



HAL
open science

Sur une méthode de projection scalaire discrète pour les écoulements incompressibles à masse volumique variable

Jean-Paul Caltagirone

► **To cite this version:**

Jean-Paul Caltagirone. Sur une méthode de projection scalaire discrète pour les écoulements incompressibles à masse volumique variable. 2015. hal-01103050v2

HAL Id: hal-01103050

<https://hal.science/hal-01103050v2>

Preprint submitted on 14 Jan 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur une méthode de projection scalaire discrète pour les écoulements incompressibles à masse volumique variable

Jean-Paul Caltagirone

Université de Bordeaux
Institut de Mécanique et d'Ingénierie
Département TREFLE, UMR CNRS n° 5295
16 Avenue Pey-Berland, 33607 Pessac Cedex
calta@ipb.fr

Résumé

Une méthode originale de projection scalaire discrète présentée pour la simulation des écoulements incompressibles à masse volumique variable inverse l'algorithme de projection classique en calculant d'abord la composante irrotationnelle de la vitesse et ensuite la pression. La première phase de la projection est purement cinématique, le champ de vitesse prédit est soumis à une décomposition de Hodge-Helmholtz discrète. La seconde phase de remontée de la pression à partir de la masse volumique utilise le théorème de Stokes pour calculer explicitement la pression. Si tout ou partie des conditions aux limites sont fixées sur le champ physique à divergence nulle alors l'équation de projection sur le potentiel scalaire de la vitesse devient une équation de Poisson à coefficients constants munie de conditions de type Dirichlet.

Mots clés

Méthodes de projection, décomposition de Hodge-Helmholtz discrète, mécanique des milieux discrets, équations de Navier-Stokes, écoulements incompressibles.

A Discrete Scalar Projection method (DSP) for incompressible flows with variable density

Jean-Paul Caltagirone

Université de Bordeaux
Institut de Mécanique et d'Ingénierie
Département TREFLE, UMR CNRS n° 5295
16 Avenue Pey-Berland, 33607 Pessac Cedex
calta@ipb.fr

Abstract

A new Discrete Scalar Projection method presented for simulating incompressible flows with variable density reverse conventional projection algorithm by computing first the irrotational component of the velocity and then the pressure. The first phase of the projection is purely kinematics; the predicted velocity field is subjected to a discrete Hodge-Helmholtz decomposition. The second phase of upgrade of pressure from the density uses Stokes' theorem to explicitly compute the pressure. If all or part of the boundary conditions are then fixed on the free-divergence physical field, the system to solve scalar potential of velocity becomes a Poisson equation with constant coefficients fitted with Dirichlet conditions.

Keywords

Projection methods, Discrete Hodge-Helmholtz Decomposition, Discrete Mechanics, Navier-Stokes equation, Incompressible flows.

1 Introduction

La résolution des équations de la mécanique des fluides incompressible nécessite d'assurer le couplage de l'équation du mouvement et de la contrainte d'incompressibilité. Ce couplage peut être implicite en incluant la contrainte dans le système linéaire comme pour la méthode du lagrangien augmenté [13]. Une autre classe de méthodes consiste à scinder la résolution de l'équation du mouvement de l'application de la contrainte d'incompressibilité [12].

Un aspect important est apparu d'emblée aux premiers auteurs qui ont développé des algorithmes numériques autour des méthodes de volumes finis, c'est la localisation spatiale des inconnues de vitesse et de pression. Pour des variables colocalisées des instabilités apparaissent et des lisseurs sont nécessaires pour atténuer et faire disparaître ces fluctuations de la vitesse et de la pression. Harlow et Welch en 1965 ont introduit la notion de variables décalées [16] initialement pour des écoulements diphasiques ; cette stratégie, (la méthode Marker And Cell) permet d'assurer le couplage, direct ou non, sans perturbation des champs de pression et de vitesse.

Depuis de nombreux auteurs ont développé des méthodes de type prédiction-correction dites de projection qui consiste à traiter la résolution de l'équation du mouvement et de sa contrainte d'incompressibilité de manière séquentielle. De nombreux algorithmes permettent d'obtenir des ordres de convergence en temps en $O(\Delta t^{1/2})$ à des ordres plus élevées, $O(\Delta t^2)$ qui dépendent aussi des conditions aux limites imposées. On trouvera quelques revues sur ces techniques dont celle de Guermond et al. [14] très complète.

L'utilisation plus récente de ces techniques pour la simulation d'écoulements diphasiques conduisent à des systèmes linéaires mal conditionnés surtout à à forts contrastes de masse volumique. En effet la résolution d'une équation de Poisson à coefficients fortement variables s'avère très coûteuse en nombre d'itérations de solveurs itératifs comme le gradient conjugué. Les solveurs directs sont performants en deux dimensions d'espace mais restent inutilisables en 3D pour des simulations à grands nombres de degrés de liberté.

