A la recherche de l'inégalité perdue

Grégoire Allaire

▶ **To cite this version:**

Grégoire Allaire. A la recherche de l'inégalité perdue. Matapli, 2012, 98, pp.52-64. hal-01111806

HAL Id: hal-01111806
https://hal.science/hal-01111806

Submitted on 31 Jan 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

A la recherche de l'inégalité perdue

Grégoire Allaire *

15 mai 2012

Résumé

A l'occasion du centenaire de la disparition de Henri Poincaré on s'intéresse à l'origine de la célèbre inégalité de Poincaré, si utile dans l'analyse de certaines équations aux dérivées partielles. Comme souvent en mathématiques les bons résultats ne sont pas attribués aux bonnes personnes... En fait, cette inégalité est probablement due à Neumann, Schwarz ou Scheeffer et on doit plutôt à Henri Poincaré une variante, appelée communément inégalité de Poincaré-Wirtinger. Sa démonstration originale est très intéressante car elle est constructive, au contraire d'une démonstration ultérieure par contradiction, utilisant le théorème de compacité de Rellich, que l'on trouve désormais dans la plupart des ouvrages sur les équations aux dérivées partielles. La motivation de cette inégalité est l'étude des valeurs propres et fonctions propres du Laplacien.

1 Introduction

Il existe une multitude d'articles et de livres présentant et discutant les nombreux travaux mathématiques de Henri Poincaré [1] et il est fort difficile d'apporter une contribution originale à la connaissance de l'oeuvre de Poincaré, surtout pour un modeste amateur en histoire des mathématiques comme je le suis... Néanmoins, puisque l'Ecole Polytechnique, où fut formé Henri Poincaré, se doit de participer aux célébrations du centenaire de son décès, je me suis laissé aller à un élan de curiosité et j'ai voulu en savoir plus sur ses travaux dans le domaine des équations aux dérivées partielles et plus spécifiquement sur l'origine de sa célèbre inégalité, enseignée à tous les étudiants s'intéressant aux équations aux dérivées partielles. S'il n'est pas forcément facile d'avoir accès aux publications originales de Poincaré, on peut cependant les découvrir dans l'édition des oeuvres de Poincaré [15], entreprise par la section de géométrie de l'Académie des Sciences

*CMAP, Ecole Polytechnique, Route de Saclay, 91128 Palaiseau Cedex France (gregoire.allaire@polytechnique.fr)

1. Henri Poincaré, mathématicien français, né le 29 avril 1854, décédé le 17 juillet 1912, polytechnicien de la promotion 1873.

de 1916 à... 1956 ! Notons d'ailleurs que ces oeuvres ont été récemment rééditées en fac-similé par les éditions Jacques Gabay. Les tomes IX et X des oeuvres de Poincaré [15] regroupent ses articles sur les équations aux dérivées partielles et la physique mathématique. Ses travaux en physique mathématique couvrent principalement l'électromagnétisme, la théorie cinétique des gaz, la physique statistique et la thermodynamique ainsi que la physique des quanta. Les articles de Poincaré ne sont pas toujours très faciles à lire sur ces sujets, en partie parce que le formalisme de ces théories, très récentes à l'époque, a beaucoup changé. Par exemple, il n'est pas toujours facile de reconnaitre les équations de Maxwell de l'électromagnétisme dans certains écrits... Fort heureusement, certains y sont arrivés mieux que moi et je renvoie à l'analyse de l'équation des télégraphistes par Jean Mawhin [10] ou à l'étude d'Yves Pomeau dans le chapitre 18 de [5]. Il est bien plus aisé de lire les articles de Poincaré consacrés aux équations aux dérivées partielles. Bien que plusieurs auteurs, notamment, et encore, Jean Mawhin [8], [9], les aient déjà analysés avec beaucoup de pertinence, c'est néanmoins ce que je vais faire ici de manière plus modeste et un peu anecdotique. Suivant un exposé remarquable de Laurent Schwartz [2] en 1954 lors des cérémonies du centenaire de la naissance de Poincaré [17], je vais me concentrer sur trois articles fondamentaux de Poincaré [12], [13], [14], parus entre 1890 et 1897. Notons que Poincaré a écrit une analyse de ses propres travaux sur le sujet [16] qui permet de s'y retrouver plus facilement dans la progression de ses idées.

