



**HAL**  
open science

# Méthode Galerkin discontinue appliquée à l'électromagnétisme en domaine temporel

Thomas Strub, Nathanaël Muot, Philippe Helluy

► **To cite this version:**

Thomas Strub, Nathanaël Muot, Philippe Helluy. Méthode Galerkin discontinue appliquée à l'électromagnétisme en domaine temporel. 17e Colloque International et Exposition sur la Compatibilité Electromagnetique, Jul 2014, Clermont-Ferrand, France. hal-01108010

**HAL Id: hal-01108010**

**<https://hal.science/hal-01108010v1>**

Submitted on 22 Jan 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Méthode Galerkin discontinue appliquée à l'électromagnétisme en domaine temporel

T. Strub<sup>1</sup>, N. Muot<sup>2</sup>, P. Helluy<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Axessim, rue J. Sapidus Illkirch France, thomas.strub@axessim.fr

<sup>2</sup>Axessim, rue J. Sapidus Illkirch France, nathanael.muot@axessim.fr

<sup>3</sup>Inria Tonus et IRMA Université de Strasbourg, adresse, helluy@unistra.fr

**Résumé** Dans cet article, nous présentons les aspects numériques du projet GREAT (Galerkin Resolution for Electromagnetic Applications in the Time domain) dont la finalité première est de proposer un environnement « industriel » pour traiter des problèmes électromagnétiques tridimensionnels instationnaires. Cet environnement est bâti autour d'une méthode numérique de type Galerkin Discontinue (GD) et d'un outillage de maillage dédié.

## Introduction

Depuis quelques années sont apparues des méthodes de Galerkin Discontinue (GD) appliquées aux domaines de l'électromagnétisme [1], [2], [4], [3]. Ces méthodes sont bien adaptées aux problèmes électromagnétiques qui requièrent une prise en compte fine de la géométrie simulée (conformité du maillage) et une précision numérique importante. Les méthodes GD sont aptes à prendre en compte des raffinements locaux du maillage, ce qui permet de s'approcher davantage de la géométrie simulée tout en conservant un temps de calcul raisonnable en utilisant des techniques de pas de temps local.

Les méthodes Galerkin Discontinue sont construites sur la base d'une approximation d'ordre élevé. Ce type d'approximation apporte une grande précision numérique, mais en échange d'un temps de calcul qui devient conséquent. Ce rapport précision / temps est par ailleurs fortement conditionné par le type d'éléments de maillage utilisés. Le choix des éléments de maillage a également un impacte conséquent sur le mailleur. L'ONERA et l'Inria [1] au cours de travaux conjoints ont montré la pertinence de l'utilisation d'élément de maillage de type hexaédrique au lieu d'élément tétraédrique (plus classiques). Ces éléments en raison de leur structure en « pavé » permettent à la fois un gain en stockage et temps de calcul par une condensation de la matrice de rigidité et de masse. Les hexaèdres apportent également un gain sur la précision numérique par une résolution dans  $\mathbb{Q}$  au lieu de  $\mathbb{P}$  pour les tétraèdres.

Afin d'obtenir un outil opérationnel pour des applications industrielles, il reste à lever deux difficultés. Bien que les hexaèdres apportent un gain intrinsèque en terme de temps de calcul, cet avantage peut être renforcé en implémentant cette méthode sur les nouvelles architectures matérielles de type GPU (Graphics Processing Unit) qui

offre des capacités de calcul vectorielles. La deuxième difficulté, réside dans la mise en place d'un outillage cohérent maillage / solveur GD. En effet, la génération de maillage en hexaèdre est un enjeu à part entière, c'est pour quoi la mise au point conjointe du cœur de calcul GD et du mailleur hexaédrique permet d'équilibrer les contraintes entre les deux composants.

Dans cet article, nous décrivons dans un premier temps les aspects mathématiques de la méthode. Puis, nous présenterons la stratégie de parallélisation des calculs. Ensuite, nous aborderons la problématique de la génération de maillage en hexaèdre pour l'outil de calcul GD. Enfin, nous donnerons quelques résultats obtenus.

