



# FIBRE SINGULIÈRE D'UN PINCEAU RÉEL EN COURBES DE GENRE 2

Mouadh Akriche, Samir Moulahi

## ► To cite this version:

Mouadh Akriche, Samir Moulahi. FIBRE SINGULIÈRE D'UN PINCEAU RÉEL EN COURBES DE GENRE 2. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Mathématiques., 2015. <hal-01102176>

**HAL Id: hal-01102176**

**<https://hal.science/hal-01102176v1>**

Submitted on 12 Jan 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# FIBRE SINGULIÈRE D'UN PINCEAU RÉEL EN COURBES DE GENRE 2

MOUADH AKRICHE, SAMIR MOULAH

Mouadh Akriche, Laboratoire de mathématiques LATAO, Faculté des sciences de Tunis, 2092 Tunisie (Mouadh.Akriche@ipeib.rnu.tn)

Samir Moulahi, Faculté des Sciences de Bizerte, 7021 Tunisie - LAREMA, Université d'Angers, 49000 France (samir.moulahi90@yahoo.fr)

MSC 2000 : 14P25, 14D06

*Keywords* : Real algebraic surface, Real fibration on a curve, singular fiber, moduli space of real curves

**Résumé** - Soit  $\pi: X \rightarrow D$  un pinceau réel en courbes de genre 2. L'objectif de cet article est de donner une classification partielle des fibres singulières possibles ; nous donnons les types de configurations réelles des fibres singulières et nous déterminons la topologie des fibres voisines.

**Abstract** - Let  $\pi: X \rightarrow D$  be a real pencil of curves of genus two. The goal of this paper is to give a partial classification of possible singular fibers ; we give the types of real configurations of singular fibers and we determine the topology of neighbors fibers.

## Introduction

L'objectif de cet article est d'apporter une contribution à la classification des surfaces algébriques réelles et plus particulièrement aux surfaces admettant une fibration en courbes de genre donné. Un *pinceau en courbes de genre  $g$*  est la donnée d'une application holomorphe surjective et propre  $\pi: X \rightarrow D$  d'une surface complexe non singulière vers un disque  $D \subset \mathbf{C}$  dont la fibre générale est une courbe non singulière de genre  $g$ . Un tel pinceau est *réel* si  $X$  est munie d'une involution anti-holomorphe  $\sigma$  telle que  $\forall P \in X, \pi \circ \sigma(P) = \overline{\pi(P)}$ . Dans toute la suite, on supposera que la seule fibre singulière de  $\pi$  est la fibre  $X_0$  au-dessus de 0.

Cette définition se généralise aisément au-dessus d'une courbe  $B$  non singulière :  $\pi: X \rightarrow B$ . On dira dans ce cas que  $\pi$  est une *fibration* en courbes de genre  $g$ . Étant donné une telle fibration réelle, l'espace total  $X$  est une variété différentielle de dimension 4 et si la partie réelle  $X(\mathbf{R})$  (c'est-à-dire l'ensemble des points fixes de l'involution  $\sigma$ ) est non vide, c'est une variété différentielle de dimension 2 [22, I.1.14]. L'étude de la topologie de ces deux variétés est une question naturelle qui fait l'objet de recherches actives. La question principale traitée dans cet article est la classification des fibres singulières et la détermination de la topologie des fibres voisines pour les pinceaux en courbes de genre 2 (Théorème 2.7 et Théorème 3.1).

Lorsque  $g = 0$  (resp.  $g = 1$ ),  $X$  est une surface réglée (resp. une surface elliptique). En 1963, Kodaira a classifié les fibres singulières possibles d'une fibration elliptique complexe [13]. Pour le cas du genre 2 en complexe de nombreux auteurs se sont intéressés au sujet. Nous citons les travaux que nous connaissons. Rappelons que l'une des approches proposée est de voir une fibration de genre 2 comme un revêtement double d'une surface réglée ramifiée le long d'une courbe sextigonale  $\mathcal{B}$ . Un des travaux les plus anciens adoptant ce point de vue est celui de Bolza [5], en 1888. En suivant cette approche, Horikawa [10] a classifié les singularités possibles de la courbe sextigonale de branchement  $\mathcal{B}$  et a déterminé les diagrammes de Dynkin possibles des fibres singulières selon le type des singularités de la courbe  $\mathcal{B}$  (voir aussi [27]). De leur côté, Ogg [20] et Itaka [11] ont proposé une classification numérique des fibres singulières des pincesaux en courbes de genre 2. Puis en 1973, Namikawa et Ueno ont défini un triplet d'invariants géométriques  $(M, z, n) \in Sp(4, \mathbb{Z}) \times \overline{\mathfrak{S}}_2^* \times \mathbf{N}$ , (détaillé au paragraphe 1), qui détermine d'une manière unique le type de configuration complexe de la fibre singulière  $X_0$ . De plus, ils ont donné la liste complète des fibres singulières incluant certains types manquant dans la liste de Ogg.

En 1976, Vieweg [25] a donné une version algébrique sur un corps algébriquement clos d'une partie des travaux de Namikawa et Ueno [19]. En se basant sur les travaux de Vieweg, Qing Liu [14, 16] a achevé la classification sur un corps algébriquement clos quelconque et a retrouvé la liste complète de Namikawa et Ueno. Dans une autre direction, Xio Gang et Persson ont étudié la question géographique pour de telles surfaces fibrées; c'est-à-dire l'existence d'une surface fibrée ayant des invariants numériques donnés, voir [27] et [21].

La classification locale des surfaces elliptiques réelles a été réalisée en 1984 par Robert Silhol [22]. Pour des avancées plus récentes à propos de la classification réelle globale, voir [2], [3], [4] et [7]. C'est dans la direction des travaux de Silhol que s'inscrit le présent article pour le cas du genre 2.

Soit  $\pi': X' \longrightarrow D$  un pinceau réel en courbes de genre  $g$ ,  $X_0 = \sum_{i=1}^k n_i \mathcal{D}_i$  et

$X'_0 = \sum_{i=1}^{k'} m_i \mathcal{D}'_i$  les diviseurs associés respectivement aux deux fibres singulières de  $\pi$  et  $\pi'$  aux dessus de 0.

On dit que  $X_0$  et  $X'_0$  ont même *configuration complexe* si  $k = k'$  et s'il existe une permutation  $\tau$  de  $\{1, \dots, k\}$  telle que :

- (1)  $M' = {}^t N M N$  et  $n_i = m_{\tau(i)}$ .  
où  $M = (\mathcal{D}_i, \mathcal{D}_j)_{1 \leq i, j \leq k}$  et  $M' = (\mathcal{D}'_i, \mathcal{D}'_j)_{1 \leq i, j \leq k}$  sont les matrices d'intersections des diviseurs  $X_0$  et  $X'_0$  et  $N = (\delta_{i\tau(j)})_{1 \leq i, j \leq k}$ .
- (2) Pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $\mathcal{D}_i$  et  $\mathcal{D}'_{\tau(i)}$  ont le même genre arithmétique et le même nombre des points singuliers.
- (3) Pour tout  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ , le nombre des points d'intersection de  $\mathcal{D}_i$  et  $\mathcal{D}_j$  et le même que pour  $\mathcal{D}'_{\tau(i)}$  et  $\mathcal{D}'_{\tau(j)}$ .

Nous utilisons la terminologie "configuration complexe" plutôt que "classification numérique", qui est en réalité la même, pour introduire dans le cas réel la terminologie "type de configuration réel".

On se restreint maintenant au cas où  $g = 2$ . Lorsque  $\pi$  est réelle et  $\langle \sigma \rangle = \text{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ . On appelle *type de configuration réel* de  $X_0$  une décomposition

$$\sum_{i=1}^k n_i \mathcal{D}_i = \sum_I n_i \mathcal{D}_i + (1 + \sigma) \sum_J n_i \mathcal{D}_i.$$

tel que  $\sigma(\mathcal{D}_i) = \mathcal{D}_i \forall i \in I$ ,  $\sigma(\mathcal{D}_i) \neq \mathcal{D}_i \forall i \in J$  et  $k = \#I + 2\#J$ .

On suppose que  $\pi$  et  $\pi'$  sont réelles pour  $\sigma$  et  $\sigma'$ .

On dit que  $X_0$  et  $X'_0$  ont le même *type de configuration réelle* s'ils ont la même configuration complexe et s'il existe une permutation  $\tau$  de  $\{1, \dots, k\}$  vérifiant 1., 2. et 3. telle que :

$$\sum_{i=1}^k m_i \mathcal{D}'_i = \sum_I m_{\tau(i)} \mathcal{D}'_{\tau(i)} + (1 + \sigma') \sum_J m_{\tau(i)} \mathcal{D}'_{\tau(i)}.$$

On dit que  $X_0$  et  $X'_0$  sont de même *type complexe* s'ils correspondent au même triplet d'invariants  $(M, z, n) \in Sp(4, \mathbb{Z}) \times \overline{\mathfrak{S}}_2^* \times \mathbf{N}$ .

Remarquons que si les diviseurs  $X_0$  et  $X'_0$  sont de même type complexe alors ils ont la même configuration complexe. Mais la réciproque est fausse, par exemple les deux types  $[2I_0-m]$  et  $[II_{n-0}^*]$  (notation Namikawa et Ueno) possèdent la même configuration complexe mais ils correspondent à deux triplets d'invariants distincts.

On dit que  $X_0$  et  $X'_0$  sont de même *type réel* si de plus, pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $\mathcal{D}_i(\mathbf{R})$  et  $\mathcal{D}'_{\tau(i)}(\mathbf{R})$  sont homéomorphes.

Nous distinguons ici entre "type de configuration réel" et "type réel" contrairement au cas du genre 1 où les deux terminologies coïncident (équivalent à "structure géométrique de  $X_0$ " selon la terminologie de Silhol [22]). Dans le cas de genre 1, les composantes irréductibles d'une fibre singulière sont seulement des courbes rationnelles contrairement au cas de genre 2 où une fibre peut avoir des courbes elliptiques comme composantes irréductibles. Par suite, deux fibres qui ont le même type de configuration réel peuvent avoir deux types réels différents.

Soit  $\pi: X \rightarrow D$  un pinceau réel en courbes de genre 2 et  $(M, z, n) \in Sp(4, \mathbb{Z}) \times \overline{\mathfrak{S}}_2^* \times \mathbf{N}$  le triplet d'invariant associé à la fibre singulière. Si  $M$  est d'ordre fini alors la fibre singulière  $X_0$  est dite *de type elliptique*. Dans ce cas le point  $z$  correspond, dans l'espace de modules des courbes stables de genre 2, à une courbe projective lisse de genre 2 ou bien à deux courbes elliptiques lisses s'intersectant transversalement en un point. La fibre singulière du pinceau stable associé à  $\pi$  est donc : soit une courbe projective lisse de genre 2, et dans ce cas  $X_0$  est dite *de type elliptique 1*, soit deux courbes elliptiques lisses s'intersectant transversalement en un point et dans ce cas  $X_0$  est dite *de type elliptique 2*. Dans le cas où  $M$  est d'ordre infini la fibre singulière  $X_0$  est dite *de type parabolique*.

**Résultats** - Les variétés que nous considérons dans cet article sont définies sur le corps  $\mathbf{R}$  et un pinceau  $\pi: X \longrightarrow D$  est toujours supposé réel. Nous décomposons l'article en deux parties :

Dans la première partie, nous donnons une classification complète des pincesaux réels (lisses ou singuliers) en courbes stables de genre 2 : nous donnons une liste complète des types réels ainsi que des exemples pour chacun des cas et nous déterminons la topologie des fibres voisines de la fibre singulière, Théorème 2.7.

Dans la deuxième partie, nous donnons une liste des différents types de configurations réels pour les fibres singulières de types elliptiques (1) et (2). Le cas parabolique est laissé pour un travail ultérieur ; la liste des fibres singulières est déjà volumineuse pour les cas elliptiques 1 et 2, de plus les techniques utilisées ne sont pas les mêmes dans le cas parabolique.

Dans un second article en préparation [1] nous déterminerons des invariants réels pour les pincesaux en courbes de genre 2. Un des intérêts du résultat principal de [1] est de nous permettre de déduire la topologie des fibres voisines de la fibre singulière d'un pinceau en courbes de genre 2 à partir de celle du pinceau stable associé.

**Remerciements** : Nous remercions **F. Mangolte** pour ses nombreuses suggestions et pour ses encouragements. Nous remercions aussi **A. Degtyarev**, **Y. Namikawa** et **D. Auroux** pour les échanges de mails durant la préparation d'une version préliminaire. Le second auteur remercie **B. Draouil** et **S. Zarati** pour leurs conseils et leurs encouragements et également *le ministère d'enseignement supérieur Tunisien* pour le financement des stages et le *LAREMA* (Université d'Angers) pour son agréable accueil.

Le premier auteur remercie **S. Zarati** pour son soutien et ses encouragements ainsi que *la Fédération de recherche mathématiques de Pays de la Loire FR2962 Nantes, France (Géanpyl)* pour son soutien financier. Ce travail bénéficie également du soutien financier du contrat *PHC-Utique (13 G 15-01) "Graphes, géométrie et théorie spectrale"*.

## 1. INVARIANTS GÉOMÉTRIQUES D'UN PINCEAU EN COURBES DE GENRE 2

Soit  $\pi: X \longrightarrow D$  un pinceau en courbes de genre 2. On suppose que  $\pi$  est minimale ; c'est-à-dire qu'aucune fibre de  $\pi$  ne contient de  $(-1)$ -courbe.

Pour tout  $t \in D$ ,  $X_t$  désigne la fibre  $\pi^{-1}(t)$ .

On note par  $D' = D - \{0\}$ ,  $\pi' : X' \longrightarrow D'$  la restriction de  $\pi$  à  $D'$  et  $\Omega_{X'/D'}$  le faisceau des germes des 1-formes holomorphes relatives sur  $X'$  le long de  $\pi'$ .

**Lemme 1.1.** , [24, lem. 1], *Pour tout  $t \in D'$ , il existe un voisinage  $U$  de  $t$ , deux sections  $\omega_1$  et  $\omega_2$  dans  $H^0(\pi'^{-1}(U), \Omega_{X'/D'})$  et quatre 1-cycles  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  dans  $\pi'^{-1}(U)$  tels que pour tout  $t' \in U$  :*

1) *Les restrictions  $(\omega_1)_{t'}$  et  $(\omega_2)_{t'}$  des  $\omega_1$  et  $\omega_2$  à la fibre  $X_{t'}$  forment une base de  $H^0(X_{t'}, \Omega_{X_{t'}})$ .*

2) *Les restrictions  $(\alpha_1)_{t'}$ ,  $(\alpha_2)_{t'}$ ,  $(\beta_1)_{t'}$  et  $(\beta_2)_{t'}$  de  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  à la fibre  $X_{t'}$  forment une base de  $H_1(X_{t'}, \mathbb{Z})$ .*

On suppose que les nombres d'intersections dans  $X_{t'}$  sont donnés comme suit :

3i)  $((\alpha_i)_{t'}, (\beta_j)_{t'})$  est égal à 1 si  $i = j$  et est égal à 0 sinon.

3ii)  $((\alpha_i)_{t'}, (\alpha_j)_{t'}) = ((\beta_i)_{t'}, (\beta_j)_{t'}) = 0$  pour tout  $i, j$ .