Ces trois articles sont consacrés principalement à deux problèmes importants : d'une part le problème de Dirichlet [3], d'autre part l'existence de valeurs propres et de fonctions propres pour le Laplacien. Dans tout ce qui suit on désigne par Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ (supposé connexe pour simplifier). Dans le problème de Dirichlet, étant donnée une fonction $g(x)$ définie sur le bord de $\partial\Omega$, il s'agit de trouver la solution $u(x)$ dans Ω du problème aux limites

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{1}$$

On sait que Riemann [4] proposa de trouver la solution de (1) en cherchant la solution du problème de minimisation

$$\inf \left\{ \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \text{ avec } v \text{ tel que } v = g \text{ sur } \partial\Omega \right\}. \tag{2}$$

Malheureusement, Weierstrass [5] fit rapidement remarquer qu'il y avait une difficulté essentielle dans le raisonnement de Riemann, à savoir

2. Laurent Schwartz, mathématicien français, né le 5 mars 1915 et mort le 4 juillet 2002, lauréat de la médaille Fields en 1950.

3. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, mathématicien allemand, né le 13 février 1805 et décédé le 5 mai 1859, célèbre pour ses travaux en analyse et en théorie des nombres.

4. Georg Friedrich Bernhard Riemann, mathématicien allemand, né le 17 septembre 1826 et mort le 20 juillet 1866, spécialiste d'analyse et de géométrie différentielle.

5. Karl Weierstrass, mathématicien allemand, né le 31 octobre 1815 et mort le 19 février 1897, un des pères de l'analyse.

qu'il fallait montrer la continuité (ou, à tout le moins, la semi-continuité inférieure) de la fonctionnelle dans (2). On sait depuis que la démonstration rigoureuse de l'existence d'un minimisateur de (2) nécessite des outils d'analyse fonctionnelle inconnus à l'époque. Les premières démonstrations de l'existence d'une solution de (1) sont dues à Neumann [6] en utilisant la notion de potentiel de double couche et à Schwarz [7] qui proposa une méthode itérative de construction de la solution à partir de deux solutions connues sur deux sous-domaines. Poincaré proposa une nouvelle méthode pour résoudre (1), dite méthode du balayage, qui généralisait les résultats de Neumann, alors restreints au cas de domaines Ω convexes, à tout domaine connexe. Nous renvoyons à [9] pour plus de détails sur la technique du balayage de Poincaré qui n'a pas eu la fécondité et la postérité qu'a eu la méthode de Neumann, à l'origine de la théorie du potentiel et des équations intégrales, développées notamment par Fredholm [8] [6].

Le deuxième problème étudié par Poincaré est le problème spectral

$$\begin{cases} -\Delta u_j = k_j u_j & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u_j}{\partial n} + h u_j = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

où $k_j \in \mathbb{R}$ est une valeur propre et $u_j(x)$ une fonction propre non nulle (dans certains de ses articles Poincaré appelent les fonctions propres "fonctions fondamentales" et dans d'autres, comme [13], "fonctions harmoniques" à cause des harmoniques d'un son). Le paramètre h appartient à $\mathbb{R}^+$ et les deux valeurs extrêmes $h = 0$, $h = +\infty$ permettent de retrouver les conditions aux limites de Neumann ou de Dirichlet, respectivement. Nous étudierons ce problème spectral un peu plus en détails dans la section 4. Pour l'instant, contentons nous de remarquer qu'en multipliant l'équation de (3) par u_j et en intégrant par parties, on obtient une formule pour la valeur propre

$$k_j = \frac{\int_\Omega |\nabla u_j|^2 dx + h \int_{\partial\Omega} |u_j|^2 ds}{\int_\Omega |u_j|^2 dx}. \tag{4}$$

En étudiant le quotient de Rayleigh [9] défini par (4), Poincaré va introduire des inégalités entre numérateur et dénominateur pour des fonctions quelconques, afin de donner des bornes aux valeurs propres. Ces inégalités portent désormais le nom de Poincaré et c'est sur celles-ci que je voudrais consacrer la majeure partie de mon exposé. De manière surprenante, l'inégalité "classique" de Poincaré ne se trouve pas dans les travaux de Poincaré ! C'est plutôt une variante de celle-ci, l'inégalité de Poincaré-Wirtinger que l'on trouve dans [12], [13]. Il semblerait

6. Carl Gottfried Neumann, mathématicien allemand, né le 7 mai 1832 et mort le 27 mars 1925, pionnier de la théorie des équations intégrales.

7. Hermann Amandus Schwarz, mathématicien allemand, né le 25 janvier 1843 et mort le 30 ovembre 1921, spécialiste d'analyse et de géométrie.

8. Ivar Fredholm, mathématicien suédois, né le 7 avril 1866 et mort le 17 août 1927, père de la théorie des équations intégrales et de la théorie spectrale.