Certains auteurs abordent le problème du point de vue algébrique par des pré-conditionnements spécifiques ou par la résolution de points selles [4, 5, 6, 8]. D'autres voies sont recherchées par exemple par Guermond et al. [15] en extrayant la masse volumique de l'équation de Poisson ; cette approche s'avère efficace pour les petits rapports de masse volumique. Elle peut être utilisée moyennant quelques précautions pour des écoulements à conditions aux limites ouvertes [18]. Des travaux basés sur une approche vectorielle de la résolution de l'étape de projection [11, 1] s'avère particulièrement efficace pour la simulation d'écoulements diphasiques à grands contrastes de masse volumique.

Parallèlement des travaux centrés sur la décomposition discrète de Hodge-Helmholtz apportent des solutions potentielles à l'utilisation de celle-ci pour la résolution d'équations aux dérivées partielles comme l'équation de Navier-Stokes [3, 17]. Les autres applications potentielles de cette décomposition sont nombreuses et sont citées de manière exhaustive dans la revue de Bhatia [7].

L'approche proposée ici est entièrement basée sur la mécanique des milieux discrets [10]. Cette formulation de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement conduit à une équation très différente de l'équation de Navier-Stokes. Sa constitution repart de la loi fondamentale de la dynamique, la seconde loi de Newton, sur une vision de géométrie différentielle ; on obtient ainsi une équation du mouvement discrète sous une forme d'une décomposition naturelle de Hodge-Helmholtz en une partie irrotationnelle et une partie solénoïdale. Cette approche a conduit à une version purement vectorielle de la méthode de projection où, à l'issue de cette seconde étape les conditions aux limites du problème sont satisfaites [9].

Cet article est consacré à une version scalaire de projection (DSP) où la composante irrotationnelle de la vitesse est recherchée par une décomposition de Hodge-Helmholtz du potentiel scalaire de la vitesse. Après une présentation détaillée de l'algorithme de projection et deux exemples d'écoulements à masses volumiques variables une discussion sur les différentes approches est présentée.

2 Méthode de projection discrète

La résolution de l'équation du mouvement dans une formulation incompressible associée aux conditions aux limites du problème physique est l'objectif des méthodologies de projection. Cette équation peut être l'équation de Navier-Stokes ou l'équation issue de la mécanique des milieux discrets [10]. Pour des écoulements à masse volumique constante et à viscosité constante les deux formulations sont équivalentes mais à propriété variables ce n'est pas le cas.

Comme ce choix est indifférent pour la méthode de projection scalaire proposée reprenons l'équation du mouvement discrète pour un écoulement incompressible :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p - \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V}) \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \mathbf{V} = \mathbf{V}_\Psi \text{ sur } \Sigma \end{array} \right. \quad (1)$$

où \mathbf{V}_Ψ est la composante solénoïdale de la vitesse recherchée soit \mathbf{V}^{n+1} pour une discrétisation où t^{n+1} représente le temps à l'issue de des deux étapes de prédiction et correction.

Bien que l'ordre deux peut aisément être obtenue avec la méthodologie présentée la discrétisation temporelle est donnée au premier ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\mathbf{V} - \mathbf{V}^n}{\Delta t} - \rho \mathbf{V}^n \times \nabla \times \mathbf{V}^n = -\nabla \left(p^n + \frac{1}{2} \rho \mathbf{V}^2 \right) - \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V}^{n+1}) \\ \nabla \cdot \mathbf{V}^{n+1} = 0 \\ \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V}_\Psi \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \Sigma \end{array} \right. \quad (2)$$

En l'absence de la contrainte d'incompressibilité dans l'équation du mouvement dans cette étape de prédiction la divergence de \mathbf{V} n'est pas nulle et seule la composante de vitesse normale est respectée.

Le champ $\mathbf{V} = \mathbf{V}_\Phi + \mathbf{V}_\Psi$ prédit comporte les deux contributions solénoïdale et irrotationnelle sur chacun des segments de la topologie primale. La composante à divergence nulle $\mathbf{V}_{\Psi\Sigma}$ est connue sur le bord, c'est la condition à la limite physique à imposer mais l'étape de projection ne permet pas de la maintenir.

L'étape de projection consiste à rechercher la composante irrotationnelle $\mathbf{V}_\Phi = \nabla\Phi$ pour ensuite obtenir, par différence avec \mathbf{V} , la composante à divergence nulle.

L'une des méthodes de décomposition de Hodge-Helmholtz de la vitesse $\mathbf{V} = \nabla \cdot \Phi + \nabla \times \Psi$ en ses deux composantes à divergence et à rotationnel nuls revient à appliquer l'opérateur divergence à \mathbf{V} et à $\nabla\Phi$ qui sont égales puisque la divergence du rotationnel primal est nulle.

On peut montrer [14] que des conditions de flux nul sur le potentiel scalaire doivent être

associées à l'équation de Poisson :

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi = -\nabla \cdot \mathbf{V} \\ \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Sigma \end{cases} \quad (3)$$

En fait on peut construire autant de champs irrotationnels que de conditions aux limites appliquées au système. Il y a toutefois peu de chances de trouver un champ solénoïdal qui satisfasse aux conditions aux limites du problème physique.