Considérons l'espace de Siegel  $\mathfrak{S}_2 = \{\tau \in M_2(\mathbb{C}) / {}^t\tau = \tau \text{ et } \text{Im } \tau > 0\}$  et le groupe symplectique  $Sp(4, \mathbb{Z})$  défini par :

$$\left\{ N \in GL_4 \text{ tel que } {}^tN \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

On rappelle que le groupe  $Sp(4, \mathbb{Z})$  opère discontinument sur  $\mathfrak{S}_2$ , et cette action est donnée par :

$$N(Z) = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \text{ pour } (Z, N) \in \mathfrak{S}_2 \times Sp(4, \mathbb{Z}). (*)$$

$$\text{où } N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

On vient alors de définir une application multivaluée  $T: D' \longrightarrow \mathfrak{S}_2$ . En effet, pour tout  $t \in D'$  on utilise les objets définis en 1), 2), 3i) et 3ii) pour définir  $T$  au voisinage de  $t$  par :

$$T(t') = \left( \int_{(\alpha_i)_{t'}} (\omega_j)_{t'} \right) \left( \int_{(\beta_k)_{t'}} (\omega_l)_{t'} \right)^{-1}$$

pour  $i, j, k, l \in \{1, 2\}$ . L'application  $T$  est multivaluée à cause du choix des 1-cycles.

Deux applications  $T_1, T_2: D' \longrightarrow \mathfrak{S}_2$  holomorphes sont dites équivalentes s'il existe une matrice  $M \in Sp(4, \mathbb{Z})$  telle que  $T_1(t) = M(T_2(t))$  pour tout  $t \in D'$  (la matrice  $M(T_2(t))$  est celle obtenue par l'action de  $Sp(4, \mathbb{Z})$  sur l'espace de Siegel  $\mathfrak{S}_2$ ). Une valeur de  $T$  désigne une classe d'isomorphisme complexe de  $X_t$ . En fait toutes les branches de  $T$  sont équivalentes, on en choisit une et on la note  $T_\pi$ .

**Définition 1.2.** *L'application holomorphe  $T_\pi$  est appelée application caractéristique du morphisme  $\pi$ .*

**Monodromie.** On se donne un lacet  $\gamma$  dans  $D'$  entourant l'origine et à point base  $t \in D'$ . Alors  $\gamma$  induit un automorphisme de  $H_1(X_t, \mathbb{Z})$ , donc d'après la définition de  $T_\pi$  il existe une matrice  $M_\pi$  dans  $Sp(4, \mathbb{Z})$  vérifiant  $T_\pi(\gamma t) = M_\pi(T_\pi(t))$ .

La classe de conjugaison de  $M_\pi$  dans  $Sp(4, \mathbb{Z})$  ne dépend que de  $\pi$  et est appelée monodromie de  $\pi$  (voir [18, §2]).

**Définition 1.3.** *Soit  $X_0 = \pi^{-1}(0)$ . On dit que  $X_0$  est de type elliptique si la monodromie  $M_\pi$  est d'ordre fini. Dans le cas infini est dit de type parabolique.*

On note par  $\mathfrak{S}_2^*$  l'espace quotient  $\mathfrak{S}_2/Sp(4, \mathbb{Z})$  et  $p: \mathfrak{S}_2 \longrightarrow \mathfrak{S}_2^*$  la surjection canonique.

Le quotient  $\mathfrak{S}_2^*$  est un espace analytique complexe de dimension 3 et correspond à l'espace complexe des modules des variétés abéliennes principalement polarisées [18, Th. 1.1].

Une surface abélienne principalement polarisée complexe est, soit un produit de deux courbes elliptiques, soit la jacobienne d'une courbe projective lisse de genre 2 ([18, §I]. On note alors :

- 1)  $\mathcal{M}^*$  l'ensemble des points de  $\mathfrak{S}_2^*$  correspondant aux jacobiniennes de courbes de genre 2 et  $\mathcal{M} = p^{-1}(\mathcal{M}^*)$ .
- 2)  $\mathcal{N}^*$  le complémentaire de  $\mathcal{M}^*$  dans  $\mathfrak{S}_2^*$  et  $\mathcal{N} = p^{-1}(\mathcal{N}^*)$ . Un point de  $\mathcal{N}^*$  correspond donc au produit de deux courbes elliptiques  $E_1$  et  $E_2$ .

**Module de la fibre singulière d'un pinceau en courbes de genre 2.** Soit  $\overline{\mathfrak{S}_2^*}$  le compactifié de  $\mathfrak{S}_2^* = \mathcal{M}^* \cup \mathcal{N}^*$ . Alors  $\overline{\mathfrak{S}_2^*}$  n'est autre que l'espace des modules des courbes stable de genre 2. C'est une variété algébrique projective de dimension 3 [26, Th. 6.8].

L'ensemble des points de  $\overline{\mathfrak{S}_2^*} \setminus \mathfrak{S}_2^*$  est stratifié comme suit :

- L'espace  $\mathcal{B}_a^*$ , dont les points correspondent aux classes des isomorphismes des courbes de type 3a (Notation des types complexes du deuxième paragraphe).
- L'espace  $\mathcal{B}_b^*$  correspond aux classes des isomorphismes des courbes de type 3b.
- L'espace  $\mathcal{C}_a^*$  correspond aux classes des isomorphismes des courbes de type 4a.
- L'espace  $\mathcal{C}_b^*$  correspond aux classes des isomorphismes des courbes de type 4b.
- L'espace  $\mathcal{D}^*$  correspond aux classes des isomorphismes des courbes de type 5.

**Proposition 1.4.** [19] *Les sous espaces  $\overline{\mathcal{N}^*} = \mathcal{N}^* \cup \mathcal{B}_b^* \cup \mathcal{C}_b^*$  et  $Y = \mathcal{D}^* \cup \mathcal{B}^* \cup \mathcal{C}^*$  sont deux diviseurs irréductibles de  $\overline{\mathfrak{S}_2^*}$ .*

Où  $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}_a^* \cup \mathcal{B}_b^*$  et  $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}_a^* \cup \mathcal{C}_b^*$ .

Soit  $\overline{T_\pi}: D' \rightarrow \overline{\mathfrak{S}_2^*}$  la composée de  $T_\pi$  avec l'application naturelle  $\mathfrak{S}_2 \rightarrow \overline{\mathfrak{S}_2^*}$ . L'application  $\overline{T_\pi}$  se prolonge en une fonction holomorphe sur  $D$  qu'on note aussi  $\overline{T_\pi}$  [12].

**Définition 1.5.** *Le point  $z_\pi = \overline{T_\pi}(0) \in \overline{\mathfrak{S}_2^*}$  est appelé module de la fibre singulière de  $\pi$ .*

**Définition 1.6.** *Soient  $\pi: X \rightarrow D$  un pinceau en courbes de genre 2 et  $z_\pi$  le module de la fibre singulière de  $\pi$ . alors :*

- $X_0$  est dit de type elliptique 1 si  $z_\pi \in \mathcal{M}^*$ .
- $X_0$  est dit de type elliptique 2 si  $z_\pi \in \mathcal{N}^*$ .
- $X_0$  est dit de type parabolique 3 si  $z_\pi \in \mathcal{B}^*$ .
- $X_0$  est dit de type parabolique 4 si  $z_\pi \in \mathcal{C}^*$ .
- $X_0$  est dit de type parabolique 5 si  $z_\pi \in \mathcal{D}^*$ .

**Degré d'un pinceau en courbes de genre 2.** D'après [18, Rem. 3.3]  $\mathfrak{S}_2^*$  est une partie de l'espace  $\overline{\mathfrak{S}_2^*}$  et  $z_\pi \in \mathfrak{S}_2^*$  si et seulement si  $M_\pi$  est d'ordre fini.

On suppose dans ce sous-paragraphe que la monodromie  $M_\pi$  est d'ordre  $n$  fini. Soit  $E = \{s \in \mathbb{C}; |s| < \epsilon^{\frac{1}{n}}\}$  et Soit  $\delta_n: E \rightarrow D$  envoyant  $s$  sur  $s^n$ . L'application holomorphe  $S'_\pi = T_\pi \circ \delta_n$  définie sur  $E' = E - \{0\}$  se prolonge en une application holomorphe unique  $S_\pi$  sur  $E$  ([18, §3]). Soit  $p: \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_2^*$  la surjection canonique. On définit le degré de  $\pi$  de la manière suivante : Il vaut 0 si  $z_\pi \in \mathcal{M}^*$ . Si  $z_\pi \in \mathcal{N}^*$  on considère un représentant  $\tau$  de  $z_\pi$  et on

pose pour tout  $s \in E$  :

$$S_\pi(s) = \begin{pmatrix} S_1(s) & S_3(s) \\ S_3(s) & S_2(s) \end{pmatrix} \text{ tel que } S_\pi(0) = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix} = \tau$$

dans ce cas on définit  $\deg \pi$  comme étant l'ordre de multiplicité de 0 comme racine de  $S_3(s)$ .

**Remarque 1.7.** *On peut généraliser la définition de degré de  $\pi$  même pour le cas où la monodromie  $M_\pi$  n'est pas d'ordre fini.*

Soient  $\pi: X \rightarrow D$  un pinceau en courbes de genre 2 et  $z_\pi$  le module de la fibre singulière  $X_0$  de  $\pi$  au dessus de 0.

Alors  $z_\pi$  est dans l'un des diviseurs de Cartier  $\overline{\mathcal{N}^*}$  et  $Y$ . Donc au voisinage de  $z_\pi$  ce diviseur est défini par une équation  $f = 0$ .

Soit maintenant  $\overline{T_\pi^*}f: V \rightarrow \mathbf{C}$  le tiré en arrière (pull back) de  $f$  par  $\overline{T_\pi}$  sur un voisinage  $V$  de centre du disque.

On définit alors le degré de  $\pi$  comme étant l'ordre de multiplicité de zéro comme racine de  $\overline{T_\pi^*}f$ .

**Proposition 1.8.** [19, Th 3] *La fibre singulière au dessus de  $s = 0$  est déterminée uniquement par trois invariants :*

*La monodromie  $M_\pi$ , le module  $z_\pi$  et  $\deg \pi$ .*

**Remarque 1.9.** *Les courbes singulières le plus simples dans la stratification de l'espace des modules des courbes de genre 2 réelles sont les courbes stables. On commence alors par l'étude des pinceaux réels en courbes stables de genre 2.*

## 2. CLASSIFICATION RÉELLE DES FIBRES SINGULIÈRES : PINCEAUX EN COURBES STABLES DE GENRE 2

### Pinceaux réels en courbes stables de genre 2.

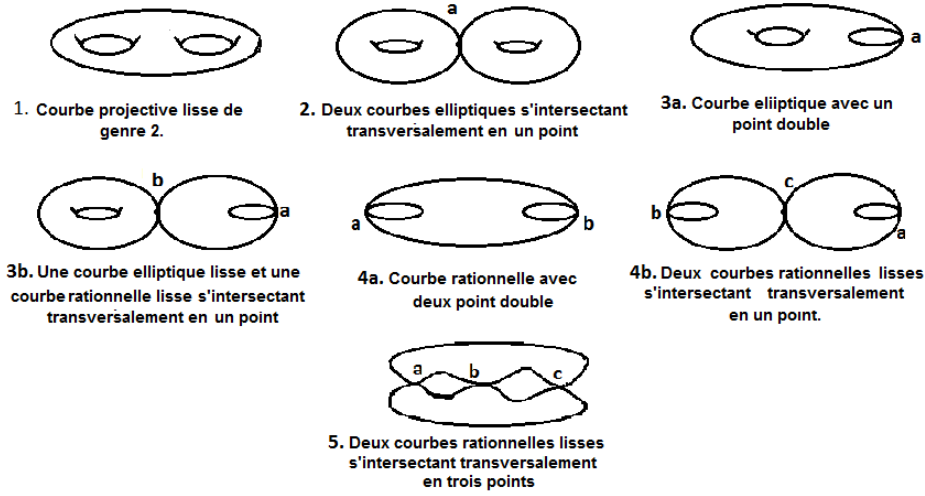
**Définition 2.1.** *On appelle pinceau en courbes stables de genre  $g \geq 2$  la donnée d'une surface complexe  $X$  (éventuellement singulière) et d'un morphisme  $\pi: X \rightarrow E$  au dessus d'un disque vérifiant :*

- (1)  $\pi$  est surjective et propre de fibres réduites et connexes.
- (2) Les seules singularités de  $X_s = \pi^{-1}(s)$  sont des points doubles ordinaires.
- (3) Si  $\Gamma$  est une composante irréductible rationnelle lisse de  $X_s$ , alors  $\Gamma$  rencontre le reste de la fibre en au moins deux points.
- (4)  $\dim H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = g$ , pour toute fibre non singulière  $X_s$ .

*Une courbe stable est une courbe réduite et connexe qui vérifie 2 et 3.*

Pour  $g = 2$ , nous suivons les notations de [18]. Les types complexes de courbes stables sont donnés par la liste suivante :





### Description locale d'une famille réelle de courbes stables de genre 2.

Le langage utilisé dans [14] est celui de la géométrie algébrique sur un corps abstrait et en particulier la topologie est la topologie de Zariski. Lorsque le corps de base est le corps des nombres réels, nous rappelons brièvement comment interpréter les résultats de [14] en géométrie analytique complexe avec structure réelle. Soit  $\rho: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{A}$  une surface algébrique projective fibrée en courbes de genre 2 définie sur  $\mathbf{R}$ . Soient  $B = \mathcal{A} \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ ,  $\rho_{\mathbf{C}} := \rho \times id_{\mathbf{C}}: \mathcal{Y} \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \rightarrow B$  et  $P$  un point spécial lisse de  $\mathcal{A}(\mathbf{R})$ . On note par  $\mathcal{R}$  l'anneau local de  $B$  au point  $P$  (c'est un anneau de valuation discrète). Le corps des fractions  $K$  de  $\mathcal{R}$  n'est que le corps des fonctions de la courbe  $B$ .

Comme  $P$  est un point lisse alors il existe une fonction régulière  $t$ , définie sur un voisinage affine  $\mathcal{U}$ , qui s'annule en  $P$  telle que toute fonction rationnelle  $v$ , qui s'annule en  $p$ , s'écrit  $v = t^n w$  où  $w(P) \neq 0$ , i.e. la fonction  $t$  est un paramètre local de  $B$  au point  $P$ .

D'après le théorème d'inversion locale analytique, il existe un voisinage  $U$  de  $P$  pour la topologie analytique sur  $B$ , invariant par la structure réelle sur  $B(\mathbf{C})$ , sur lequel la restriction de  $t$  vue comme fonction sur  $U$  est une coordonnée holomorphe qu'on note aussi  $t$ .

Comme  $P$  est lisse la fonction  $t$  peut être choisie réelle (i.e.  $\forall P \in U$ ,  $t \circ \sigma(P) = \overline{t(P)}$  où  $\sigma$  est la structure réelle induite sur  $B(\mathbf{C})$ ).

On peut choisir  $U$  de manière que la restriction de  $t$  soit un isomorphisme de  $U$  sur un disque  $E$  centré en 0 et on note  $X = \rho_{\mathbf{C}}^{-1}(U)$  et  $\pi = \rho_{\mathbf{C}}|_{\rho_{\mathbf{C}}^{-1}(U)}$ .

On est donc ramené au cas où  $\pi: X \rightarrow E$  est un pinceau réel en courbes de genre 2 au dessus d'un disque  $E$  et dont  $X_0 = \pi^{-1}(0)$  est la seule fibre singulière.

En suivant la démarche de la preuve de [14, Théorème 1, partie A] on obtient les résultats suivants sur les pinceaux stables avec une seule fibre singulière :

Soit  $\pi: X \rightarrow E$  un pinceau réel en courbes de genre 2 dont la seule fibre singulière  $X_0$  est stable.

**Proposition 2.2.** *Si  $X_0$  est de type complexe 1, 3a, 4a ou 5, alors il existe un voisinage saturé de  $X_0$  dans  $X$  qui est analytiquement isomorphe à la*

surface affine définie dans  $\mathbf{C}^2 \times E$  par l'équation :

$$y^2 = a_5(t)x^5 + \dots + a_0(t), \quad (x, y, t) \in \mathbf{C}^2 \times E$$

où les  $a_i$  sont des fonctions réelles telles que  $a_5(0) \neq 0$ .