9. John William Strutt, Lord Rayleigh, physicien anglais, né le 12 novembre 1842 et décédé le 30 juin 1919, prix Nobel de physique en 1904.

que l'inégalité de Poincaré soit possiblement due à Neumann ou, plus certainement, à Schwarz. En tout cas, on la trouve de manière certaine, en dimension un d'espace, dans un article postume de 1886 de Scheeffer [10] [19]. Il arrive souvent en mathématiques que des résultats ne soient pas attribués à ceux qui les ont découverts mais à ceux qui les ont propagés...

2 Inégalité de Poincaré

Commençons par rappeler ce qu'il est convenu d'appeler l'inégalité de Poincaré [4], [18]. On rappelle que $H^1(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev [11] des fonctions de carré sommable ainsi que toutes leurs dérivées premières. De même, $H^1_0(\Omega)$ désigne le sous-espace de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions qui s'annulent sur le bord $\partial\Omega$. Bien entendu, ces espaces étaient inconnus à l'époque de Poincaré...

Lemme 1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné dans au moins une direction de l'espace. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H^1_0(\Omega)$,*

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx. \tag{5}$$

Démonstration. Par un argument standard de densité il suffit de démontrer (5) pour une fonction régulière $v \in C^1(\overline{\Omega})$ s'annulant sur le bord $\partial\Omega$. On peut l'étendre par continuité par zéro en dehors de Ω. L'hypothèse sur le caractère borné de Ω dit (après une éventuelle rotation) que pour tout $x \in \Omega$ la première composante x_1 est bornée, $-\infty < a \leq x_1 \leq b < +\infty$. Pour tout $x \in \Omega$ on a

$$v(x) = \int_a^{x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1}(t, x_2, ..., x_N)\, dt,$$

d'où l'on déduit par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|v(x)|^2 \leq (b-a) \int_a^b \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(t, x_2, ..., x_N) \right|^2 dt.$$

Intégrant sur Ω on obtient

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx \leq (b-a) \int_\Omega \int_a^b \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(t, x_2, ..., x_N) \right|^2 dt\, dx,$$

et permutant les deux intégrations par rapport à t et x_1, on conclut

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx \leq (b-a)^2 \int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(x) \right|^2 dx \leq (b-a)^2 \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx.$$

On remarque au passage que la constante C dans l'inégalité de Poincaré (5) est plus petite que le carré du diamètre de Ω. □

10. Ludwig Scheeffer, mathématicien allemand, né le 1er juin 1859 et disparu prématurément le 11 juin 1885, célèbre pour une version du théorème des accroissements finis valable pour des fonctions continues non dérivables sur un ensemble dénombrable.

11. Sergueï Lvovitch Sobolev, mathématicien russe, né le 6 octobre 1908 et mort le 3 janvier 1989, spécialiste d'analyse fonctionnelle et d'équations aux dérivées partielles.

Une conséquence immédiate de (5) est l'obtention d'une borne inférieure pour la première valeur propre k_1 de (3) pour le cas des conditions aux limites de Dirichlet ($h = +\infty$), à savoir $k_1 \geq 1/C$. En fait, si on cherche la meilleure constante (c'est-à-dire la plus petite telle que (5) ait lieu), alors il est facile de voir qu'il s'agit justement de l'inverse de la première valeur propre k_1 du Laplacien avec condition aux limites de Dirichlet dans Ω. Comme nous le verrons dans la section 4 Poincaré s'est intéressé à l'existence des valeurs propres du Laplacien, mais il reconnait que c'est Schwarz qui a démontré l'existence de la première valeur propre. On peut donc attribuer à Schwarz l'inégalité de Poincaré (5) (mais je n'ai pas pu vérifier ce fait dans ses articles originaux).

Dans l'approche moderne des équations aux dérivées partielles le rôle premier de l'inégalité de Poincaré est de permettre de résoudre le problème de Poisson [12]

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

On passe du problème de Dirichlet (1) à celui de Poisson (6) par un relèvement de la condition aux limites. Pour montrer l'existence d'une solution de (6), par exemple par le théorème de représentation de Riesz [13], il faut prouver que le produit scalaire issu de la formulation variationnelle de (6), à savoir

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx,$$

est équivalent au produit scalaire canonique de l'espace $H^1(\Omega)$,

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \Big(\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + u(x)\, v(x) \Big) dx,$$

et l'inégalité de Poincaré (5) est la clé de cette équivalence. Nous renvoyons aux bons ouvrages pour les détails [4], [18].

