



HAL
open science

RELATIVITÉ GÉNÉRALE HYPERCOMPLÈXE

Laurent Besson

► **To cite this version:**

| Laurent Besson. RELATIVITÉ GÉNÉRALE HYPERCOMPLÈXE. 2015. hal-01111250v1

HAL Id: hal-01111250

<https://hal.science/hal-01111250v1>

Preprint submitted on 29 Jan 2015 (v1), last revised 24 Feb 2018 (v5)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright

RELATIVITÉ GÉNÉRALE HYPERCOMPLÈXE

LAURENT BESSON

RÉSUMÉ. En cours de rédaction...

Ce document tapé initialement en 1998 a été le travail effectué sur une période de 1996 à 1998. Celui-ci été ré-écrit en janvier et février 2015 en raison de la perte des sources du document et dans le but de pouvoir le publier. Lors de sa ré-écriture le document à été corrigé et amélioré afin d'être le plus compréhensible possible. N'ayant jamais publié, je ne sais pas quels sont les standards attendus afin que le document soit conforme à ces attentes.

Le présent document tente une approche peut-être explorée par ailleurs, une approche simple qui est le remplacement des coordonnées du 4-vecteur réels en coordonnées avec des nombres quaternions (hypercomplexes). De plus ce document ré-introduit l'idée de M Hermann Weyl, une métrique de jauge sur les longueur. Appelée plus communément «jauge d'échelle » : Voir

http://www.researchgate.net/profile/Laurent_Nottale/publication/241619222_Relativit_e_d%27_echelle_nondi_erentia_temps_fractal/links/00b4952a2e69c7f72d000000.pdf

Si le lien ne fonctionne pas :

http://www.researchgate.net/profile/Laurent_Nottale/publication/241619222_Relativit_e_d%27_echelle_nondi_erentia_temps_fractal/links/00b4952a2e69c7f72d000000.pdf

http://www-cosmosaf.iap.fr/Weyl-Cartan_et_la_geometrie_infinitesimale_synthese_par_E_Scholz.pdf

Si le lien ne fonctionne pas :

http://www-cosmosaf.iap.fr/Weyl-Cartan_et_la_geometrie_infinitesimale_synthese_par_E_Scholz.pdf

TABLE DES MATIÈRES

1. Définition	2
1.1. Définition du 4-vecteur	2
1.2. Définition des quaternions	2
1.3. Notation d'Einstein	2
2. Postulat	2
1er postulat	2
2eme postulat	2
3. Notations diverses (dérivées covariantes, anti-commutateur, etc.)	2
3.1. Dérivée covariante des coordonnées	2
3.2. Dérivée covariante des h_i	2
4. Tenseurs	3
4.1. Transport d'un 4-vecteur	3

1. DÉFINITION

La relativité générale hypercomplexe se définit comme la RG mais avec des composantes des 4-vecteurs hypercomplexes.

1.1. Définition du 4-vecteur. $\vec{V} = \sum_{\alpha=0}^3 V^\alpha \cdot \vec{e}_\alpha$ où $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$ et les composantes de V^α sont des nombres quaternions.

1.2. Définition des quaternions. $V^\alpha \in \mathbb{H}$ ensemble des quaternions, noté \mathbb{H} tel $V^\alpha = V^{\alpha i} \cdot h_i$ $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ avec $h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 = -1$, $h_i \cdot h_i = -1$ pour $i \neq 0$

Ce qui donne pour un 4-vecteur hypercomplexe : $\vec{V} = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{i=0}^3 V^{\alpha i} \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha$ $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$

1.3. Notation d'Einstein. Les notations d'Einstein lorsqu'elles sont sans ambiguïtés sont : $\vec{V} = V^\alpha \cdot \vec{e}_\alpha$ où la somme est sous entendu sur les indices hauts ou bas.

2. POSTULAT

1er postulat. Le principe d'équivalence reste vrai.

2eme postulat. Les coordonnées de l'espace-temps sont hypercomplexes (cf : Nombres Quaternions).