Cette étape est purement cinématique et ne résulte pas d'un quelconque splitting numérique. Il ne fait pas apparaître non plus la masse volumique ce qui est parfaitement légitime. L'écoulement peut être à masse volumique variable continûment voire diphasique il n'existe pas de raison physique ni d'argument mathématique qui conduise à associer la masse volumique au potentiel scalaire de la vitesse Φ . La partie dynamique de l'étape de projection fait par contre apparaître la masse volumique pour obtenir la pression p . La section suivante revient spécifiquement sur le lien entre potentiel scalaire de la vitesse et de la pression.

Dès lors il ne reste plus qu'à résoudre le système (3) avec des conditions aux limites de Dirichlet pour obtenir Φ dans tout le domaine Ω . Cette équation de Poisson où le premier membre est un laplacien s'avère particulièrement facile à résoudre puisqu'elle la masse volumique ρ est absente.

A partir du potentiel Φ dans Ω il est facile de calculer de manière exacte la composante irrotationnelle qui est un champ de gradient $\mathbf{V}_\Phi = \nabla \Phi$. La dernière phase de l'algorithme consiste à relever la vitesse recherchée c'est à dire la composante solénoïdale du champ prédit \mathbf{V} ainsi que la pression au temps $(n+1)$.

La mécanique des milieux discrets conduit à identifier $\rho \Phi/dt$ à la divergence de la vitesse à décomposer.

Les remontées des champs vitesse et de pression sont données par les expressions :

$$\begin{cases} \mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{V} - \mathbf{V}_\Phi \\ p_B^{n+1} = p_A^{n+1} + \int_\Gamma \frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{V}_\Phi \cdot \mathbf{t} dl \end{cases} \quad (4)$$

où Γ représente chaque segment entre deux points de localisation des scalaires. Le chemin permettant de balayer tout le domaine, 2D ou 3D d'une topologie polyédrique quelconque est construit initialement et utilisé à chaque étape. A partir d'un point choisi arbitrairement la pression est ainsi calculée explicitement. La pression n'intervenant que par son gradient dans l'équation du mouvement, la valeur de la constante n'a pas d'influence sur la solution.

Le potentiel de la vitesse Φ et la pression p ne sont pas de même nature, d'après [10] la pression est en fait le potentiel de la quantité de mouvement. Le lien entre le potentiel scalaire de la vitesse Φ et la pression p est discuté dans la section suivante.

A l'issue des deux étapes de prédiction et de projection on obtient le champ \mathbf{V}^{n+1} avec $\nabla \cdot \mathbf{V}^{n+1} = 0$ et qui ne satisfait généralement pas aux conditions aux limites du problème physique ; le champ de pression est quant à lui calculé à partir de la masse volumique localisée au même point que la pression.

Le champ \mathbf{V}^{n+1} a été obtenu de manière complètement cinématique à l'issue d'une décomposition de Hodge-Helmholtz. Comme pour la projection vectorielle [11, 1] la projection sur un champ à divergence nulle est indépendante de la masse volumique contrairement à la projection scalaire classique. Seule la pression est relevée avec la masse volumique locale sans aucune interpolation.

L'algorithme est particulièrement simple à mettre en œuvre ; ses différentes étapes peuvent être rappelées :

- 1 - une prédiction de la vitesse \mathbf{V} par la relation (2) contenant les deux composantes à divergence et à rotationnel nul avec des conditions de glissement ;
- 2 - la résolution de l'équation de Poisson (3) sur Φ ;
- 3 - une mise à jour de la vitesse $\mathbf{V}_\Phi = \nabla\Phi$ et de \mathbf{V}^{n+1} ;
- 4 - la mise à jour de la pression à l'aide du théorème de Stokes (4).

La solution d'une itération au temps t^{n+1} est composée de la pression et de la vitesse à divergence nulle mais ne satisfaisant pas la condition tangentielle imposée physiquement comme d'ailleurs les autres méthodes de projection. Cette couche limite disparaît au cours des itérations en temps grâce à l'imposition des conditions aux limites dans les deux étapes de prédiction et correction.

2.1 Cas des conditions aux limites imposées

Dans un certain nombre de situations d'intérêt pratique les conditions aux limites ne sont pas toujours connues ; c'est le cas par exemple d'écoulements dans des canaux reliés au milieu extérieur où les conditions aux limites de sortie à imposer pour les méthodes de projection restent un véritable enjeu, notamment pour des écoulements diphasiques.

Les méthodes directes couplant fortement toutes les composantes de la vitesse et la contrainte d'incompressibilité ne sont pas soumises à cette difficulté ; l'imposition de la divergence nulle à la sortie comme dans le reste du domaine suffit à obtenir une solution cohérente du point de vue physique.