3 Inégalité de Poincaré-Wirtinger

Si Poincaré n'est pas à l'origine de l'inégalité de Poincaré, il a par contre établi une autre inégalité célèbre, appelée maintenant inégalité de Poincaré-Wirtinger. Dans les deux articles [12], [13] il propose une démonstration constructive, reproduite ci-dessous, de cette inégalité de Poincaré-Wirtinger. Elle fut indépendemment découverte par Wilhelm Wirtinger [14], sans référence précise dans la littérature, mais elle est

12. Siméon Denis Poisson, mathématicien français, né le 21 juin 1781 et décédé le 25 avril 1840, célèbre pour ses contributions en géomètrie et en physique.

13. Frigyes Riesz, mathématicien hongrois, né le 22 juin 1880 et mort le 28 février 1956, un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle.

14. Wilhelm Wirtinger, mathématicien autrichien, né le 15 juillet 1865 et mort le 15 janvier 1945, connu pour ses contributions en géométrie différentielle.

mentionnée à la page 105 du livre de Blaschke [15] [3]. Elle est aussi utilisée implicitement par Adolf Hurwitz [16] pour démontrer un théorème isopérimétrique [7]. On la trouve à la même époque, indépendemment, dans un article de Emilio Almansi [17] [1]. Comme me l'a fait remarquer Jean Mawhin, la différence entre l'inégalité de Wirtinger et celle de Poincaré, que nous allons voir ci-dessous, est que la première est établie pour des fonctions définies sur la sphère unité alors que la deuxième l'est pour des domaines convexes (elles ne coincident qu'en dimension d'espace $N = 1$). En dimension $N = 1$ la démonstration usuelle de l'inégalité de Wirtinger est constructive et relativement facile en utilisant l'analyse de Fourier [18].

L'énoncé proposé par Poincaré est le suivant. Notons qu'il suppose le domaine convexe alors que le résultat reste vrai pour un domaine connexe (avec une autre démonstration).

Lemme 2. *Soit Ω un ouvert borné, régulier et convexe de $\mathbb{R}^N$. On désigne par V l'espace*

$$V = \{\phi \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \int_\Omega \phi(x)\,dx = 0\}.$$

Il existe une constante $0 < C \leq 2^{N-1} d(\Omega)^2$ telle que, pour toute fonction $v \in V$,

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx. \tag{7}$$

Démonstration. Encore une fois, par un argument standard de densité il suffit de démontrer (7) pour une fonction régulière $v \in V \cap C^1(\overline{\Omega})$. L'idée ingénieuse de Poincaré est de remarquer tout d'abord que, pour tout $v \in V$, on a

$$\int_\Omega \int_\Omega \big(v(x) - v(x')\big)^2\,dx\,dx' = 2|\Omega| \int_\Omega v^2(x)\,dx \tag{8}$$

puisque v est à moyenne nulle sur Ω. Ensuite, grâce à la convexité de Ω, il remarque que, pour tout couple de points $x, x' \in \Omega$, le segment (x, x') est inclus dans Ω et on a

$$v(x) - v(x') = \int_0^1 (x - x') \cdot \nabla v(tx + (1-t)x')\,dt.$$

En élevant au carré, l'inégalité de Cauchy-Schwarz conduit à

$$|v(x) - v(x')|^2 \leq d(\Omega)^2 \int_0^1 |\nabla v(tx + (1-t)x')|^2 dt,$$

15. Wilhelm Blaschke, mathématicien autrichien, né le 13 septembre 1885 et mort le 17 mars 1962, spécialiste de géométrie différentielle

16. Adolf Hurwitz, mathématicien allemand, né le 26 mars 1859 et mort le 18 novembre 1919, spécialiste de géométrie et de théorie des nombres.

17. Emilio Almansi, ingénieur et mathématicien italien, né le 15 avril 1869 et mort le 10 août 1948, spécialiste de géométrie différentielle et d'applications aux problèmes d'élasticité en grandes déformations.

18. Joseph Fourier, mathématicien et physicien français, né le 21 mars 1768 et mort le 16 mai 1830, inventeur de l'analyse de Fourier pour étudier la propagation de la chaleur.

où $d(\Omega) = \sup_{x,x' \in \Omega} |x - x'|$ désigne le diamètre de Ω. On en déduit alors

$$\int_\Omega \int_\Omega |v(x)-v(x')|^2 \, dx \, dx' \leq d(\Omega)^2 \int_\Omega \int_\Omega \left(\int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1 \right) |\nabla v(tx+(1-t)x')|^2 dt \, dx \, dx'.$$