**Proposition 2.3.** *Si  $X_0$  est de type complexe 2, 3b ou 4b alors :*

- (1)  *$X$  est un revêtement double d'un fibré en coniques  $\Pi: \mathcal{F} \longrightarrow E$ , au dessus d'un disque  $E$ , défini dans  $\mathbf{C}^2 \times E$  par l'équation  $xv = t^{2m}$  et ramifié le long d'une courbe sextigonale  $\mathcal{B}$  plus un point  $\{a\}$  (le point d'intersection des deux droites  $D_1 = \{x = 0\}$  et  $D_2 = \{v = 0\}$  de la fibre au dessus de 0).*
- (2) *les composantes irréductibles de la fibre  $X_0$  sont les complétés projectifs respectifs de deux courbes affines définies par :*

$$y^2 = x^3 + ax^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + bv^2 + v.$$

*Démonstration.* Soit  $\Pi: \mathcal{F} \longrightarrow E$  un pinceau en coniques, au dessus d'un disque  $E$ , définie par l'équation  $xv = t^{2m}$  dans  $\mathbf{C}^2 \times E$ .

On désigne par  $\mathcal{B}$  une courbe plongée dans  $\mathcal{F}$  définie par l'équation affine :

$$x^4 + a(t)x^3 + x^2 + b(t)t^{2m}x + t^{4m} = 0$$

Vue qu'elle est plongée dans  $\mathcal{F}$ , la courbe  $\mathcal{B}$  peut aussi être définie par l'équation affine  $x^2 + a(t)x + 1 + b(t)v + v^2 = 0$ .

Soient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux sections de  $\mathcal{F} \longrightarrow E$  contenues dans le lieu non singulier de  $\mathcal{F} \longrightarrow E$  telles que  $\mathcal{B} \cap (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = \emptyset$ ,  $\Gamma_1 \cap D_1 = \{v_1\}$ ,  $\Gamma_2 \cap D_2 = \{x_1\}$  et  $\Gamma_1 \cap D_2 = \Gamma_2 \cap D_1 = \{\emptyset\}$ , où  $D_1 = \{x = 0\}$  et  $D_2 = \{v = 0\}$  désignent les deux composantes de la fibre  $\mathcal{F}_0$  au dessus de 0.

Si  $t = 0$ , l'intersection de la courbe  $\mathcal{B}$  avec la fibre  $\mathcal{F}_0$  est donnée par l'équation :

$$x^2(x^2 + a(0)x + 1) = 0$$

On peut aussi la définir par l'équation  $v^2(v^2 + b(0)v + 1) = 0$ . On déduit alors que  $\mathcal{B}$  coupe  $D_1$  (resp.  $D_2$ ) en deux points  $v_2$  et  $v_3$  (resp.  $x_2$  et  $x_3$ ).

Soit  $X$  le revêtement double de  $\mathcal{F}$  ramifié le long de la courbe  $\mathcal{B}$ , les deux sections  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  et le point  $\{a\}$ .

Le morphisme  $\pi: X \longrightarrow E$  est un pinceau en courbes stables de genre 2 dont la fibre  $X_0$  possède deux composantes irréductibles qui sont les complétés projectifs respectifs des deux courbes affines définies par :

$$y^2 = x^3 + a(0)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + b(0)v^2 + v.$$

Voir Figure 1

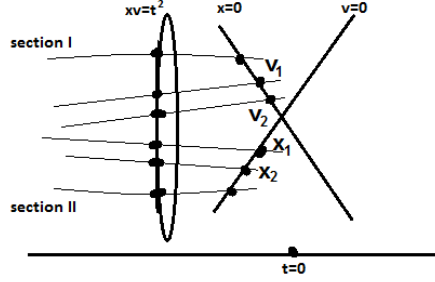


FIGURE 1.

Si  $v_2 \neq v_3$  et  $x_2 \neq x_3$  alors  $X_0$  est de type 2.  
 Si  $v_2 \neq v_3$  et  $x_2 = x_3$  alors  $X_0$  est de type 3b.  
 Si  $v_2 = v_3$  et  $x_2 = x_3$  alors  $X_0$  est de type 4b.

□

**Lemme 2.4.** *Les notations sont celles de la preuve précédente. Soit  $\Delta_t = a(t)^2 - 4$ , si  $\Delta_0 \neq 0$  (i.e.  $x_1 \neq x_2$ ) alors les deux branches de  $\mathcal{B}$  passant par  $x_1$  et  $x_2$  sont réelles (resp. conjugués) si  $\Delta_0 > 0$  (resp.  $\Delta_0 < 0$ ).*

**Proposition 2.5.** *Si  $\Delta_0 = 0$  alors pour  $t$  assez proche de 0 les deux points d'intersection des deux branches de  $\mathcal{B}$ , passant par  $x_1 = x_2$ , avec la fibre  $\mathcal{F}_t$  sont réels (resp. conjugués) si  $\Delta_t > 0$  (resp.  $\Delta_t < 0$ ).*

*Démonstration.* On considère le pinceau

$$\mathcal{B}_u: x^2 + a(t, u)x + 1 + b(t)v + v^2 = 0$$

tel que  $\mathcal{B}_u$  soit une perturbation de la courbe  $\mathcal{B}: x^2 + a(t)x + 1 + b(t)v + v^2 = 0$  sur  $] -\epsilon, 0[$ ,  $a(t, 0) = a(t)$  pour  $t < 0$  et  $\Delta_{0,u} = a(0, u)^2 - 4 \neq 0$ .

Alors, pour  $u$  fixé, les deux branches de la courbe  $\mathcal{B}_u$  coupent  $D_2$  en deux points distincts. Donc d'après le lemme précédent, la topologie des ces deux branches suit le signe de discriminant de l'équation



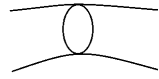

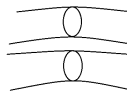

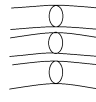
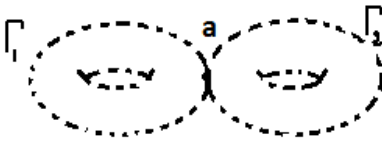


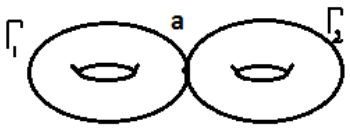

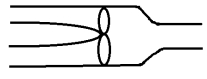

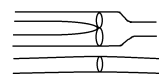
$$x^2 + a(t, u)x + 1 = 0$$





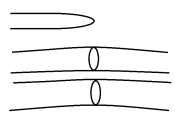
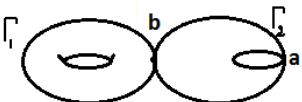

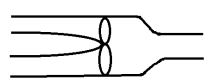

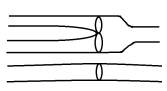
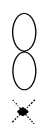
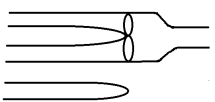

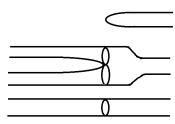
Comme  $\mathcal{B}_u$  est une déformation de  $\mathcal{B}$  sur  $] -\epsilon, 0[$ , donc pour  $u$  fixé  $\mathcal{B}_u$  et  $\mathcal{B}$  ont même topologie sur  $] -\epsilon, 0[$ .


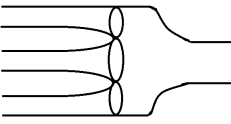
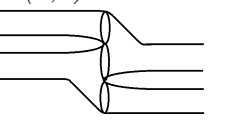

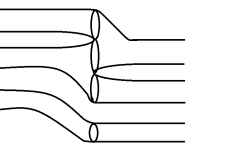
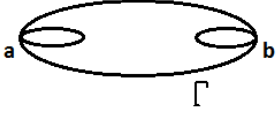

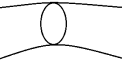

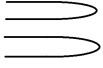


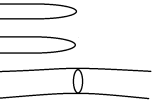
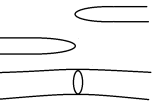
On conclut que les deux branches de la courbe  $\mathcal{B}: x^2 + a(t)x + 1 + b(t)v + v^2 = 0$  passant par le point  $x_1$  ont même topologie que celles de la courbe définie par l'équation  $x^2 + a(t)x + 1 = 0$  sur  $] -\epsilon, 0[$  et donc suivent le signe du discriminant  $\Delta_t$ . Même raisonnement sur  $]0, \epsilon[$ . □

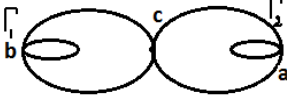
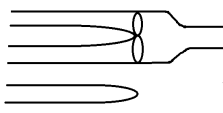

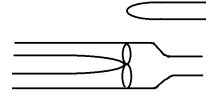
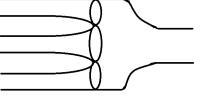

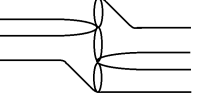
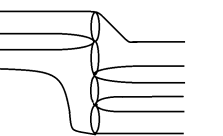
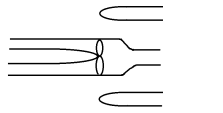
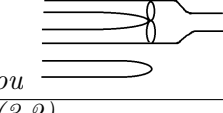

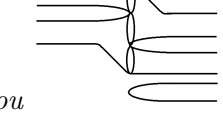
**Définition 2.6.** *On appelle chaîne de  $n$  ovals la réunion non disjointe des  $n$  ovals  $\mathcal{O}_i$  telle que pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$   $\mathcal{O}_i$  et  $\mathcal{O}_{i+1}$  s'intersectent en un seul point et  $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_{i+1} = \emptyset$  si  $|i - j| > 1$ .*

**Théorème 2.7.** *Soient  $X$  une surface non singulière et  $\pi: X \rightarrow E$  un pinceau réel en courbes stables de genre 2. Alors la structure géométrique, la topologie de la fibre  $X_0$  au dessus de 0 et la partie réelle des fibres voisines de  $X_0$  sont données par le tableau suivant :*

Type complexe Na-Ue[18]	Type de configuration réel	$X_{s_0}(\mathbf{R})$	Fibres voisines
1	$\Gamma$ réelle 	$\emptyset$	$\emptyset$
		un ovale 	$(1,1)$ 
		deux ovales 	$(2,2)$ 
		trois ovales 	$(3,3)$ 
2	$\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ sont complexes conjuguées 	un point isolé 	$(1,0)$ 
	$\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ sont réelles 	une chaîne de deux ovales 	$(2,1)$ 
		une chaîne de deux ovales et un ovale 	$(3,2)$ 

3a	$\Gamma$ est réelle 	un point isolé	(1,0)
			
		un point isolé et deux ovaux	(3,2)
			
		un point isolé et un ovale	(1,2)
3b	$\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ sont réelles 	une chaîne de deux ovaux	(2,1)
			
		une chaîne de deux ovaux et un ovale	(3,2)
			
		un point isolé et une chaîne de deux ovaux	(3,1)
			
		un point isolé, un ovale et une chaîne de deux ovaux	(3,3)
			

		<p>une chaîne de trois ovals</p> 	<p><math>(3,1)</math></p>  <p>ou <math>(2,2)</math></p> 
		<p>un ovale et une chaîne de trois ovals</p> 	<p><math>(3,3)</math></p> 
4a	$\Gamma$ est réelle	<p><math>\emptyset</math></p>	<p><math>\emptyset</math></p>
		<p>un ovale</p> 	<p><math>(1,1)</math></p> 
		<p>deux points isolés</p> 	<p><math>(2,0)</math></p>  <p>ou <math>(1,1)</math></p> 
		<p>deux points isolés et un ovale</p> 	<p><math>(3,1)</math></p>  <p>ou <math>(2,2)</math></p> 

4b	$\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ sont réelles		une chaîne de deux ovals et un point isolé	$(3,1)$	
				ou $(2,2)$	
			une chaîne de trois ovals	$(3,1)$	
				ou $(2,2)$	
			une chaîne de quatre ovals	$(3,2)$	
			une chaîne de deux ovals et deux points isolés	$(3,2)$	
			un point isolé et une chaîne de trois ovals	$(3,2)$	
				ou	




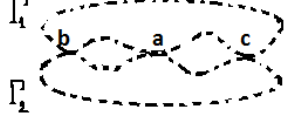



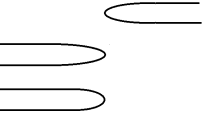
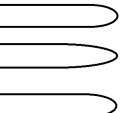
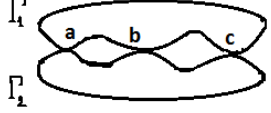

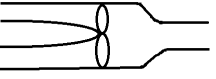
	$\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ sont complexes conjuguées 	un point isolé 	$(1,0)$ 
5	$\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ sont complexes conjuguées 	un point isolé 	$(1,0)$ 
		trois points isolés 	$(3,0)$  ou $(2,1)$ 
	$\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ sont réelles 	une chaîne de deux ovals 	$(2,1)$ 

TABLE 2.1.

On désigne, dans la colonne 4, par un couple de type  $(p, q)$  le nombre des composantes connexes des fibres voisines à droite et à gauche de  $X_0$ .

Avant de passer à la preuve, nous rappelons le lemme suivant :

**Lemme 2.8.** [22, Ch. VII, p. 147] *Soit  $(C, \sigma)$  une courbe réelle et  $a$  un point réel lisse de  $C$ . Alors il existe une composante connexe de  $C(\mathbf{R})$  non réduite à un point et contenant le point  $a$ .*

*Démonstration du théorème 2.7.* On admet sur  $X$  et  $E$  deux involutions anti-holomorphes  $\sigma_X$  et  $\sigma_E$  respectivement, tel que le morphisme  $\pi$  soit réel : i.e  $\pi \circ \sigma_X = \sigma_E \circ \pi$ . commute.



Si  $s \in E$  est un point réel alors la fibre au dessus de  $s$  est réelle. Et l'involution  $\sigma_X$  transforme une composante irréductible d'une fibre réelle en une autre de même type.

Pour chaque type complexe de pinceau stable en genre 2 (Voir liste au début du paragraphe), nous allons traiter les différents cas possibles pour le type réel de la fibre singulière (dans la troisième colonne) en se basant particulièrement sur des raisons topologiques (topologie de Zariski). Puis, pour la réalisation, nous allons construire des exemples en se basant sur les propositions 2.2 et 2.3.

Soit  $\Gamma$  une composante irréductible d'une fibre singulière réelle. Si la condition suivante est vérifiée

$$(1) \quad \begin{cases} a \text{ est un point réel lisse dans } \Gamma_1 \\ \Gamma_1 \text{ est réelle} \end{cases}$$

Alors il existe une composante connexe  $R$  de  $\Gamma(\mathbf{R})$  contenue dans le lieu réel de  $\Gamma_1$  et contient le point  $a$ .

Commençons tout d'abord par les types complexes numérotés dans la Proposition 2.2, où chacune de ces courbes stables est donnée par une équation hyperelliptique.

Type complexe 1 : La fibre singulière est une courbe projective lisse de genre 2.

On utilise le fait que si  $C$  est une courbe réelle lisse de genre  $g$  alors (Théorème de Harnack)

$$0 \leq \#\Pi_0(C(\mathbf{R})) \leq g + 1$$

Type complexe 3a : La fibre singulière est une courbe elliptique  $\Gamma$  avec un point double  $a$ .

La courbe  $\Gamma$  est la seule composante irréductible de la fibre, donc elle est réelle. Le point  $a$  est le seul point singulier donc réel.

Si  $a$  est un point isolé dans la partie réelle de  $\Gamma$  alors en appliquant le théorème de Harnack aux fibres voisines, nous montrons qu'il existe au plus deux composantes connexes lisses contenues dans le lieu réel de  $\Gamma$  et ne contenant pas  $a$ . Donc  $\Gamma(\mathbf{R}) = \{a\}$ ,  $\Gamma(\mathbf{R}) = \{a\} \cup R_1$  ou  $\Gamma(\mathbf{R}) = \{a\} \cup R_1 \cup R_2$ , où les  $R_i$  sont des ovales.