## I. Implémentation du schéma Galerkin Discontinu

### I.1. Schéma GD

Dans un premier, nous présentons succinctement la méthode Galerkin discontinue utilisée ici pour résoudre les équations de Maxwell instationnaires.

Commençons par écrire les équations de Maxwell sous la forme d'un système de Friedrichs

$$\partial_t W + A^i \partial_i W = S(W). \quad (1)$$

L'inconnue  $W$  de ce système est le vecteur  $(E^T, H^T)^T$  ou  $E$  et  $H$  sont les champ électrique et magnétique qui dépendant des variables d'espaces  $X = (x_1, x_2, x_3)$  et du temps  $t$ . Nous utilisons la convention de sommation des indices répétés et la notation abrégé des dérivées partielles  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ . La matrice  $A^i \partial_i$  est égales à

$$A^i \partial_i = \begin{pmatrix} 0 & \nabla \times \\ -\nabla \times & 0 \end{pmatrix}.$$

Et  $S(W) = (J, 0)^t$  est le terme source ou  $J$  et le courant volumique et la densité de charge est supposées nulle.

Nous souhaitons résoudre (1) dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  et sur une période  $[0, T]$ . Pour cela, considérons un maillage hexaédrique de  $\Omega$  formé d'un nombre fini d'hexaèdres  $L_k \subset \Omega$ ,  $k = 1, \dots, N$  tel que  $\cup_{k=1}^N L_k = \Omega$  et que  $\forall k \neq p$ ,  $L_k \cap L_p = \{\emptyset\}$  ou un point ou une droite ou une surface.

Dans chaque maille  $L$ , nous choisissons une base de fonctions scalaire  $\varphi_i^L$ ,  $i = 1 \dots p_L$  dont le support est inclus dans  $L$ . L'espace d'approximation ainsi construit

peut être différent dans chaque maille. Nous cherchons alors la solution  $W$  sous la forme

$$W(X, t) = W_L^j(t) \varphi_j^L(X), \forall X \in L.$$

Afin d'écrire la formulation GD associée à l'équation aux dérivées partielles (EDP) (1), nous commençons par l'écrire au sens des distributions. Puis nous intégrons par partie et étendons la formulation obtenue en prenant comme espace de fonctions tests l'espace d'approximation décrit ci-dessus.

Nous obtenons alors le schéma d'approximation GD

$$\forall L, \forall i, \int_L \partial_t W \varphi_i^L - \int_L A^i \partial_i \varphi_i^L W + \int_{\partial L} F(W_L, W_R, n_{LR}) \varphi_i^L = \int_L S \varphi_i^L. \quad (2)$$

Sur les interfaces entre mailles la solution  $W$  est discontinue. Nous introduisons donc un flux numérique décentré s'écrivant sur l'interface entre deux mailles  $L$  et  $R$

$$F(W_L, W_R, n_{LR}) = A^i n_i^+ W_L + A^i n_i^- W_R \quad (3)$$

où  $n_{LR}$  est le vecteur normal unitaire à l'interface dirigé de  $L$  vers  $R$ .

La matrice  $A^i n_i^+$ , respectivement  $A^i n_i^-$ , est obtenue en ne conservant que les valeurs propres positives, respectivement négatives, de la matrice  $A^i n_i$ . Ce flux numérique introduit une dissipation de l'énergie qui améliore la stabilité du schéma.

## 1.2. Discrétisation

L'approximation GD peut théoriquement être appliquée à tout type de mailles  $L_K$  et tout type de fonctions de base. Néanmoins, nous nous limitons ici au cas où les mailles sont des hexaèdres dont les arêtes sont droites et ne présentant pas de nœuds flottants.

Construisons alors l'espace d'approximation sur une maille  $L$ . Pour cela, considérons sur le cube unité  $K$  et  $\tau$  la transformation géométrique de  $K$  sur  $L$ . Définissons sur  $K$  les  $(d+1)^3$  points d'interpolations  $\hat{x}_i$  produits tensoriels des points de quadrature de Gauss-Legendre d'ordre  $d$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Nous prenons alors comme fonctions de base sur  $L$

$$\varphi_i^L = \varphi_i \circ \tau^{-1} \quad (4)$$

où  $\varphi_i$  est un produit de polynômes de Lagrange associée au point  $\hat{x}_i$ . La composante d'un champ  $W$  suivant une fonction de base est alors la valeur de ce champ au point associé à cette fonction de base.

