\nu^0 = Id$ et les dérivées covariantes sont prises au sens des distributions. L'espace de Sobolev $W_\partial^{m,p}(\zeta)$ est le complété de

$$\{s \in L^p(\zeta, \mu) : \nabla_\nu^\alpha s \in L^p(\zeta, \mu), |\alpha| \leq m\}$$

pour la norme

$$\|s\|_{\partial}^{m,p} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\nabla_{\nu}^{\alpha} s\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \sup \{ \|\nabla_{\nu}^{\alpha} s\|_{\infty} : |\alpha| \leq m \} & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

le nombre d'opérateurs ∇_{ν}^{α} pour α fixé est $4 \times 3^{k-1}$ si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $\|s\|_{\partial}^{m,p}$ est une norme.

Remark 13. $\nabla_{\nu}^{\alpha} s$ est une composée de dérivations prises dans le sens des distributions.

Remark 14. Dans le cas de $T(\mathbb{R}^4)$ où \mathbb{R}^4 est muni de la mesure de Lebesgue μ et ∂ est formé des dérivations $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$, on retombe sur les espaces de Sobolev de \mathbb{R}^4 .

8. QUANTIFICATION DES FIBRÉS DES ÉTATS DE L'UNIVERS

Il y a deux procédés de quantification d'un fibré des états de Ω . Le premier consiste à travailler globalement sur les sections du fibré qui ont un carré intégrable, cette approche nécessite l'apport d'une forme volume μ . On peut, ainsi, construire l'espace de Hilbert $L^2(\zeta, \mu)$, ensuite construire l'espace de Fock associé à cet espace de Hilbert et utiliser les procédés de quantification habituels. L'autre procédé ne fait pas intervenir de forme volume, on travaille sur chaque fibre et on procède à une quantification fibre à fibre. On s'intéresse, dans un premier temps à ce procédé de quantification.

Soit $\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{H})$ un fibré d'état de l'univers Ω , on note $\otimes^n \zeta$, le produit tensoriel d'ordre n de ζ et $\otimes^0 \zeta = (\Omega \times \mathbb{C}, \pi_1, \Omega, \mathbb{C})$ le fibré trivial de fibre \mathbb{C} . On note $\mathcal{S}_n(\zeta)$, le symétrisé de $\otimes^n \zeta$ et $\mathcal{A}_n(\zeta)$, l'antisymétrisé de $\otimes^n \zeta$ avec $\mathcal{S}_0(\zeta) = \otimes^0 \zeta$ et $\mathcal{S}_1(\zeta) = \otimes^1 \zeta = \zeta$. Les sections locales de $\mathcal{S}_0(\zeta)$ sur V s'identifie aux C^{∞} -applications de V à valeurs dans \mathbb{C} . L'espace de Bose-Fock de ζ est la somme de Whitney infinie et complète des symétrisés $\mathcal{S}_n(\zeta)$

$$\mathcal{F}_+(\zeta) = (\cup_{\omega \in \Omega} \mathcal{F}_+(\zeta)(\omega), \pi, \Omega, \mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$$

c'est-à-dire, pour chaque $\omega \in \Omega$,

$$\mathcal{F}_+(\zeta)(\omega) = \left\{ u = \left\{ u^{(n)} \right\}_{n=0}^{\infty} : u^{(n)} \in \mathcal{S}_n(E_{\omega}(\zeta)), \sum_{n=0}^{\infty} \|u^{(n)}\|_{\omega}^2 < \infty \right\}$$

$\mathcal{S}_n(E_{\omega}(\zeta))$ est le symétrisé d'ordre n de la fibre $E_{\omega}(\zeta)$ muni du produit hermitien induit par le produit hermitien de $E_{\omega}(\zeta)$, noté $\langle \bullet | \bullet \rangle_{\omega}$, et l'espace de Fermi-Fock est la somme de Whitney infinie et complète des antisymétrisés $\mathcal{A}_n(\zeta)$

$$\mathcal{F}_-(\zeta) = (\cup_{\omega \in \Omega} \mathcal{F}_-(\zeta)(\omega), \pi, \Omega, \mathcal{F}_-(\mathcal{H})).$$

Les espaces de Bose-Fock et de Fermi-Fock ont une structure de fibré hermitien sur Ω . L'espace de Bose-Fermi-Fock d'une paire de fibrés (ζ, ξ) est défini par le produit tensoriel des fibrés $\mathcal{F}_+(\zeta)$ et $\mathcal{F}_-(\xi)$

$$\mathcal{F}(\zeta, \xi) = \mathcal{F}_+(\zeta) \otimes \mathcal{F}_-(\xi),$$

c'est le fibré de Bose-Fermi-Fock associé à la paire (ζ, ξ) des fibrés d'état de l'univers Ω .

Si on prend n sections s_1, \dots, s_n , le symétrisé s'écrit

$$\mathcal{S}_n(s_1 \otimes \dots \otimes s_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \text{Perm}\{1, \dots, n\}} s_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes s_{\sigma(n)}$$

et l'antisymétrisé s'écrit

$$\mathcal{A}_n(s_1 \otimes \dots \otimes s_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \text{Perm}\{1, \dots, n\}} \varepsilon(\sigma) s_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes s_{\sigma(n)}, \quad n \geq 2.$$

Remark 15. Le fibré $\otimes^n \zeta$ a pour fibre $\otimes^n \mathcal{H}$ et chaque fibre est donnée par

$$E_\omega(\otimes^n \zeta) = \otimes^n E_\omega(\zeta), \quad E_\omega(\otimes^0 \zeta) = \mathbb{C} \quad \text{et} \quad E_\omega(\otimes^1 \zeta) = E_\omega(\zeta).$$