Si  $a$  est un point double avec deux tangentes réelles alors en appliquant le théorème de Harnack aux fibres voisines, nous montrons qu'il existe au plus une composante connexe lisse contenue dans le lieu réel de  $\Gamma$  et ne contenant pas  $a$ . Nous avons donc seulement deux types.

Les exemples ci-dessous réalisent les 5 cas possibles pour le type complexe 3a.

**Exemples :**

1)  $\Gamma(\mathbf{R}) = \{a\}$  :

$$y^2 = -(x^2 + t)(x^2 + 1)(x^2 + 2)$$

Si  $t = 0$  on a bien  $\Gamma(\mathbf{R}) = \{a\}$ .

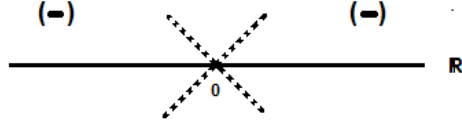


FIGURE 2.

Pour  $t > 0$  (resp.  $t < 0$ ), la partie réelle de la fibre au dessus de  $t$  est vide (resp. est une composante lisse) d'où le type  $(1, 0)$ .

2)  $\Gamma(\mathbf{R}) = \{a\} \cup R_1$  :

$$y^2 = -(x^2 + t)(x - 2)(x - 1)(x^2 + 2)$$

Si  $t = 0$  on a bien  $\Gamma(\mathbf{R}) = \{a\} \cup R_1$ .

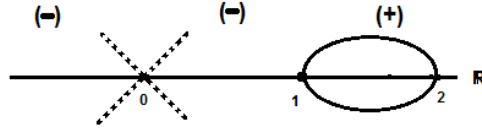


FIGURE 3.

Pour  $t > 0$  (resp.  $t < 0$ ), la partie réelle de la fibre au dessus de  $t$  est une seule ovale (resp. est la réunion disjointe des deux ovales) d'où le type  $(2, 1)$ .

3)  $\Gamma(\mathbf{R}) = \{a\} \cup R_1 \cup R_2$  :

$$y^2 = (x^2 + t)(x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

Si  $t = 0$  on a bien  $\Gamma(\mathbf{R}) = \{a\} \cup R_1 \cup R_2$

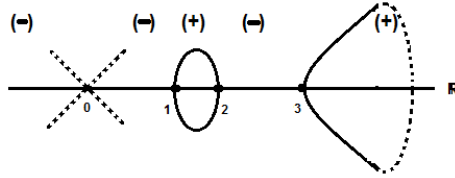


FIGURE 4.

Pour  $t > 0$  (resp.  $t < 0$ ), la partie réelle est la réunion disjointe des deux ovales (resp. trois ovales) d'où le type  $(3, 2)$ .

4)

$$y^2 = (x^2 + t)(x^2 + 1)(x + 1)$$

Si  $t = 0$  alors la partie réelle de la fibre singulière est une chaîne de deux ovales.

Si  $t > 0$  (resp.  $t < 0$ ) alors la partie réelle de la fibre au dessus de  $t$  est une seule ovale (resp. deux ovales) d'où le type  $(2, 1)$ .

5)

$$y^2 = (x^2 + t)(x - 1)(x - 2)(x + 1)$$

Si  $t = 0$  alors la partie réelle de la fibre singulière est la réunion disjointe d'une ovale et d'une chaîne de deux ovales.

Si  $t > 0$  (resp.  $t < 0$ ) alors la partie réelle de la fibre au dessus de  $t$  est la réunion disjointe de deux ovales (resp. trois ovales) d'où le type  $(3, 2)$ .

Type complexe  $4a$  : La fibre singulière est une courbe rationnelle  $\Gamma$  avec deux points doubles  $a$  et  $b$ .

La courbe  $\Gamma$  est la seule composante irréductible, donc elle est réelle.

Et l'ensemble des points réels

$$\Gamma(\mathbf{R}) = \{x \in \Gamma(\mathbf{R}) / x \text{ lisse}\} \cup \{x \in \Gamma(\mathbf{R}) / x \text{ singulier}\}$$

donc :

Si  $a$  et  $b$  sont conjugués, alors  $\{x \in \Gamma(\mathbf{R}) / x \text{ singulier}\} = \emptyset$  et donc il existe au plus une composante connexe  $R$  contenue dans le lieu réel de  $\Gamma$ , ainsi  $\Gamma(\mathbf{R}) = \emptyset$  ou  $\Gamma(\mathbf{R}) = R$ .

Si  $a$  et  $b$  sont deux points réels isolés, alors il existe au plus une composante connexe lisse contenue dans le lieu réel de  $\Gamma$ .

Si  $a$  est réel isolé et  $b$  est un point double avec deux tangentes réelles alors  $\Gamma(\mathbf{R}) = R \cup \{a\}$  où  $R$  est une composante connexe contenant le point  $b$ .

Si  $a$  et  $b$  sont deux points doubles avec deux tangentes réelles, alors  $\Gamma(\mathbf{R})$  est formé par une seule composante connexe contenant  $a$  et  $b$ .

**Exemples :**

1)

$$y^2 = -[(x^2 + 1)^2 - t^2](x^2 + 2)$$

La partie réelle de la fibre singulière est vide ainsi que celles de ses fibres voisines.

2)

$$y^2 = [(x^2 + 1)^2 - t^2](x + 2)$$

La partie réelle de la fibre singulière est une seule composante lisse ainsi que celles de ses fibres voisines d'où le type  $(1, 1)$ .

3)

$$y^2 = -[(x + 1)^2 - t][(x - 1)^2 - t](x^2 + 2)$$

Dans cet exemple la partie réelle de la fibre singulière est constituée par deux points isolés. Et si  $t > 0$  (resp.  $t < 0$ ) alors la partie réelle de la fibre au dessus de  $t$  est la réunion disjointe de deux ovales (resp. est vide) d'où le type  $(0, 2)$ .

4)

$$y^2 = -[(x + 1)^2 + t][(x - 1)^2 - t](x^2 + 2)$$

Dans cet exemple la partie réelle de la fibre singulière est aussi constituée par deux points isolés. Mais nous avons le type  $(1, 1)$ .

5)

$$y^2 = -[(x+1)^2 - t][(x-1)^2 - t](x+2)$$

La partie réelle de la fibre voisine est la réunion d'une ovale et deux points isolés et au voisinage nous avons le type  $(1, 3)$ .

6)

$$y^2 = -[(x+1)^2 - t][(x-1)^2 - t](x+2)$$

La fibre singulière est de même type que l'exemple précédent, et au voisinage on a le type  $(2, 2)$ .

7)

$$y^2 = [x^2 + t][(x-2)^2 + t](x-1)$$

La partie réelle de la fibre singulière est la réunion d'une chaîne de deux ovales et un point isolé. Et au voisinage nous avons le type  $(3, 1)$ .

8)

$$y^2 = [x^2 - t][(x-2)^2 + t](x-1)$$

La partie réelle de la fibre singulière est la réunion d'une chaîne de deux ovales et d'un point isolé. Et au voisinage nous avons le type  $(2, 2)$ .

9)

$$y^2 = [(x-1)^2 + t][(x-2)^2 + t](x+1)$$

La partie réelle de la fibre singulière est une chaîne de deux ovales et au voisinage nous avons le type  $(3, 1)$ .

10)

$$y^2 = [(x-1)^2 - t][(x-2)^2 + t](x+1)$$

La partie réelle de la fibre singulière est une chaîne de deux ovales et au voisinage nous avons un type  $(2, 2)$ .

Comme ça nous avons réalisé tout les cas possibles pour le type complexe  $4a$ .

Type complexe 5 : Deux courbes rationnelles lisses  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  s'intersectent transversalement en trois points  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

Si  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont conjuguées alors la partie réelle est soit les trois points singuliers  $a$ ,  $b$  et  $c$ , soit l'un des points singuliers  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

Si  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont réelles, alors on a ou bien  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des points réels, et dans ce cas il existe une composante connexe  $R_1$  (resp.  $R_2$ ) contenue dans le lieu réel de  $\Gamma_1$  (resp. de  $\Gamma_2$ ) qui contient les points  $a$ ,  $b$  et  $c$ , ou bien l'un des trois points singuliers est réel et les deux autres sont conjugués et dans ce cas il existe une composante connexe  $R_1$  (resp.  $R_2$ ) contenue dans le lieu réel de  $\Gamma_1$  (resp. de  $\Gamma_2$ ) qui contient le seul point singulier réel de la fibre, et dans les deux cas, la partie réelle de la fibre est  $R_1 \cup R_2$ .

Dans le cas où la partie réelle est constituée de deux ovales s'intersectant en trois points la surface  $X$  ne peut pas être lisse. Voir Table 2.4 pour ce cas.

**Exemples :**

1)  $(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\mathbf{R}) = \{a, b, c\}$  :

$$y^2 = -(x^2 + t)((x - 1)^2 + t)((x - 2)^2 + t)$$

Si  $t > 0$  (resp.  $t < 0$ ) alors la partie réelle de la fibre au dessus de  $t$  est vide (resp. trois ovales) d'où le type  $(3, 0)$ .

2)  $(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\mathbf{R}) = \{a, b, c\}$  :

$$y^2 = -(x^2 + t)((x - 1)^2 - t)((x - 2)^2 - t)$$

Si  $t > 0$  (resp.  $t < 0$ ) alors la partie réelle de la fibre au dessus de  $t$  est la réunion disjointe des deux ovales (resp. un ovale) d'où le type  $(1, 2)$ .

3)  $(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\mathbf{R}) = \{a, \}$  :

$$y^2 = -(x^2 + t)((x^2 + 1)^2 + t)$$

Si  $t > 0$  (resp.  $t < 0$ ) alors la partie réelle de la fibre au dessus de  $t$  est vide (resp. un ovale) d'où le type  $(1, 0)$ .

4)  $(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\mathbf{R}) = R_1 \cup R_2$  :

$$y^2 = (x^2 - t)((x + i)^2 + t)((x - i)^2 + t)$$

Si  $t > 0$  (resp.  $t < 0$ ) alors la partie réelle de la fibre au dessus de  $t$  est un ovale (resp. deux ovales) d'où le type  $(1, 2)$ .

Type complexe 2 : La fibre singulière est la réunion de deux courbes elliptiques lisses  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  s'intersectant transversalement en un point  $a$ .

La fibre stable est constituée par deux composantes irréductibles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  qui s'intersectent au point réel  $a$  ( $a \in \sigma_X(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = \{a\}$ ). Si  $\sigma_X(\Gamma_1) = \Gamma_2$  alors  $a$  est le seul point réel de la fibre.

Si  $\sigma_X(\Gamma_1) = \Gamma_1$  alors  $\Gamma_2$  est aussi réelle et on a d'après (1), p. 16, il existe une composante connexe lisse  $R_1$  de  $\Gamma_1(\mathbf{R})$  contenue dans le lieu réel de  $\Gamma_1$  et contenant le point  $a$ .

En utilisant l'argument (1), p. 16, il existe une composante connexe lisse  $R_2$  de  $\Gamma_2(\mathbf{R})$  contenue dans le lieu réel de  $\Gamma_2$  et contenant le point  $a$ . S'il existe un point réel  $b \notin R_1 \cup R_2$  alors  $b$  est contenue dans une composante connexe  $R_3$  contenu dans le lieu réel de la fibre, donc la partie réelle de la fibre est  $R_1 \cup R_2 \cup R_3$ . Si non  $R_1 \cup R_2$  est la partie réelle. Et ce sont les seuls cas possibles d'après le Théorème de Harnack appliqué au fibre voisine de la fibre singulière.

**Exemples :**

Dans la suite les deux composantes irréductibles de la fibres singulières sont les complétés projectifs des deux courbes affines :

$$y^2 = x^3 + a(0)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + b(0)v^2 + v.$$

où  $a(t)$  et  $b(t)$  sont des fonctions holomorphes.

1)  $\sigma_X(\Gamma_1) = \Gamma_2$  et  $\mathbf{R}(\Gamma_1 + \Gamma_2) = \{a\}$ .

$$y^2 = x^3 + itx^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 - itv^2 + v.$$

la partie réelle est un points isolé et au voisinage on a le type  $(1, 0)$ .

2)

$$y^2 = x^3 + (1+t)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + (1-t)v^2 + v.$$

la partie réelle est une chaîne de deux ovales et au voisinage on a le type  $(2, 1)$ .

3)

$$y^2 = x^3 + (1+t)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + (3+t)v^2 + v.$$

la partie réelle est la réunion d'une chaîne de deux ovales et un ovale, et au voisinage on a le type  $(3, 2)$ .

Type complexe  $3b$  : Une courbe elliptique lisse  $\Gamma_1$  et une courbe rationnelle  $\Gamma_2$  avec un point double  $a$ , s'intersectant en un point  $b$  transversalement.

Les courbes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont réelles, aussi  $a$  et  $b$  sont deux points réels.

En utilisant l'argument (1), p. 16, il existe une composante connexe  $R_1$  (resp.  $R_2$ ) contenue dans le lieu réel de  $\Gamma_1$  (resp.  $\Gamma_2$ ) et contenant le point  $b$ . Si  $a$  est un point isolé, alors  $R_2$  est la seule composante connexe de  $\Gamma_2(\mathbf{R})$  autre que  $a$ . Sinon le point  $a$  appartient à  $R_2$  et  $\Gamma_1(\mathbf{R})$  contient au plus une composante connexe autre que  $R_1$ , et ne contenant pas  $b$ .

### Exemples :

1)

$$y^2 = x^3 + (1+t)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + (2+t)v^2 + v.$$

la partie réelle est la réunion d'une chaîne de deux ovales et un point isolé, et au voisinage on a le type  $(3, 1)$ .

2)

$$y^2 = x^3 + (1+t)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + (2-t)v^2 + v.$$

la partie réelle est la réunion d'une chaîne de deux ovales et un point isolé, et au voisinage on a le type  $(2, 2)$ .

3)

$$y^2 = x^3 + (3+t)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + (2+t)v^2 + v.$$

la partie réelle est la réunion d'une chaîne de deux ovales, un ovale et un point isolé, et au voisinage on a le type  $(3, 3)$ .

4)

$$y^2 = x^3 + (1+t)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + (-2+t)v^2 + v.$$

la partie réelle est une chaîne de trois ovales, et au voisinage on a le type  $(2, 2)$ .

5)

$$y^2 = x^3 + (3+t)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + (2-t)v^2 + v.$$

la partie réelle est la réunion d'une chaîne de trois ovals et un oval, et au voisinage on a le type  $(3, 3)$ .

Type complexe  $4b$  : Deux courbes rationnelles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  (avec un point double) s'intersectant transversalement en un point  $c$

Les courbes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont les seules composantes irréductibles de la fibre. Le point  $c$  est réel.

Si  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont conjugués alors le seul point réel est  $c$ .

Si  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont réels, alors  $a$  et  $b$  sont réels et d'après (1), p. 16, il existe une composante connexe  $R_1$  (resp.  $R_2$ ) formés par des point réels contenue dans  $\Gamma_1$  (resp. dans  $\Gamma_2$ ) et qui contient le point  $c$ . Si  $a$  et  $b$  sont isolés alors la partie réelle de la fibre est  $R_1 \cup R_2 \cup \{a, b\}$ . Si  $a$  est réel isolé et  $b$  est un point double avec deux tangentes réelles alors  $b \in R_2$  et la partie réelle de la fibre est  $R_1 \cup R_2 \cup \{a\}$ . Si  $a$  et  $b$  sont deux points doubles avec deux tangentes réelles alors  $a \in R_1$  et  $b \in R_2$  et la partie réelle de la fibre est  $R_1 \cup R_2$ .

**Exemples :**

1)

$$y^2 = x^3 + (2+it)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + (2-it)v^2 + v.$$

la partie réelle est un point isolé, et au voisinage on a le type  $(0, 1)$ .