Pour les méthodes de projection le découplage ne permet pas d'imposer les conditions aux limites physiques $\mathbf{V}_{\Psi\Sigma}$ sur le bord à l'issue des deux étapes de prédiction et de projection lorsque la condition $\nabla\Phi \cdot \mathbf{n} = 0$ est imposée sur le potentiel scalaire. Toutefois si la composante de vitesse à divergence nulle est connue, et c'est le cas pour un certain nombre d'écoulements, la condition de Neumann homogène sur Φ peut être remplacée par une condition de Dirichlet $\Phi = \Phi_\Sigma$ sur Σ .

Le champ $\mathbf{V} = \mathbf{V}_\Phi + \mathbf{V}_\Psi$ prédit comporte les deux contributions solénoïdale et irrotationnelle sur chacun des segments de la topologie primale. La composante à divergence nulle $\mathbf{V}_{\Psi\Sigma}$ est connue sur le bord, c'est la condition à la limite physique à imposer.

On peut donc calculer la composante irrotationnelle sur le bord comme la différence :

$$\mathbf{V}_{\Phi\Sigma} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{V}_\Sigma \cdot \mathbf{t} - \mathbf{V}_{\Psi\Sigma} \cdot \mathbf{t} \quad (5)$$

où $\mathbf{V}_\Sigma \cdot \mathbf{t} = \mathbf{V}^{n+1} \cdot \mathbf{t}$ est la composante orthogonale à \mathbf{n} de la vitesse à imposer.

Cette composante sur le bord peut donc s'écrire comme le gradient du potentiel Φ défini à une constante additive près. L'opérateur gradient sur les segments de la topologie primale est une opération exacte qui peut être inversée par le théorème de Stokes.

A partir de $\mathbf{V}_{\Phi\Sigma}$ on peut retrouver à une constante près le potentiel Φ_Σ sur le bord :

$$\Phi_{\Sigma B} - \Phi_{\Sigma A} = \int_A^B \mathbf{V}_{\Phi\Sigma} \cdot \mathbf{t} dl \quad (6)$$

où \mathbf{t} est le vecteur unitaire le long du segment.

La circulation du vecteur gradient sur l'ensemble du contour fermé (C) étant nul on doit bien sûr retrouver le potentiel choisi au premier point si les conditions sont bien posées, par exemple si le domaine est limité par une frontière solide.

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi = -\nabla \cdot \mathbf{V} \\ \Phi = \Phi_\Sigma \text{ sur } \Sigma \end{cases} \quad (7)$$

Dès lors il ne reste plus qu'à résoudre le système (7) avec des conditions aux limites de Dirichlet pour obtenir Φ dans tout le domaine Ω . Cette équation de Poisson où le premier membre est un laplacien s'avère particulièrement facile à résoudre puisqu'elle la masse volumique γ est absente, que les conditions sont imposées fortement et qu'elle ne nécessite pas de condition de jauge.

A partir du potentiel Φ dans Ω il est facile de calculer de manière exacte la composante irrotationnelle qui est un champ de gradient $\mathbf{V}_\Phi = \nabla\Phi$. La dernière phase de l'algorithme consiste à relever la vitesse recherchée c'est à dire la composante solénoïdale du champ prédit \mathbf{V} ainsi que la pression au temps $(n + 1)$. Cette procédure s'applique uniquement si les conditions sont fixées sur le bord au moins en partie. Les portions de frontières où rien n'est défini à l'avance peuvent admettre des conditions de Neumann homogène. La pression est elle-même réactualisée avec la condition (4).

3 Lien avec la mécanique des milieux discrets

La mécanique des milieux discrets [10] établit l'équation de conservation de la quantité de mouvement comme une décomposition de Hodge-Helmholtz où la pression p est le potentiel scalaire de la quantité d'accélération et $\boldsymbol{\omega}$ est le potentiel vecteur associé aux effets de rotation. Ces deux potentiels sont des accumulateurs des contraintes de pression et de viscosité qui restituent tout ou partie de l'énergie accumulée au cours de l'évolution du système. La seconde loi de Newton s'écrit donc sous la forme :

$$\rho \boldsymbol{\gamma} = -\nabla p + \nabla \times \boldsymbol{\omega} \quad (8)$$

Le potentiel scalaire de la vitesse Φ comme son potentiel vecteur $\boldsymbol{\Psi}$ correspond uniquement à la décomposition de Hodge-Helmholtz d'un champ de vecteur. Cette décomposition est purement cinématique et, contrairement à p et $\boldsymbol{\omega}$, n'a aucune raison d'être associé au temps ni à la masse volumique.

Les équations du mouvement discrètes s'écrivent :

$$\begin{cases} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left(p^o - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) - \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V}) \\ p = p^o - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} \end{cases} \quad (9)$$

où dt est la constante de temps d'observation du système physique entre deux états d'équilibre ; le paramètre χ_S est la compressibilité isentropique. Le système (9) est composé d'une équation sur \mathbf{V} qui n'est pas le vecteur vitesse mais une composante orientée sur le segment Γ entre deux points du maillage primal et de deux relèvements de la pression et du potentiel vecteur. La mise à jour de ces quantités est réalisée à partir de la divergence $\nabla \cdot \mathbf{V}$ et par le rotationnel primal $\nabla \times \mathbf{V}$.

