



HAL
open science

Une décomposition de Hodge-Helmholtz discrète de l'équation du mouvement

Jean-Paul Caltagirone

► **To cite this version:**

Jean-Paul Caltagirone. Une décomposition de Hodge-Helmholtz discrète de l'équation du mouvement. 2015. hal-01111611

HAL Id: hal-01111611

<https://hal.science/hal-01111611v1>

Preprint submitted on 30 Jan 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une décomposition de Hodge-Helmholtz discrète de l'équation du mouvement

Jean-Paul Caltagirone

Université de Bordeaux
Institut de Mécanique et d'Ingénierie
Département TREFLE, UMR CNRS n° 5295
16 Avenue Pey-Berland, 33607 Pessac Cedex
calta@ipb.fr

Résumé

L'équation du mouvement peut être formulée en une décomposition de Hodge-Helmholtz où la partie irrotationnelle est le gradient de la pression et la composante solénoïdale est le rotationnel d'un potentiel vecteur qui est l'accumulateur des effets visqueux. Cette décomposition orthogonale est étendue à la vitesse ainsi qu'aux termes sources de l'équation du mouvement, forces capillaires ou de gravité. Les deux composantes de la vitesse forment alors un système d'équations représentatives respectivement des effets de compressibilité et de viscosité. La dégénérescence de ce système pour les écoulements incompressibles conduit à une méthode de projection cinématique originale. Plusieurs exemples montrent la validité de l'approche présentée.

Mots clés

Décomposition de Hodge-Helmholtz discrète, mécanique des milieux discrets, équations de Navier-Stokes, écoulements incompressibles, méthodes de projection,

A Discrete Hodge-Helmholtz Decomposition of momentum equation

Jean-Paul Caltagirone

Université de Bordeaux
Institut de Mécanique et d'Ingénierie
Département TREFLE, UMR CNRS n° 5295
16 Avenue Pey-Berland, 33607 Pessac Cedex
calta@ipb.fr

Abstract

The fundamental dynamic law may be formulated in a Discrete Hodge-Helmholtz Decomposition where the irrotational part is the pressure gradient and the solenoidal component is the curl of a vector potential, the accumulator of the viscous effects. This orthogonal decomposition is extended to the velocity and the source terms in the equation of motion, capillary forces or gravity. The two velocity components then form a system of equations representing respectively the effects of compressibility and viscosity. The simplification of the system for incompressible flows led to an original method of kinematic projection. Several examples show the validity of the presented approach .

Keywords

Discrete Hodge-Helmholtz Decomposition, Discrete Mechanics, Navier-Stokes equation, Incompressible flows, Projection methods.

1 Introduction

Le lien entre la mécanique des fluides ou des solides et la décomposition de Hodge-Helmholtz n'est établi actuellement que dans le cadre de l'approximation de milieux incompressibles et appliquée au développement de méthodes numériques de projection [10]. Dans d'autres domaines, électromagnétisme, traitement de l'image, détection de structures spatiales, ... la décomposition de Hodge-Helmholtz a connu des développements importants dus aux progrès théoriques de la géométrie différentielle et de la topologie algébrique.

Si l'on souhaite extraire les différentes composantes d'un vecteur \mathbf{V} sous la forme $\mathbf{V} = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi$ différentes méthodes de décomposition de Hodge-Helmholtz discrète (DHHD) sont disponibles; les principales sont rappelées ici :

- la méthode la plus connue est une résolution d'une équation de Poisson $\nabla^2\Phi = -\nabla \cdot \mathbf{V}$ qui résulte de l'application de l'opérateur divergence au vecteur $\mathbf{V} = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi$. Cette équation de Poisson nécessite des conditions aux limites sur le potentiel scalaire Φ et bien entendu le résultat dépend de celles-ci même si la décomposition est orthogonale, voir [10] pour une revue sur ces méthodes de projection;
- la méthode de projection-pénalisation vectorielle (Vector Penalty-projection, VPP) [2] où c'est la partie irrotationnelle \mathbf{V}_Φ qui est calculée directement par l'équation $\varepsilon V_\Phi - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}_\Phi) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V})$. Le potentiel est ensuite mis à jour par le théorème de Stokes;
- la méthode intégrale basée sur les formules de Biot et Savart qui permet de réduire les effets du choix des conditions aux limites mais qui n'est pas orthogonale, voir [14] pour plus de détails;
- une méthode algébrique qui permet d'extraire les deux composantes principales ainsi que la composante harmonique [1] par une méthode spectrale;
- une technique vectorielle récente [6] permet quant à elle de trouver les potentiels scalaire et vectoriel en maintenant des conditions aux limites quelconques.

Une analyse des avantages et inconvénients ainsi que des performances de ces méthodes peut être trouvées dans la référence [13].

Dans ce qui va suivre le choix de la DHHD a peu d'importance, chacune de celles présentées ou d'autres conviennent pour exhiber l'intérêt pour la formulation de l'équation du mouvement. De même les méthodologies numériques utilisées peuvent être quelconques : différences finies, volumes finis, méthodes mimétiques, etc.

L'objectif est de présenter une nouvelle formulation des équations du mouvement où la décomposition de Hodge-Helmholtz est étendue à la vitesse ainsi qu'aux forces volumiques extérieures, gravité ou forces capillaires par exemple.

Les équations établies dans ce contexte peuvent être résolues directement ou être dégénérées dans le cadre de l'approximation d'incompressibilité. Des exemples obtenus avec celles-ci notamment la méthode KSP (Kinematic Scalar Projection) permettent de montrer le bien fondé de ces approches.

2 Mécanique des milieux discrets

La mécanique des milieux discrets [7] est une autre vision de la seconde loi de Newton sur la dynamique. Elle est basée sur des concepts de géométrie différentielle appliqués à une topologie élémentaire associant un segment Γ et une surface plane Σ existants à toutes les échelles spatiales considérées; les notions de direction et d'orientation sont ainsi toujours préservées alors que la notion de milieu continu ignore ces aspects. Les équations issues de la mécanique des milieux discrets (DM, Discrete Mechanics) sont différentes, de nombreuses différences avec les équations de Navier-Stokes sont discutées dans [7].

Reprenons ici les bases essentielles de cette théorie en examinant la topologie élémentaire basée sur un segment et une surface de la figure (1).

Celle-ci est constituée d'un segment Γ limité par deux points et sur lequel on définit une orientation arbitraire à l'aide du vecteur unitaire \mathbf{t} . Deux autres segments et un autre point permettent de construire

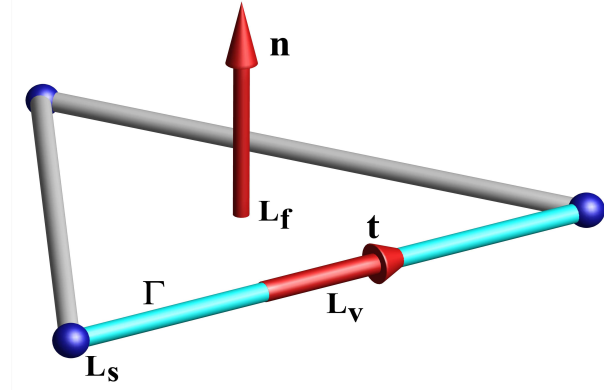


FIGURE 1. Topologie élémentaire de la mécanique des milieux discrets : trois segments rectilignes Γ délimités par des points définissent une face plane Σ non représentée. Les vecteurs unitaires de la normale à la face \mathbf{n} et du vecteur porté par Γ sont orthogonaux, $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$. Les localisations associées aux points sont $\mathbf{L}_s = (p, \rho, \chi_S, \Phi, \Phi_s, \nabla \cdot \mathbf{V})$, celles associées aux segments sont $\mathbf{L}_v = (\mathbf{V}, \mathbf{V}_\Phi, \mathbf{V}_\Psi, \nabla p, \nabla_d \times \boldsymbol{\Omega})$ et celles relatives aux faces $\mathbf{L}_f = (\boldsymbol{\omega}, \mu, \boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\Omega} = \nabla_p \times \mathbf{V})$.

une surface plane Σ orientée suivant la normale \mathbf{n} ; ces deux vecteurs unitaires sont bien sûr orthogonaux $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$. La topologie globale du système ou le maillage correspondant peut bien sûr être composé d'autres éléments plus complexes, des surfaces polygonales formant elles-mêmes des volumes polyédriques à nombres de faces quelconques; toutefois dans le cas de surfaces polygonales non planes elles devront être décomposées en polygones plans plus simples mais cette disposition ne réduit pas la généralité de la formulation.