Pour calculer les intégrales volumiques apparaissant dans la formulation GD (2), nous utiliserons la formule de quadrature associée aux points d'interpolation. Les intégrales surfaciques seront calculées par une formule similaire utilisant dans ce cas des points d'interpolation situés sur les faces de l'élément. Ces points sont les projetés des points d'intégration du volume.

Ce choix d'espace d'approximation et de quadrature offre différents avantages

- 1) Les matrices de masses locales sont diagonales.
- 2) Le gradient  $\nabla \varphi_i^L$  d'une fonction de base est non nul en uniquement  $3d + 1$  point d'interpolation du volume.
- 3) En un point d'interpolation d'une face, les champs peuvent être calculés en n'utilisant que les données sur une ligne de points d'interpolation du volume.
- 4) Les intégrales surfaciques ne font intervenir qu'une valeur par faces.

L'ordre d'interpolation  $d$  peut être choisi indépendamment dans chaque maille. Cela permet d'adapter l'ordre d'approximation à la taille de la maille, mais également avec un maillage donné d'augmenter la précision du calcul et la fréquence maximale observable.

Lorsque deux mailles voisines n'ont pas le même ordre d'interpolation, leur interface porte deux jeux différents de points d'interpolation. Dans ce cas, la formule de quadrature ayant l'ordre le plus élevé est utilisée pour calculer les intégrales surfaciques. Ainsi, il est nécessaire d'extrapoler des champs en utilisant tout les points d'interpolation de la maille de plus petit ordre.

## 1.3. Parallélisation OpenCL

La bibliothèque OpenCL permet de paralléliser les calculs sur CPU et GPU. Les calculs sont effectués par des *work-items* suivant un même programme appelé *kernel* et ayant accès à une mémoire globale d'accès lent. Les *work-items* sont regroupés en *work-group*, chaque *work-group* ayant accès à une mémoire locale de petite taille d'accès rapide. Durant l'exécution d'un *kernel*, le nombre de *work-items* lui étant associé est arbitrairement choisi et chaque *work-item* est identifié par un numéro.

Afin de paralléliser efficacement un algorithme, différentes règles doivent être suivies

- Les opérations effectuées par chaque *work-item* doivent être similaires, les instructions conditionnelles sont coûteuses.
- Les accès à la mémoire globale doivent être faits de manière linéaire.
- L'écriture au même endroit par plusieurs *work-items* conduit à des conflits d'écriture dont le résultat est aléatoire.
- Les résultats intermédiaires peuvent être stockés temporairement en mémoire locale.

En tenant compte des remarques précédentes, nous avons défini une stratégie de parallélisation des calculs.

Nous avons divisé le calcul de la dérivée en temps des champs en plusieurs étapes. Dans un premier temps nous calculons les intégrales volumiques

$$\int_L A^i \partial_i \varphi_i^L W$$

puis les intégrales surfaciques

$$\int_{\partial L} F(W_L, W_R, n_{LR}) \varphi_i^L$$

ensuite nous appliquons les termes sources. Ceux-ci peuvent être des intégrales surfaciques, par exemple pour l'injecteur d'onde plane, ou des intégrales volumiques, par exemple pour un point source. Enfin, nous appliquons les modifications dues aux matériaux diélectriques présents dans la scène.

Ces étapes sont effectuées deux fois par pas de temps suivant la méthode Runge-Kutta d'ordre 2.

Décrivons plus précisément la parallélisation du *kernel* de calcul des intégrales surfaciques. En appliquant la formule de quadrature, nous pouvons écrire le termes surfacique sous la forme

$$\begin{aligned} \int_{\partial L} F(W_L, W_R, n_{LR}) \varphi_i^L = \\ \int_{\partial K} F(W_L \circ \tau_L, W_R \circ \tau_L, D\tau_L^* \hat{n}_{LR}) \varphi_i = \\ \sum_{i=0}^5 \omega_{p_k(i)} F \left\{ W_L \circ \tau_L (\hat{x}_{p_k(i)}), \right. \\ \left. W_R \circ \tau_L (\hat{x}_{p_k(i)}), D\tau_L^* \hat{n}_{LR} (\hat{x}_{p_k(i)}) \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