En incompressible le coefficient χ_S est égal à zéro. La forme (9) n'est plus adaptée à l'approximation d'incompressibilité. La divergence est nulle dans l'ensemble du domaine et ne peut être utilisée pour relever la pression ; il est alors nécessaire de reconstituer le potentiel de la quantité

d'accélération à partir du premier membre de l'équation du mouvement. Si Φ est le potentiel scalaire de la vitesse le relèvement de p est alors bâti sur la quantité $\rho \gamma$. Il est important que les quantités p et ρ soient localisées au même point pour assurer la cohérence spatiale de ce terme.

Le relèvement de la pression peut être difficilement réalisé à partir de la quantité d'accélération $\rho \gamma$; le potentiel scalaire de la vitesse peut alors être utilisé pour bâtir la quantité de remise à jour de la pression, $\rho \Phi/dt$.

L'équation du mouvement adapté aux écoulements incompressibles devient alors :

$$\begin{cases} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left(p^o - \frac{\rho}{dt} \Phi \right) - \nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{V}) \\ p = p^o - \frac{\rho}{dt} \Phi \end{cases} \quad (10)$$

Ce système (10) n'assure plus le couplage implicite comme le système (9) le fait naturellement ; en effet le potentiel Φ ne s'exprime pas directement en fonction de la vitesse \mathbf{V} . Dès lors le couplage physique entre vitesse et pression est rompu. Par contre il est possible de bâtir un algorithme de type prédiction-correction où la détermination d'un champ solénoïdal est assurée cinématiquement et où le relèvement de la pression est obtenue à partir de la quantité $\rho \Phi/dt$. L'intégration en temps est réalisée lors de la détermination du potentiel scalaire de la vitesse pour remettre à jour la vitesse $\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{V} - \nabla \Phi$, la pression est quant à elle obtenue par un processus de relèvement spatial :

$$p_B^{n+1} = p_A^{n+1} + \int_{\Gamma} \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \Phi \cdot \mathbf{t} dl \quad (11)$$

Le contour Γ correspond à un segment de la topologie primale, entre deux points du maillage. La masse volumique n'est définie qu'aux points de cette topologie et l'évolution le long de Γ est inconnue. Pour une approche strictement eulérienne il est nécessaire d'émettre une hypothèse sur son évolution sous forme d'interpolations variées. Toutefois aucune d'entre elles ne conduit à une solution exacte d'un problème simple. Pour une approche ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) l'interface est toujours sur ligne constituée de points du maillage ; dans ce cas l'intégrale de la relation (11) est parfaitement définie, ρ_A et ρ_B sont toujours les masses volumiques des deux milieux pour un écoulement diphasique.

4 Cas tests numériques

4.1 Équilibre statique de deux fluides sous l'effet de la gravité

Le problème traité est très simple, il s'agit d'une cavité carrée de hauteur unité remplie de deux fluides immiscibles de masses volumiques ρ_1 et ρ_2 ; on supposera les deux fluides déjà séparés où le fluide lourd (1) occupe la moitié inférieure. La solution stationnaire est simple : la vitesse \mathbf{V} est nulle et le champ de pression satisfait à $p(y) = p_0 + \rho(y) \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_y y$. Le champ de pression initial est nul. Les parois de la cavité sont supposés imperméables et adhérentes, $\mathbf{V}_{\Psi} = 0$.

Détaillons les différentes étapes de l'algorithme sur ce problème. En l'absence de vitesse initiale le champ de vitesse déduit de l'étape de prédiction (1) est $\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_y = -\Delta t g$. Si ce champ est à divergence nulle au sein de la cavité ce n'est pas le cas près des parois horizontales à cause des conditions aux limites. Ce sont ces variations de divergence qui rétablissent, compte tenu de l'incompressibilité, une distribution linéaire du potentiel scalaire de la vitesse le long de l'axe vertical.

La solution numérique sur Φ obtenue à une constante près par la résolution de l'équation de Poisson (3) est représentée par son évolution suivant y :

$$\Phi = -\Delta t g y \quad (12)$$

Le champ de vitesse irrotationnel est $\mathbf{V}_\Phi \cdot \mathbf{e}_y = \nabla \Phi \cdot \mathbf{e}_y = -\Delta t g$. La différence $\mathbf{V} - \mathbf{V}_\Phi = 0$ est le champ de vitesse recherché $\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{V}_\Psi = 0$.

La pression remontée par le théorème de Stokes (11) est alors :

$$p^{n+1} = p_0 - \rho(y) g y \quad (13)$$

où p_0 est la pression de référence choisie de manière arbitraire.