Dans ce formalisme seule la composante \mathbf{V} de la vitesse \mathbf{W} sera connue ou recherchée, la vitesse elle-même restera indéterminée. De fait la composante peut être considérée comme un vecteur ou comme un scalaire associé à un segment orienté Γ .

Cet assemblage permet de définir trois localisations \mathbf{L}_s , \mathbf{L}_f et \mathbf{L}_v de l'espace. Sur la localisation \mathbf{L}_s sont associées les variables scalaires : pression thermodynamique p , masse volumique ρ , coefficient de compressibilité χ_S , potentiel des vitesses Φ , potentiel scalaire du terme source Φ_s et divergence de la vitesse $\nabla \cdot \mathbf{V}$. La localisation \mathbf{L}_v permet de définir la composante de la vitesse \mathbf{V} , sa composante irrotationnelle \mathbf{V}_Φ , sa composante solénoïdale \mathbf{V}_Ψ , le gradient de pression ∇p , et le rotationnel dual $\nabla_d \times \boldsymbol{\Omega}$. Enfin la localisation \mathbf{L}_f regroupe le potentiel vecteur $\boldsymbol{\omega}$, la viscosité μ , le potentiel vecteur de la vitesse $\boldsymbol{\Psi}$ et le rotationnel primal de la vitesse $\boldsymbol{\Omega} = \nabla_p \times \mathbf{V}$.

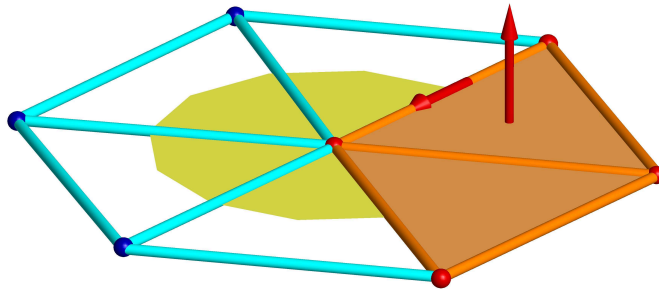


FIGURE 2. Topologie 2D à base de triangles; les triangles en couleur sont associés au milieu ① alors que les autres triangles sont affectés au milieu ②.

Ce formalisme pose d'emblée le problème de la localisation des propriétés locales du milieu dans le cas où celles-ci sont variables dans l'espace. Considérons par exemple le cas d'une topologie plane de la figure (2) formée d'un assemblage régulier de triangles. Le milieu ① occupe 2 triangles (en couleur sur la figure et le milieu ② les trois autres triangles.

Chaque point, chaque surface, chaque segment est affecté à un seul des deux milieux et ce choix est

dicté par des considérations extérieures, par exemple par le mouvement d'une surface libre. Ainsi cette formulation exclut toute interprétation physique subjective, toute loi de mélange ou toute interpolation forcément discutable. Cette contrainte est totalement indépendante de la description choisie, lagrangienne ou eulérienne ou des méthodologies appliquées pour résoudre les équations du mouvement. La viscosité μ est affectée à la face sur laquelle elle est constante, la masse volumique est associée au segment et la compressibilité est définie au point. Cette distinction entre milieu continu et milieu discret est très importante.

Il est à noter que malgré que la topologie primale de la figure (2) soit dans un plan les opérateurs sont appliqués dans l'espace 3D notamment le rotationnel dual. Par ailleurs les propriétés du milieu continu $\nabla \times \nabla p = 0$ et $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{V} = 0$ sont vérifiées en discret exactement quelle que soit la topologie polyédrique choisie.

3 Formulation de l'équation du mouvement en mécanique des milieux discrets

La mécanique des milieux discrets [7] établit l'équation de conservation de la quantité de mouvement comme une décomposition de Hodge-Helmholtz où la pression p est le potentiel scalaire de la quantité d'accélération et $\boldsymbol{\omega}$ est le potentiel vecteur associé aux effets de rotation. Ces deux potentiels sont des accumulateurs des contraintes de pression et de viscosité qui restituent tout ou partie de l'énergie accumulée au cours de l'évolution du système. La seconde loi de Newton est écrite sous la forme :

$$\rho \boldsymbol{\gamma} = -\nabla p + \nabla \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{s} \quad (1)$$

où p est la pression dite thermodynamique qui accumule l'ensemble des contributions (dynamique, thermique, massique, ...); $\boldsymbol{\omega}$ est l'accumulateur des contraintes de cisaillement-rotation et $\rho \boldsymbol{\gamma}$ est la quantité d'accélération. Le terme source \mathbf{s} regroupe les autres forces volumiques, gravité, rotation, tension de surface, etc.

La décomposition de Hodge-Helmholtz peut être intrinsèque à une formulation d'une loi comme la loi de la dynamique (1) ou bien appliquée sur des vecteurs de toute nature. On peut penser bien sûr au vecteur vitesse ou plutôt à sa composante \mathbf{V} ou bien au terme source qui peut être aussi décomposé en une partie irrotationnelle et une autre solénoïdale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \boldsymbol{\gamma} = -\nabla p + \nabla \times \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{V} = \mathbf{V}_\Phi + \mathbf{V}_\Psi = \nabla \Phi + \nabla \times \boldsymbol{\Psi} \\ \mathbf{s} = \mathbf{s}_\Phi + \mathbf{s}_\Psi = \nabla \Phi_s + \nabla \times \boldsymbol{\Psi}_s \end{array} \right. \quad (2)$$

où $\mathbf{s}_\Phi = \nabla \Phi_s$ et \mathbf{s}_Ψ sont les composantes du terme source.

Ces décompositions ne sont pas de même nature et de même importance, p et $\boldsymbol{\omega}$ sont les composantes de la quantité d'accélération et à ce titre jouent un rôle fondamental dans les équilibres dynamiques.

Au sein de la topologie montrée sur la figure (1) les deux composantes de la vitesse \mathbf{V} coexistent sur le segment Γ . La composante \mathbf{V}_Φ est pilotée par le gradient du potentiel scalaire Φ alors que la composante \mathbf{V}_Ψ est générée par le rotationnel dual de $\boldsymbol{\omega}$. Pour faire un parallèle avec l'électromagnétisme, un courant électrique dans un conducteur peut être dû à une différence de potentiel ou induit par un champ magnétique.

Le système d'équations déduit de la théorie des milieux discrets s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \rho \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} = -\nabla \left(p^o - \frac{dt}{\chi S} \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{V}^2 + \Phi_s \right) + \nabla \times (\boldsymbol{\omega}^o - \mu \nabla \times \mathbf{V}) + \mathbf{s}_\Psi \\ p = p^o - \frac{dt}{\chi S} \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^o - \mu \nabla \times \mathbf{V} \end{array} \right. \quad (3)$$

où p^o et ω^o sont respectivement la pression et le potentiel vecteur d'équilibre mécanique.