On note $\mathcal{C}(\zeta, \xi)$, l'ensemble des applications L

$$\omega \rightarrow L(\omega) : E_\omega(\zeta) \rightarrow E_\omega(\xi),$$

pour chaque $\omega \in \Omega$, $L(\omega)$ est un opérateur de $E_\omega(\zeta)$ dans $E_\omega(\xi)$ qui est densément défini et fermé. Ponctuellement,

$$\text{dom}(L) = \{\text{dom}(L(\omega)) : \omega \in \Omega\}$$

est formé de l'ensemble de tous les domaines des opérateurs

$$L(\omega) : E_\omega(\zeta) \rightarrow E_\omega(\xi).$$

L'application L est C^∞ dans le sens suivant, pour chaque section $s \in \mathcal{S}(\zeta)$ vérifiant $s(\omega) \in \text{dom}(L(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$, l'application

$$\omega \rightarrow L(\omega)(s(\omega)) = L \otimes s(\omega)$$

est une section de $\mathcal{S}(\xi)$. Les sections telles que $s(\omega) \in \text{dom}(L(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$, forment un sous-ensemble des sections de $\mathcal{S}(\zeta)$, noté

$$\text{dom}(\tilde{L}) = \{s \in \mathcal{S}(\zeta) : s(\omega) \in \text{dom}(L(\omega)), \forall \omega \in \Omega\},$$

où l'application \tilde{L} est définie par

$$\tilde{L} : \text{dom}(\tilde{L}) \subset \mathcal{S}(\zeta) \rightarrow \mathcal{S}(\xi), \quad \tilde{L}(s) = L \otimes s.$$

Definition 12. Si L est densément défini l'adjoint de $L \in \text{Hom}(\zeta, \xi)$ est l'opérateur $L^* \in \text{Hom}(\xi, \zeta)$ qui vérifie

$$\langle L^* \otimes s \mid t \rangle_\zeta = \langle s \mid L \otimes t \rangle_\xi$$

pour toute section $s \in \text{dom}(\tilde{L}^*)$ et $t \in \text{dom}(\tilde{L})$. On a pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\langle L^*(\omega) s(\omega) \mid t(\omega) \rangle_{\omega, \zeta} = \langle s(\omega) \mid L(\omega) t(\omega) \rangle_{\omega, \xi}.$$

L'espace $\text{dom}(\tilde{L}^*)$ est formé des sections $s \in \mathcal{S}(\xi)$ pour lesquelles il existe une section $\tau \in \mathcal{S}(\zeta)$ telle que

$$\langle \tau \mid t \rangle_\zeta = \langle s \mid L \otimes t \rangle_\xi$$

pour tout $t \in \text{dom}(\tilde{L})$. Si L est densément défini τ est unique et on pose $L^* \otimes s = \tau$.

Remark 16. L'opérateur adjoint associé à L est entièrement défini par

$$\langle L^*(\omega)(v) \mid w \rangle_{\omega, \zeta} = \langle v \mid L(\omega)(w) \rangle_{\omega, \xi}, \quad \forall w \in E_\omega(\zeta), \quad \forall v \in E_\omega(\xi) \quad \text{et} \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Proposition 7. *Si L est fermé et densément défini alors L^* est fermé et densément défini. Dans ce cas $L^{**} = L$.*

Proof. On peut consulter [9] pour une preuve sur chaque fibre du fibré. \square

Notation 1. *Pour un opérateur $L \in \text{Hom}(\zeta)$, on pose $\text{Im}(L) = \{\text{Im}(L(\omega)) : \omega \in \Omega\}$ l'ensemble des images de L , $\text{Ker}(L) = \{\text{Ker}(L(\omega)) : \omega \in \Omega\}$ est l'ensemble des noyaux de L . Les sous-ensembles de \mathbb{C} , $\rho(L) = \{\rho(L(\omega)) : \omega \in \Omega\}$ forme la résolvante de L , elle est formée des sous-ensembles $\rho(L(\omega))$ définis par*

$$\rho(L(\omega)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : L(\omega) \text{ est injective, } \text{Im}(L(\omega)) \text{ est dense et } L(\omega) - \lambda \mathbf{I}_\omega \text{ est borné}\}$$

où \mathbf{I}_ω est l'application identique sur la fibre $E_\omega(\zeta)$.

$\sigma(L) = \{\sigma(L(\omega)) : \omega \in \Omega\}$ est l'ensemble des spectres $\sigma(L(\omega)) = \mathbb{C} \setminus \rho(L(\omega))$ et $\sigma_p(L) = \{\sigma_p(L(\omega)) : \omega \in \Omega\}$ où $\sigma_p(L(\omega))$ est l'ensemble des valeurs propres de $L(\omega)$.

Definition 13. *Une fonction $\phi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ est propre pour L si $\phi(\omega) \in \sigma_p(L(\omega))$, ϕ est une résolvante de L si $\phi(\omega) \in \rho(L(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$. La fonction ϕ est spectrale si $\phi(\omega) \in \sigma(L(\omega))$.*

Proposition 8. *Si L est densément défini alors $\ker L^* = \text{Im}(L)^\perp$, c'est-à-dire, pour tout $\omega \in \Omega$*

$$\ker L^*(\omega) = \text{Im}(L(\omega))^\perp$$

l'orthogonalité est définie dans l'espace de Hilbert $E_\omega(\xi)$.

Si $L \in \mathcal{C}(\zeta, \xi)$ alors l'opérateur de $\mathbf{I}_\zeta + L^*L$ de $\text{Hom}(\zeta)$ est un opérateur injectif,

$$\ker(\mathbf{I}_\zeta + L^*L) = (\Omega \times o, \pi_1, \Omega, o)$$

et

$$\text{Im}(\mathbf{I}_\zeta + L^*L) = \zeta,$$

ponctuellement, cela signifie que

$$\ker(\mathbf{I}_{E_\omega(\zeta)} + L(\omega)^*L(\omega)) = \{o_\omega\}$$

et

$$\text{Im}(\mathbf{I}_{E_\omega(\zeta)} + L(\omega)^*L(\omega)) = E_\omega(\zeta).$$

L'opérateur $(\mathbf{I}_\zeta + L^*L)^{-1}$ est positif et L^*L est autoadjoint avec $\sigma(L^*L) \subset \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire, $\sigma(L(\omega)^*L(\omega)) \subset \mathbb{R}^+$ pour tout $\omega \in \Omega$.