$\omega_{p_k(i)}$  et  $\hat{x}_{p_k(i)}$  sont les poids et points de Gauss-Legendre associés à la formule de quadrature sur une face de l'élément K. Le point  $\hat{x}_{p_k(i)}$  est le projeté du point d'interpolation volumique  $\hat{x}_i$ .  $D\tau_L^*$  est la comatrice de la jacobienne de  $\tau_L$ . Le vecteur  $\hat{n}_{LR}$  est le vecteur normal unitaire sortant à la face correspondante de l'élément de référence K. Cette intégrale ne requiert qu'un terme par face, car une fonction de base s'annule en tout les points des faces sauf en le projeté  $\hat{x}_{p_k(i)}$  du point qui lui est associé.

Pour calculer ces intégrales, nous associons à chaque élément volumique un *work-group* constitué d'un nombre de *work-items* égale au maximum du nombres de points d'intégration volumiques ou surfaciques.

Dans une première étape, nous répartissons les *work-items* sur les points d'intégration surfaciques et nous y calculons les termes de flux  $F(W_L, W_R, D\tau_L^* \hat{n}_{LR})$ . Les champs  $W_L$  et  $W_R$  sont évalués en utilisant les propriétés décrites en 1.2 qui consiste à n'utiliser que les valeurs provenant des points volumiques se projetant sur le point surfacique où nous souhaitons évaluer les champs. Les flux ainsi calculés sont stockés en mémoire locale.

Dans une seconde étape, nous associons chaque *work-item* à un point volumique et nous calculons l'intégrale associée en n'utilisant qu'une valeur de flux par face lue en mémoire locale. Pour un degré d'interpolation inférieur à 6, le nombre de points volumique est inférieur au nombre de points surfacique. Ainsi dans cette seconde étape, certains *work-items* n'effectueront pas de calculs.

Cette perte est compensée par une utilisation optimisée de la mémoire locale.

Enfin, le résultat de ce calcul est écrit en mémoire globale. Comme indiqué, le nombre de *work-items* constituant les *work-groups* durant les calculs de la dérivée en temps des champs dépend du degré d'interpolation de l'élément. Afin d'appliquer la stratégie de parallélisation précédente, nous regroupons les mailles de même degré dans une même zone. Les calculs sont alors effectués zone par zone permettant ainsi de conserver un bon parallélisme.

#### I.4. Parallélisation MPI

MPI permet de paralléliser les calculs sur une architecture à mémoire distribuée. Pour cela plusieurs processus sont lancés et communiquent entre eux par l'intermédiaire de messages.

Les mailles constituant le volume de calcul sont réparties en domaines, chacun étant associé à un processus. Cette répartition est effectuée de manière à obtenir une frontière entre les domaines la plus petite possible. En effet, les données échangées sont les champs situés dans la couche de mailles touchant cette frontière. Donc, plus la frontière est étendue, plus le volume de données à transférer sera grand.

Ces échanges de données sont nécessaires à chaque calcul de flux, dans l'évaluation de la dérivée en temps des champs.

## II. Environnement de maillage

L'une des forces de la méthode GD réside dans sa capacité à représenter des hexaèdres déformés. Cependant, cette déformation ne peut pas être arbitraire sous peine de détériorer la précision numérique de l'élément ou de le rendre instable. De plus, l'utilisation de grands hexaèdre permet de maintenir le temps de calcul sans pénaliser la pression numérique en jouant d'une part sur l'ordre d'approximation et sur la déformation des éléments d'autre part.

L'approche proposée utilise un maillage triangulaire surfacique en entrée. Ce choix nous permet d'être compatible avec la plupart des outils de CAO, car ils fournissent pour la plupart des capacités d'exporter une triangulation. À partir de là, la génération du maillage en hexaèdre est découpée en trois étapes.

La première étape consiste à rechercher les singularités de maillage. Ces singularités de maillage représentent par exemple les bords d'une surface, l'intersection entre plus de deux plaques (T ou X), une arête vive ou encore le sommet d'un cube. Tous ces éléments sont d'une grande importance dans le maillage, car sont caractéristiques des propriétés électriques d'une géométrie (longueur électrique, diffraction d'arêtes, etc.). Il est donc indispensable de les représenter correctement.