2)

$$y^2 = x^3 + (2+t)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + (2-t)v^2 + v.$$

la partie réelle est la réunion d'une chaîne de deux ovals et deux points isolés, et au voisinage on a le type  $(2, 2)$ .

3)

$$y^2 = x^3 + (2-t)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + (2+t)v^2 + v.$$

la partie réelle est la réunion d'une chaîne de deux ovals et deux points isolés, et au voisinage on a le type  $(3, 2)$ .

4)

$$y^2 = x^3 + (-2+t)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + (2-t)v^2 + v.$$

la partie réelle est la réunion d'une chaîne de trois ovals et un point isolé, et au voisinage on a le type  $(2, 3)$ .

5)

$$y^2 = x^3 + (-2+t)x^2 + x \quad \text{et} \quad z^2 = v^3 + (-2-t)v^2 + v.$$

la partie réelle est la réunion d'une chaîne de quatre ovals, et au voisinage on a le type  $(3, 2)$ .

□

**Proposition 2.9.** *Soit  $\pi: X \rightarrow E$  un pinceau réel en courbes stables de genre 2 avec une unique fibre singulière au dessus de 0. Alors l'espace total  $X$  peut avoir seulement des singularités aux points doubles de l'unique fibre singulière au dessus de 0. Et ces singularités sont de type  $A_n$ .*



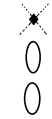
*Démonstration.* Voir [18, § 4] □

**Remarque 2.10.** *Dans le théorème précédent nous avons traité le cas des pinceaux en courbes stables de genre 2 dont l'espace total  $X$  est une surface lisse. Mais en général la surface  $X$  peut être singulière.*

*Dans le cas général d'une fibration stable de genre 2, on obtient la même liste pour les 3 premières colonnes du tableau, en revanche on a de nouvelles possibilités pour la colonne 4 concernant le type des fibres voisines.*

**Remarque 2.11.** *Une fibration stable de type 1 est toujours lisse.*

Nous donnons dans les tables 2.2, 2.3 et 2.4 les types supplémentaires.

Partie réelle	Fibres Voisines	Exemples
un point isolé 	(1,1)  (0,0)	$y^2 = -(x^2 - t^2)(x^2 + 1)(x^2 + 2)$  $y^2 = -(x^2 + t^2)(x^2 + 1)(x^2 + 2)$
un point isolé et un ovale 	(1,1)  (2,2)	$y^2 = -(x^2 - t^2)(x - 2)(x^2 + 2)$  $y^2 = -(x^2 + t^2)(x - 2)(x^2 + 2)$
un point isolé et deux ovales 	(3,3)  (2,2)	$y^2 = (x^2 - t^2)(x - 1)(x - 2)(x - 3)$  $y^2 = (x^2 + t^2)(x - 1)(x - 2)(x - 3)$





une chaîne de 2 ovales 	(2,2)	$y^2 = (x^2 - t^2)(x^2 + 1)(x + 1)$
une chaîne de 2 ovales et un ovale 	(3,3)	$y^2 = (x^2 - t^2)(x + 1)(x + 2)(x + 3)$

TABLE 2.2. Type complexe 3a





Partie réelle	Fibres Voisines	Exemples
deux points isolés 	(2,2)  ou(2,1)	$y^2 = -[(x + 1)^2 - t^2][(x - 1)^2 - t^2](x^2 + 2)$  $y^2 = -[(x + 1)^2 - t^2][(x - 1)^2 - t](x^2 + 2)$
deux points isolés et un ovale 	(3,3)  ou(3,2)	$y^2 = -[(x + 1)^2 - t^2][(x - 1)^2 - t^2](x + 2)$  $y^2 = -[(x + 1)^2 - t^2][(x - 1)^2 - t](x + 2)$
une chaîne de 2 ovales et un point isolé 	(3,3)  ou(3,2)	$y^2 = [x^2 - t^2][(x - 2)^2 - t^2](x - 1)$  $y^2 = [x^2 - t^2][(x - 2)^2 - t](x - 1)$
une chaîne de 3 ovales 	(3,3)	$y^2 = [(x - 1)^2 - t^2][(x - 2)^2 - t^2](x + 1)$

TABLE 2.3. Type complexe 4a



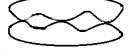

un point isolé 	(1,1)	$y^2 = -(x^2 - t^2)((x^2 + 1)^2 + t)$
trois points isolés 	(3,3)  ou (3,2)	$y^2 = -(x^2 - t^2)((x-1)^2 - t^2)((x-2)^2 - t^2)$  $y^2 = -(x^2 - t^2)((x-1)^2 - t^2)((x-2)^2 - t)$
Deux ovals s'intersectent en 3 points 	(3,3) (2,2) (3,2)	$y^2 = (x^2 - t^2)((x-1)^2 - t^2)((x-2)^2 - t^2)$ $y^2 = (x^2 + t^2)((x-1)^2 - t^2)((x-2)^2 - t^2)$ $y^2 = (x^2 + t)((x-1)^2 - t^2)((x-2)^2 - t^2)$
une chaîne de 2 ovals 	(2,2)	$y^2 = (x^2 - t^2)((x+i)^2 + t)((x-i)^2 + t)$

TABLE 2.4. Type complexe 5

## 3. PINCEAUX RÉELS EN COURBES DE GENRE 2 : TYPE ELLIPTIQUE

Dans ce paragraphe on se propose d'étudier les pinceaux réels en courbes de genre 2 dont les fibres singulières sont de type elliptique. Dans le cas complexe, Namikawa et Ueno [18] ont donné une méthode analytique permet de construire les fibres singulières de type elliptique. Nous allons suivre leur construction pour traiter le cas réel pour le type elliptique 1, par contre pour le cas elliptique 2 nous utilisons les travaux de Q. Liu [16] en s'inspirant des travaux de Silhol dans le cas des fibrations elliptiques [22, Ch. 7].

**Fibres singulières de type elliptique 1.**

*Construction des fibres singulières de type elliptique 1.* On se donne un un pinceau en courbes de genre 2,  $\pi : X \rightarrow D = D(0, \epsilon)$ . On suppose de plus que  $X$  est minimale.

Nous avons rappelé dans le paragraphe 1 la construction de triplet d'invariants de Namikawa et Ueno  $(M, z, n)$  et que si  $M$  est d'ordre fini,  $n = 0$  et

$z \in \mathcal{M}^*$  la fibre singulière est dit de type elliptique 1.

Inversement, on se donne un couple  $(M, Z) \in Sp(4, \mathbb{Z}) \times \mathcal{M}^*$ . Soient  $\tau \in \mathcal{M}$  un représentant de  $Z$  et  $C$  une courbe projective lisse de genre 2 associée à  $\tau$  alors  $M$  est la représentation d'un automorphisme holomorphe  $g_0$  de  $C$  (décrit explicitement dans [18]).

Soit  $E = \{s \in \mathbb{C}; |s| < \epsilon^{\frac{1}{n}}\}$  avec  $n = \text{ord}(M)$ .

On pose  $\mathfrak{D} = E \times C$ , et on note par  $\mathfrak{G}$  le groupe cyclique d'ordre  $n$  engendré par l'automorphisme  $g : (s, p) \mapsto (e_n(s), g_0(p))$  de  $\mathfrak{D}$ , où  $e_n = \exp(\frac{2i\pi}{n})$ .

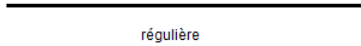
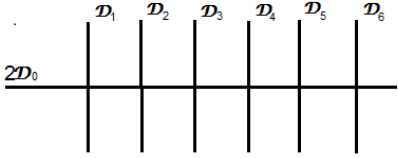
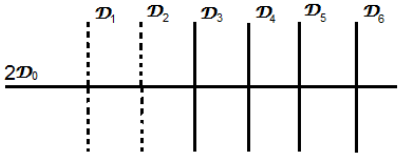
Soit  $\tilde{\mathfrak{D}}$ , le modèle minimal lisse du quotient  $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$ , alors  $\tilde{\mathfrak{D}} \rightarrow D$  est un pinceau en courbes de genre 2. La fibre singulière au dessus de  $s = 0$  est la fibre désirée.

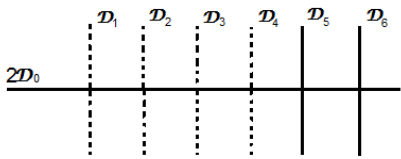
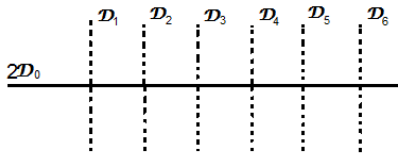
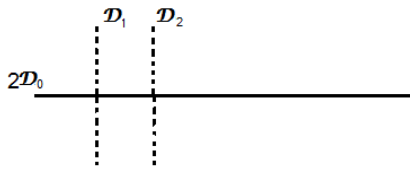
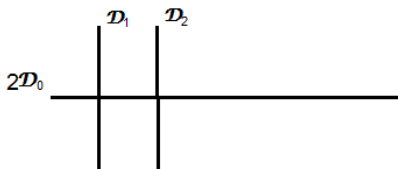
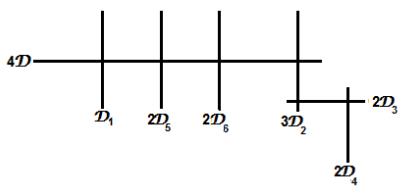
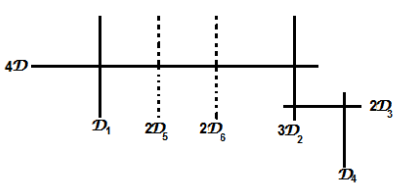
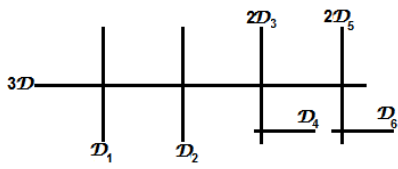
*Classification réelle des fibres singulières de type elliptique 1.* Soit  $\pi : X \rightarrow D$  un pinceau en courbes de genre 2 réelle, dont la fibre singulière est de

type elliptique 1. On désigne par  $X_0 = \sum_{i=1}^k n_i \mathcal{D}_i$  le diviseur associé la fibre

singulière de  $\pi$  au dessus de 0. De façon schématique on peut représenter le type de configuration réel de  $X_0$  comme dans le tableau du théorème suivant où on a noté par  $\text{—}$  les composantes irréductibles réelles et par  $\text{---}$  les composantes irréductibles non réelles.

**Théorème 3.1.** *Soit  $\pi : X \rightarrow E$  un pinceau réel en courbes de genre 2 dont la fibre singulière est de type elliptique 1. Le tableau ci-dessous donne pour chaque type complexe les types de configurations réels possibles. (voir [18] pour le cas complexe) :*

Type complexe	Monodromie	Type de configuration réel
$I_{0-0-0}$	$I \ 1$	
$I_{0-0-0}^*$	$I \ 2$	<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;">   </div>

		
		
<i>II</i>	<i>II 1b</i>	
		
<i>VI</i>	<i>II 2d</i>	
		
<i>III</i>	<i>II 3c</i>	

$IV$	$II\ 4c$	
$VII^*$	$IV\ 1c$	
$VII$	$IV\ 1d$	

$V^*$	$IV\ 2a$	
$V$	$IV\ 2b$	

TABLE 3.5.

Dans les colonnes 1 et 2 nous utilisons les notations de Namikawa et Ueno [19] et Ueno [24] respectivement.

*Démonstration.* Nous nous donnons dans chaque type un couple  $(M, Z) \in Sp(4, \mathbb{Z}) \times \mathcal{M}^*$ . On note par  $C$  une courbe projective lisse de genre 2 de matrice des périodes  $(I, \tau)$  où  $\tau$  est un représentant de  $Z$  et par  $g$  l'automorphisme sur  $\mathfrak{D}$  défini dans le paragraphe précédent. Soient  $\{p_1 \dots p_k\}$  l'ensemble des points de  $\mathfrak{D}$  fixés par  $g$ . Les points singuliers de  $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$  sont les points  $\mathfrak{p}_i$  classes des points  $p_i$ . Donc le modèle lisse  $X$  du quotient  $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$  est obtenu par résolution canonique des singularités de ce dernier et le type complexe de la fibre singulière au dessus de  $s = 0$  est donnée par ([18, § 7]).

Type  $[I_{0-0-0}]$  :

La fibre à l'origine est une courbe projective lisse de genre 2 qui est réelle car c'est l'unique composante irréductible de la fibre.

Type  $[I_{0-0-0}^*]$  :

La courbe  $C$  est un modèle projectif lisse d'une courbe affine donnée par :

$$y^2 = \prod_{i=1}^6 (x - a_i)$$

L'automorphisme  $g$  est donné par  $g(s, x, y) = (-s, x, -y)$ , et possède six points fixes  $\{p_i = (0, a_i, 0)\}$ . Les points singuliers de  $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$  sont les points  $\mathfrak{p}_i$  classes des points  $p_i$ .

La fibre singulière au dessus de l'origine s'écrit :

$$X_0 = 2\mathcal{D} + \sum_{i=1}^6 \mathcal{D}_i$$

où  $\mathcal{D}$  (courbe rationnelle lisse) est la transformée stricte de  $C \times \{0\}/\mathfrak{G}$  et pour tout  $i$ , la composante  $\mathcal{D}_i$  est la droite projective correspondant au point  $\mathfrak{p}_i$  dans la résolution des singularités.

Soit  $\sigma$  la structure réelle usuelle sur  $\mathfrak{D}$  définie par  $\sigma(s, x, y) = (\bar{s}, \bar{x}, \bar{y})$ . On a  $\sigma \circ g = g \circ \sigma$ , donc l'involution  $\sigma$  induit une structure réelle sur  $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$  et comme  $\sigma$  laisse globalement invariant l'ensemble des points singuliers de  $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$ , alors on a ou bien  $\sigma(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_i$  et dans ce cas  $\mathcal{D}_i$  est réelle comme composante irréductible de  $X$ , ou bien  $\sigma(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_j$  où  $i \neq j$ , et dans ce cas  $\sigma(\mathcal{D}_i) = \mathcal{D}_j$ . On a alors 4 possibilités pour le choix des  $a_i$  (deux à deux conjugués, deux réels et les autres complexes conjugués deux à deux, quatre réels et deux complexes conjugués ou les six sont réels) et donc finalement nous avons quatre types réels.

Type [ II ] :

La courbe  $C$  est un modèle projectif lisse d'une courbe affine donnée par :

$$y^2 = x^6 + \alpha x^4 + \beta x^2 + 1$$

L'automorphisme  $g$  est donné par  $g(s, x, y) = (-s, -x, y)$ , et possède deux points fixes  $p_1 = (0, 0, 1)$  et  $p_2 = (0, 0, -1)$ . Ainsi  $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$  a deux points singuliers  $\mathfrak{p}_1$  et  $\mathfrak{p}_2$  correspondant respectivement aux deux points fixes  $p_1$  et  $p_2$ . La fibre singulière au dessus de 0 est :

$$X_0 = 2\mathcal{D} + \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$$

où la courbe elliptique lisse  $\mathcal{D}$  est la transformée stricte de  $C \times \{0\}/\mathfrak{G}$ ,  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont deux courbes rationnelles lisses correspondant aux résolutions des points singuliers  $\mathfrak{p}_1$  et  $\mathfrak{p}_2$ .

On considère la structure réelle usuelle  $\sigma$  sur  $\mathfrak{D}$  définie par  $\sigma(s, x, y) = (\bar{s}, \bar{x}, \bar{y})$ . On a  $\sigma \circ g = g \circ \sigma$ , donc l'involution  $\sigma$  induit une structure réelle sur  $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$  et  $\sigma(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_i$ . Par suite  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont réelles.

La structure réelle définie par  $\sigma_1(s, x, y) = (\bar{s}, \bar{x}, -\bar{y})$ , envoie  $\mathcal{D}_1$  sur  $\mathcal{D}_2$ .