On travaille dorénavant sur les sections des fibrés considérés précédemment. Chaque section s de $\mathcal{F}_+(\zeta)$ s'écrit

$$s = \left\{ s^{(n)} \right\},$$

où $s^{(n)}$ est une section de $\mathcal{S}_n(\zeta)$ que l'on peut identifier à une section de $\mathcal{F}_+(\zeta)$

$$\left\{ o, \dots, o, s^{(n)}, o, \dots \right\},$$

la section vide de l'espace de Bose-Fock est la section constante $\mathbf{1}_+$ définie par

$$\mathbf{1}_+ = \{ \mathbf{1}, \mathbf{o}, \mathbf{o}, \dots \}$$

qui s'écrit ponctuellement,

$$\mathbf{1}_+(\omega) = \{ 1, o_\omega, o_\omega, \dots \}.$$

Pour chaque section s de $\Gamma(\zeta)$, il existe un unique opérateur linéaire $a(s)$ densément défini et fermé sur $\mathcal{F}_+(\zeta)$, non borné, appelé annulateur de Bose, son adjoint est l'opérateur $a(s)^*$. Il vérifie les propriétés

$$\begin{aligned} 1) & (a(s)^* \otimes \mathbf{t})^{(0)} = o, \\ 2) & (a(s)^* \otimes \mathbf{t})^{(n)} = \sqrt{n} \mathcal{S}_n \left(s \otimes \mathbf{t}^{(n-1)} \right) \text{ pour tout } n \geq 1 \text{ et } \mathbf{t} \in \text{dom} \left(\widetilde{a(s)^*} \right). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Ponctuellement pour chaque $u \in E_\omega(\zeta)$, l'opérateur $a(u)$ a pour adjoint $a(u)^*$ qui s'écrit

$$a(u)^* \left(\left\{ \mathbf{v}^{(n)} \right\} \right) = \left\{ o_\omega, \left\{ \sqrt{n} \mathcal{S}_n \left(u \otimes \mathbf{v}^{(n-1)} \right) \right\}_{n \geq 1} \right\}$$

où $\mathcal{S}_n(u \otimes \mathbf{v}^{(n-1)})$ est le symétrisé de $u \otimes \mathbf{v}^{(n-1)}$ pour tout $\{\mathbf{v}^{(n-1)}\} \in \mathcal{F}_+(\zeta)(\omega)$ [10],[11].

Remark 17. L'opérateur $a(s)^*$ est défini en prenant pour chaque $\omega \in \Omega$, l'adjoint de l'opérateur

$$a(s)(\omega) : \mathcal{F}_+(\zeta)(\omega) \rightarrow \mathcal{F}_+(\zeta)(\omega),$$

sur chaque fibre $\mathcal{F}_+(\zeta)(\omega)$.

On a

$$a(s) \otimes \mathbf{1}_+ = \mathbf{o} \text{ pour toute section } s \in -(\xi),$$

où $\mathbf{o}(\omega) = (0, o_\omega, o_\omega, \dots)$.

Pour chaque section s de $\Gamma(\xi)$, il existe un unique opérateur linéaire $b(s)$ sur $\mathcal{F}_-(\xi)$ appelé annulateur de Fermi tel que

$$1) \text{ dom}(b(s)) = \mathcal{F}_-(\xi) \text{ et } \|b(s)(\omega)\| = \|s(\omega)\|_\omega \text{ pour tout } \omega \in \Omega,$$

l'adjoint $b(s)^*$ vérifie

$$2) (b(s)^* \otimes \mathbf{t})^{(0)} = \mathbf{o} \text{ et } (b(s)^* \otimes \mathbf{t})^{(n)} = \sqrt{n} \mathcal{A}_n \left(s \otimes \mathbf{t}^{(n-1)} \right), n \geq 1 \text{ et } \mathbf{t} \in \mathcal{F}_-(\xi),$$

$\mathcal{A}_n(s \otimes \mathbf{t}^{(n-1)})$ est l'antisymétrisé d'ordre n de $s \otimes \mathbf{t}^{(n-1)}$. Ponctuellement, pour chaque $u \in E_\omega(\xi)$, l'opérateur $b(u)$ a pour adjoint $b(u)^*$ qui vérifie

$$b(u)^* \left(\left\{ \mathbf{v}^{(n)} \right\} \right) = \left\{ 0, \left\{ \sqrt{n} \mathcal{A}_n \left(u \otimes \mathbf{v}^{(n-1)} \right) \right\}_{n \geq 1} \right\}, \left\{ \mathbf{v}^{(n)} \right\} \in \mathcal{F}_-(\xi)(\omega).$$

On a les anticommutations canoniques suivantes

$$\begin{aligned} [b(s), b(t)^*] &= \langle s | t \rangle \mathbf{I}, \langle s | t \rangle_\omega = \langle s(\omega) | t(\omega) \rangle_\omega \\ \{b(s), b(t)\} &= \mathbf{o}, \end{aligned}$$

pour toute section $s \in \Gamma(\xi)$ et $t \in \Gamma(\xi)$ [14]. En particulier, $b(s)^2 = \mathbf{o}$, $s \in \Gamma(\xi)$. La section vide de l'espace de Fermi-Fock est la section constante $\mathbf{1}_-$ définie par

$$\mathbf{1}_- = \{\mathbf{1}, \mathbf{o}, \mathbf{o}, \dots\}$$

ponctuellement,

$$\mathbf{1}_-(\omega) = \{1, o_\omega, o_\omega, \dots\}$$

cette section vide vérifie

$$b(s) \otimes \mathbf{1}_- = \mathbf{o} \text{ pour toute section } s \in \Gamma(\xi).$$