3. NOTATIONS DIVERSES (DÉRIVÉES COVARIANTES, ANTI-COMMUTATEUR, ETC.)

3.1. Dérivée covariante des coordonnées. On note la dérivée covariante par coordonnée :

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial(x^{\mu i} \cdot h_i)} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu i} \cdot h_i + x^{\mu i} \cdot \partial h_i}$$

Posons

$$\partial h_i = H_{i\mu}^j \cdot h_j \cdot \partial x^\mu$$

d'où

$$\frac{\partial h_i}{\partial x^\mu} = H_{i\mu}^j \cdot h_j$$

or

$$\partial x^\mu = \partial x^{\mu i} \cdot h_i + x^{\mu i} \cdot \partial h_i$$

donc

$$\frac{\partial h_i}{H_{i\mu}^j \cdot h_j} = \partial x^{\mu i} \cdot h_i + x^{\mu i} \cdot \partial h_i$$

$$\partial x^{\mu i} \cdot h_i = \frac{\partial h_i}{H_{i\mu}^j \cdot h_j} - x^{\mu i} \cdot \partial h_i = \left(\frac{1}{H_{i\mu}^j \cdot h_j} - x^{\mu i} \right) \cdot \partial h_i$$

$$\partial x^{\mu i} \cdot h_i \cdot H_{i\mu}^j \cdot h_j = (1 - H_{i\mu}^j \cdot h_j \cdot x^{\mu i}) \cdot \partial h_i$$

d'où

$$\partial h_i = \frac{\partial x^{\mu i} \cdot h_i \cdot H_{i\mu}^j \cdot h_j}{(1 - H_{i\mu}^j \cdot h_j \cdot x^{\mu i})} \text{ avec } h_i \cdot h_j = \delta_{ij}^k \cdot h_k \text{ et } [h_i, h_j] = h_i \cdot h_j - h_j \cdot h_i = h_i \cdot h_j + h_i \cdot h_j = 2 \cdot \delta_{ij}^k \cdot h_k$$

Alors

$$(3.1) \quad \partial h_i = \frac{\partial x^{\mu i} \cdot H_{i\mu}^j \cdot \delta_{ij}^k \cdot h_k}{2 \cdot (1 - H_{i\mu}^j \cdot h_j \cdot x^{\mu i})}$$

3.2. Dérivée covariante des h_i .

$$\partial_\mu h_i = H_{\mu i}^j \cdot h_j$$

4. TENSEURS

4.1. **Transport d'un 4-vecteur.** Soit \vec{X} un 4-vecteur $x^{\alpha i} \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha$

On utilise la jauge d'échelle de Weyl

http://www-cosmosaf.iap.fr/Weyl-Cartan_et_la_geometrie_infinitesimale_synthese_par_E_Scholz.pdf

$$x^{\alpha i} = x^\alpha \cdot \varphi^i$$

Soit

$$\nabla_\mu = \frac{d}{dx^\mu}$$

et

$$\nabla_\nu = \frac{d}{dx^\nu}$$

Nous allons faire le calcul suivant :

$$(\nabla_\mu \cdot \nabla_\nu - \nabla_\nu \cdot \nabla_\mu) \vec{X}$$

Commençons par :

$$\nabla_\mu \vec{X} = \partial_\mu (x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha) = \partial_\mu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha + x^\alpha \cdot \partial_\mu \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha + x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot \partial_\mu h_i \cdot \vec{e}_\alpha + x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \partial_\mu \vec{e}_\alpha$$

Avec la définition des symboles de Christoffel :

$$(4.1) \quad \partial_\mu \vec{e}_\alpha = \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \cdot \vec{e}_\beta$$

Et avec :

$$(4.2) \quad \partial_\mu h_i = H_{\mu i}^j \cdot h_j$$

Puis :

$$(4.3) \quad \partial_\mu \varphi^i = \Phi_{\mu j}^i \cdot \varphi^j$$

$$\nabla_\mu \vec{X} = \partial_\mu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha + x^\alpha \cdot \Phi_{\mu j}^i \cdot \varphi^j \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha + x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot H_{\mu i}^j \cdot h_j \cdot \vec{e}_\alpha + x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \cdot \vec{e}_\beta$$

On pose :

$$(4.4) \quad \gamma_\mu = \Phi_{\mu j}^i \cdot \varphi^j \cdot h_i + \varphi^i \cdot H_{\mu i}^j \cdot h_j + \varphi^i \cdot h_i \cdot \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \cdot \vec{e}_\beta \cdot \vec{e}^\alpha$$

Or

$$\vec{e}_\beta \cdot \vec{e}^\alpha = \delta_\beta^\alpha$$

On obtient :

$$(4.5) \quad \gamma_\mu = \Phi_{\mu j}^i \cdot \varphi^j \cdot h_i + \varphi^i \cdot H_{\mu i}^j \cdot h_j + \varphi^i \cdot h_i \cdot \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \cdot \delta_\beta^\alpha$$