D'où les deux possibilités décrites dans le tableau.

Type [ VI ] :

La courbe  $C$  est un modèle projectif lisse d'une courbe affine donnée par :

$$y^2 = x(x^4 + \alpha x^2 + 1)$$

L'automorphisme  $g$  est donné par  $g(s, x, y) = (is, -x, iy)$ , et possède deux points fixes  $p_1 = (0, 0, 0)$  et  $p_2 = (0, p_\infty)$ .

L'automorphisme  $g^2 : (s, x, y) \mapsto (-s, x, -y)$  possède deux points fixes

autres que  $p_1$  et  $p_2$  donnés par  $p_3 = (0, \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}}, 0)$  et  $p_4 = (0, \sqrt{\frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}}, 0)$ . Ainsi  $\mathcal{D}/\mathfrak{G}$  possède quatre points singuliers  $\mathfrak{p}_1$ ,  $\mathfrak{p}_2$ ,  $\mathfrak{p}_3$  et  $\mathfrak{p}_4$  classes des points  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  et  $p_4$  respectivement.

La fibre singulière au dessus de l'origine s'écrit :

$$X_0 = 4\mathcal{D} + \mathcal{D}_1 + 3\mathcal{D}_2 + 2\mathcal{D}_3 + \mathcal{D}_4 + 2\mathcal{D}_5 + 2\mathcal{D}_6$$

où  $\mathcal{D}$  est la transformée stricte de  $C \times \{0\}/\mathfrak{G}$  et  $\mathcal{D}_1$  correspondant au point singulier  $\mathfrak{p}_1$ . Les droites projectives  $\mathcal{D}_2$ ,  $\mathcal{D}_3$  et  $\mathcal{D}_4$  correspondant au point singulier  $\mathfrak{p}_2$ . Et  $\mathcal{D}_5$ ,  $\mathcal{D}_6$  correspondant respectivement aux points  $\mathfrak{p}_3$  et  $\mathfrak{p}_4$ .

On considère l'action de Galois induite par une structure réelle sur les composantes irréductibles de la fibre singulière. Une composante irréductible de  $X_0$  est réelle ou la conjuguée d'une autre composante de même type et même multiplicité, on a donc  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$ ,  $\mathcal{D}_3$  et  $\mathcal{D}_4$  sont réelles, ainsi on a exactement deux types réelles. Considérons la structure réelle usuelle  $\sigma$  qui envoie  $\mathcal{D}_5$  sur  $\mathcal{D}_6$  pour  $\alpha = 0$ . Et qui laisse fixe globalement  $\mathcal{D}_5$  et  $\mathcal{D}_6$  si  $\alpha \neq 0$ .

Type [ III ] :

La courbe  $C$  est un modèle projectif lisse d'une courbe affine donnée par :

$$y^2 = x^6 + \alpha x^3 + 1$$

L'automorphisme  $g$  est donné par  $g(s, x, y) = (e_3 s, e_3 x, y)$ , et possède quatre points fixes  $p_1 = (0, 0, 1)$ ,  $p_2 = (0, 0, -1)$ ,  $p_3 = (0, p_\infty)$  et  $p_4 = (0, q_\infty)$  dont les deux derniers correspondant au point à l'infini après résolution de singularité. Ainsi  $\mathcal{D}/\mathfrak{G}$  a quatre points singuliers  $\mathfrak{p}_1$ ,  $\mathfrak{p}_2$ ,  $\mathfrak{p}_3$  et  $\mathfrak{p}_4$  correspondant respectivement aux points  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  et  $p_4$ . La fibre singulière au dessus de l'origine s'écrit :

$$X_0 = 3\mathcal{D} + \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 + 2\mathcal{D}_3 + \mathcal{D}_4 + 2\mathcal{D}_5 + \mathcal{D}_6$$

où  $\mathcal{D}$  est une courbe rationnelle et c'est le modèle lisse d'une courbe  $C \times \{0\}/\mathfrak{G}$ . Et les deux courbes lisses  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  correspondant aux deux points singuliers  $\mathfrak{p}_1$  et  $\mathfrak{p}_2$ . Les courbes rationnelles lisses  $\mathcal{D}_3$  et  $\mathcal{D}_4$  (resp.  $\mathcal{D}_5$  et  $\mathcal{D}_6$ ) correspondant au point singulier  $\mathfrak{p}_3$  (resp.  $\mathfrak{p}_4$ ).

Soit  $\tilde{C}$  la courbe projective singulière plane donnée par l'équation affine :

$$y^2 = x^6 + \alpha x^3 + 1$$

En coordonnées homogènes : on pose  $x = \frac{z_1}{z_0}$ ,  $y = \frac{z_2}{z_0}$  et on a :

$$z_0^4 z_2^2 = z_1^6 + \alpha z_0^3 z_1^3 + z_0^6$$



La courbe  $\tilde{C}$  a comme point singulier l'unique point à l'infini  $p = (0 : 0 : 1) \in \{z_2 \neq 0\}$ . On pose  $X = \frac{z_0}{z_2}$ ,  $Y = \frac{z_1}{z_2}$ , l'équation affine dans  $\{z_2 \neq 0\}$  est :

$$X^4 = X^6 + \alpha X^3 Y^3 + Y^6$$

La courbe affine  $\tilde{S}$  donnée par cette équation possède un seul point singulier  $(0, 0)$ .

On considère le bimeromorphisme  $F$  de  $\mathbb{C}^2$  défini par :

$$F(X, Y) = (u, v) = \left( \frac{X}{Y}, \frac{Y^3}{X^2} \right)$$

l'application  $F$  induit une application holomorphe de  $\mathbb{C}^2 - \{XY = 0\}$  dans  $\mathbb{C}^2 - \{uv = 0\}$ . Et la clôture de Zariski de  $F(\tilde{S} - (0, 0))$  est une courbe affine  $S$  donnée par l'équation :

$$u = v^2(1 + \alpha u^2 + u^4)$$

On en déduit que  $S$  est un modèle lisse de  $\tilde{S}$  et les deux points  $p_\infty = (0, 1)$  et  $q_\infty = (0, -1)$  correspondent au point  $(0, 0)$ .

Et enfin  $C = \tilde{C} - p \cup S$  est un modèle non singulier de  $\tilde{C}$ .

Si on considère la structure réelle usuelle  $\sigma$  sur  $\mathfrak{S}$  définie par  $\sigma(s, x, y) = (\bar{s}, \bar{x}, \bar{y})$  alors  $p_1$  et  $p_2$  sont deux points réels. L'involution  $\sigma$  induit sur la carte  $\{z_2 \neq 0\}$  l'involution  $(X, Y) \mapsto (\bar{X}, \bar{Y})$ , qui induit encore la structure réelle sur  $S$  définie par :

$$(u, v) \mapsto (\bar{u}, \bar{v})$$

et on a alors  $p_3$  et  $p_4$  sont deux points réels et dans ce cas toutes les composantes irréductibles de la fibre singulière sont réelles.

Soit  $\sigma_1$  la structure réelle définie sur  $\mathfrak{D}$  par  $\sigma_1(s, x, y) = (\bar{s}, \bar{x}, -\bar{y})$ , on a  $\sigma_1(p_1) = p_2$ , donc  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont conjuguées. L'involution  $\sigma_1$  induit sur la carte  $\{z_2 \neq 0\}$  l'involution  $(X, Y) \mapsto (-\bar{X}, -\bar{Y})$ , qui induit encore la structure réelle sur  $D$  définie par :

$$(u, v) \mapsto (\bar{u}, -\bar{v})$$

et on a alors que  $p_3$  et  $p_4$  sont deux points conjugués et dans ce cas on a le type de configuration réel suivant :

$$X_0 = 3\mathcal{D} + (1 + \sigma_1)\mathcal{D}_1 + 2(1 + \sigma_1)\mathcal{D}_3 + (1 + \sigma_1)\mathcal{D}_4$$

Type [ IV ] :

La courbe  $C$  est un modèle projectif lisse d'une courbe affine donnée par :

$$y^2 = x^6 + \alpha x^3 + 1$$

L'automorphisme  $g$  est donné par  $g(s, x, y) = (e_6 s, e_3 x, -y)$ , et ne possède aucun point fixe. L'automorphisme  $g^2(s, x, y) = (e_6^2 s, e_3^2 x, y)$  possède quatre points fixes équivalents à  $p_1 = (0, 0, 1)$ ,  $p_2 = (0, p_\infty)$ . Et  $g^3(s, x, y) = (e_6^3 s, x, -y)$  possède six points fixes équivalents à  $p_3 = (0, (\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2})^{\frac{1}{3}}, 0)$  et  $p_4 = (0, (\frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2})^{\frac{1}{3}}, 0)$ .

Ainsi  $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$  a quatre points singuliers  $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$  et  $\mathfrak{p}_4$  correspondant respectivement aux  $p_1, p_2, p_3$  et  $p_4$ . La fibre singulière au dessus de l'origine s'écrit :

$$X_0 = 6\mathcal{D} + 4\mathcal{D}_1 + 2\mathcal{D}_2 + 2\mathcal{D}_3 + 3\mathcal{D}_4 + 3\mathcal{D}_5$$

où  $\mathcal{D}$  est la transformée stricte de  $C \times \{0\}/\mathfrak{G}$ . Les deux droites projectives  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  correspondant au point singulier  $\mathfrak{p}_1$ . Et  $\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4$  et  $\mathcal{D}_5$  correspondant respectivement aux points  $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$  et  $\mathfrak{p}_4$ .

Les composantes  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_3$  sont réelles. Les deux composantes  $\mathcal{D}_4$  et  $\mathcal{D}_5$  sont conjuguées par la structure réelle usuelle si  $\alpha = 0$ . Et elles sont réelles sinon. On a donc deux types de configuration réels.

Type [ VII\* ] :

$C$  est un modèle projectif lisse d'une courbe affine donnée par :

$$y^2 = x(x^4 + 1)$$

L'automorphisme  $g$  est donné par  $g(s, x, y) = (e_8 s, ix, e_8^5 y)$ , et possède deux points fixes  $p_1 = (0, 0, 0)$ ,  $p_2 = (0, p_\infty)$  ainsi que  $g^2$  et  $g^3$ . Et  $g^4(s, x, y) = (-s, x, -y)$  possède quatre points fixes équivalents à  $p_3 = (0, e^{\frac{i\pi}{4}}, 0)$ ,  $p_4 = (0, e^{\frac{5i\pi}{4}}, 0)$ . Ainsi  $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$  possède quatre points singuliers  $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$  et  $\mathfrak{p}_4$  correspond respectivement aux points  $p_1, p_2, p_3$  et  $p_4$ . La fibre singulière au dessus de l'origine s'écrit :

$$X_0 = 8\mathcal{D} + 5\mathcal{D}_1 + 2\mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_3 + 7\mathcal{D}_4 + 6\mathcal{D}_5 + 5\mathcal{D}_6 + 4\mathcal{D}_7 + 3\mathcal{D}_8 + 2\mathcal{D}_9 + \mathcal{D}_{10} + 4\mathcal{D}_{11}$$

Une involution sur  $X_0$  transforme une composante irréductible de la fibre en une autre de même multiplicité et de même type. Et deux composantes irréductibles conjuguées coupent une même composante réelle ou deux composantes conjuguées. Donc toutes les composantes irréductibles de la fibre sont réelles . Ainsi on a un seul type de configuration réel.

Type [ VII\* ] :

La courbe  $C$  est un modèle projective lisse d'une courbe affine donnée par :

$$y^2 = x(x^4 + 1)$$

La fibre singulière à l'origine est formée d'une courbe cuspidale et d'une courbe rationnelle lisse donc on a seulement un type de configuration réel.

Type [ V\* ] :

La courbe  $C$  est un modèle projectif lisse d'une courbe affine donnée par :

$$y^2 = x^6 + 1$$

L'automorphisme  $g$  est donné par  $g(s, x, y) = (e_6 s, e_6, -y)$ , et possède deux points fixes  $p_1 = (0, q_\infty)$ ,  $p_2 = (0, p_\infty)$  correspondant au point à l'infini après résolution de singularités, ainsi que  $g^3$ . L'automorphisme  $g^2$  a aussi deux points fixes équivalent à  $(0, 0, 1)$ . Ainsi  $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$  possède trois points singuliers  $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ , et  $\mathfrak{p}_3$  correspondant respectivement aux points  $p_1, p_2$  et  $p_3$ . La fibre singulière au dessus de l'origine s'écrit :

$$X_0 = 6\mathcal{D} + 5\mathcal{D}_1 + 4\mathcal{D}_2 + 3\mathcal{D}_3 + 2\mathcal{D}_4 + \mathcal{D}_5 + 5\mathcal{D}_6 + 4\mathcal{D}_7 + 3\mathcal{D}_8 + 2\mathcal{D}_9 + \mathcal{D}_{10} + 2\mathcal{D}_{11}$$

où  $\mathcal{D}$  est la transformée stricte de  $C \times \{0\}/\mathfrak{G}$ . les composantes  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4$  et  $\mathcal{D}_5$  correspondent au point singulier  $\mathfrak{p}_1$ . Et les composantes  $\mathcal{D}_6, \mathcal{D}_7,$

$\mathcal{D}_8$ ,  $\mathcal{D}_9$  et  $\mathcal{D}_{10}$  correspondant au point singulier  $\mathfrak{p}_2$ .  $\mathcal{D}_{11}$  correspondant au point  $\mathfrak{p}_3$ . Soit  $\tilde{C}$  la courbe projective singulière plane donnée par l'équation affine :

$$y^2 = x^6 + 1$$

En coordonnées homogènes : on pose  $x = \frac{z_1}{z_0}$ ,  $y = \frac{z_2}{z_0}$  et on a :

$$z_0^4 z_2^2 = z_1^6 + z_0^6$$

La courbe  $\tilde{C}$  a uniquement comme point singulier le point à l'infini  $p = (0 : 0 : 1) \in \{z_2 \neq 0\}$ . On pose  $X = \frac{z_0}{z_2}$ ,  $Y = \frac{z_1}{z_2}$ , l'équation affine dans  $\{z_2 \neq 0\}$  est :

$$X^4 = X^6 + Y^6$$

La courbe affine  $\tilde{S}$  donnée par cette équation a un seul point singulier  $(0, 0)$ . On considère le biméromorphisme  $F$  de  $\mathbb{C}^2$  défini par :

$$F(X, Y) = (u, v) = \left( \frac{X}{Y}, \frac{Y^3}{X^2} \right)$$

l'application  $F$  induit une application holomorphe de  $\mathbb{C}^2 - \{XY = 0\}$  dans  $\mathbb{C}^2 - \{uv = 0\}$ . Et la clotûre de Zariski de  $F(\tilde{S} - (0, 0))$  est une courbe affine  $S$  donnée par l'équation :

$$u = v^2(1 + u^4)$$

On a alors  $S$  est un modèle lisse de  $\tilde{S}$  et les deux points  $p_\infty = (0, 1)$  et  $q_\infty = (0, -1)$  correspond au point  $(0, 0)$ .

Et enfin  $C = \tilde{C} - p \cup S$  est un modèle non singulier de  $\tilde{C}$ .

On considère la structure réelle usuelle  $\sigma$  sur  $\mathfrak{S}$  définie par  $\sigma(s, x, y) = (\bar{s}, \bar{x}, \bar{y})$ . L'involution  $\sigma$  induit sur la carte  $\{z_2 \neq 0\}$  l'involution  $(X, Y) \mapsto (\bar{X}, \bar{Y})$ , qui induit encore la structure réelle sur  $S$  définie par :

$$(u, v) \mapsto (\bar{u}, \bar{v})$$

et on alors  $p_1$  et  $p_1$  sont deux points réels et dans ce cas tout les composantes irréductible de la fibre singulière sont réelles.