La pression p est la pression thermodynamique mais il est possible d'intégrer dans le terme en gradient les autres contributions résultant des effets d'inertie, des termes sources etc. , Ainsi $p_B = p^o + 1/2 \rho \mathbf{V}^2$ est la pression de Bernoulli; en effet le terme $\rho \mathbf{V}^2$ est une pression même à masse volumique variable globalement où chaque segment orienté Γ de la ligne de courant ne possède qu'une valeur de la vitesse et qu'une valeur de la masse volumique. On pourra définir $p_* = (p_B + \Phi_s)$ comme une pression motrice.

Les conditions aux limites portent uniquement sur les vitesses et non sur les potentiels scalaire et vectoriel de la quantité d'accélération. Ainsi dans le système (3) ces potentiels sont simplement mis à jour sans conditions aux limites à partir de la divergence et du rotationnel de la vitesse qui sont bien définis au bords. L'application des opérateurs divergence ou rotationnel pour obtenir une équation de Poisson introduirait *de facto* des conditions aux limites sur ces quantités.

En milieu fluide l'accumulation des contraintes de cisaillement-rotation est quasiment inexistante; sauf pour les fluides à rhéologie complexe un fluide cisailé relaxe ces contraintes dans un laps de temps très court par une réorganisation de la structure de la matière. Aussi le terme d'accumulation ω^o peut être négligé au cours de l'évolution du système. Toutefois il peut être utilisé à bon escient pour définir les conditions initiales d'un système en équilibre mécanique. En présence d'un terme source, la gravité par exemple, un champ de pression nul ne respecte pas l'équilibre mécanique traduit par l'équation de la statique des fluides.

Le système (3) originel est la meilleure forme de l'équation du mouvement car elle intègre la conservation de la masse; la résolution de cette équation satisfait automatiquement sa contrainte en une seule et même étape. Cette équation permet d'appréhender des écoulements incompressibles ou compressibles (y compris avec chocs), des écoulements monophasiques ou diphasiques, multiconstituants, etc. Couplée avec une équation vectorielle sur le flux de chaleur elle permet de prendre en compte des phénomènes de changement de phase.

4 Une méthode de projection scalaire cinématique (KSP)

Cette forme (3) peut être dégradée pour améliorer sa compréhension ou même sa résolution dans des cas académiques, pour les écoulements incompressibles notamment.

Lorsque l'approximation d'incompressibilité de l'écoulement est adoptée alors la vitesse physique recherchée devient la composante solénoïdale $\mathbf{V} = \mathbf{V}_\Psi$ telle que $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$. Les conditions aux limites du problème deviennent aussi celles de \mathbf{V}_Ψ . Le champ \mathbf{V}_Φ à l'équilibre est lui-même nul.

L'abandon de l'intégration de la conservation de la masse dans l'équation du mouvement (3) et donc la disparition de $\rho/\chi_S \nabla \cdot \mathbf{V}$ conduit de fait à un découplage entre la pression et la vitesse. Les conséquences portent sur l'utilisation d'une vitesse connue qu'à l'instant précédent et à une vitesse qui ne satisfait pas la conservation de la masse. L'objectif est donc de reconstruire la pression et la vitesse en deux étapes distinctes qui permettent de réduire au mieux ce découplage.

Il nécessaire d'introduire à ce stade une discrétisation temporelle où l'état d'équilibre, à l'instant précédent noté t^n , la vitesse $\mathbf{V}^n = \mathbf{V}_\Psi^n$ est à divergence nulle ce qui entraîne $\mathbf{V}_\Phi^n = 0$; de fait la contribution de \mathbf{V}_Φ^n à la pression est déjà intégrée dans p_B^n . La discrétisation temporelle peut être réalisée avec des schémas très variés d'ordre plus ou moins élevés; le schéma d'Euler le plus simple est adopté ici sans réduire la généralité de l'exposé.

Le système d'équations permettant de résoudre le problème couplé est :

$$\begin{cases} \rho \frac{\mathbf{V}^* - \mathbf{V}_\Psi^n}{\Delta t} - \rho \mathbf{V}_\Psi^n \times \nabla \times \mathbf{V}_\Psi^{n+1} + \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V}_\Psi^{n+1}) = -\nabla p_B^n \\ \frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{V}_\Phi^{n+1} = -\nabla (p_B^{n+1} - p_B^n) \end{cases} \quad (4)$$

La première équation du système (4) constitue l'étape de prédiction; elle peut être résolue avec les conditions aux limites physiques du problème. Sa solution, \mathbf{V}^* , ne satisfait pas la contrainte d'incompressibilité. En effet la résolution de celle-ci avec un potentiel scalaire p_B^n non adapté et inconnu à l'instant actuel introduit une composante irrotationnelle non nulle qu'il est nécessaire d'éliminer par une décomposition de Hodge-Helmholtz.

La seconde équation ne peut être résolue directement car la composante du champ \mathbf{V}_Φ actuel doit être déduite de la différence entre les champs \mathbf{V}^* et \mathbf{V}_Ψ^{n+1} obtenus à l'issue de la décomposition du champ \mathbf{V}^* .

On peut remarquer que $\mathbf{V}_\Phi = \mathbf{V}_\Phi^{n+1}$ dérive d'un potentiel $\mathbf{V}_\Phi = \nabla\Phi$, la seconde équation de ce système peut alors être intégrée directement et explicitement.

Le potentiel scalaire de la vitesse est obtenu par une projection sur un champ à divergence nulle avec des conditions aux limites qui dépendent du problème posé ; pour des parois on peut montrer que des conditions de Neumann sont nécessaires :

$$\begin{cases} \nabla^2\Phi = -\nabla \cdot \mathbf{V}^* \\ \nabla\Phi \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Sigma \end{cases} \quad (5)$$

Les remontées des champs de vitesse et de pression sont données par les expressions :

$$\begin{cases} \mathbf{V}_\Psi^{n+1} = \mathbf{V}^* - \mathbf{V}_\Phi \\ p_b^{n+1} = p_a^{n+1} + \int_\Gamma \frac{\rho_b}{\Delta t} \mathbf{V}_\Phi \cdot \mathbf{t} dl \end{cases} \quad (6)$$

où a et b sont les extrémités du segment Γ ; p est la pression ou la pression de Bernoulli.

Cette dernière relation correspond à l'application de l'une des formes du théorème de Stokes qui permet de remonter le potentiel géométriquement si le champ de vitesse est irrotationnel ce qui est le cas.

L'algorithme de résolution est particulièrement simple à mettre en oeuvre :

- **1** - résolution de la première équation du système (4) pour obtenir \mathbf{V}^* ;
- **2** - décomposition du champ \mathbf{V}^* en un gradient du potentiel Φ et un rotationnel par le système (5) ;
- **3** - calcul de la composante irrotationnelle $\mathbf{V}_\Phi = \nabla\Phi$ et de la composante solénoïdale par différence $\mathbf{V}_\Psi^{n+1} = \mathbf{V}^* - \mathbf{V}_\Phi$;
- **4** - réactualisation de la vitesse et de la pression par les expressions (6). La pression p est ensuite obtenue avec $p = (p_B - \frac{1}{2} \rho \mathbf{V}^2)$.

La pression thermodynamique p n'est en fait utilisée que pour évaluer les propriétés du fluide notamment la masse volumique et éventuellement la viscosité. Pour des écoulements de plusieurs phases à masse volumiques constantes la pression de Bernoulli est par contre bien adaptée.

Cet algorithme DSP [8] renommé KSP (Kinematic Scalar Projection) inverse les étapes de calcul de la pression et de la vitesse ; en projection scalaire classique c'est la pression qui est calculée d'abord comme la solution d'une équation de Poisson à coefficients variables et la vitesse est obtenue ensuite. Dans la méthode KSP c'est la vitesse qui est décomposée par un processus purement cinématique et la pression est remontée par l'application explicite du théorème de Stokes.

Alors que la résolution d'une équation de Poisson à coefficients variables pose d'autant plus de difficultés que le rapport de masse volumique est important, la méthode KSP est insensible à ces variations.