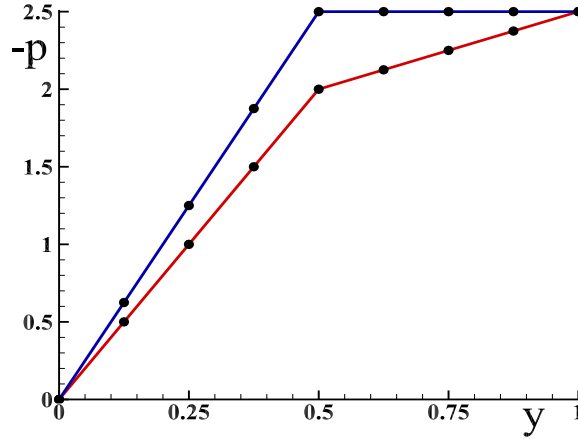


FIGURE 1. Cas test de l'équilibre statique de deux fluides de masses volumiques différentes ; opposée de la pression $-p$: en rouge : $\rho_1/\rho_2 = 4$ et en bleu : $\rho_1/\rho_2 = 10^6$. L'approximation spatiale est de $N = 8$ mailles. La solution obtenue en une seule itération en temps est exacte à $\pm 10^{-15}$ près.

A l'issue des deux étapes la solution théorique est obtenue exactement, à la précision machine près ; c'est l'équilibre hydrostatique diphasique recherché. La figure (1) représente l'opposée de l'évolution de la pression suivant y pour deux rapports de masse volumique $\rho_1/\rho_2 = 4$ et $\rho_1/\rho_2 = 10^6$. Dans le cas présent les deux fluides ont des masses volumique constantes et chaque point de pression est dans un fluide ou dans l'autre, la masse volumique est absente des opérateurs différentiels et n'apparaît que pour le relèvement de la pression. La première phase de détermination du potentiel Φ étant indépendant des variations de masse volumique et la seconde phase étant explicite et locale, la solution sera toujours exacte. Tous les écoulements incompressibles diphasiques peuvent être simulés avec la méthode DSP avec la même efficacité.

4.2 Convection naturelle dans une cavité différentiellement chauffée

Les écoulements à masse volumique variable peuvent être de natures très différentes, écoulements de plusieurs phases immiscibles, des écoulements à changements de phase, etc. Les écoulements à masse volumique continûment variable qui peuvent être approchés dans le cadre de l'approximation d'incompressibilité font partie de cette classe. La convection naturelle en est un exemple surtout lorsque les écarts de température sont importants et où l'approximation de Boussinesq n'est plus fondée.

L'exemple donné ci-dessous a pour objectif de montrer que la méthodologie proposée permet de retrouver très précisément la solution admise par de nombreux auteurs après de multiples

comparaisons. Ce cas est celui d’une cavité remplie d’air soumise à un gradient de température horizontal dans un champ de gravité. La convection naturelle induite par les variations de masse volumique est quantifiée par le nombre de Rayleigh et par le nombre de Prandtl. Le cas présenté à une valeur du nombre de Rayleigh de $Ra = 10^5$ correspond à une solution stationnaire. Le nombre de Nusselt qui caractérise le transfert de chaleur entre les deux parois isothermes est le principal résultat du problème.

La référence est obtenue par une méthode de volumes finis en maillage décalé cartésien avec une technique de lagrangien augmenté [19] pour assurer la contrainte d’incompressibilité. L’ordre de convergence spatial sur le Nusselt étant strictement égal à 2 il est possible, en utilisant une extrapolation de Richardson, d’en déduire la valeur de référence pour $N \rightarrow \infty$.

	Référence $N \rightarrow \infty$	DCP $N = 1024^2$
Nusselt	4.521638	4.521614

TABLE 1. Convection naturelle dans une cavité différentiellement chauffée pour un nombre de Rayleigh : 10^5 ; le nombre de Nusselt de référence est obtenu après une extrapolation de Richardson et la valeur de la méthode DSP correspond à une simulation à 1024^2 mailles.

Le cas test sur la convection naturelle en cavité repris ici est trivial mais il a l’avantage de constituer une référence pour les écoulements à masse volumique faiblement variable dans une formulation incompressible ; de plus le nombre de Nusselt est sensible à la méthodologie mise en œuvre. Il permet en tout cas de retrouver très précisément une solution bien connue avec une méthode originale.

Le code (Aquilon®) a été vérifié et validé sur de nombreuses solutions théoriques et numériques notamment en diphasique et il est permis de penser que la méthodologie présentée ici s’applique aussi à ces cas.

5 Discussion

Les méthodologies présentées ci-dessous ont toutes des propriétés communes qui peuvent être résumées ici :

- la discrétisation spatiale correspond à la généralisation de la méthode Marker And Cell aux maillages polyédriques à nombres de faces quelconques. D’autres formalismes sont depuis utilisées, méthodes mimétiques, Discrete Exterior Calculus, ... pour introduire notamment les notions de maillages primal et dual ;
- les propriétés du continu, $\nabla \times \nabla \Phi = 0$ et $\nabla \cdot \nabla \times \Psi = 0$, sont vérifiées quelle que soit la topologie utilisée ;
- l’ordre en espace est égal à deux et l’ordre en temps peut être un ou deux ;
- la solution numérique est exacte pour toute solution théorique de degré égal ou inférieure à deux.