La deuxième étape revient à construire un maillage en marche d'escalier dans une grille orthogonale régulière. En d'autres mots, un maillage type FDTD. Ce maillage a la bonne propriété d'être composé uniquement d'hexaèdres dont la taille est corrélée à la longueur d'onde du problème étudié.

La dernière étape a pour objectif de rendre ce premier maillage conforme à la géométrie. Pour ce faire, une déformation élastique du maillage contraint par la géométrie initiale est réalisée. Cette déformation a la bonne propriété de minimiser l'élongation, la torsion et le cisaillement des hexaèdres, déformation qui introduit une impression numérique.

Nous allons maintenant préciser chacune de ces étapes.

## II.1. Recherche des singularités de maillage

La recherche des singularités est une étape importante, car caractéristique des propriétés électriques de la géométrie. Il est important de conserver leurs positions dans le maillage final. Nous distinguerons deux types de singularités. Les singularités associées à une configuration topologique de maillage particulier et des singularités géométriques. Les singularités topologiques représentent par exemple, l'arête qui connecte entre eux plus de deux triangles, la frontière d'une surface ou le point qui fait connexions entre un fil sur une plaque. Ce type de singularité se caractérise par la nature du lien qu'il y a entre plusieurs éléments géométriques (triangle). Ces singularités ne sont pas très difficiles à déterminer si nous représentons le maillage dans une structure de donnée de type « doubly connected edge list » [7]. Cependant, ce type de maillage impose de ne pas avoir d'élément dupliqué. Dans ce cas, nous perdons les liens entre les éléments qui ne peuvent être reconstruits.

La recherche des singularités topologiques se présente comme la visite d'un graphe particulier avec un ensemble de règles pour identifier les éléments singuliers. Par exemple, la règle pour rechercher les singularités d'arêtes peut se formuler par les deux règles suivantes :

- Si une arête est constitutive de plus de 2 faces alors c'est une arête multiple ;
- Si une arête est constitutive de seulement une face alors c'est une arête de frontière.

Les singularités de géométrie quant à elles sont associées à des critères géométriques. Il y a deux principales singularités de géométrie : les arêtes vives (les arêtes d'un cube) et les sommets. La recherche des arêtes vives se fait par une mesure d'angle. En pratique une arête est dite vive si elle ne présente pas de singularité topologique c'est-à-dire qu'elle lie exactement deux faces et que la norme de l'angle modulo  $[2\pi]$  entre ces deux faces est inférieur à un certain seuil  $\alpha$  (ex.  $\pi/4$ ). La détection des sommets peut se résumer à la recherche d'une intersection entre plus de deux singularités d'arêtes vive.

## II.2. Construction du maillage dans une grille structurée orthogonale

La construction du maillage dans une grille structurée se fait par une approche de projection et de dichotomie. Mais avant de réaliser ces étapes, nous devons définir une grille cartésienne. Cette grille est définie par un pas de maillage qui peut être plus lâche que ceux utilisées pour les FDTD par exemple  $\lambda/5$  où  $\lambda$  désigne la plus petite longueur d'onde. L'avantage d'utiliser une grille est de permettre de filtrer les éléments géométriques dont la taille est trop petite pour être perçus par l'onde électromagnétique.

L'étape de projection a pour but de projeter les nœuds du maillage triangulaire initial sur les nœuds de la grille. Après cette étape de projection, les éléments du maillage initial se sont déformés pour s'aligner plus ou moins correctement dans la grille. Il en résulte deux types d'éléments. Les éléments qui sont alignés avec la grille, c'est-à-dire tous les éléments dont la projection est un point, un edge, ou un quad de la grille. Les autres éléments sont considérés comme non alignés avec la grille. Les éléments non alignés vont être découpés en quadrangle en reliant les sommets, le centre des arêtes et le barycentre de l'élément (voir Fig. 1).