On introduit un opérateur différentiel extérieur sur les fibrés des états de la façon suivante. Soit $L \in \mathcal{C}(\zeta, \xi)$, on pose

$$\mathcal{D}_L^\infty = \text{Vect} \left\{ a(s_1)^* \cdots a(s_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_- : s_j \in \mathcal{C}^\infty(L^*L) \text{ et } t_k \in \mathcal{C}^\infty(LL^*) \right\}$$

où

$$\mathcal{C}^\infty(T) = \bigcap_{n=1}^\infty \text{dom}(\widetilde{T}^n) \text{ pour } T \in \text{Hom}(\zeta) \text{ ou } T \in \text{Hom}(\xi).$$

Proposition 9. *Il existe un unique opérateur linéaire d_L , densément défini et fermé sur $\mathcal{F}(\zeta, \xi)$ tel que*

$$1) \mathcal{D}_L^\infty \subset \text{dom}(d_L) \text{ et } \mathcal{D}_L^\infty \text{ est un coeur de } d_L,$$

pour chaque section $\mathbf{s} \in \mathcal{D}_L^\infty$ de la forme

$$\mathbf{s} = a(s_1)^* \cdots a(s_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_-$$

alors

$$2) d_L \mathbf{s} = \mathbf{o} \text{ pour } n = 0$$

$$d_L \mathbf{s} = \sum_{j=1}^n a(s_1)^* \cdots \widehat{a(s_j)^*} \cdots a(s_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(L \otimes s_j)^* b(t_1)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_-,$$

d_L laisse invariant \mathcal{D}_L^∞ .

De plus,

$$3) \mathcal{D}_L^\infty \subset \text{dom}(d_L^*)$$

et

$$d_L^* \mathbf{s} = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} a(L^* \otimes u_k)^* a(s_1)^* \cdots a(s_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_k)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_-$$

pour tout $\mathbf{s} = a(s_1)^* \cdots a(s_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_-$. Dans le cas $p = 0$, on a

$$d_L^* \mathbf{s} = \mathbf{o},$$

en particulier, d_L^* laisse invariant \mathcal{D}_L^∞ .

$$4) \text{dom}(d_L^2) = \text{dom}(d_L) \text{ et pour tout } \mathbf{s} \in \text{dom}(d_L), d_L^2 \mathbf{s} = \mathbf{o}.$$

Si T est un opérateur linéaire borné de $\text{Hom}(\zeta, \xi)$ avec $\text{dom}(T) = \Gamma(\zeta)$ alors pour tout $\mathbf{s} \in \mathcal{D}_L^\infty$ et $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{C})$,

$$5) \alpha d_L \mathbf{s} + \beta d_T \mathbf{s} = d_{\alpha L + \beta T} \mathbf{s}.$$

Proof. Il suffit de vérifier que la propriété est vraie sur chaque fibre des fibrés considérés. La démonstration sur une fibre du fibré est donnée dans [3],[10] et [11]. \square

Definition 14. *L'opérateur de Dirac sur $\mathcal{F}(\zeta, \xi)$ est défini par*

$$Q_L = d_L + d_L^*$$

avec $\text{dom}(Q_L) = \text{dom}(d_L) \cap \text{dom}(d_L^*)$.

L'opérateur de Laplace-Beltrami sur $\mathcal{F}(\zeta, \xi)$ est

$$\Delta_L = d_L d_L^* + d_L^* d_L.$$

Pour un opérateur autoadjoint T de $\text{Hom}(\zeta)$, c'est-à-dire, pour tout $\omega \in \Omega$, l'opérateur

$$T(\omega) : E_\omega(\zeta) \rightarrow E_\omega(\zeta)$$

est autoadjoint pour la structure d'espace de Hilbert sur chaque fibre, on pose

$$\widehat{T}^{(n)} : \otimes^n \zeta \rightarrow \otimes^n \zeta$$

défini par

$$\widehat{T}^{(0)} = \mathbf{o}$$

et

$$\widehat{T}^{(n)} = \sum_{j=1}^n \mathbf{I} \otimes \dots \otimes \mathbf{I} \otimes T \otimes \mathbf{I} \otimes \dots \otimes \mathbf{I}, n \geq 1$$

où T se trouve à la j -ième place et

$$\mathbf{I} : \omega \rightarrow \mathbf{I}(\omega) = \text{Id}_{E_\omega(\zeta)}.$$

La seconde quantification de T sur $\mathcal{F}(\zeta)$ est

$$\widehat{T} = \oplus_{n=0}^{\infty} \widehat{T}^{(n)}$$

qui est un opérateur autoadjoint, il suit que pour tout $\omega \in \Omega$, $0 \in \sigma_p(\widehat{T}(\omega))$, $\mathbf{1}(\omega) \in \ker(\widehat{T}(\omega))$. La fonction constante identiquement nulle est une fonction propre de \widehat{T} . L'opérateur \widehat{T} est stable sur $\mathcal{F}_+(\zeta)$ et $\mathcal{F}_-(\zeta)$, on pose

$$\widehat{T}_+ = \widehat{T}|_{\mathcal{F}_+(\zeta)} \quad \text{et} \quad \widehat{T}_- = \widehat{T}|_{\mathcal{F}_-(\zeta)},$$

ces opérateurs sont autoadjoints et la fonction identiquement nulle est propre pour \widehat{T}_+ et \widehat{T}_- car $\mathbf{1}_\pm(\omega) \in \ker(\widehat{T}_\pm(\omega))$. L'opérateur nombre sur $\mathcal{F}_-(\xi)$ est défini par

$$N = \widehat{\mathbf{I}}_-,$$

soit Γ l'opérateur de $\mathcal{F}(\zeta, \xi)$, l'opérateur autoadjoint tel que, si

$$\mathcal{F}_{+1}(\zeta, \xi) = \oplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{F}_+(\zeta) \otimes \mathcal{A}_{2p}(\zeta)$$

et

$$\mathcal{F}_{-1}(\zeta, \xi) = \oplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{F}_+(\zeta) \otimes \mathcal{A}_{2p+1}(\zeta),$$

