



HAL
open science

Application de la décomposition de Hodge -Helmholtz discrète aux écoulements incompressibles

Jean-Paul Caltagirone

► **To cite this version:**

Jean-Paul Caltagirone. Application de la décomposition de Hodge -Helmholtz discrète aux écoulements incompressibles. 2015. hal-01099958

HAL Id: hal-01099958

<https://hal.science/hal-01099958>

Preprint submitted on 5 Jan 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Application de la décomposition de Hodge - Helmholtz discrète aux écoulements incompressibles

Jean-Paul Caltagirone

Université de Bordeaux
Institut de Mécanique et d'Ingénierie
Département TREFLE, UMR CNRS n° 5295
16 Avenue Pey-Berland, 33607 Pessac Cedex
calta@ipb.fr

Résumé

La contrainte d'incompressibilité associée aux équations de la mécanique des fluides est assurée par une méthode originale de projection basée sur des concepts introduits en mécanique des milieux discrets [6]. Les résultats d'une décomposition de Hodge-Helmholtz d'un champ synthétique montrent que l'on peut retrouver les composantes solénoïdale et irrotationnelle du champ initial ainsi que les potentiels scalaire et vectoriel. Les conditions aux limites du problème physique sont aussi retrouvées sur le champ à divergence nulle à l'issue du processus de projection. La comparaison des résultats avec ceux obtenus à l'aide de la projection scalaire et de la projection vectorielle permet de mettre en évidence l'intérêt de l'approche proposée.

Mots clés

Méthodes de projection, décomposition de Hodge-Helmholtz discrète, mécanique des milieux discrets, équations de Navier-Stokes, écoulements incompressibles.

Application of Discrete Hodge-Helmholtz Decomposition to incompressible flows

Jean-Paul Caltagirone

Université de Bordeaux
Institut de Mécanique et d'Ingénierie
Département TREFLE, UMR CNRS n° 5295
16 Avenue Pey-Berland, 33607 Pessac Cedex
calta@ipb.fr

Abstract

The incompressibility constraint associated with the equations of fluid mechanics is provided by an original vector discrete projection method (VDP) based on concepts introduced in discrete mechanics [6]. The results of a Discrete Hodge-Helmholtz Decomposition of a synthetic field show that one can find the divergence-free and curl-free components of the initial field as well as the scalar and vector potentials. The boundary conditions of the physical problem are recovered on the divergence-free field at the end of the projection process. Comparing the results with those obtained using the scalar and vector projection allows to highlight the interest of the proposed approach.

Keywords

Projection methods, Discrete Hodge-Helmholtz Decomposition, Discrete Mechanics, Navier-Stokes equation, Incompressible flows.

1 Introduction

La résolution des équations de la mécanique des fluides incompressibles, équations de Navier-Stokes ou équation du mouvement issue de la mécanique des milieux discrets [6] peut être réalisée par un grand nombre de méthodes et d’algorithmes. La plus utilisée est certainement la méthode de projection qui consiste à fragmenter la résolution en deux étapes, une prédiction suivie d’une seconde étape de projection sur un espace à divergence nulle. On trouvera de nombreux articles sur le sujet dont une revue exhaustive de Guermond et al. [11]. Depuis les années 60 et les articles de Chorin [9] et Temam [13] une grande variété d’algorithmes ont été développées principalement pour améliorer les ordres de convergence en temps. Parallèlement aux développements des techniques les preuves mathématiques d’existence, de stabilité, de convergence et d’estimation d’erreurs sont venues formaliser de manière complète le contexte théorique.

Il est important de rappeler que l’équation du mouvement et sa contrainte, l’incompressibilité, peuvent être résolues exactement à l’aide de méthodes couplées dont l’une des plus efficace est la méthode du lagrangien augmenté [10]. Même si la version initiale itérative reste coûteuse les versions préconditionnées [14] sont très compétitives par rapport aux méthodes de projection scalaires.

Le point de vue adopté ici est très différent ; il suppose que l’étape de projection est un processus purement cinématique qui s’adresse à un champ de vitesse \mathbf{V} issu d’une quelconque étape de prédiction où les contributions solénoïdale et irrotationnelle sont présentes [1]. Toute la physique contenue dans la résolution des équations du mouvement est uniquement concentrée dans cette étape de prédiction. Le résultat de cette première phase est un champ de vitesse qui n’est pas à divergence nulle principalement à cause de la méconnaissance du champ de pression à cet instant mais aussi parce que le résidu de l’équation du mouvement lors de sa résolution n’est pas nul. La divergence de la vitesse prédite n’est pourtant pas une pollution numérique mais contient toute l’information nécessaire pour procéder à une décomposition complète.