Par symétrie on a

$$\int_\Omega \int_\Omega \int_0^{1/2} |\nabla v(tx+(1-t)x')|^2 dt \, dx \, dx' = \int_\Omega \int_\Omega \int_{1/2}^1 |\nabla v(tx+(1-t)x')|^2 dt \, dx \, dx',$$

et donc

$$\int_\Omega \int_\Omega |v(x)-v(x')|^2 \, dx \, dx' \leq 2d(\Omega)^2 \int_\Omega \int_\Omega \int_{1/2}^1 |\nabla v(tx+(1-t)x')|^2 dt \, dx \, dx'.$$

Par Fubini on peut échanger l'ordre des intégrales en t et x. Pour t fixé dans $[1/2, 1]$, le changement de variables $\tilde{x} = tx + (1-t)x'$ conduit à

$$\int_\Omega |\nabla v(tx + (1-t)x')|^2 \, dx = \frac{1}{t^N} \int_\omega |\nabla v(\tilde{x})|^2 \, d\tilde{x}$$

où $\omega = t\Omega + (1-t)x'$ est un sous-ensemble de Ω (car Ω est convexe). On peut donc majorer, pour $t \geq 1/2$,

$$\int_\Omega |\nabla v(tx + (1-t)x')|^2 \, dx \leq 2^N \int_\Omega |\nabla v(\tilde{x})|^2 \, d\tilde{x}.$$

Au total, on a obtenu

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_\Omega |v(x) - v(x')|^2 \, dx \, dx' &\leq 2^N d(\Omega)^2 2 \int_{1/2}^1 \int_\Omega \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dt \, dx \, dx' \\ &\leq 2^N d(\Omega)^2 |\Omega| \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, dx, \end{aligned}$$

ce qui conduit, par combinaison avec (8), à l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (7). □

En vérité la démonstration de Poincaré dans [12] est un peu plus complexe car il utilise un autre changement de variables à base de coordonnées sphériques.

La démonstration du Lemme 2 fournit une constante $C = 2^{N-1} d(\Omega)^2$ dans l'inégalité (7) qui n'est pas optimale. On peut légèrement l'améliorer en calculant une primitive de t^{-N}, ce qui donne $C = (2^{N-1}-1) d(\Omega)^2/(N-1)$. C'est toujours moins bien que les constantes trouvées par Poincaré dans [13], $C = 7d(\Omega)^2/24$ en dimension $N = 2$ et $C = 9d(\Omega)^2/16$ en dimension $N = 3$. C'est encore loin de la constante trouvée par Payne et Weinberger [11], avec une démonstration corrigée par Bebendorf [2], qui est $C = d(\Omega)^2/\pi^2$ en toute dimension (pour un domaine convexe). Cette dernière constante est optimale si on souhaite qu'elle ne dépende que du diamètre $d(\Omega)$.

Bien sûr, pour chaque domaine Ω il existe une constante optimale dans (7) (c'est-à-dire la plus petite possible) qui est encore l'inverse

d'une valeur propre de (3). Mais cette fois, il s'agit de la seconde valeur propre k_2 du Laplacien avec condition aux limites de Neumann dans Ω, c'est-à-dire quand $h = 0$ (la première valeur propre $k_1 = 0$ est nulle avec la fonction propre associée constante).

Le Lemme 2 est énoncé pour des ouverts convexes uniquement (et la démonstration utilise fortement cette hypothèse). La démonstration usuelle de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (7) est valable pour tout ouvert borné *connexe* (mais pas forcément convexe), n'est pas constructive (au sens où elle ne donne aucune estimation sur la taille de la constante C) et repose sur un argument de compacité. Décrivons brièvement cette preuve par contradiction. Supposons que l'inégalité (7) soit fausse : il existe donc une suite de fonctions $v_n \in V$ telle que

$$\int_\Omega |v_n(x)|^2 dx = 1 \quad \text{et} \quad \int_\Omega |\nabla v_n(x)|^2 dx = 1/n.$$

La suite v_n étant bornée dans $H^1(\Omega)$, par application du théorème de compacité de Rellich [19] [4], on peut en extraire une sous-suite $v_{n'}$ qui converge (fortement) vers une limite v_∞ dans $L^2(\Omega)$. Comme ∇v_n converge manifestement vers zéro dans $L^2(\Omega)^N$, on en déduite que $\nabla v_\infty = 0$ et, Ω étant connexe, que v_∞ est une fonction constante. Comme elle appartient à l'espace V puisque $v_n \in V$, v_∞ doit être nulle ce qui est une contradiction avec le fait que

$$\int_\Omega |v_\infty(x)|^2 dx = \lim_{n' \to +\infty} \int_\Omega |v_{n'}(x)|^2 dx = 1.$$

Dans le chapitre IV de [14] Poincaré propose une généralisation du Lemme 2 qui anticipe les théorèmes de trace pour les espaces de Sobolev. Nous nous contentons d'énoncer ce résultat ci-dessous.