La décomposition de Hodge-Helmholtz de l'équation du mouvement elle-même permet de justifier le processus d'accumulation de la pression à travers la composante irrotationnelle de la vitesse de l'étape de prédiction. Les deux phases deviennent cohérentes, l'une pour construire le champ solénoïdal de manière cinématique et l'autre pour mettre à jour la pression avec la masse volumique locale.

Dans les cas de forts contrastes de masse volumique associés à des termes sources importants il peut être nécessaire de réaliser une décomposition préalable, avant le calcul de l'évolution en temps, du terme source \mathbf{s} de manière à obtenir une condition initiale qui est un équilibre mécanique :

$$-\nabla p^o + \nabla \times \boldsymbol{\omega}^o + \mathbf{s}_\Phi + \mathbf{s}_\Psi = 0 \quad (7)$$

La condition initiale est ainsi donnée par ($p^o = \nabla\Phi_s$, $\boldsymbol{\omega}^o = -\nabla \times \Psi_s$). Le terme source $\mathbf{s}_\Psi = \nabla \times \Psi_s$ n'induit pas directement une pression mais il génère le mouvement à travers l'augmentation de la vitesse solénoïdale. A l'inverse un terme source déduit d'un champ de gradient ne provoque aucun mouvement, il s'intègre au gradient de pression pour former une autre pression.

5 Exemples

5.1 Cavité entraînée

Les méthodologies associées aux formulations présentées ici sont originales, (DOC, KSP), il est donc nécessaire de retrouver des solutions connues analytiquement ou résultant de nombreuses comparaisons numériques. Les cas de vérification analytiques (écoulement de Poiseuille, Couette, ...) ont fait l'objet de résolutions qui montrent que les solutions analytiques sont retrouvées. Le cas de référence présenté succinctement ici est la cavité entraînée : un fluide visqueux dans une cavité carrée est mis en mouvement à vitesse constante par l'une des parois. De publications sur ce sujet existent notamment celle de Botella et al. [3] qui fait référence pour le nombre de Reynolds de 1000. Citons aussi celle de Bruneau et al. [5] qui montre des résultats pour des nombres de Reynolds différents.

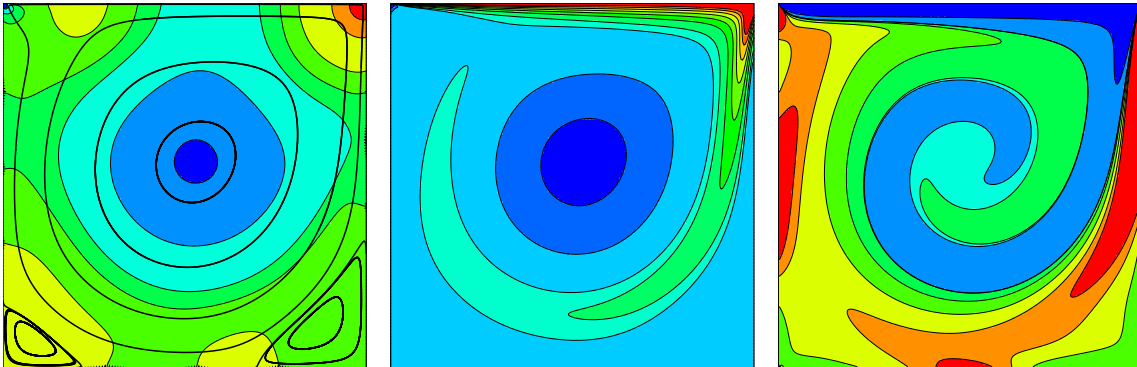


FIGURE 3. *Cavité entraînée à $Re = 1000$, à gauche pression et lignes de courant, au centre la pression de Bernoulli et à droite le rotationnel de la vitesse ; la divergence est nulle à la précision machine. Le maillage cartésien est composé de 256^2 mailles.*

Le système (3) est intégré directement par la méthode DOC (Discrete Operator Calculus) et par la méthode de prédiction-projection KSP décrite en détail plus haut. Les deux méthodes fournissent les mêmes résultats et leur comportement sur ce cas à masse volumique constante est très bon. En particulier la divergence de la vitesse est nulle à la précision machine à toutes les itérations en temps.

La solution stationnaire du problème obtenue pour un maillage régulier de $N = 256^2$ mailles est montrée sur la figure (3). On constate un excellent accord avec les résultats de la référence [3]. Une étude de convergence antérieure sur cette configuration avec la méthode DOC montre un taux de convergence spatial de 2 pour la vitesse et pour la pression. La pression de Bernoulli a été utilisée pour mener les évolutions en temps et la pression elle-même a été ensuite extraite à partir de celle-ci.

Ce cas n'est pas très significatif des avantages des méthodes DOC et KSP mais il montre clairement que le système (3) de la mécanique des milieux discrets fournit les mêmes que ceux obtenus par l'équation de Navier-Stokes ce qui est naturel pour les milieux à propriétés constantes.

5.2 Goutte en équilibre ou en oscillation libre

Il existe de très nombreuses formes de la force capillaire surfacique et de la force volumique à intégrer à l'équation du mouvement pour rendre compte des effets dynamiques de celle-ci. Une bonne partie d'entre-elles intègre la masse volumique moyenne et le saut de masse volumique. La plupart des modèles eulériens sont basés sur une fonction volumique c définissant le taux de présence d'une des phases dans le volume considéré. C'est le cas du modèle CSF 'Continuum Surface Tension' de Brackbill et al. [4] probablement le plus utilisé pour les simulations d'écoulements diphasiques.

Tous ces modèles donnent une solution approchée qui dépend de la précision avec laquelle est calculée la normale et surtout la courbure κ . De plus la force volumique en elle-même n'a aucune raison de dépendre de la masse volumique. Leur utilisation induisent par ailleurs des 'courants parasites' favorables à la fragmentation numérique de l'interface. On trouvera dans [15] une revue complète sur ces phénomènes.

Reprenons ici la forme originelle de la force surfacique générée par une interface séparant deux milieux : $\mathbf{F}_S = \sigma \kappa \mathbf{n}$. La normale à la surface physique \mathbf{n} est bien celle qui définit les différentes quantités dans une vision de géométrie différentielle de l'interface. Celle-ci n'a plus aucun sens dans une vision discrète volumique. Son calcul à l'aide de la fonction de phase et le calcul de la courbure comme la divergence de la normale induisent de très nombreuses erreurs dans l'évaluation des forces volumiques capillaires. La simple extension des notions de géométrie des interfaces aux forces de volume au sein de l'équation du mouvement n'est pas si simple et engendre quelquefois des artefacts.

La modélisation des effets capillaires en mécanique des milieux discrets nécessite la conformité des opérateurs différentiels ; c'est ainsi le gradient n'existe que comme une différence associée au segment Γ . Dans le cas des écoulements à surface libre de deux fluides non miscibles introduisons une fonction de phase ξ définie sur les points scalaires par :

$$\xi = \begin{cases} 0 & \text{dans la phase 1} \\ 1 & \text{dans la phase 2} \end{cases} \quad (8)$$

Dès lors il est possible d'introduire la notion de force volumique capillaire sous la forme $\mathbf{f}_v = \sigma \kappa \nabla \xi$. On remarque que ce vecteur $\nabla \xi$ n'a rien de commun avec la normale à l'interface physique ou avec le gradient de la fonction de phase ∇c . Ce vecteur sera nul dans tout le domaine excepté sur les segments traversés par l'interface physique ; le terme source sera ainsi défini directement sur le segment Γ comme d'ailleurs la tension de surface locale et la courbure locale.