on note P_+ et P_- les projections orthogonales sur respectivement $\mathcal{F}_{+1}(\zeta, \xi)$ et $\mathcal{F}_{-1}(\zeta, \xi)$ alors

$$\Gamma = P_+ - P_-$$

où avec les notations de [2], on a

$$\Gamma = \mathbf{I}_{\mathcal{F}_+(\zeta)} \otimes (-1)^N.$$

Soit l'opérateur

$$\mathcal{L} = \widehat{L^*L}_+ \otimes \mathbf{I}_{\mathcal{F}_-(\xi)} \oplus \mathbf{I}_{\mathcal{F}_+(\zeta)} \otimes \widehat{LL^*}_-,$$

c'est un opérateur de $\mathcal{F}(\zeta, \xi)$ qui est positif et autoadjoint, la fonction identiquement nulle sur Ω est une fonction propre de \mathcal{L} car

$$\mathbf{1} = \mathbf{1}_+ \otimes \mathbf{1}_- \in \ker(\mathcal{L}).$$

Theorem 5. 1) L l'opérateur Q_L est autoadjoint et essentiellement autoadjoint sur chaque coeur de \mathcal{L} . En particulier, Q_L est essentiellement autoadjoint sur \mathcal{D}_L^∞ .

2) L l'opérateur Γ laisse invariant $\text{dom}(Q_L)$ et

$$\{\Gamma, Q_L\} = \Gamma Q_L + Q_L \Gamma = o_{\mathcal{F}(\zeta, \xi)}$$

sur $\text{dom}(Q_L)$.

3) On a l'égalité entre les opérateurs

$$\Delta_L = \mathcal{L} = Q_L^2.$$

Proof. Il suffit de vérifier le résultat sur chaque fibre du fibré $\mathcal{F}(\zeta, \xi)$. Sur les fibres, on peut consulter [1],[10] et [11]. \square

Definition 15. Le quadruplet

$$\{\mathcal{F}(\zeta, \xi), Q_L, \mathcal{L}, \Gamma\}$$

est appelée quantification supersymétrique du triplet (ζ, L, ξ) .

Dans ce qui suit, on suppose que l'opérateur $L \in \mathcal{C}(\zeta, \xi)$ et $L^* \in \mathcal{C}(\xi, \zeta)$ ont pour fonction propre la fonction identiquement nulle, c'est-à-dire, que

$$\ker L = (\cup_{\omega \in \Omega} \ker L(\omega), \pi, \Omega) \text{ et } \ker L^* = (\cup_{\omega \in \Omega} \ker L^*(\omega), \pi, \Omega)$$

sont des sous-fibrés de ζ et ξ , on pose

$$\text{nul } L = \dim(\ker L).$$

Theorem 6. Si $\ker L$ et $\ker L^*$ sont des sous-fibrés de, respectivement ζ et ξ , alors $\ker Q_L$ et $\ker \mathcal{L}$ sont des sous-fibrés de $\mathcal{F}(\zeta, \xi)$ et

$$\ker Q_L = \ker \mathcal{L} = \oplus_{n,p=0}^{\infty} [\mathcal{S}_n(\ker L) \otimes \mathcal{A}_p(\ker L^*)].$$

On a,

1) Si $\text{nul } L = 0$ et $\text{nul } L^* < \infty$ alors $\text{nul } Q_L = 2^{\text{nul } L^*} < \infty$.

2) Si $\text{nul } L = 0$ et $\text{nul } L^* = \infty$ alors $\text{nul } Q_L = \infty$.

3) Si $\text{nul } L \geq 1$ alors $\text{nul } Q_L = \infty$.

Proof. On vérifie que si $\ker L$ et $\ker L^*$ sont des sous-fibrés de ζ et ξ alors $\ker Q_L$ et $\ker \mathcal{L}$ sont des sous-fibrés de $\mathcal{F}(\zeta, \xi)$ en remarquant que la propriété

$$\ker Q_L(\omega) = \ker \widehat{L}(\omega) = \oplus_{n,p=0}^{\infty} [\mathcal{S}_n(\ker(L(\omega))) \otimes \mathcal{A}_p(\ker(L^*(\omega)))] \quad (8.2)$$

est vraie pour tout $\omega \in \Omega$. Ensuite, on peut écrire, puisque $\ker L$ et $\ker L^*$ sont des fibrés

$$\ker Q_L = \ker \mathcal{L} = \oplus_{n,p=0}^{\infty} [\mathcal{S}_n(\ker L) \otimes \mathcal{A}_p(\ker L^*)].$$

La relation 8.2 a été démontrée dans [1] (Lemme 3.4). \square

Pour plus de propriétés sur les opérateurs Q_L , \mathcal{L} on peut consulter [2] pour l'étude sur chaque fibre des opérateurs

$$Q_L(\omega) : E_\omega(\mathcal{F}(\zeta, \xi)) \rightarrow E_\omega(\mathcal{F}(\zeta, \xi))$$

et

$$\mathcal{L}(\omega) : E_\omega(\mathcal{F}(\zeta, \xi)) \rightarrow E_\omega(\mathcal{F}(\zeta, \xi)),$$

pour tout $\omega \in \Omega$. Notamment, on peut étendre les théorèmes de Monsieur Arai [2], pour l'étude du spectre de Q_L et de \mathcal{L} ainsi que la notion de classe d'opérateurs de Dirac perturbés en dimension infinie si $\ker L$ et $\ker L^*$ sont des sous-fibrés de ζ et ξ .