Lemme 3. *Soit Ω un ouvert borné, régulier et simplement connexe de $\mathbb{R}^N$. On désigne par W l'espace*

$$W = \{\phi \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \int_{\partial\Omega} \phi(x)\, ds = 0\}.$$

Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in W$,

$$\int_{\partial\Omega} |v(x)|^2 ds \leq C \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx.$$

4 Valeurs propres et fonctions propres du Laplacien

La motivation de Poincaré pour démontrer le Lemme 2 est l'étude des valeurs propres et des fonctions propres du Laplacien, solutions de (3). Dans [12] il appelle le problème spectral (3) "problème de Fourier" (ou refroidissement d'un corps solide) car, par séparation des variables

19. Franz Rellich, mathématicien autrichien, né le 14 septembre 1906 et mort le 25 septembre 1955, spécialiste d'équations aux dérivées partielles.

temps et espace, il permet de résoudre l'équation de la chaleur avec la condition aux limites de Fourier qui lie le flux de chaleur sortant à la différence des températures interne et externe (cette dernière supposée nulle). Dans [13] il remarque que ce même problème spectral se rencontre dans l'étude des vibrations d'une membrane (dans le cas des conditions aux limites de Dirichlet) ou d'un gaz (dans le cas des conditions aux limites de Neumann).

La méthode utilisée par Poincaré dans [12] pour démontrer l'existence des valeurs propres k_j et fonctions propres u_j est basée sur le principe de minimisation que Riemann propose pour "démontrer" le principe de Dirichlet. Comme le savait déjà Poincaré, ce principe de minimisation n'est pas rigoureux tant que l'on n'a pas introduit toute l'artillerie des espaces de Hilbert [20] et de l'analyse fonctionnelle. Ainsi à la page 244 de [12] il dit "ce raisonnement est sujet aux mêmes objections que celui par lequel Riemann établit le principe de Dirichlet". Voyons donc comment il procède en pratique. Tout d'abord, Poincaré se persuade que

$$k_1 = \min_v \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + h \int_{\partial\Omega} |v|^2 ds}{\int_\Omega |v|^2 dx}. \tag{9}$$

Son argument est le suivant : notons

$$A = \int_\Omega |v|^2 dx \quad \text{et} \quad B = \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + h \int_{\partial\Omega} |v|^2 ds,$$

si on normalise la fonction v par $A = 1$, alors le terme B ne peut s'annuler. Il conclut alors faussement "B admettra donc un minimum absolu". Il appelle u_1 la fonction v qui réalise le minimum dans (9) (sans se soucier au passage de savoir si cette fonction propre est simple ou multiple). Evidemment, une conséquence de (9), lorsque $h = +\infty$, est l'inégalité de Poincaré du c. Il est aisé de se convaincre que l'argument ci-dessus est faux car on peut inverser les rôles de A et B : si on normalise la fonction v par $B = 1$, le terme A ne peut pas non plus s'annuler mais il n'admet pas de minimum absolu car on peut construire une suite minimisante pour laquelle A tend vers zéro (par exemple, en dimension $N = 1$, prendre la suite $v_n(x) = \sin(nx)/n$).

Poincaré construit ensuite par récurrence les autres valeurs et fonctions propres : pour $j \geq 1$,

$$k_{j+1} = \min_{v \in E_j} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + h \int_{\partial\Omega} |v|^2 ds}{\int_\Omega |v|^2 dx}, \tag{10}$$

où E_j est l'espace des fonctions orthogonales aux j premières fonctions propres

$$E_j = \left\{ v \text{ tel que } \int_\Omega v u_i \, dx = 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq j \right\}.$$

20. David Hilbert, mathématicien allemand, né le 23 janvier 1862 et mort le 14 février 1943, auteur des célèbres 23 problèmes, contemporain et, dit-on, concurrent de Poincaré.

La question de l'existence d'un minimum absolu pour (10) n'est pas plus résolue que pour (9). Néanmoins, par un calcul des variations, devenu standard, Poincaré montre que les fonctions propres obtenues par minimisation de (10) vérifient bien l'équation spectrale (3). De plus la suite des valeurs propres k_j est automatiquement croissante. Ce procédé ne permet néanmoins pas de prouver que l'on construit ainsi toutes les solutions de (3), autrement dit que les (u_i) forment une base hilbertienne.