Soit  $\sigma_1$  la structure réelle définie sur  $\mathfrak{D}$  par  $\sigma_1(s, x, y) = (\bar{s}, \bar{x}, -\bar{y})$ . L'involution  $\sigma_1$  induit sur la carte  $\{z_2 \neq 0\}$  l'involution  $(X, Y) \mapsto (-\bar{X}, -\bar{Y})$ , qui induit encore la structure réelle sur  $S$  définie par :

$$(u, v) \mapsto (\bar{u}, -\bar{v})$$

et on alors  $p_1$  et  $p_2$  sont deux points conjuguées et dans ce cas on le type de configuration réel suivant :

$$X_0 = 6\mathcal{D} + \mathcal{D}_{11} + (1 + \sigma_1) \sum_{i=1}^5 \mathcal{D}_i$$

Type [ V ] :

La courbe  $C$  est un modèle projectif lisse d'une courbe affine donnée par :

$$y^2 = x^6 + 1$$

L'automorphisme  $g$  est donné par  $g(s, x, y) = (e_6 s, e_6 y)$ , et possède deux points fixes  $p_1 = (0, 0, 1)$  et  $p_2 = (0, 0, -1)$ . L'automorphisme  $g^2$  possède

deux points fixes, autres que  $p_1$  et  $p_2$ , équivalents à  $p_3 = (0, p_\infty)$  où  $p_\infty$  est le point à l'infini de la courbe  $C$ . Et enfin  $g^3$  ne possède pas de points fixes autres que  $p_1 = (0, 0, 1)$  et  $p_2 = (0, 0, -1)$ . Donc le quotient  $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$  possède trois points singuliers  $\mathfrak{p}_1$ ,  $\mathfrak{p}_2$ , et  $\mathfrak{p}_3$  correspondant respectivement aux points  $p_1$ ,  $p_2$  et  $p_3$ . Soit  $X_3$  la surface obtenue après la résolution canonique des singularités. La fibre singulière de  $X_3$  au dessus de l'origine s'écrit :

$$X_0 = 6\mathcal{D} + \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 + 4\mathcal{D}_3 + 2\mathcal{D}_4$$

où  $\mathcal{D}$  est une courbe rationnelle lisse.  $C'$  est la transformée stricte de  $C \times \{0\}/\mathfrak{G}$ . Les courbes  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_4$  correspondent aux points singuliers  $\mathfrak{p}_1$  et  $\mathfrak{p}_2$  respectivement. Les droites projectives  $\mathcal{D}_2$ ,  $\mathcal{D}_3$  correspondent au point singulier  $\mathfrak{p}_2$ . Les composantes irréductible  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}_3$  et  $\mathcal{D}_4$  sont réelles,  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont complexes conjuguées ou toutes les deux réelles.

Mais on a  $\mathcal{D}^2 = -1$ , c'est donc une  $(-1)$ -courbe, alors il existe une surface lisse  $X_2$  et une application holomorphe  $\mu : X_3 \rightarrow X_2$  tel que  $\mu(\mathcal{D})$  est un point lisse  $q$  [18, §7]. On pose  $\mathcal{D}'_i = \mu(\mathcal{D}_i)$  pour  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , on a  $\mathcal{D}'_3$  est une  $(-1)$ -courbe donc il existe une surface lisse  $X_1$  et une application holomorphe  $\mu' : X_2 \rightarrow X_1$  tel que  $\mu'(\mathcal{D}'_3)$  est un point lisse  $q'$ . On pose  $\mathcal{D}''_i = \mu'(\mathcal{D}'_i)$  pour  $i \in \{1, 2, 4\}$ , on contracte de nouveau la  $(-1)$ -courbe  $\mathcal{D}''_4$  et enfin on obtient le modèle minimal non singulier  $X$  de  $\mathfrak{D}/\mathfrak{G}$  dont la fibre singulière à l'origine est la réunion de deux courbes rationnelles lisses qui s'intersectent en un point double ordinaire. On a donc deux types réels.  $\square$

**Remarque 3.2.** Les Types  $[IV - i]$  et  $[VIII - i]$ ,  $i = 1, \dots, 3, 4$ , se traitent de la même manière.

**Fibres singulières de type elliptique 2.** Les notations sont celles du paragraphe 2.

**Proposition 3.3.** Il existe un voisinage saturé  $V$  de  $X_0$  dans  $X$  tel que  $\pi^{-1}(\pi(V) \setminus \{0\})$  est analytiquement isomorphe à la surface affine définie dans  $\mathbf{C}^2 \times D \setminus \{0\}$  par l'équation :

$$y = a(t)(a_0(t)x^6 + a_1(t)x^5 + \dots + a_6(t)) = a(t)P_t(x)$$

où  $a$  est une fonction méromorphe réelle et les  $a_i$  sont des fonctions holomorphes réelles.

**Proposition 3.4.** Si la fibre singulière  $X_0$  du pinceau  $\pi : X \rightarrow D$  est de type elliptique 2, alors il existe un pinceau en courbes de genre 2,  $\hat{\pi} : Y \rightarrow D$  définie par une équation :

$$y^2 = a(t)P_t(x)$$

tel que la fibre singulière, du modèle minimal  $\tilde{Y}$  de  $Y$  est de même type de configuration complexe que  $X_0$ , et  $P_0(x)$  a une racine de multiplicité 3 ou 6.

**Notation 3.5.** (1): Soit  $a$  une fonction méromorphe au voisinage de 0, il existe un unique  $\alpha \in \mathbf{Z}$  et une unique fonction holomorphe  $b$  tels que  $a = t^\alpha b$  et  $b(0) \neq 0$ . L'entier  $\alpha$  est noté  $v(a)$ , on vient alors de définir une valuation discrète  $v$  sur le corps des fonctions méromorphes au voisinage de 0.

(2): Soit  $Q(x) = a_0(t)x^6 + a_1(t)x^5 + \dots + a_6(t)$ .

Pour  $0 \leq j \leq 3$ , on note

$$\theta_j(Q) = \min \left\{ \frac{v(a_i)}{i-j} \text{ tel que } j+1 \leq i \leq 6 \right\}$$

Pour toute fonction méromorphe  $a$ , on note

$$\delta(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2|v(a) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Remarque 3.6.** Avec les notations de la proposition précédente, si  $P_0(x)$  a une racine de multiplicité 3 alors  $\tilde{Y}_0$  est de type  $[K_1-K_2-m]$  où  $K_1$  et  $K_2$  sont des symboles de Kodaira. Et si  $P_0(x)$  a une racine de multiplicité 6 alors  $\tilde{Y}_0$  est de type  $[2K_1-m]$  [15].

Cas où  $P_0$  admet une racine triple.

**Lemme 3.7.** Si  $P_0$  admet une racine triple alors  $Y$  admet une équation de type  $z^2 = a(t)t^{3r}S_t(u)$  relative à cette racine telle que  $S_t(u) \in \mathbf{C}[u]$ ,  $\deg(S_0(u)) = 3$ ,  $0 \leq \theta_3(S_t) < 1$  et  $S_0(u)$  n'est pas un cube si  $\theta_3(S_t) = 0$ .

*Démonstration.* Supposons que  $P_0$  admet une racine triple  $e$ . Il existe  $r \in \mathbf{N}$  relatifs à  $e$  tel que si on pose  $x = t^r u + e$ , alors on trouve une équation  $z^2 = a(t)t^r S_t(u)$  satisfaisant les conditions du lemme. L'entier  $r$  est déterminé comme suit :

Soit  $Q_t(x) = P_t(x + e)$ .

Si  $\theta_3(Q_t) < 1$  on prend  $r = 0$ .

Sinon on pose  $r_1 = [\theta_3(Q_t)]$  et  $Q_t^1(x_1) = Q_t(t^{r_1}x_1)$ , on a une équation :

$$z^2 = a(t)t^r Q_t^1(x_1)$$

avec  $\deg(Q_t^1) = 3$  et  $0 \leq \theta_3(Q_t^1) < 1$ .

Si  $\theta_3(Q_t^1) \neq 0$  ou  $Q_0^1$  n'est pas un cube, on prend  $r = r_1$ .

Si  $\theta_3(Q_t^1) = 0$  et  $Q_0^1$  est un cube, on note  $e_1$  la racine triple de  $Q_0^1$  et on pose  $Q_t^2(x_2) = Q_t^1(x_2 + e_1)$  et on continue avec l'équation  $z^2 = a(t)t^r Q_t^1(x_1)$ , ce processus s'arrête après un nombre fini de fois. On trouve alors une suite finie  $r_1, r_2, \dots, r_k$ . Finalement on pose  $r = r_1 + \dots + r_k$ .  $\square$

**Définition 3.8.** On suppose donnés  $S_t$  et  $r$ . On définit  $T_t$  et  $s$  de la façon suivante

- Si  $P_0$  a une autre racine triple, on détermine  $s$  et  $T_t$  comme  $r$  et  $S_t$  relativement à l'autre racine triple.
- Si  $\deg(P_0(x)) = 3$  on remplace  $x$  par  $x^{-1}$  et  $z$  par  $x^{-3}z$ . Alors 0 sera racine triple de  $S_0$ . On cherche  $r$  et  $T_t$  relativement à cette racine comme précédemment.
- Si  $S_0$  a une seule racine triple  $x_1(0)$  et  $\deg(S_0(u)) > 3$  on prend  $s = 0$  et  $T = x^6 P_t(u^{-1} + x_1(t))$

On peut alors reconnaître le type de la fibre singulière  $\tilde{Y}_0$  en utilisant l'algorithme suivant [15] :

- Si  $S_0$  est à racines simples alors  $K_1 = I_0$  si  $2|v(a(t)t^r)$  et sinon  $K_1 = I_0^*$ .
- Si  $\theta_3(S_t) = \frac{1}{2}$  alors  $K_1 = III$  si  $2|v(a(t)t^r)$  et sinon  $K_1 = III^*$ .

- Si  $\theta_3(S_t) = \frac{1}{3}$  alors  $K_1 = \text{II}$  si  $2|v(a(t)t^r)$  et sinon  $K_1 = \text{IV}^*$ .
- Si  $\theta_3(S_t) = \frac{2}{3}$  alors  $K_1 = \text{IV}$  si  $2|v(a(t)t^r)$  et sinon  $K_1 = \text{II}^*$ .

De même, relativement à  $s$  et  $T_t$ , on détermine  $K_2$ . Et l'entier  $m$  est égale à  $(r - \delta(a(t)t^r) + s - \delta(a(t)t^s))/2$ .

**Remarque 3.9.** *Le cas où  $S_0$  admet une racine double est exclu car il nous donne  $K_1 = I_k$  ou  $K_1 = I_k^*$  avec  $k > 0$ , et donc la fibre singulière  $\tilde{Y}_0$  n'est jamais de type elliptique 2.*

On se donne une courbe  $\Gamma$ , alors on note par  $K(\Gamma)$  une courbe de type  $K$  (symbole de Kodaira pour les modèles minimaux de courbes elliptiques) dont on a remplacé une de ses composantes irréductibles de multiplicité 1 par  $\Gamma$ .

La configuration d'une fibre de type  $[K_1-K_2-m]$  est comme suit :

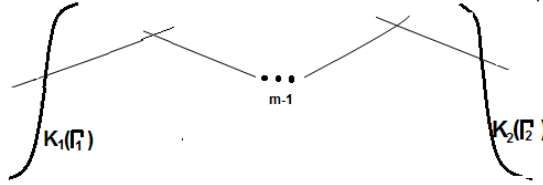


FIGURE 5.

On suppose maintenant que  $\pi$  est réelle. Donc la fibre singulière  $X_0$  au dessus de 0 est globalement réelle. On s'intéresse tout d'abord au cas où  $X_0$  est de type  $[K_1-K_1-m]$ . Dans ce cas si  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont de même type (au sens que  $(\Gamma_1 \cdot K_X) = (\Gamma_2 \cdot K_X)$ ,  $\Gamma_1^2 = \Gamma_2^2$  et  $p(\Gamma_1) = p(\Gamma_2)$  où  $K_X$  désigne le diviseur canonique de  $X$  et  $p$  le genre arithmétique), alors par action de Galois sur  $X_0$  on a ou bien  $K_1(\Gamma_1)$  et  $K_1(\Gamma_2)$  sont conjugués ou bien ils sont globalement réelles.

**$K_1(\Gamma_1)$  et  $K_1(\Gamma_2)$  sont conjugués :** On commence par construire des exemples où  $K_1(\Gamma_1)$  et  $K_1(\Gamma_2)$  sont conjugués, avec  $K_1 \in \{I_0, I_0^*, \text{II}, \text{III}, \text{IV}, \text{II}^*, \text{III}^*, \text{IV}^*\}$ . Dans ce cas  $P_0$  admet deux racines triples conjuguées et si  $E_1$  et  $E_2$  désignent les deux composantes irréductibles de la fibre singulière du pinceau stable associé à  $\pi$  alors  $E_1$  et  $E_2$  sont deux courbe elliptiques conjuguées. Et plus que ça, si on note  $(T_t, s)$  et  $(S_t, r)$  les couples définis précédemment relativement aux deux racines triples de  $P_0$  alors

$$\begin{cases} r = s \\ \frac{r}{S_t(u)} = T_t(\bar{u}) \end{cases}$$

**Proposition 3.10.** *Si le pinceau  $\hat{\pi}: Y \rightarrow D$  est défini par une équation de l'un des types suivants :*

- (1)  $y^2 = t^\epsilon((x-i)^3 + \alpha t^{2m}(x-i) - it^{3m})((x+i)^3 + \bar{\alpha} t^{2m}(x+i) + it^{3m})$
- (2)  $y^2 = t^\epsilon((x-i)^3 - it^{2m+1}(x-i))((x+i)^3 + it^{2m+1}(x+i))$
- (3)  $y^2 = t^\epsilon((x-i)^3 - it^{3m+1})((x+i)^3 + it^{3m+1})$

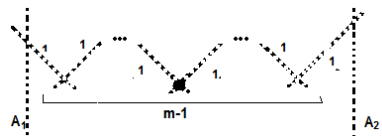
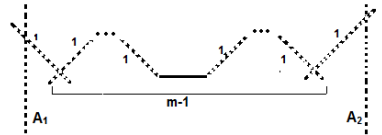
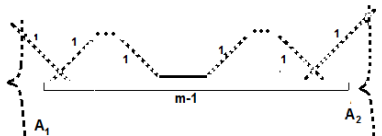
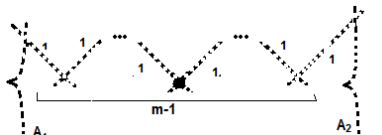
$$(4) \ y^2 = t^\epsilon ((x-i)^3 - it^{3m+2})((x+i)^3 + it^{3m+2})$$

où  $\epsilon \in \{0, 1\}$ . Alors  $\tilde{Y}_0$  a une configuration de type décrit par la figure 5 dont  $K_1(\Gamma_1)$  et  $K_1(\Gamma_2)$  sont conjugués.

Dans les tableaux ci-dessous nous donnons les différents types de configuration réels possibles avec des exemples définis par des équations hyperelliptiques

$$y^2 = t^\epsilon R_t(x)Q_t(x)$$

et sous la forme de l'un des types donnés dans la proposition précédente.