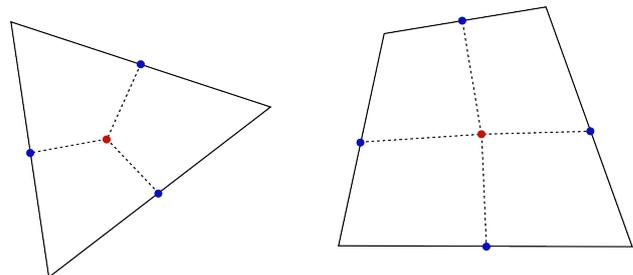


Fig. 1. Représentation de la stratégie de découpage des éléments en quadrangle.

Les étapes de projection et de découpage sont répétées pour supprimer tous les éléments qui ne sont pas alignés avec la grille. À la fin de cette deuxième étape, nous avons un maillage structuré. La Fig. 2 illustre le maillage structuré d'une sphère.

## II.3. Déformation élastique du maillage

Après ces deux premières étapes nous connaissons les éléments de la géométrie qui sont électriquement importants (singularités) est nous avons un maillage structuré dans une grille. Nous allons maintenant déformer ce maillage pour le rendre conforme à la géométrie initiale (maillage triangulaire d'entrée) en cherchant à correctement représenter les singularités. À l'issue de cette déformation nous obtiendrons un maillage conforme et composé uniquement d'hexaèdres.

Pour déformer le maillage, nous avons choisi de nous inspirer de la mécanique des milieux continus (de la déformation élastique). Dans un premier temps, nous

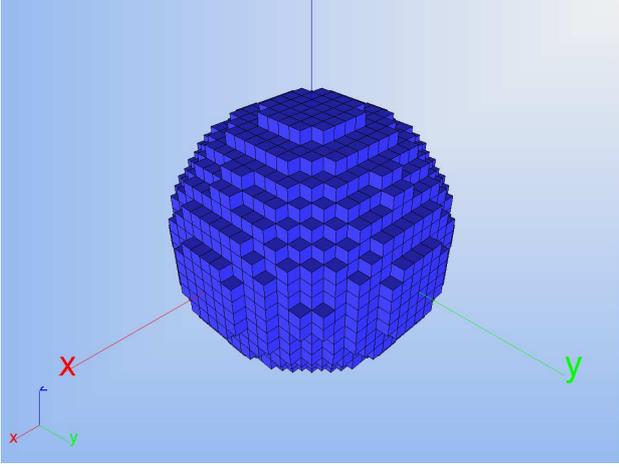


Fig. 2. Représentation du maillage structuré d'une sphère

avons choisi un système élastique relativement simple. Cette approche consiste à voir chaque nœud de la grille comme un point de masse  $m$  relié aux autres points par les arêtes de la grille. Chacune de ces arêtes est vue comme un ressort de longueur au repos  $L_0$  (pas de maillage) avec une raideur  $k$ . Il est également intéressant d'ajouter des pertes ici par frottement  $f_f = -\mu v$  avec  $v$  la vitesse des points. Pour que le système se déforme pour tendre vers un maillage conforme nous ajoutons une force de contrainte note  $f_c$ . Nous précisons par la suite cette force. La mécanique du point nous permet décrire :

$$m\partial_t v_i = -\mu v_i + \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} e_{ij} k (\|x_i - x_j\| - L_0) + f_c \quad (6)$$

où  $e_{ij}$  est le vecteur directeur unitaire de la droite passant par les points  $x_i$  et  $x_j$ .

La contrainte  $f_c$  permet de déformer le maillage vers la géométrie initiale à laquelle nous voulons être conforme. Cette contrainte peut être exprimée par une force de rappel appliquée aux points du maillage structuré proportionnelle à la distance qui les sépare de la géométrie initiale. Cette force peut prendre la forme d'un ressort de rappel placé entre un point du maillage structuré et la géométrie initiale. Ces ressorts ont une longueur au repos nulle et une raideur  $k_c$ .

Pour déterminer le maillage conforme à partir de ce système élastique nous devons déterminer le point d'équilibre du système. Ce point d'équilibre est calculer en utilisant un schéma aux différences finies temporelle sur l'EDP (6) et en faisant une relaxation sur l'énergie cinétique  $T_k = 1/2m \sum v_i^2 = 0$ . La Fig. 3 permet de comparer le maillage d'une sphère issu du processus de maillage en hexaèdres déformés et la géométrie initiale.