Donc

$$\nabla_\mu \vec{X} = \partial_\mu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha + x^\alpha \cdot (\gamma_\mu) \cdot \vec{e}_\alpha$$

Commençons le calcul : $\nabla_\nu \cdot \nabla_\mu \vec{X}$

$$\nabla_\nu \cdot \nabla_\mu \vec{X} = \partial_\nu (\partial_\mu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha + x^\alpha \cdot (\gamma_\mu) \cdot \vec{e}_\alpha)$$

$$\nabla_\nu \cdot \nabla_\mu \vec{X} = \partial_\nu \partial_\mu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha$$

$$+ \partial_\mu x^\alpha \cdot \partial_\nu \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha + \partial_\mu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot \partial_\nu h_i \cdot \vec{e}_\alpha$$

$$+ \partial_\mu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \partial_\nu \vec{e}_\alpha + \partial_\nu x^\alpha \cdot (\gamma_\mu) \cdot \vec{e}_\alpha$$

$$+ x^\alpha \cdot (\partial_\nu \gamma_\mu) \cdot \vec{e}_\alpha + x^\alpha \cdot (\gamma_\mu) \cdot \partial_\nu \vec{e}_\alpha$$

Nous allons former le calcul : $\nabla_\mu \cdot \nabla_\nu \vec{X}$

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu \cdot \nabla_\nu \vec{X} &= \partial_\mu \partial_\nu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha \\
&+ \partial_\nu x^\alpha \cdot \partial_\mu \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha + \partial_\nu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot \partial_\mu h_i \cdot \vec{e}_\alpha \\
&+ \partial_\nu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \partial_\mu \vec{e}_\alpha + \partial_\mu x^\alpha \cdot (\gamma_\nu) \cdot \vec{e}_\alpha \\
&+ x^\alpha \cdot (\partial_\mu \gamma_\nu) \cdot \vec{e}_\alpha + x^\alpha \cdot (\gamma_\nu) \cdot \partial_\mu \vec{e}_\alpha
\end{aligned}$$

Nous devons évaluer $\partial_\nu \gamma_\mu$ et $\partial_\mu \gamma_\nu$

$$(4.6) \quad \partial_\nu \gamma_\mu = \partial_\nu (\Phi_{\mu j}^i \cdot \varphi^j \cdot h_i + \varphi^i \cdot H_{\mu i}^j \cdot h_j + \varphi^i \cdot h_i \cdot \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \cdot \delta_\beta^\alpha)$$

$$(4.7) \quad \partial_\mu \gamma_\nu = \partial_\mu (\Phi_{\nu j}^i \cdot \varphi^j \cdot h_i + \varphi^i \cdot H_{\nu i}^j \cdot h_j + \varphi^i \cdot h_i \cdot \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \cdot \delta_\beta^\alpha)$$

Formons la différence de transport d'un 4-vecteur

$$\begin{aligned}
\nabla_\nu \cdot \nabla_\mu \vec{X} - \nabla_\mu \cdot \nabla_\nu \vec{X} &= \partial_\nu \partial_\mu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha \\
&+ \partial_\mu x^\alpha \cdot \partial_\nu \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha + \partial_\mu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot \partial_\nu h_i \cdot \vec{e}_\alpha \\
&+ \partial_\mu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \partial_\nu \vec{e}_\alpha + \partial_\nu x^\alpha \cdot (\gamma_\mu) \cdot \vec{e}_\alpha \\
&+ x^\alpha \cdot (\partial_\nu \gamma_\mu) \cdot \vec{e}_\alpha + x^\alpha \cdot (\gamma_\mu) \cdot \partial_\nu \vec{e}_\alpha \\
&- \partial_\mu \partial_\nu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha + \partial_\nu x^\alpha \cdot \partial_\mu \varphi^i \cdot h_i \cdot \vec{e}_\alpha \\
&+ \partial_\nu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot \partial_\mu h_i \cdot \vec{e}_\alpha + \partial_\nu x^\alpha \cdot \varphi^i \cdot h_i \cdot \partial_\mu \vec{e}_\alpha \\
&+ \partial_\mu x^\alpha \cdot (\gamma_\nu) \cdot \vec{e}_\alpha + x^\alpha \cdot (\partial_\mu \gamma_\nu) \cdot \vec{e}_\alpha + x^\alpha \cdot (\gamma_\nu) \cdot \partial_\mu \vec{e}_\alpha
\end{aligned}$$