Type de config. complexe	type de configuration réel	exemple
$[I_0-I_0-m]$ , m pair		$R_t(x) = (x+i)^3 - it^{2m}(x+i) + it^{3m}$ $Q_t(x) = (x-i)^3 + it^{2m}(x-i) - it^{3m}$ $\epsilon = 0$
$[I_0-I_0-m]$ , m impair		$R_t(x) = (x-i)^3 + it^{2m}(x-i) - it^{3m}$ $Q_t(x) = (x+i)^3 - it^{2m}(x+i) + it^{3m}$ $\epsilon = 1$
$[II-II-m]$ , m pair		$R_t(x) = (x+i)^3 + it^{3m+1}$ et $Q_t(x) = (x-i)^3 - it^{3m+1}$ $\epsilon = 1$
$[II-II-m]$ , m impair		$R_t(x) = (x+i)^3 + it^{3m+1}$ et $Q_t(x) = (x-i)^3 - it^{3m+1}$ $\epsilon = 1$

[III-III- $m$ ], $m$ pair		$R_t(x) = (x - i)^3 + it^{2m+1}(x - i)$ $Q_t(x) = (x + i)^3 - it^{2m+1}(x + i)$  $\epsilon = 0$
[III-III- $m$ ], $m$ impair		$R_t(x) = (x - i)^3 + it^{2m+1}(x - i)$ $Q_t(x) = (x + i)^3 - it^{2m+1}(x + i)$  $\epsilon = 1$
[IV-IV- $m$ ], $m$ pair		$R_t(x) = (x + i)^3 + it^{3m+2}$ et $Q_t(x) = (x - i)^3 - it^{3m+2}$  $\epsilon = 0$
[IV-IV- $m$ ], $m$ impair		$R_t(x) = (x - i)^3 - it^{3m+2}$ et $Q_t(x) = (x + i)^3 + it^{3m+2}$  $\epsilon = 1$
[I $_0^*$ -I $_0^*$ - $m$ ], $m$ pair		$R_t(x) = (x + i)^3 - it^{2m}(x + i) + it^{3m}$ $Q_t(x) = (x - i)^3 + it^{2m}(x - i) - it^{3m}$  $\epsilon = 1$
[I $_0^*$ -I $_0^*$ - $m$ ], $m$ impair		$R_t(x) = (x - i)^3 + it^{2m}(x - i) - it^{3m}$ $Q_t(x) = (x + i)^3 - it^{2m}(x + i) + it^{3m}$  $\epsilon = 0$



TABLE 3.6.

**$K_1(\Gamma_1)$  et  $K_2(\Gamma_2)$  sont globalement réelles :** On garde toujours les mêmes notations. Si  $P_0$  admet une racine triple réelle alors  $K_1(\Gamma_1)$  et  $K_2(\Gamma_2)$  sont globalement réelles. Il reste à déterminer l'action de Galois sur les composantes irréductibles de  $K_1(\Gamma_1)$  et celles de  $K_2(\Gamma_2)$ .

**Lemme 3.11.** *Si  $K_1$  (resp.  $K_2$ ) est de type  $I_0$ , II, III,  $II^*$  ou  $III^*$  alors les composantes irréductibles de  $K_1(\Gamma_1)$  (resp.  $K_2(\Gamma_2)$ ) sont réelles par action de Galois.*

Si  $P_0$  admet une racine triple réelle et si la fibre singulière est l'une des types figurés dans le tableau suivant alors toutes ses composantes irréductibles sont réelles.

$[I_0-I_0-m]$	$[II-II-m]$	$[III-III-m]$	$[II^*-II^*-m]$	$[III^*-III^*-m]$
$[I_0-II-m]$	$[I_0-III-m]$	$[I_0-II^*-m]$	$[I_0-III^*-m]$	$[II-III-m]$
$[II-II^*-m]$	$[II-III^*-m]$	$[III-II^*-m]$	$[III-III^*-m]$	$[II^*-III^*-m]$

**Lemme 3.12.** *Si  $K_1$  (resp.  $K_2$ ) est de type  $I_0^*$ , IV ou  $VI^*$  alors on a exactement deux types de configuration réels réalisables de  $K_1(\Gamma_1)$  (resp.  $K_2(\Gamma_2)$ ).*

*Démonstration.* Cas où  $K = I_0^*$  :

On considère l'équation  $y^2 = (x^3 + \alpha t^{4m+2}x + t^{6m+3})R_t(x) = P_t(x)$  où  $R_t$  est unitaire, de degré 1, 2 ou 3 et  $R_0(0) \neq 0$ . Si  $K$  est le symbole de Kodaira relative à 0 comme racine triple de  $P_t$ . Alors  $K = I_0^*$  et si  $\alpha = 1$  alors le discriminant  $\Delta$  de l'équation  $x^3 + \alpha t^2x + t^3 = 0$  est négatif donc les composantes irréductibles de  $K(\Gamma)$  sont réels. Si  $\alpha = -2$  alors  $\Delta > 0$  et  $K(\Gamma)$  a deux composantes conjugués et les autres sont réelles.

Cas où  $K = IV$  :

On considère l'équation  $y^2 = (x^3 + \alpha t^{6m+2})R_t(x) = P_t(x)$  où  $R_t$  est unitaire, de degré 1, 2 ou 3 et  $R_0(0) \neq 0$ . Soit  $K$  le symbole de Kodaira relative à 0 comme racine triple de  $P_t$  et  $\alpha = \pm 1$ . Alors  $K = IV$  et si  $\alpha = -1$ , les composantes irréductibles de  $K(\Gamma)$  sont réels. Si  $\alpha = 1$  alors  $K(\Gamma)$  a deux composantes conjugués et une composantes réelle qui est  $\Gamma$ .

Cas où  $K = VI^*$  :

l'équation  $y^2 = (x^3 + \alpha t^4)R_t(x) = P_t(x)$  où  $R_t$  est unitaire, de degré 1, 2 ou 3 et  $R_0(0) \neq 0$ . Soit  $K$  est le symbole de Kodaira relative à 0 comme racine triple de  $P_t$ . Alors  $K = VI^*$  et on a, par action de Galois sur les composantes irréductibles de  $K(\Gamma)$ , deux formes possibles de configuration réel. Et tous les deux sont réalisable et dépendent de la nature des solutions de l'équation  $X^2 + \alpha = 0$  (réelles ou complexes conjugués).  $\square$

*Cas de racine de multiplicité 6.* L'équation  $y^2 = aP_t(x)$  est celle définie dans la Proposition 3.4.

**Lemme 3.13.** *Si  $P_0$  admet une racine de multiplicité 6 alors  $Y$  admet une équation de type  $z^2 = a(t)t^{6r}S_t(u)$  relative à cette racine telle que  $S_t(u) \in \mathbf{C}[u]$ ,  $\deg(S_0(u)) = 6$  et  $\theta_0(S_t) = \frac{1}{2}$ .*

On pose  $z = t^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^3z_1$  et  $u = t^{\frac{1}{2}}u_1$ . On obtient une équation

$$z^2 = H_t(u)$$

tel que  $H_t \in \mathbf{C}[t^{\frac{1}{2}}]$  et  $H_0(u_1)$  est le cube d'un polynôme séparable de degré 2.

On désigne par  $\mathcal{X}'$  le modèle minimal du pinceau défini par l'équation  $z^2 = H_t(u)$ . On refait le même démarche de le paragraphe précédent. Finalement la fibre singulière de  $\mathcal{X}'$  est de type  $[K_1-K_1-2m]$  et ayant la configuration complexe suivante :

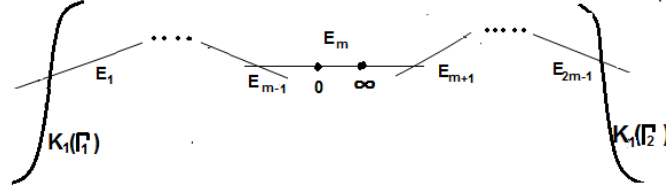


FIGURE 6.

On a par construction, une involution sur la fibre singulière laissant globalement invariant la  $(-2)$ -courbe  $E_m$  et échange les reste des composantes irréductibles de la fibre. Cette involution fixe les deux points 0 et  $\infty$  de la composante rationnelle  $E_m$ . Le quotient par cette involution a deux points singuliers de type  $A_1$  qui donne, après résolution, deux courbes rationnelles d'auto-intersection  $(-2)$ , [23, p. 80].

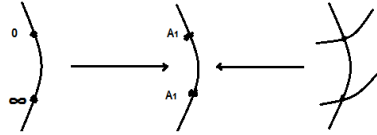


FIGURE 7.

On considère le corps de fraction  $\mathbf{C}(t^{\frac{1}{2}})$  de  $\mathbf{C}[t^{\frac{1}{2}}]$ . Il lui correspond une surface de Riemann qui n'est autre que l'uniformisation de la racine carrée.

#### Descente sur $\mathbf{R}$ :

On a besoin de considérer deux cartes pour l'uniformisation de la racine carrée, il y on a deux possibilités à isomorphisme près de descente sur  $\mathbf{R}$ . Une d'eux est telle que sa partie réelle est non vide. On utilise cette dernière comme une structure réelle de la base de la fibration.

Rappelons que si  $\pi: X \rightarrow D$  est un pinceau en courbes de genre 2, alors il existe un  $\mathbf{P}^1$ -fibré  $\mathbf{P}$  et une application rationnelle  $\phi: X \rightarrow \mathbf{P}$  au dessus de  $D$ , qui est un revêtement double ramifié le long d'une courbe sextigonale  $\mathcal{B}$  ayant seulement des singularités de types  $((0), (I_k), (II_k), (III_k), (IV_k), (V))$  [10].

Si  $\psi: \tilde{P} \rightarrow P$  est l'éclatement des points singuliers de  $\mathcal{B}$ , alors on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \tilde{\mathbf{P}} \\
 \rho \downarrow & & \downarrow \psi \\
 X & \xrightarrow{f} & \mathbf{P}
 \end{array}$$

Tel que  $\tilde{\phi}$  soit un revêtement double sur  $\tilde{\mathbf{P}}$ ,  $\tilde{X}$  une surface lisse et  $\rho$  est un morphisme birationnel.

Dans le cas où la courbe  $\mathcal{B}$  admet une singularité de type  $(\text{II}_k)$  ou  $(\text{III}_k)$  dans une fibre  $F$  (qui est notre cas) et si  $\tilde{F}$  est la transformée stricte de  $F$  par  $\psi$ , alors la composante  $E_m$  dans la figure 6 est l'image réciproque de  $\tilde{F}$  par le revêtement double  $\tilde{\phi}$  car on a un nombre impair de  $(-2)$ -courbes, pour plus de détails voir [27].

$\mathbf{P}$  est muni d'une structure réelle, et cette dernière induit, à isomorphisme près, deux structures réelle sur  $E_m$ . L'une des deux fixe 0 et  $\infty$  et l'autre envoie 0 sur  $\infty$ . Les deux structures passent aux quotients, et les deux  $(-2)$ -courbes qui apparaissent après résolutions des deux points singuliers du quotient sont réelles ou conjuguées. Finalement, on obtient les deux possibilités de type de configuration réel, de la fibre singulière de  $\mathcal{X}$ , suivantes : La partie

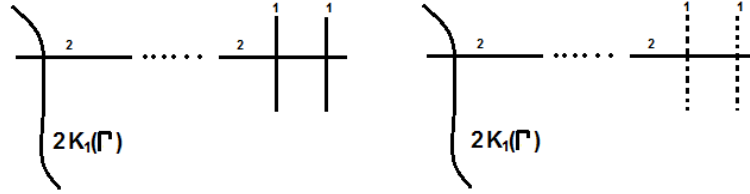


FIGURE 8.

$K_1(\Gamma)$  de la fibre est globalement invariante, et l'action de Galois sur cette partie se déduit du paragraphe 3.

**Remarque 3.14.** [6, §.4.3.1] Si on désigne par  $S^2$  la sphère de Riemann et  $\hat{\sigma}: S^2 \rightarrow S^2$ ,  $z \mapsto -\frac{1}{\bar{z}}$ . Alors si  $C \rightarrow S^2$  est un revêtement double ramifié en  $2g + 2$  points,  $\hat{\sigma}$  ne se relève pas en une involution sur  $C$  pour  $g$  pair.

## RÉFÉRENCES

- [1] Akriche, M. , Moulahi, S. : *Invariants réels d'un pinceau en courbes de genre 2*, En préparation.
- [2] Akriche, M. , Smirani M. : *Real elliptic surfaces with double section and real tetragonal curves* Bull. Belg. Math. Soc. - Simon Stevin 19, No. 3, 445-460 (2012). ISSN 1370-1444
- [3] Akriche, M. , Mangolte, F. : *Nombres de Betti des surfaces elliptiques réelles*. Beiträge Zur algebra and geometrie, vol 49, n°1, pp 153-164(2008).
- [4] Bihan, F., Mangolte, F. : *Topological types of real regular elliptic surfaces*, Geometriae Dedicata 127 (2007), 57-73.
- [5] Bolza, O. : *On Binary Sextics with Linear Transformations into Themselves*, American Journal of Mathematics, Vol. 10, No. 1 , pp. 47-70, (1887).

- [6] Bujalance, E., Cirre F. J., Gamboa J. M., Gromadzki, G. : *Symmetries of compact Riemann surfaces*, Springer, (2007).
- [7] Degtyarev, A., Itenberg, I., Kharlamov, V. : *On deformation types of real elliptic surfaces*, Amer. J. Math. 130 (2008), no. 6, 1561-1627.
- [8] Deligne, P., Mumford, D. : *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci. 36, pp. 75-110 (1969).
- [9] Griffiths, P., Harris, J. : *Principles of algebraic geometry*, John Wiley and Sons, New York Chichester Brisbane Toronto, (1978).
- [10] Horikawa, E. : *On algebraic surfaces with pencils of curves of genus 2*, In Complex Analysis and Algebraic Geometry, a volume dedicated to Kodaira, pp. 79-90, Cambridge (1977).
- [11] Itaka, S. : *On the degenerates of normally polarized abelian variety of dimension 2 and an algebraic curve of genus two*, Master degree thesis, University of Tokyo, (1967).
- [12] Kobayashi, S. : *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings*, New York, Marcel Dekker, Inc., (1970).
- [13] Kodaira, K. : *On compact complex analytic surfaces*, I, Ann. Math. 71, pp. 111-162 (1960). II, Ann. Math. 77, pp. 563-626 (1963). III, Ann. Math. 78, pp. 295-626 (1963).
- [14] Liu, Q. : *Courbes stables de genre 2 et leur schéma de modules*, Math. Ann. 295, pp. 201-222 (1993).
- [15] Liu, Q. : *Algebraic Geometry and Arithmetic curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics (2006).
- [16] Liu, Q. : *Modèles minimaux des courbes de genre 2*, für die reine und angewandte Mathematik, 453 (1994), 137-164.
- [17] Mangolte, F. : *Surfaces elliptiques réelles et inégalité de Ragsdale-Viro*, Math. Z. 235, 213-226 (2000).
- [18] Namikawa, Y., Ueno, K. : *On fibers in families of curves of genus two I, singular fibers of elliptic type*, in Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in honor of Y. Akizuki (Y. Kusunoki, S. Mizohata, M. Nagata, H. Toda, M. Yamaguchi, H. Yoshizawa, eds.) pp. 297-371, (1973).
- [19] Namikawa, Y., Ueno, K. : *The complete classification of fibres in pencils of curves of genus two*, Springer Verlag, pp. 143-186 (1973).
- [20] Ogg, A. P. : *On pencils of curves of genus two*, Topology, 5 pp. 355-362, (1966).
- [21] Persson, U. : *Chern invariants of surfaces of general type*, Ann. J. Math., 28 : pp. 377-404, 1906. Compositio Mathematica, tome 43, N1, P. 3-58 (1981).
- [22] Silhol, R. : *Real algebraic surfaces*, Lect. Notes Math. Vol. 1392. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1989).
- [23] Slodowy, P. : *Simple Singularities and Simple Algebraic Groups*, Springer Lecture Notes in Math., (1980).
- [24] Ueno, K. : *On fibre spaces of normally polarized abelian varieties of dimension two, II. Singular fibres of the first kind*, J. Fac. Sci. Tokyo 19, pp. 163-199 (1972).
- [25] Viehweg, E. : *Invarianten der degenerierten Fasern in lokalen Familien von Kurven*, J. Reine Angew. Math. 293, 284-308 (1977).
- [26] Voisin, C. : *Espaces de modules et construction d'invariants en géométrie*, CNRS et IHÉS.
- [27] Xiao, G. : *Surfaces fibrées en courbes de genre deux*, Berlin : Springer-Verlag, (1985).