L'équation du mouvement discrète s'écrit alors :

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \nabla \times \boldsymbol{\omega} + \sigma \kappa \nabla \xi \quad (9)$$

Dans le cas où la tension de surface σ est constante et où la courbure κ est aussi constante (pour un cercle ou une sphère) alors $\sigma \kappa \nabla \xi$ est un pur gradient que l'on peut intégrer dans la pression $p + \sigma \kappa \xi$. Lorsque la tension de surface varie en fonction de la température des effets de type Marangoni sont présents et le terme $\sigma \kappa \nabla \xi$ n'est plus un gradient. De même en présence d'interfaces de formes quelconques les variations de courbure font que ce terme n'est pas un gradient non plus. Le terme $\sigma \kappa \nabla \xi$ peut alors être décomposé en un gradient d'un potentiel scalaire Φ_s et le rotationnel d'un potentiel vecteur Ψ_s . Seul ce dernier génère une force liée au mouvement du fluide.

On peut définir un état d'équilibre du système physique correspondant à une vitesse nulle ; cet équilibre s'écrirait :

$$-\nabla p^o + \nabla \times \boldsymbol{\omega}^o + \sigma \kappa \nabla \xi = 0 \quad (10)$$

où p^o est la pression d'équilibre mécanique et $\boldsymbol{\omega}^o$ le potentiel vectoriel d'accumulation. Comme l'équation de la statique pour les effets de gravité celle équation définit l'équilibre capillaire.

Pour les simulations d'écoulements à surfaces libres il est important que la condition initiale soit une condition d'équilibre mécanique. Une simple décomposition de Hodge-Helmholtz du terme source avant l'évolution en temps permet ainsi d'initier l'évolution de la pression de manière cohérente en n'accumulant que des accroissements de pression liés aux variations de la topologie de la surface libre.

La notion de vitesse lagrangienne capillaire peut aussi être précisée en écrivant la loi de la dynamique en l'absence des potentiels d'équilibre p^o et $\boldsymbol{\omega}^o$ et pour une vitesse initiale nulle :

$$\mathbf{V}_c = \frac{dt \sigma \kappa}{\rho} \nabla \xi \quad (11)$$

c'est la vitesse de retour vers un éventuel équilibre mécanique par les forces capillaires. Alors que la force capillaire ne dépend pas de la masse volumique on constate bien sûr que celle-ci intervient pour le mouvement instantané de l'interface. La conservation de la masse (ou l'incompressibilité des fluides) permet le mouvement d'ensemble des deux milieux.

Toutes les quantités de la vitesse capillaire sont affectées à la même localisation \mathbf{L}_v , sur le segment Γ . Pour une méthode numérique de type lagrangienne l'interface physique serait sur un point et c'est celui-ci qui est advect  par \mathbf{V}_c . Pour une méthode eulérienne l'interface physique est située entre deux points et sa position peut ainsi être modifiée sur le segment par \mathbf{V}_c .

Il est à noter que la courbure n'a rien à voir avec la description des forces de volume dans l'équation du mouvement. De nombreuses méthodes lagrangiennes ou eulériennes existent, il suffit de la connaître sur le segment Γ traversé par l'interface où elle sera considérée comme constante.

Cette vitesse (11) peut être utilisée pour de nombreuses applications, traitement des images, lissage de maillages surfaciques 3D, etc. L'évolution de la surface libre d'un écoulement où les forces capillaires sont présentes est certainement l'application la plus pertinente dans le contexte présenté.

5.2.1 Goutte en équilibre

Le minimum que l'on puisse attendre d'un modèle de forces capillaires est qu'il permette de retrouver la loi de Laplace pour un cercle ou pour une sphère. Prenons l'exemple d'une goutte 2D représentée en maillage non structuré par la fonction de phase ξ sur un disque de rayon $R = 2.5 \cdot 10^{-3}m$ dans un carré de 1 cm de côté. La courbure κ est calculée à la précision machine sur le cercle par une succession de points lagrangiens. Ce contour intersecte les segments Γ du maillage non structuré qui sont ainsi repérés. La valeur de la fonction de phase ξ vaut un à l'intérieur du cercle et zéro à l'extérieur.

Quelle que soit la méthodologie numérique adoptée, la résolution implicite de l'équation du mouvement et de sa contrainte ou par une technique de splitting, la méthode KSP par exemple, la vitesse $\mathbf{V}_\Psi = \mathbf{V} - \mathbf{V}_\Phi = 0$ est nulle exactement à l'issue d'une seule itération. Le terme capillaire conduit à un effondrement centripète de la surface libre contrecarré par la résistance du fluide à la compression; finalement la position de l'interface ne bouge pas et, en incompressible, sa position est la même mais la pression a été augmentée de la pression capillaire p_c .

La remontée de la pression est alors réalisée de manière explicite à partir du théorème de Stokes :

$$\begin{cases} \mathbf{V}_\Psi = 0 \\ p_b = p_a + \int_\Gamma \frac{\rho_b}{dt} \mathbf{V}_c \cdot \mathbf{t} dl \end{cases} \quad (12)$$

où le point $p_a(0,0) = 0$ est choisi comme référence.

La figure (4) montre la géométrie utilisée, une goutte circulaire de rayon R dans un carré, maillée en non structuré par un assemblage de triangles réguliers.

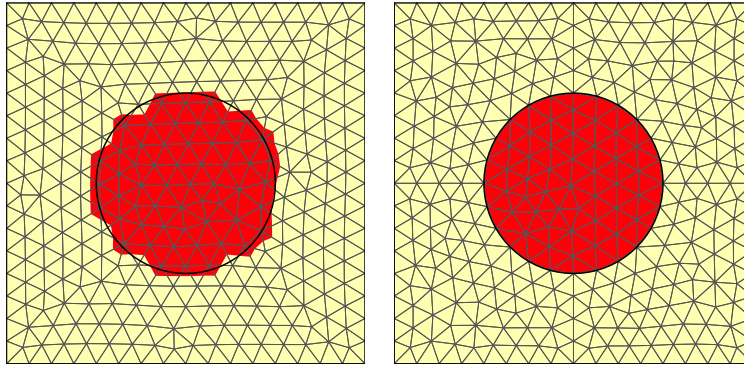


FIGURE 4. *Pression capillaire dans une goutte de rayon $R = 2.5 \cdot 10^{-3}m$ et pour une tension de surface constante $\sigma = 1$. A gauche, un maillage non conforme au disque et une chaîne de marqueurs pour représenter le disque et, à droite, un maillage non structuré conforme au disque. Dans les deux cas la pression est exacte et la vitesse est strictement nulle.*

Les quantités σ et κ étant constantes on retrouve la différence de pression de Laplace entre l'intérieur de la goutte et l'extérieur comme le montre la figure (4). Il est à noter que la solution obtenue à l'aide de la remontée (12) avec $\sigma = 1$ et $\kappa = 400$ est exacte à la précision machine :

$$p_c = \sigma \kappa = \frac{\sigma}{R} \quad (13)$$

Le cas est abordé avec un maillage non structuré de $N = 320$ points non conforme au disque. Ici le cercle est représenté par une chaîne de marqueurs qui permet d'obtenir la précision machine sur la courbure κ . Cette chaîne intersecte les segments sur lesquels est imposé le terme source par le terme en $\nabla\xi$, celui-ci étant nul dans tout le reste de la cavité et du disque. La vitesse prédite est égale à la vitesse capillaire (11) puis l'étape de correction redonne une vitesse correctrice exactement opposée pour aboutir en une seule itération en temps à la solution théorique, vitesse nulle et pression capillaire (13). Un comportement identique est observé figure (4) avec un maillage non structuré conforme à la géométrie du disque. Que les points du maillage soient situés ou non sur le cercle définissant le disque cela n'a aucune influence sur le modèle, seule la technologie de suivi des interfaces change.

Ce cas incontournable pour les modèles de surface libre montre que sans la moindre résolution d'équation on retrouve la pression théorique par une simple remontée explicite sur un maillage non structuré.