La difficulté suivante est de montrer que la suite k_j tends vers $+\infty$ quand j croit. Poincaré remarque tout d'abord que, à j fixé, la valeur propre k_j est une fonction croissante de h. Il suffit donc de calculer pour $h = 0$ la limite de k_j quand j tends vers l'infini. Pour cela, Poincaré propose de découper le domaine Ω en $(j-1)$ sous-domaines *convexes* Ω_i, $1 \leq i \leq j-1$ (c'est possible pour j suffisamment grand) et de considérer la deuxième valeur propre $k_{2,i}$ du Laplacien avec condition aux limites de Neumann sur Ω_i à laquelle on peut appliquer l'inégalité de Poincaré-Wirtinger du Lemme 2 (la première valeur propre est nulle avec une première fonction propre constante). Il introduit une fonction test

$$v(x) = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i u_i(x),$$

où u_i est la i-ème fonction propre du Laplacien-Neumann sur Ω et α_i est un coefficient réel. Il contraint la fonction v à vérifier

$$\int_{\Omega_i} v(x)\, dx = 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq j-1,$$

ce qui revient à imposer $(j-1)$ contraintes linéaires sur les j coefficients α_i (il ne dit pas pourquoi ces contraintes sont qualifiées). Il évalue ensuite le quotient

$$\frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx}{\int_\Omega |v|^2 dx} = \frac{\sum_{i=1}^{j} k_i |\alpha_i|^2}{\sum_{i=1}^{j} |\alpha_i|^2} \leq k_j,$$

par orthogonalité des fonctions propres, tandis que

$$\frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx}{\int_\Omega |v|^2 dx} = \frac{\sum_{i=1}^{j-1} \int_{\Omega_i} |\nabla v|^2 dx}{\sum_{i=1}^{j-1} \int_{\Omega_i} |v|^2 dx} \geq \min_{1 \leq i \leq j-1} \frac{\int_{\Omega_i} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega_i} |v|^2 dx} \geq \min_{1 \leq i \leq j-1} k_{2,i}$$

puisque la fonction v est orthogonale à chacune des premières fonctions propres (constantes) des sous-domaines Ω_i. Grâce à l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (7) (puisque Ω_i est convexe) et à l'estimation explicite de sa constante, il en déduit

$$k_j \geq \min_{1 \leq i \leq j-1} k_{2,i} \geq \min_{1 \leq i \leq j-1} \frac{1}{2^{N-1} d(\Omega_i)^2} \tag{11}$$

qui tend vers l'infini avec j si on découpe Ω en $(j-1)$ sous-domaines de diamètres comparables, donc tendant vers zéro. C'est ainsi que l'inégalité de Poincaré-Wirtinger joue un rôle-clé pour démontrer que la suite des valeurs propres tend vers l'infini.

Si (11) donne une borne inférieure à la valeur propre k_j, Poincaré cherche aussi à obtenir une borne supérieure. Pour cela il va proposer une méthode d'approximation des valeurs propres connue maintenant sous le nom de méthode de Rayleigh-Ritz [21] (fréquemment utilisée en calcul numérique) et il va démontrer un résultat qui anticipe le célèbre principe du min-max de Courant [22]-Fisher [23]. Il se donne une famille de fonctions quelconques ϕ_i, $1 \leq i \leq j$, et il construit une nouvelle fonction test

$$v(x) = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i \phi_i(x),$$

avec des coefficients réels α_i. Pour n'importe quel paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ il introduit la forme quadratique en $\alpha = (\alpha_i)$

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \lambda \int_\Omega |v|^2 dx = \langle (B - \lambda A)\alpha, \alpha \rangle$$

où les matrices A et B sont symétrique définies positives. Il appelle $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_j$ les valeurs propres de cette forme quadratique (ou plus exactement du problème spectral $(B - \lambda A)\alpha = 0$) et il démontre l'inégalité entre ces valeurs propres et celles de (3)

$$k_i \leq \lambda_i \text{ pour } 1 \leq i \leq j.$$

Plus étonnant encore est la section 5 de [12] où Poincaré va justifier par "l'hypothèse moléculaire" son théorème (mathématiquement douteux) qui affirme l'existence des valeurs propres et fonctions propres, solution de (3). En termes modernes, familiers en analyse numérique, "l'hypothèse moléculaire" est simplement la discrétisation de l'équation aux dérivées partielles (3). On peut voir ainsi en Poincaré un précurseur (méconnu ?) de l'analyse numérique. Il remplace l'opérateur Laplacien par des différences finies et il réduit (3) à un problème de valeurs propres pour des matrices, comme dans l'approximation ci-dessus "à la Rayleigh-Ritz". Bien sûr, dans ce cas discret (en dimension finie), l'existence des valeurs propres et vecteurs propres est évidente. Je ne résiste pas au plaisir de citer alors la conclusion de Poincaré.