On s'intéresse, dorénavant, aux espaces de Hilbert des sections $\mathcal{H} = L^2(\zeta, \mu)$ et $\mathcal{K} = L^2(\xi, \mu)$ où μ est une forme volume sur Ω . Les produits scalaires associés sont

$$\langle s | t \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \langle s | t \rangle \mu$$

pour toutes sections s et t de \mathcal{H} et

$$\langle s | t \rangle_{\mathcal{K}} = \int_{\Omega} \langle s | t \rangle \mu$$

pour toutes sections s et t de \mathcal{K} . Pour un opérateur

$$L \in \text{Hom}(\zeta, \xi)$$

on définit l'opérateur

$$\tilde{L} : \text{dom}(\tilde{L}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}, \tilde{L}(s) = L \otimes s$$

avec

$$\text{dom}(\tilde{L}) = \{s \in \mathcal{H} : L \otimes s \in \mathcal{K}\} \text{ et } L \otimes s(\omega) = L(\omega) s(\omega).$$

On suppose que \tilde{L} est un opérateur densément défini et fermé. On pose

$$\mathcal{D}_{\tilde{L}}^{\infty} = \text{Vect} \left\{ a(s_1)^* \cdots a(s_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_- : s_j \in \mathcal{C}^{\infty}(\tilde{L}^* \tilde{L}) \text{ et } t_k \in \mathcal{C}^{\infty}(\tilde{L} \tilde{L}^*) \right\}$$

où

$$\mathcal{C}^{\infty}(T) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{dom}(T^n)$$

pour un opérateur T de \mathcal{H} ou de \mathcal{K} .

Proposition 10. *Il existe un unique opérateur linéaire $d_{\tilde{L}}$, densément défini et fermé sur $\mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ tel que*

$$1) \mathcal{D}_{\tilde{L}}^{\infty} \subset \text{dom}(d_{\tilde{L}}) \text{ et } \mathcal{D}_{\tilde{L}}^{\infty} \text{ est un coeur de } d_{\tilde{L}},$$

pour chaque section $\mathbf{s} \in \mathcal{D}_{\tilde{L}}^{\infty}$ de la forme

$$\mathbf{s} = a(s_1)^* \cdots a(s_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_-$$

alors

$$2) d_{\tilde{L}} \mathbf{s} = \mathbf{o} \text{ pour } n = 0$$

$$d_{\tilde{L}} \mathbf{s} = \sum_{j=1}^n a(s_1)^* \cdots \widehat{a(s_j)^*} \cdots a(s_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(\tilde{L}s_j)^* b(t_1)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_-,$$

$d_{\tilde{L}}$ laisse invariant $\mathcal{D}_{\tilde{L}}^{\infty}$.

De plus,

$$3) \mathcal{D}_{\tilde{L}}^{\infty} \subset \text{dom}(d_{\tilde{L}}^*)$$

et

$$d_{\tilde{L}}^* \mathbf{s} = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} a(\tilde{L}^* u_k)^* a(s_1)^* \cdots a(s_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_k)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_-$$

pour tout $\mathbf{s} = a(s_1)^* \cdots a(s_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_-$. Dans le cas $p = 0$, $d_{\tilde{L}}^* \mathbf{s} = \mathbf{o}$, en particulier, $d_{\tilde{L}}^*$ laisse invariant $\mathcal{D}_{\tilde{L}}^{\infty}$.

$$4) \text{dom}(d_{\tilde{L}}^2) = \text{dom}(d_{\tilde{L}}) \text{ et pour tout } \mathbf{s} \in \text{dom}(d_{\tilde{L}}), d_{\tilde{L}}^2 \mathbf{s} = \mathbf{o}.$$

Si T est un opérateur de $\text{Hom}(\zeta, \xi)$ tel que \tilde{T} est borné et $\text{dom}(\widehat{T}) = \mathcal{H}$ alors pour tout $\mathbf{s} \in \mathcal{D}_{\tilde{L}}^\infty$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$5)\alpha d_{\tilde{L}}\mathbf{s} + \beta d_{\tilde{T}}\mathbf{s} = d_{\alpha\tilde{L} + \beta\tilde{T}}\mathbf{s}.$$

Proof. La preuve est donnée dans [2]. \square

On peut définir l'opérateur de Dirac

$$Q_{\tilde{L}} = d_{\tilde{L}} + d_{\tilde{L}}^*$$

de domaine

$$\text{dom } Q_{\tilde{L}} = \text{dom } d_{\tilde{L}} \cap \text{dom } d_{\tilde{L}}^*,$$

et l'opérateur de Laplace-Beltrami

$$\Delta_{\tilde{L}} = d_{\tilde{L}}^* d_{\tilde{L}} + d_{\tilde{L}} d_{\tilde{L}}^*$$

sur $\mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. La seconde quantification de T sur $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ est

$$\widehat{T} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \widehat{T}^{(n)}$$

qui est un opérateur autoadjoint, $0 \in \sigma_p(\widehat{T})$, $\mathbf{1} \in \ker(\widehat{T})$ et donc \widehat{T} a pour propre 0. L'opérateur \widehat{T} est stable sur $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ et $\mathcal{F}_-(\mathcal{H})$, on pose

$$\widehat{T}_+ = \widehat{T}|_{\mathcal{F}_+(\mathcal{H})} \text{ et } \widehat{T}_- = \widehat{T}|_{\mathcal{F}_-(\mathcal{H})},$$

ces opérateurs sont autoadjoints et 0 est une valeur propre pour \widehat{T}_+ et \widehat{T}_- car $\mathbf{1}_\pm \in \ker(\widehat{T}_\pm)$, on pose comme précédemment

$$\Gamma = P_+ - P_-$$

où P_+ et P_- sont les projections orthogonales sur respectivement $\mathcal{F}_{+1}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ et $\mathcal{F}_{-1}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, où

$$\mathcal{F}_{+1}(\mathcal{H}, \mathcal{K}) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{F}_+(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{A}_{2p}(\mathcal{K})$$

et

$$\mathcal{F}_{-1}(\mathcal{H}, \mathcal{K}) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{F}_+(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{A}_{2p+1}(\mathcal{K}).$$

Soit l'opérateur

$$\overline{L} = \widehat{L^*L} \otimes \mathbf{I}_{\mathcal{F}_-(\mathcal{K})} + \mathbf{I}_{\mathcal{F}_+(\mathcal{H})} \otimes \widehat{LL^*},$$

c'est un opérateur de $\mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ qui est positif et autoadjoint, 0 est une valeur propre de \overline{L} car

$$\mathbf{1} = \mathbf{1}_+ \otimes \mathbf{1}_- \in \ker(\overline{L}).$$

Theorem 7. 1) L'opérateur $Q_{\tilde{L}}$ est autoadjoint et essentiellement autoadjoint sur chaque coeur de \overline{L} . En particulier, $Q_{\tilde{L}}$ est essentiellement autoadjoint sur $\mathcal{D}_{\tilde{L}}^\infty$.