5.2.2 Goutte en oscillation libre

Il s'agit ici de montrer tout l'intérêt de la décomposition de Hodge-Helmholtz du terme capillaire lorsque la tension de surface σ dépend de la température (effet Marangoni) ou lorsque la courbure est variable spatialement. Dans ce cas

$$\mathbf{s} = \sigma \kappa \nabla\xi \quad (14)$$

n'est plus un gradient et doit être décomposé sous la forme $\mathbf{s} = \nabla\Phi_s + \nabla \times \Psi_s$. Si le terme source est intégré sans être décomposé c'est la résolution de l'équation du mouvement qui réalise cette décomposition mais en affectant les performances de la simulation. La méthode de décomposition peut être quelconque.

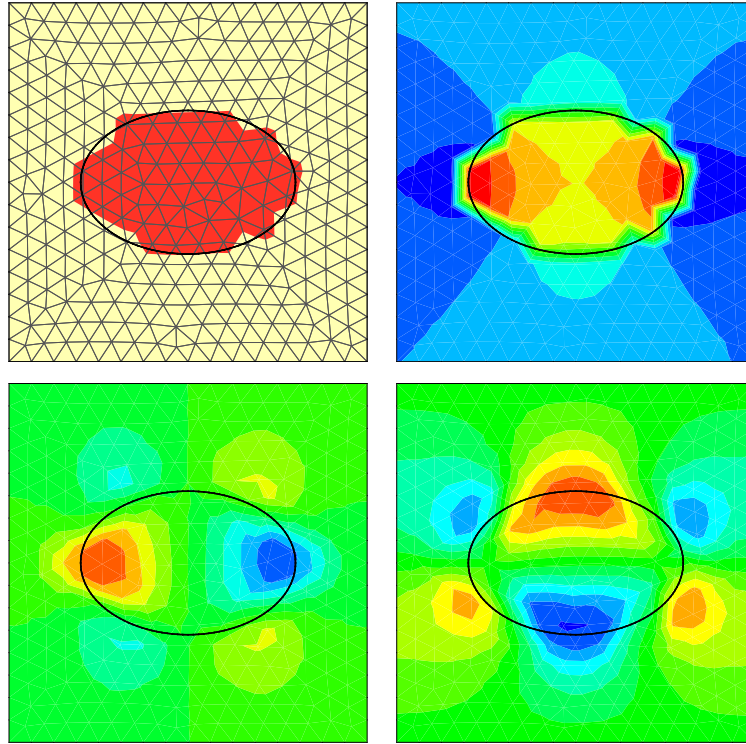


FIGURE 5. Décomposition du terme source capillaire $\mathbf{s} = \sigma \kappa \nabla\xi$ sur un maillage non structuré de $N = 320$ points; en haut à gauche la phase ξ et le maillage, en haut à droite le potentiel scalaire Φ_s , en bas les composantes suivant x et y du potentiel vecteur $\mathbf{s}_\Psi = \nabla \times \Psi_s$. L'ellipse est représentée par une chaîne de marqueurs utilisée principalement pour le calcul de la courbure.

L'objectif n'est pas de résoudre un problème de dynamique avec effets capillaires, cela a été déjà fait à de très nombreuses reprises [16, 9] mais de montrer que la décomposition, préalable à la résolution de l'équation du mouvement, du terme capillaire est d'un intérêt certain.

En effet si l'on considère une goutte d'acier de rayon $R = 10^{-6} m$ ayant avec le milieu extérieur une tension superficielle de $\sigma = 1$ la pression capillaire est ainsi $p_c = 10^6$. Le gradient de pression avec l'extérieur devient considérable et la moindre incohérence entre la modélisation et la discrétisation numérique conduit à une divergence instantanée de la simulation. En présence de rapport de masse volumique entre les deux milieux de 10^4 ces effets sont amplifiés. De fait la masse volumique n'est pas dans l'expression de la force capillaire mais elle est dans celle de la vitesse capillaire. Le manque de cohérence dans la discrétisation de ces effets capillaires est rédhibitoire alors que la pression capillaire ne joue absolument aucun rôle dans la dynamique de la goutte.

Le cas choisi est celui d'une forme à courbure variable, une ellipse dans une cavité carrée de $1 cm$ de côté. L'ellipse est représentée par une chaîne de marqueurs qui permet d'obtenir une excellente valeur de la courbure locale qui est ensuite projetée sur le segment Γ qu'elle traverse. Toutes les méthodes de suivi d'interfaces, Volum Of Fluid, Level-Set, Front-Tracking, ... sont des candidates à la détermination de la normale à l'interface physique et de la courbure. La normale devient inutile dans le présent modèle et on peut considérer que l'obtention de la courbure est un problème indépendant de la modélisation des effets capillaires, il en faut une mais si elle n'est pas de très bonne qualité elle induira des courants parasites qui ont fait l'objet d'innombrables travaux.

Le résultat de la décomposition du terme source \mathbf{s} est montré sur la figure (5) pour un maillage volumique non structuré à base de triangles plus ou moins réguliers. Le potentiel scalaire du terme source n'est pas une constante comme prévu et la partie solénoïdale représente la force exercée sur les deux fluides à cet instant. Ce serait un équilibre mécanique si l'on considère les potentiels (p^o, ω^o) correspondant à l'équilibre capillaire défini par l'équation (10). Les fluides considérés n'accumulent pas les contraintes de rotation, l'inertie de ceux-ci engendre une modification de la forme initiale et la goutte va osciller avec une fréquence prévue par la théorie linéaire.

5.3 Ballotement de deux fluides immiscibles

5.3.1 Ballotement en théorie linéaire

Le système 3 permet de représenter les ondes acoustiques de célérité c mais peut aussi rendre compte de nombreux autres phénomènes suivant les actions extérieures introduites dans ce système, gravité, forces de capillaires, rotation, etc. Dans le cas d'une force de gravité constante et uniforme des ondes de gravité de natures différentes peuvent se développer et se maintenir sur de grandes constantes de temps. C'est le cas d'ondes solitaires, de la houle, etc.

Nous allons envisager le cas du ballotement d'un liquide dans une cavité partiellement remplie de gaz. Au premier ordre les mécanismes mis en jeu sont l'inertie et la gravité. Les deux fluides bien que formellement compressibles donnent lieu à un mouvement à grande constante de temps qui peut être considéré comme incompressible. Toutefois aucune simplification ne peut être faite dans le système d'équations du fait de l'intégration de la conservation de la masse dans la loi de conservation de la quantité de mouvement si la méthode DOC correspondante est utilisée. Le même problème est abordé avec l'approximation d'incompressibilité avec la méthode KSP décrite en détail plus haut.

Considérons une cavité de longueur L et de hauteur $2H$ qui contient un fluide de masse volumique ρ_2 et de viscosité μ_2 surmonté d'un fluide de masse volumique ρ_1 et de viscosité μ_1 . L'interface séparant les deux phases non miscibles est légèrement perturbée et, sous l'effet de la gravité, va osciller autour de sa position d'équilibre, l'horizontale. Le fluide inférieur occupe, au repos, une hauteur H .

La notion de viscosité n'apporte rien au problème posé, seule une décroissance plus ou moins rapide des ondes serait obtenue suivant la valeur des viscosités. Celles-ci sont considérées comme nulles, $\mu_1 = \mu_2 = 0$ et le terme de diffusion de la quantité de mouvement disparaît de l'équation du mouvement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} \right) = -\nabla \left(p^o + \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} - \frac{dt}{\chi S} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) + \rho \mathbf{g} \\ p = p^o - \frac{dt}{\chi S} \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \rho = \rho^o - dt \rho \nabla \cdot \mathbf{V} \end{array} \right. \quad (15)$$

L'étape d'advection sur les potentiels scalaires est ensuite réalisée pour obtenir les vitesses actuelles.