L'approche proposée permet de construire un maillage composé uniquement d'éléments hexaédriques déformés

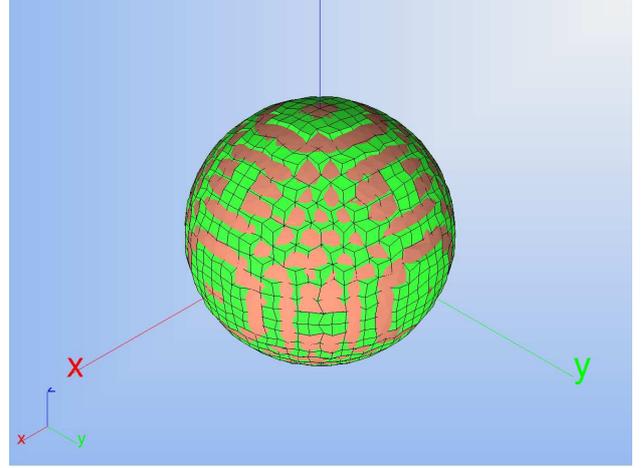


Fig. 3. Représentation du maillage en hexaèdres déformés (vert) d'une sphère (rose)

adapté pour le solveur GD en contrôlant de manière globale la déformation des hexaèdres.

### III. Résultats numériques

#### III.1. Réflexion des couches absorbantes

Afin de simuler un domaine ouvert, il est nécessaire d'appliquer des conditions limites absorbantes. Nous comparerons ici une condition limite de type Silver-Müller et une condition limite formée de couches absorbantes de type PML [6].

La condition limite de Silver-Müller correspond à l'application d'un flux numérique sur le bord du domaine valant

$$F_{Silver-Müller}(W, n) = F(W, 0, n)$$

Les couches PML, quant à elles, sont constituées de mailles ajoutées à l'extérieur du domaine et constituées d'un matériau fictif. Ce matériau présente une conductivité anisotrope calculée afin de minimiser les réflexions et d'induire une décroissance de l'amplitude des champs.

Afin de comparer les réflexions dues à ces deux types de conditions limites, considérons un parallélépipède dont les faces sont constituées de métal sauf une où la condition limite de Silver-Müller ou des PML sont appliquée. De plus, nous injectons sur la face opposée un champ électromagnétique via une surface de Huygens. Voir la schématisation de cette configuration sur la figure Fig. 4. Dans un premier temps, nous agrandissons le domaine de calcul de manière à n'obtenir aucune réflexion parasite et ainsi obtenir une solution de référence.

Ensuite, nous effectuons la même simulation avec les deux types de conditions limites.

Nous comparons alors les résultats obtenus pour les différentes configurations. La Fig. 5 représente la valeur de la composante majoritaire  $E_y$  du champ électrique en fonction du temps pour les trois configurations. Nous

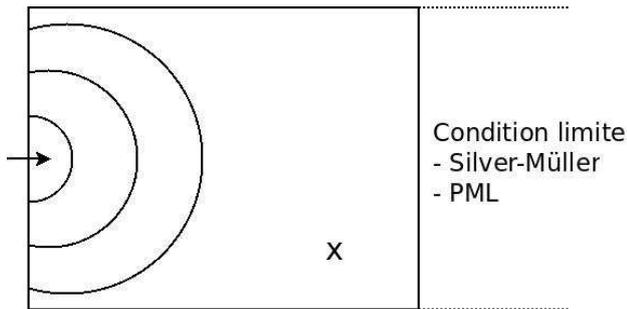


Fig. 4. Schéma de la configuration des tests de réflexion.

obtenons alors les taux de réflexion de 5 % avec la condition de Silver-Müller et de 0.05 % pour les PML.

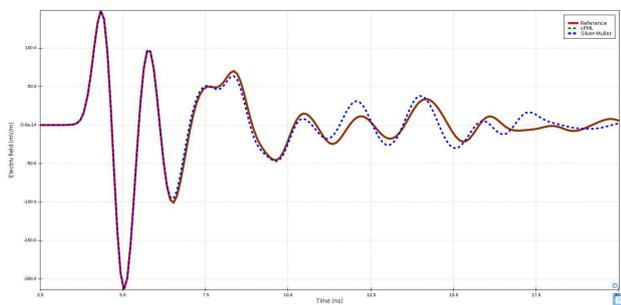


Fig. 5. Champ  $E_y$  en un point d'observation.