2) L'opérateur Γ laisse invariant $\text{dom}(Q_{\tilde{L}})$ et

$$\{\Gamma, Q_{\tilde{L}}\} = \Gamma Q_{\tilde{L}} + Q_{\tilde{L}} \Gamma = o_{\mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{K})}$$

sur $\text{dom}(Q_{\tilde{L}})$.

3) On a l'égalité entre les opérateurs

$$\Delta_{\tilde{L}} = \overline{L} = Q_{\tilde{L}}^2.$$

Proof. La preuve est dans [1], [10]. \square

Definition 16. *Le quadruplet*

$$\{\mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{K}), Q_{\bar{L}}, \bar{L}, \Gamma\}$$

est appelée μ -quantification supersymétrique du triplet (ζ, L, ξ) .

9. QUANTIFICATION DE LA CONNEXION ∇

Le fibré ξ sur Ω , d'espace total

$$E(\xi) = \Lambda^1 \Omega \otimes E(\zeta) \text{ ou } E(\xi) = \Lambda_{\mathbb{C}}^1 \Omega \otimes E(\zeta)$$

si ζ est le fibré hilbertien réel ou complexe de l'univers Ω muni de la connexion ∇ et de la section de Dirac γ , a une structure de fibré complexe. Dans le cas d'une connexion de Koszul sur un fibré hermitien, on complexifie toutes les structures pour se ramener à des fibrés hilbertiens complexes. On suppose l'existence sur ce fibré ζ , d'une structure de fibré d'état ayant la propriété suivante, il existe une forme volume μ sur Ω telle que

$$\nabla : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$$

soit un opérateur fermé, densément défini, de domaine

$$\text{dom}(\nabla) \subset \mathcal{H} \cap \Gamma(E(\zeta))$$

à valeurs dans \mathcal{K} avec

$$\mathcal{H} = L^2(\zeta, \mu) \text{ et } \mathcal{K} = L^2(\xi, \mu).$$

La forme volume μ permet de définir la structure des espaces de Hilbert \mathcal{H} et \mathcal{K} en posant

$$\langle s, t \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \langle s, t \rangle \mu \text{ et } \langle d \otimes s, \delta \otimes t \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \langle d \otimes s, \delta \otimes t \rangle \mu$$

où

$$\langle s, t \rangle(\omega) = \langle s(\omega), t(\omega) \rangle \text{ et } d \otimes s(\omega) = d(\omega)(s(\omega)) \cdot s(\omega)$$

avec $\langle s(\omega), t(\omega) \rangle_{\zeta, \omega}$ est le produit hermitien défini sur la fibre $E_{\omega}(\zeta)$. Sous ces hypothèses, il existe un unique opérateur linéaire d_{∇} , densément défini et fermé sur $\mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ tel que

$$\mathcal{D}_{\nabla}^{\infty} \subset \text{dom}(d_{\nabla}) \text{ et } \mathcal{D}_{\nabla}^{\infty} \text{ est un coeur de } d_{\nabla},$$

pour chaque section $\mathbf{s} \in \mathcal{D}_{\nabla}^{\infty}$ de la forme

$$\mathbf{s} = a(s_1)^* \cdots a(s_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_-$$

alors

$$d_{\nabla} \mathbf{s} = \mathbf{o} \text{ pour } n = 0$$

$$d_{\nabla} \mathbf{s} = \sum_{j=1}^n a(s_1)^* \cdots \widehat{a(s_j)^*} \cdots a(s_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(\nabla s_j)^* b(t_1)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_-,$$

d_{∇} laisse invariant $\mathcal{D}_{\nabla}^{\infty}$.

De plus,

$$\mathcal{D}_{\nabla}^{\infty} \subset \text{dom}(d_{\nabla}^*)$$

et

$$d_{\nabla}^* \mathbf{s} = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} a(\nabla^* u_k)^* a(s_1)^* \cdots a(s_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_k)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_-$$

pour tout $\mathbf{s} = a(s_1)^* \cdots a(s_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_-$. Dans le cas $p = 0$, $d_{\nabla}^* \mathbf{s} = \mathbf{o}$, en particulier, d_{∇}^* laisse invariant $\mathcal{D}_{\nabla}^{\infty}$.

On peut définir l'opérateur de Dirac

$$Q_{\nabla} = d_{\nabla} + d_{\nabla}^*$$

de domaine

$$\text{dom } Q_{\nabla} = \text{dom } d_{\nabla} \cap \text{dom } d_{\nabla}^*,$$

et l'opérateur de Laplace-Beltrami

$$\Delta_{\nabla} = d_{\nabla}^* d_{\nabla} + d_{\nabla} d_{\nabla}^*$$

sur $\mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. On a, si on pose

$$\begin{aligned} \overline{\nabla} &= \widehat{\nabla^* \nabla} \otimes \mathbf{I}_{\mathcal{F}_-(\mathcal{K})} + \mathbf{I}_{\mathcal{F}_+(\mathcal{H})} \otimes \widehat{\nabla \nabla^*} - \\ &\quad \{ \mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{K}), Q_{\nabla}, \overline{\nabla}, \Gamma \} \end{aligned}$$

est la μ -quantification de (ζ, ∇, ξ) et

$$\Delta_{\nabla} = \overline{\nabla} = Q_{\nabla}^2.$$

On peut, également, quantifier l'opérateur d'évolution

$$\nabla_{\gamma}^1 = \gamma \otimes \nabla$$

en regardant sa restriction à l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H}^1(\zeta) = \mathcal{W}^{1,2}(\zeta),$$