Le premier terme du second membre de la première équation permet d'assurer la cohérence entre la conservation de la masse et le potentiel scalaire p^o . En effet pour des valeurs de χ_S pour l'air et l'eau et les constantes de temps importantes du phénomène la divergence de la vitesse est faible et on entre légitimement dans le cadre des écoulements incompressibles. Il est encore à remarquer qu'il est impossible de supprimer le terme correspondant sous prétexte que $\nabla \cdot \mathbf{V}$ est très faible.

L'évolution dans le temps est ainsi conditionnée par la compétition entre l'inertie du fluide et la gravité $\rho \mathbf{g}$. Ce dernier terme ne dérive pas d'un potentiel scalaire et la décomposition de Hodge-Helmholtz de $\rho \mathbf{g} = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi$ met en évidence les deux contributions non nulles de celle-ci. La partie irrotationnelle vient modifier le potentiel scalaire p^o pour lui adjoindre les effets gravitaires statiques et le potentiel vecteur modifie l'équilibre mécanique. Le couplage avec l'inertie engendre le mouvement de ballottement dont la fréquence peut être calculée par la théorie linéaire.

Si la perturbation initiale de l'interface est définie par des modes de Fourier, i suivant la direction longitudinale et j pour les modes transversaux, la théorie linéaire permet d'explicitier la fréquence [11] :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\pi g \sqrt{\frac{i^2}{L^2} + \frac{j^2}{l^2}} \operatorname{th} \left(\pi H \sqrt{\frac{i^2}{L^2} + \frac{j^2}{l^2}} \right)} \quad (16)$$

où L est la longueur du domaine suivant x et l la largeur suivant y .

On définit aussi la pulsation ω et la période T :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (17)$$

L'expression de la fréquence théorique (16) a été établie à partir d'une théorie linéaire de la stabilité pour un fluide de masse volumique ρ_2 en l'absence du fluide situé au-dessus. Lorsque les masses volumiques ρ_1 et ρ_2 sont proches il est nécessaire d'introduire une correction [12] qui donne la relation :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\pi g \sqrt{\frac{i^2}{L^2} + \frac{j^2}{l^2}} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \operatorname{th} \left(\pi H \sqrt{\frac{i^2}{L^2} + \frac{j^2}{l^2}} \right)} \quad (18)$$

Le problème est abordé à partir du système (15) et une méthodologie spécifique de type Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) développée afin de séparer les deux phases par une ligne du maillage mobile. Ainsi le modèle ne comporte aucune interpolation, ni sur la viscosité, ni sur la masse volumique, ce qui évite les nombreuses difficultés observées avec des codes eulériens pour des écoulements diphasiques. Des difficultés annexes comme le calcul de la courbure en maillage structuré viennent réduire encore la représentativité des phénomènes simulés.

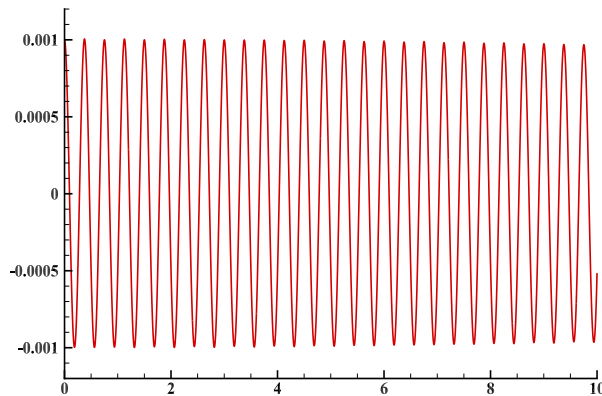


FIGURE 6. Hauteur du liquide au cours du temps en un point à mi-hauteur du bord gauche du domaine pour deux fluides de masse volumiques ρ_1 et ρ_2 et pour des viscosités nulles $\mu_1 = \mu_2 = 0$

Les fluides choisis sont de l'eau et de l'air et les masses volumiques correspondantes sont $\rho_2 = 1000$ et $\rho_1 = 1.1728$. Ceux-ci sont contenus dans une cavité carrée de dimension $L = 2H = 0.1 m$. Seul le premier mode 2D est testé, soit $i = 1$ et $j = 0$. Le pas de temps est égal à $10^{-3} s$ ce qui permet d'atteindre une précision suffisante sur la fréquence des oscillations. La perturbation initiale est de type sinusoïdale avec une amplitude $1 mm$.

La figure (6) montre l'évolution périodique de la hauteur du fluide 2 sur un bord du domaine, en $x = 0$. Les forces de gravité introduisent un mouvement vers le bas de la zone où la surface libre est plus haute. En l'absence des forces visqueuses le mouvement oscillatoire est gouverné par la confrontation entre gravité et inertie. On observe que les oscillations se maintiennent très longtemps sans atténuation sensible. On constate d'ailleurs que l'atténuation des ondes est d'autant plus faible que le pas de temps décroît.

Cette vérification permet de tester l'ensemble de la méthodologie utilisée : l'équation du mouvement, la discrétisation spatiale, le processus ALE, etc.

Afin de quantifier les erreurs introduites par les différentes phases de la modélisation et de la simulation, la fréquence obtenue numériquement est comparée à la fréquence théorique formulée par la relation (16). Le tableau (1) présente plutôt la période des oscillations. On constate un très bon accord entre numérique et théorie ce qui valide à la fois la formulation (3) et la méthodologie numérique.

	Théorique	DOC et KSP
Période	0.3742	0.3748

TABLE 1. Période des oscillations pour ballottement dans une cavité carrée pour le premier mode dans le cadre de la théorie linéaire. La valeur numérique est obtenue par la méthode directe DOC et dans l'approximation incompressible KSP.

Cet exemple permet par ailleurs de montrer que la formulation conserve l'énergie cinétique lorsque les effets visqueux sont négligés. Même si dans ce cas aucun transfert de la quantité de mouvement par viscosité n'est possible d'une surface primale à une autre cela ne veut pas dire que le rotationnel soit nul.

5.3.2 Ballottement non linéaire

La méthode KSP a été utilisée ensuite pour simuler un écoulement généré par une surface libre en non équilibre mécanique. De l'eau et de l'air occupant pour moitié le volume d'une cavité de $4 \times 1 m$ est soumis au champ de gravité $\mathbf{g} = -9.81 \mathbf{e}_y$.

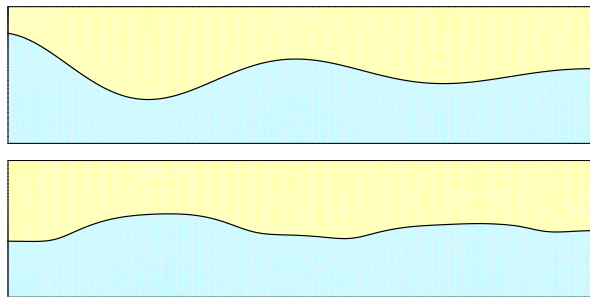


FIGURE 7. Bollottement non linéaire de deux fluides, de l'air et de l'eau à partir d'une condition initiale (en haut) et pour un temps de $t = 20 s$ (en bas); simulation par une méthode eulérienne-lagrangienne (ALE).

La condition initiale de l'interface donnée sous la forme $y = 0.5 + 0.3 \cos(4 \pi x/L) \exp(-x/2)$

est montrée sur la figure (7). Les propriétés sont celles de l'air et de l'eau. La simulation a été réalisée pour une durée de 20 secondes et un pas de temps de $2 \cdot 10^{-3}$. Le maillage déformable est de type lagrangien-eulérien avec 64×256 mailles avec un raffinement au niveau de l'interface pour bien capturer les couches de rotationnel au voisinage immédiat de celle-ci. La tension de surface est prise en compte mais ne joue absolument aucun rôle compte tenu des dimensions importantes du système.