Le taux élevé de réflexion des conditions de Silver-Müller peut s'expliquer par le fait que ces conditions limites absorbent correctement les champs d'incidence normale. Ici, nous avons choisi une configuration dans laquelle les champs présentent différentes incidences afin de représenter une condition plus proche d'un cas pratique d'utilisation de ces modèles.

### III.2. Temps de calcul

Dans un premier temps, comparons le temps de calcul obtenu avec l'implémentation parallèle décrite ici et une implémentation séquentielle optimisée du même schéma. Pour cela, considérons un cube constitué de 41 472 hexaèdres. Dans chaque maille, les champs électromagnétiques sont approximés par des polynômes de degré 2. Cela représente 6 718 464 degrés de liberté.

Les 5 couches extérieures de mailles sont constituées de PML. Une plaque métallique est placée au centre du maillage. Et nous injectons une onde plane dans le domaine de calcul par l'intermédiaire d'une surface de Huygens.

La simulation s'étend sur une période de 25ns.

Les calculs sont effectués sur un processeur Intel Xeon E5645 avec la méthode séquentielle et sur une carte graphique GeForce GTX 680 avec la méthode parallèle (qui n'utilise ici que la parallélisation OpenCL). Les temps de calcul obtenus sont d'environ 2 000s pour la méthode séquentielle et de 200s pour la méthode

parallèle. Nous obtenons un *speed-up* d'environ 10 entre les deux implémentations.

Comparons maintenant le gain de temps obtenu en parallélisant les calculs sur plusieurs cartes graphiques. Pour cela nous effectuons les calculs pour un même maillage constitué de 528 840 hexaèdres avec une puis sur quatre cartes graphiques en utilisant la parallélisation MPI. Nous obtenons alors un *speed-up* de 3,3.

### Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté un logiciel de simulation électromagnétique parallèle à vocation industrielle. Il utilise une méthode Galerkin discontinue de degré élevé offrant une bonne précision et permettant de prendre en compte finement la géométrie simulée.

Les travaux actuels portent sur l'amélioration de parallélisation des calculs. Notamment par une spécialisation des *kernels* de calcul et une asynchronisation des communications MPI.

### Références

- [1] G. Cohen, X. Ferrieres, S. Pernet, "A spacial high-order hexahedral discontinuous Galerkin method to solve Maxwell's equations in time domain", *J. Comput. Phys.*, no. 2, pages 340-363, 2006.
- [2] F. Bourdel, P. Mazet, P. Helluy, "Resolution of the non-stationary or harmonic Maxwell equations by a discontinuous finite element method. application to an e.m.i. (electromagnetic impulse) case.", 10th international conference on computing methods in applied sciences and engineering, Paris, february 11-14, pages 1-18. Nova Science Publishers, Inc., New York, 1992. <http://www-irma.u-strasbg.fr/helluy/ADMIN/CV/inria92.pdf>
- [3] J.S. Hesthaven and T. Warburton, "High-order/Spectral Methods on Unstructured Grids I. Time-domain Solution of Maxwell's Equations", *J. Comput. Phys.* 181 (2002) 1-34
- [4] P. Lesaint, P.-A. Raviart, "On a finite element method for solving the neutron transport equation", 1974
- [5] OpenCL "The open standard for parallel programming of heterogeneous systems" <http://www.khronos.org/opencl/>
- [6] J.P. bérenger, "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves", *Journal of computational physics*, no. 114, pages 185-200, 1994.
- [7] Mufles, D. E. ; Preparata, F. P. "Finding the Intersection of Two Convex Polyhedra", *Tech. Rept. UIUC*, 1977, 38pp, also *Theoretical Computer Science*, Vol. 7, 1978, 217-236

**Le projet GREAT est financièrement supporté par DGA/DS/MRIS dans le cadre d'un projet d'innovation duale RAPID.**