$\nabla_{\gamma}^1 |_{\mathcal{H}^1(\zeta)}$ est un opérateur borné. Sur l'espace de Bose-Fermi-Fock $\mathcal{F}(\mathcal{H}^1(\zeta), \mathcal{H}^1(\zeta))$, on a une μ -quantification supersymétrique

$$\left\{ \mathcal{F}(\mathcal{H}^1(\zeta), \mathcal{H}^1(\zeta)), Q_{\nabla_{\gamma}^1 |_{\mathcal{H}^1(\zeta)}}, \overline{\nabla_{\gamma}^1 |_{\mathcal{H}^1(\zeta)}}, \Gamma \right\}$$

du triplet

$$(\mathcal{H}^1(\zeta), \nabla_{\gamma}^1 |_{\mathcal{H}^1(\zeta)}, \mathcal{H}^1(\zeta)).$$

10. CONCLUSION

On a deux procédés de quantification supersymétrique du triplet (ζ, L, ξ) , le premier ne fait intervenir que la structure hermitienne des fibrés et les espaces de Fock attachés à ces structures et le second procédé fait intervenir une forme volume μ induite par une métrique riemannienne g sur Ω .

Si $L \in \text{Hom}(\zeta, \xi)$ et pour chaque $\omega \in \Omega$, l'opérateur

$$L(\omega) : E_{\omega}(\zeta) \rightarrow E_{\omega}(\xi)$$

est densément défini et fermé, on peut quantifier cet opérateur fibre à fibre par un procédé de quantification décrit dans [2]. Ce procédé est appelé quantification par fibre. Si on veut quantifier globalement l'opérateur, on travaille sur les sections des fibrés ζ et ξ en définissant l'opérateur

$$\tilde{L} : \mathcal{S}(\zeta) \rightarrow \mathcal{S}(\xi), \tilde{L}(s) = L \otimes s.$$

On construit les espaces de Sobolev $W_{\partial}^{m,p}(\zeta)$ ou du type Sobolev $\mathcal{W}^{m,p}(\zeta)$ qui sont des espaces de Hilbert pour $p = 2$ et on restreint l'opérateur \tilde{L} à $W_{\partial}^{m,2}(\zeta)$ ou $\mathcal{W}^{m,2}(\zeta)$. Pour construire $W_{\partial}^{m,p}(\zeta)$, on est amené à construire une théorie des distributions sur les fibrés des états dont le produit scalaire hermitien est parallèle à la connexion ∇ . L'exemple classique de connexion de ce type est la connexion de

Levi-Civita d'une métrique riemannienne. Le produit scalaire défini par la métrique riemannienne est parallèle à la connexion de Levi-Civita de cette métrique.

Les principes de quantification d'un fibré des états donne un procédé de quantification sur un état et le passage à l'espace de Bose-Fermi-Fock permet de décrire la quantification sur l'ensemble des états. Si on veut quantifier l'équation d'évolution, cette équation est locale, on quantifie sur une carte en prenant le "local frame" $\partial = \{\partial_\nu\}$ et pour espace de hilbert $W_\partial^{1,2}(\zeta)$, ensuite on quantifie les opérateurs $\gamma \otimes \nabla$ et ∇_T et on obtient l'équation d'évolution quantifiée

$$\Delta_{\gamma \otimes \nabla} = -\lambda^2 \Delta_{\nabla_T}.$$

REFERENCES

- [1] Arai A."A general class of infinite dimensional operators Dirac and path integral representation of their index." Journal of Functional Analysis. Vol 105.n°2, pp342-408, (1992)
- [2] Arai A."A special class of infinite dimensional Dirac operators on the abstract Boson-Fermion Fock space." Hindawi Publishing Corporation, Journal of Mathematics. Vol 2014, Article ID 713690, (2014)
- [3] Arai A."Supersymmetric extension of quantum scalar field theory." Quantum and Non-Commutative Analysis, H. Araki. Ed. pp73-90, Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. The Netherlands, (1993)
- [4] Arminjon M. et F. Reifler, "Representations of the Dirac wave function in a curved space-time", Proc. Fifth International Workshop DICE2010 : current issues in quantum mechanics and beyond, Journal of Physics: Conference Series 306 (2011), 012061.
- [5] Dloussky G.. "Cours de géométrie complexe 2008" www.latp.univ-mrs.fr (2008)
- [6] Jonot J.L. " ∇^γ -quantification des mesures physiques" hal.archives-ouvertes.fr (2014)
- [7] Jonot J.L."Equation de Dirac-Weyl-Fock le long d'un champ chronologique" hal.archives-ouvertes.fr (2014)
- [8] Jonot J.L."Sur l'espace temps d'Einstein" hal.inria.fr/docs/01/06/38/03/PDF/Quantique4.pdf
- [9] Maurey B."Analyse Fonctionnelle et Théorie Spectrale" Cours Paris 7 (2001-2002)
- [10] Pederson S. "Anticommuting self-adjoint operators", J.Funct. Anal. 89 (1990)
- [11] Reed M. and Simon B. "Methods of Modern Mathematical Physics Vol.I: Functional Analysis", Academy Press, New York, (1975)
- [12] Séré E. et Esteban M.J. "Les équations de Dirac-Fock." Séminaire E.D.P(1997-1998), Exposé n°5, U.M.R 7640 C.N.R.S.
- [13] Tumpach A.B."Varieties kaehlériennes et hyperkaehlériennes de dimension infinie" Thèse HAL archives-ouvertes. (2006)
- [14] Vasilescu F.H "Anticommuting self-adjoint operators", Rev. Roum. Math. Pures Appl. 28 (1983)77-91
- [15] Voisin C."Géométrie différentielle" Cours 2013

E-mail address: jean-louis.jonot@ac-versailles.fr