«Le nombre immense des équations [discrètes] s'opposerait absolument aux calculs. Mais cette solution purement théorique peut mettre sur la voie de la solution véritable. Passons à la limite et abandonnons l'hypothèse moléculaire pour celle de la matière continue. Nos équations [discrètes] deviendront des équations aux dérivées partielles ; nos formes quadratiques [...] deviendront des intégrales.»

Ne sourions pas ! Soyons plutôt plein de respect et d'admiration pour nos grands ancêtres qui, sans ordinateurs ou autres moyens de

21. Walter Ritz, physicien suisse, né le 22 février 1878 et mort le 7 juillet 1909, spécialiste de la physique théorique.

22. Richard Courant, mathématicien germano-américain, né le 8 janvier 1888 et mort le 27 janvier 1972, spécialiste de physique mathématique et d'équations aux dérivées partielles, un des fondateurs de l'analyse numérique.

23. Sir Ronald Aylmer Fisher, biologiste et statisticien britannique, né le 17 février 1890 et mort le 29 juillet 1962.

calculs, et sans outils d'analyse fonctionnelle comme les espaces de Hilbert et la convergence faible, n'hésitaient pas à s'engager sur les terrains escarpés et dangereux de la discrétisation et du passage à la limite. Respect, comme on dit de nos jours...

Pour conclure, rassurons le lecteur soucieux de la réputation de Poincaré : dans [13] il démontre rigoureusement l'existence des valeurs propres et fonctions propres, solution de (3), par un argument de fonctions méromorphes, en représentant la solution d'un problème auxiliaire de Poisson comme une série entière dont les pôles sont les valeurs propres (voir [9] pour plus de détails).

Remerciements. L'auteur remercie Jean Mawhin pour ses commentaires sur une première version de cet article et pour lui avoir indiquer les références [1], [3], [19].

Références

[1] E. Almansi, *Sopra una delle esperienze del Plateau,* Annali di Matematica, Serie III, tomo XII (1906), 1-17.

[2] M. Bebendorf, *A note on the Poincaré inequality for convex domains,* Z. Anal. Anwendungen 22 (2003), no. 4, 751-756.

[3] W. Blaschke, *Kreis und Kugel,* Chelsea Publishing Co., New York, 1949.

[4] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle,* Masson, Paris (1983).

[5] E. Charpentier, E. Ghys, A. Lesne, (sous la direction de) *L'héritage scientifique de Poincaré,* Belin, Paris (2006).

[6] I. Fredholm, *Sur une classe d'équations fonctionnelles,* Acta Math. 27 (1903), no. 1, 365-390.

[7] A. Hurwitz, *Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen,* Math. Ann. 59 (1904), no. 4, 553.

[8] J. Mawhin, *Henri Poincaré. A life in the service of science.* Notices Amer. Math. Soc. 52 (2005), no. 9, 1036-1044.

[9] J. Mawhin, *Henri Poincaré et les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique,* dans [5] (2006), 278-301.

[10] J. Mawhin, *Henri Poincaré et l'équation des télégraphistes,* Matapli, ce numéro (2012).

[11] L. Payne, H. Weinberger, *An optimal Poincaré inequality for convex domains,* Arch. Rational Mech. Anal. 5 (1960) 286-292.

[12] H. Poincaré, *Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique,* American J. Math. 12 (1890), 211-294.

[13] H. Poincaré, *Sur les équations de la physique mathématique,* Rend. Circolo Mat. Palermo 8 (1894), 57-155.

[14] H. Poincaré, *La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet,* Acta mathematica 20 (1896-1897), 59-142.

[15] H. Poincaré, *Oeuvres,* publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par la section de géométrie en 11 tomes, Gauthier-Villars, Paris (1916-1956).

[16] H. Poincaré, *Analyse de ses travaux scientifiques faite par H. Poincaré,* Acta mathematica 38 (1921), 116-125.

[17] *Le livre du centenaire de la naissance de Henri Poincaré,* Gauthier-Villars, Paris (1955).

[18] P.-A. Raviart, J.-M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles,* Masson, Paris (1983).

[19] L. Scheeffer, *Ueber die Bedeutung der Begriffe "Maximum und Minimum" in der Variationsrechnung,* Math. Ann. 26 (1886), no. 2, 197-208.