Afin de replacer l’exposé de la méthode DSP dans un contexte plus large trois méthodologies sont présentées en précisant pour chacune d’elles leurs spécificités.

5.1 Méthode des opérateurs discrets (DOC)

La méthode DOC (Discrete Operators Calculus) est directement issue de la mécanique des milieux discrets [10]. Les équations du mouvement directement établies à partir de la seconde loi de Newton se présente sous la forme d'une équation vectorielle sur les composantes de la vitesse et de relèvements de la pression thermodynamique d'équilibre p^o , de la masse volumique et de l'accumulateur ω^o :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left(p^o - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) + \nabla \times (\omega^o - \mu \nabla \times \mathbf{V}) \\ p = p^o - \frac{dt}{\chi_S} \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \rho = \rho^o - dt \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \omega = \omega^o - \mu \nabla \times \mathbf{V} \end{array} \right. \quad (14)$$

ω^o est le potentiel vecteur d'accumulation de la quantité d'accélération. Celui-ci joue pour les effets de cisaillement-rotation un rôle analogue à la pression pour l'accumulation des contraintes normales. Pour les milieux fluides l'accumulation des contraintes de rotation sont très faibles et le milieu relaxe celles-ci dans des constantes de temps très faibles ; pour ces milieux on peut négliger l'accumulation et adopter $\omega^o = 0$.

La méthode DOC présente les propriétés suivantes :

- la méthode de type lagrangien-eulérien conduit à une équation discrète du mouvement intégrant la conservation de la masse ; elle est alors exempte de toute erreur de fragmentation et satisfait *de facto* les conditions aux limites ;
- la formulation est utilisable aussi bien en incompressible qu'en compressible et bien sûr à propriétés variables (masse volumique, compressibilité et viscosité) ;
- l'affectation des propriétés à des valeurs physiques notamment la compressibilité, confère à la méthode une résilience aux problèmes les plus contraints, en diphasique à rapports de masse volumiques importants en particulier ;
- une efficacité qui permet une comparaison favorable par rapport aux méthodes de projection classiques ;
- une méthodologie applicable aussi bien aux fluides qu'aux solides ainsi qu'aux couplages fluide-structure monolithiques.

C'est une méthode de référence pour la simulation réaliste des phénomènes physiques.

5.2 Méthode de projection pénalisation vectorielle (VPP)

La méthode a fait l'objet de plusieurs travaux numériques et théoriques depuis 1999, [11, 1, 2, 3]. Son originalité principale est son caractère vectoriel ; à partir d'une l'étape de prédiction on cherche à déterminer directement la composante irrotationnelle de vitesse \mathbf{V}_Φ qui sert à remonter le potentiel scalaire, la pression, de manière explicite.

Seule l'étape de projection est décrite succinctement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \mathbf{V}_\Phi - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}_\Phi) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) \\ p_B^{n+1} = p_A^{n+1} + \int_\Gamma \frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{V}_\Phi \cdot \mathbf{t} dl \end{array} \right. \quad (15)$$

le paramètre ε est choisi d'ordre de grandeur de la précision machine pour éviter d'obtenir un système singulier ; la divergence de la vitesse \mathbf{V}_Ψ est alors de ce même ordre de grandeur.

Les propriétés essentielles de cette méthode sont :

- la méthode s'apparente à un algorithme de prédiction-corrrection et de ce fait hérite des défauts de cette méthodologie, présence de couches limites et erreurs de fragmentation même si l'ordre deux en temps peut être obtenu ;
- le système linéaire à résoudre reste le même au cours des itérations en temps, seul le second membre varie ;
- la détermination de la vitesse irrotationnelle ne dépend pas de la masse volumique ;
- la remontée de la pression à partir de \mathbf{V}_Φ est explicite et exacte ;
- la résolution de l'équation du système (15) est très rapide ; du fait que l'opérateur du premier membre est associé à un second membre adapté le nombre d'itérations d'un gradient conjugué préconditionné est de quelques unités et est indépendant du nombre de degrés de liberté du problème ;

Ces propriétés ont été démontrées y compris théoriquement [1]. De toutes les méthodologies présentées c'est certainement la plus performante du point de vue de la rapidité.

5.3 Méthode de projection scalaire discrète (DSP)

La méthode DSP présentée en détail ici possède les particularités suivantes :

- c'est une méthode de prédiction-corrrection dont les défauts sont bien connus ;
- contrairement aux méthodes de projection classiques les phases de résolution de la pression et de la vitesse sont inversées ; le potentiel scalaire de la vitesse Φ est d'abord obtenu puis le potentiel physique, la pression, est remonté explicitement et exactement ;
- l'équation de Poisson est à coefficients constants et le potentiel de la vitesse ne dépend pas de la masse volumique ;
- la résolution du système linéaire est aisée et permet l'utilisation des solveurs parallélisés les plus efficaces.

La méthode DSP est, parmi celles présentées, la méthode la plus simple à mettre en œuvre puisqu'elle consiste à résoudre une équation de Poisson à coefficients constants.