L'évolution en temps est donnée sur la figure (8) où est représentée l'élévation de la surface libre sur le bord gauche de la cavité. On observe un bon comportement d'ensemble de la solution au cours du temps malgré les contraintes importantes sur la simulation, grandes dimensions, faibles viscosités, effets marqués de la gravité, couches de rotation très fines, etc.

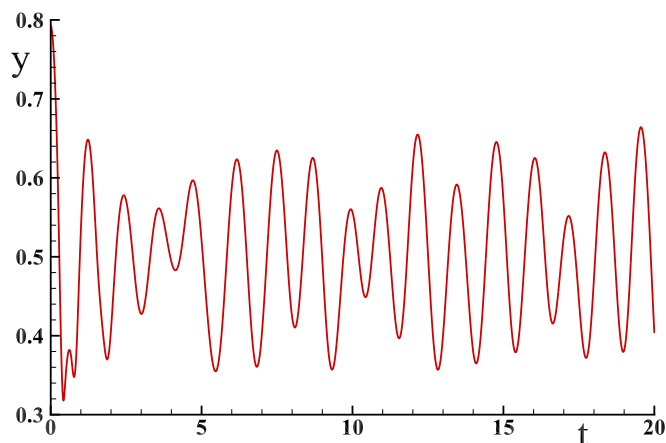


FIGURE 8. *Bolottement non linéaire : hauteur du liquide au cours du temps en un point à mi-hauteur du bord gauche du domaine.*

La méthode ALE utilisée pour la simulation d'ondes non linéaires est particulièrement adaptée à la formulation utilisée et au système d'équations (3). Cette technique permet facilement de s'affranchir de toute interpolation sur la masse volumique et sur la viscosité qui est probablement la cause principale d'un grand nombre de difficultés numériques observés par ailleurs.

6 Conclusions

Un grand nombre de difficultés constatées dans la formulation théorique des équations de la mécanique ou dans les discrétisations numériques à des fins de simulation ne sont pas encore bien identifiées. Certaines d'entre-elles se recouvrent, s'ajoutent et rendent difficile la compréhension de ces phénomènes. La réduction de ces défauts par l'augmentation d'une viscosité, qu'elle soit moléculaire ou turbulente, le lissage, les moyennes, ... permettent de conduire des simulations à terme mais ne donnent pas les raisons de ces problèmes.

La non convergence, à nombres de Reynolds élevés, des simulations d'écoulements diphasiques lorsque le nombre de degrés de liberté augmente en est un exemple. L'existence de courants parasites dans des problèmes où les effets capillaires sont dominants en est un autre ; cet artefact est tout simplement dû à la confusion du problème physique réel avec la représentation discrète subjective que l'on peut se construire.

Tous ces phénomènes sont essentiellement dus à deux raisons principales :

- l'équation de Navier-Stokes qui est défailante sur un certain nombre de points, l'existence d'une viscosité de compression non mesurable, sa forme tensorielle inutile, les propriétés physiques intégrées dans des opérateurs inappropriés, etc. A propriétés constantes sa forme est toutefois identique à celle de la mécanique des milieux discrets [7].

La notion même de milieu continu introduit d'emblée celui de repère global et la nécessité de référencer la vitesse à partir de ses composantes. A propriétés variables l'application de certains opérateurs mène à des processus dynamiques alors qu'ils ne sont que purement cinématiques. Par exemple la masse volumique associée à la vitesse fait de la quantité de mouvement une notion dynamique alors, que même pour les écoulements compressibles, les deux quantités n'ont rien de commun ;

- la confusion la plus complète entre les aspects physiques et le traitement numérique. Par exemple la discrétisation de l'équation de Navier-Stokes en temps considéré comme une discrétisation temporelle numérique est en fait la recherche d'un équilibre mécanique à partir d'un équilibre mécanique existant ; celui-ci ayant une signification claire c'est à dire la satisfaction de l'équation du mouvement à un instant donné.

Le fait de partir d'une équation déduite de la mécanique des milieux continus conduit à des opérations de moyennes, des interpolations, ... qu'introduisent les méthodes numériques classiques ; la notion du gradient d'une vitesse étant parmi les plus contestables surtout lorsque la viscosité varie dans l'espace. Pour les surfaces libres l'advection des interfaces ajoute encore à la confusion en associant parfois des concepts géométriques à la dynamique de l'écoulement.

La modélisation physique discrète de la mécanique [7] introduit des concepts de géométrie différentielle très simples. Malgré cela tous les phénomènes décrits par la mécanique des milieux continus à propriétés constantes sont retrouvés théoriquement et numériquement lorsqu'il n'existe pas de solution analytique. La simplicité de l'équation fondamentale de la dynamique discrète (1) n'est pas un défaut, elle est bâtie sur un postulat de séparation des effets de pression et de viscosité qui permet une décomposition directe de Hodge-Helmholtz de la quantité d'accélération ; elle ne viole aucune des règles de la physique. Il est à noter que la conservation de la masse fait partie intégrante de la loi du mouvement.

Cette décomposition de Hodge-Helmholtz joue aussi un rôle très important sur des quantités très différentes, la vitesse elle-même ou encore la modélisation des effets capillaires ou de la gravité. Tous ces potentiels, scalaires ou vectoriels interagissent de manière complexe pour une évolution réaliste du système physique.

Références

- [1] E. Ahusborde, M. Azaiez, J-P. Caltagirone, M. Gerritsma, and A. Lemoine. Discrete hodge-helmholtz decomposition. *Monografias Matematicas Garcia de Galdeano*, 39 :1–10, 2014.
- [2] Ph. Angot, J-P. Caltagirone, and P. Fabrie. Fast discrete helmholtz-hodge decompositions in bounded domains. *Applied Mathematics Letters*, 26(4) :445–451, 2013.
- [3] O. Botella and R. Peyret. Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow. *Computers & Fluids*, 27(4) :421–433, 1998.
- [4] J.U. Brackbill, B.D. Kothe, and C. Zemach. A continuum method for modeling surface tension. *J. Comput. Phys.*, 100 :335, 1992.
- [5] C.H. Bruneau and M. Saad. The 2d lid-driven cavity problem revisited. *Computers & Fluids*, 35 :326–348, 2006.
- [6] J-P. Caltagirone. Application de la décomposition de Hodge-Helmholtz discrète aux écoulements incompressibles. *Hal*, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01099958>, 2015.
- [7] J-P. Caltagirone. *Discrete Mechanics*. ISTE, John Wiley & Sons, London, 2015.
- [8] J-P. Caltagirone. Sur une méthode de projection scalaire discrète pour les écoulements incompressibles à masse volumique variable. *Hal*, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01103050>, 2015.
- [9] J-P. Caltagirone, S. Vincent, and C. Caruyer. A multiphase compressible model for the simulation of multiphase flows. *Computers & fluids*, 50(1) :24–34, 2006.
- [10] J.L. Guermond, P. Mineev, and Jie Shen. An overview of projection methods for incompressible flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195 :6011–6045, 2006.
- [11] H. Lamb. *Hydrodynamics*. 6^e edition, Dover, New-York, 1993.
- [12] L.D. Landau and E.M. Lifchitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, London, 1959.
- [13] A. Lemoine, J-P. Caltagirone, P. Azaiez, and S. Vincent. Discrete helmholtz-hodge decomposition on polyhedral meshes using compatible discrete operators. *Journal of Scientific Computing*, DOI 10.1007/s10915-014-9952-8, 2014.
- [14] V. Pascucci, P.T. Bremer, and H. Bhatia. The natural helmholtz-hodge decomposition for open-boundary flow. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 99(1), 2014.
- [15] R. Scardovelli and S. Zaleski. Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *Annual Review Fluid Mech.*, 31 :567, 1999.
- [16] S. Vincent, J-P. Caltagirone, P. Lubin, and T.N. Randrianarivelo. An adaptative augmented lagrangian method for three-dimensional multi-material flows. *Computers & fluids*, 33(10) :1273–1279, 2004.