6 Conclusions

La méthode de projection discrète DSP de résolution de l'équation du mouvement, équation de Navier-Stokes ou équation du mouvement discrète [10], permet essentiellement de résoudre des problèmes variés d'écoulements incompressibles, notamment des écoulements à contrastes de masses volumiques importants. Contrairement aux méthodes classiques où la pression est calculée d'abord à partir d'une équation de Poisson à coefficients variables, c'est la vitesse irrotationnelle qui est calculée d'abord. Le théorème de Stokes permet alors de calculer le potentiel scalaire de la vitesse qui est insensible aux variations de masse volumique. Le potentiel scalaire de la quantité d'accélération, la pression, est obtenu par ce même théorème en introduisant à ce stade la masse volumique locale.

En termes de précision en temps et en espace, les résultats sont très proches de ceux de la méthodologie classique de projection pour des écoulements à masse volumique variable. Toutefois les variations importantes de masse volumique introduisent des défauts de cohérence locale dus aux interpolations de celle-ci sur la localisation de chaque composante de la vitesse ; la pression subit ainsi des variations non physiques qui peuvent mener à des comportements instables. La méthode DSP permet de retrouver la cohérence entre la pression et la masse volumique locales.

La méthode DSP ne peut être interprétée comme un simple splitting de l'équation du mouvement de la mécanique des milieux continus préalablement discrétisée en temps. Elle s'appuie sur une formulation originelle de la loi de la dynamique écrite comme une décomposition de Hodge-Helmholtz discrète.

Références

- [1] Ph. Angot, J-P. Caltagirone, and P. Fabrie. A fast vector penalty-projection method for incompressible non-homogeneous or multiphase Navier-Stokes problems. *Applied Mathematics Letters*, 25(11) :1681–1688, 2012.
- [2] Ph. Angot, J-P. Caltagirone, and P. Fabrie. A new fast method to compute saddle-points in constrained optimization and applications. *Applied Mathematics Letters*, 25(3) :245–251, 2012.
- [3] Ph. Angot, J-P. Caltagirone, and P. Fabrie. Fast discrete Helmholtz-Hodge decompositions in bounded domains. *Applied Mathematics Letters*, 26(4) :445–451, 2013.
- [4] J.B. Bell, P. Colella, and H.M. Glaz. A second order projection method for the incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 85(1) :257–283, 1989.
- [5] M. Benzi. Preconditioning techniques for large linear systems : a survey. *J. Comput. Phys.*, 182(1) :418–477, 2002.
- [6] M. Benzi, G.H. Golub, and J. Liesen. Numerical solution of saddle point problems. *Acta numerica*, 14 :1–137, 2005.
- [7] H. Bhatia, G. Norgard, V. Pascucci, and P.T. Bremer. The Helmholtz-Hodge decomposition - a survey. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 99(1), 2012.
- [8] M. Cai, Y. Nokaka, J.B. Bell, B.E. Griffith, and A. Donev. Efficient variable-coefficient finite-volume Stokes solvers. *arXiv :1308.460v2, math.NA*, 6 jan 2014.
- [9] J-P. Caltagirone. Application de la décomposition de Hodge-Helmholtz discrète aux écoulements incompressibles. *HAL*, hal-01099958 :1–11, 2015.
- [10] J-P. Caltagirone. *Discrete Mechanics*. ISTE, John Wiley & Sons, London, 2015.
- [11] J-P. Caltagirone and J. Breil. A vector projection method for solving the Navier-Stokes equations. *C.R. Acad. Sciences IIB*, 327(11) :1179–1184, 1999.
- [12] A.J. Chorin. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Math. Comput.*, 22 :745–762, 1968.
- [13] M. Fortin and R. Glowinski. *Méthodes de lagrangien augmenté, Application à la résolution numérique de problèmes aux limites*. Dunod, Paris, 1982.
- [14] J.L. Guermond, P. Mineev, and Jie Shen. An overview of projection methods for incompressible flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195 :6011–6045, 2006.
- [15] J.L. Guermond and A. Salgado. A splitting method for incompressible flows with variable density based on a pressure poisson equation. *J. Comput. Phys.*, 228 :2834–2846, 2009.
- [16] F.H. Harlow and J.E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with a free surface. *Physics of Fluids*, 8(12) :2182–2189, 1965.
- [17] A. Lemoine, J-P. Caltagirone, P. Azaiez, and S. Vincent. Discrete Helmholtz-Hodge decomposition on polyhedral meshes using compatible discrete operators. *Journal of Scientific Computing*, DOI 10.1007/s10915-014-9952-8, 2014.
- [18] A. Poux, S. Glockner, and A. Azaiez. Improvements on open and traction boundary conditions for Navier-Stokes time-splitting methods. *J. Comput. Phys.* DOI dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2011.02.024, 230(10) :4011–4027, 2011.
- [19] S. Vincent, J-P. Caltagirone, P. Lubin, and T.N. Randrianarivelo. An adaptative augmented lagrangian method for three-dimensional multi-material flows. *Computers & fluids*, 33(10) :1273–1279, 2004.