Le problème posé consiste à réaliser une décomposition de Hodge-Helmholtz du champ de vitesse \mathbf{V} en deux contributions, l’une à divergence nulle et la seconde à rotationnelle nul et éventuellement en faisant apparaître une troisième contribution à la fois à divergence et à rotationnel nuls [5]. La décomposition en deux champs orthogonaux n’assure en rien l’unicité de celle-ci [12] ; la solution dépend étroitement des conditions aux limites appliquées aux potentiels scalaire et vecteur ou aux champs irrotationnel et solénoïdal eux-mêmes. Le champ à divergence nulle obtenu comme solution de l’équation du mouvement est quelconque et ne satisfait généralement pas aux conditions aux limites du problème posé à un instant donné. Le problème ne consiste pas seulement à trouver un champ à divergence nulle mais à chercher les conditions aux limites qui permettent, à l’issue de la décomposition, d’obtenir un champ satisfaisant aux conditions suivantes :

- les deux champs à divergence nulle et à rotationnel nul seront orthogonaux ;
- la partie solénoïdale satisfera aux conditions aux limites du problème physique posé.

La solution du problème physique sera ainsi composé du champ à divergence nulle et du potentiel scalaire qui sera associé à l’accumulateur des contraintes dans l’équation du mouvement ce qu’il est encore convenu d’appeler la pression.

La première partie de cet exposé sera consacré aux méthodes traditionnelles de projection scalaire et de projection vectorielle [7, 2]. Chacune de ces techniques comporte ses inconvénients et ses avantages mais aucune d’elles ne permet de satisfaire les conditions exposées plus haut. Afin de montrer l’impact des conditions aux limites et des méthodologies utilisées un seul exemple de solution synthétique d’un champ \mathbf{V} à conditions aux limites quelconques sera proposé.

Enfin une méthode originale basé sur la mécanique des milieux discrets [6] permettra de montrer sur le cas présenté que les deux composantes de la décomposition correspondent bien aux champs introduits pour sa construction.

2 Méthodologies de décomposition

Les méthodes de prédiction-correction classiques, scalaire ou vectorielle et plus précisément l'étape de projection, seront présentées de manière très succincte ; elles ont fait l'objet d'analyse très détaillées tant du point de vue numérique que théorique [11, 2]. Seuls quelques arguments et différences entre-elles seront rappelés.

Le champ de vitesse issu d'une première étape de prédiction sera nommé \mathbf{V} ; celui-ci ainsi que sa divergence et son rotationnel primal seront les éléments de la décomposition de \mathbf{V} en une partie solénoïdale \mathbf{V}_Ψ et une partie irrotationnelle \mathbf{V}_Φ . On y ajoutera la trace $\mathbf{V}_{\Psi\Sigma}$ du champ à divergence nulle \mathbf{V}_Ψ sur le bord du domaine Σ . Ces composantes de vitesse sont en effet situées sur le bord et satisfont à $\mathbf{V}_{\Psi\Sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$. Cette information est nécessaire si l'on souhaite réaliser une décomposition où la composante solénoïdale satisfait au problème physique posé. En effet, à l'issue du processus de prédiction-correction, le champ recherché devra être à divergence nulle mais aussi respecter les conditions aux limites du problème. La définition des topologies primale et duale polyédriques utilisées et toutes les autres définitions sont celles de [6].

2.1 Méthodes de projection scalaire

Cette méthode est basée sur un splitting de l'équation de Navier-Stokes ; de très nombreuses variantes existent, seule une version simplifiée à masse volumique variable est donnée ici. L'équation du mouvement est résolue pour obtenir un champ de vitesse \mathbf{V} à partir d'un champ de pression p^n à l'instant n qui ne permet pas de satisfaire à l'incompressibilité du champ de vitesse. La projection de la vitesse sur un champ à divergence nulle conduit à une équation sur la correction de pression Φ qui permettra de calculer ensuite la pression p^{n+1} au temps $(n+1)$ tel que $p^{n+1} = p^n + \Phi$:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \left(\frac{\Delta t}{\rho} \nabla \Phi \right) = -\nabla \cdot \mathbf{V} \\ \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Sigma \end{cases} \quad (1)$$

La condition à la limite sur Φ démontrée mathématiquement est celle qui correspond à des conditions de vitesse imposées aux limites dans l'étape de prédiction. Il est à remarquer que cette méthodologie conduit à un champ de vitesse à divergence nulle qui ne respecte pas ces conditions.

La résolution de cette pseudo-équation de Poisson (1) permet de trouver p^{n+1} et un champ de vitesse \mathbf{V}^{n+1} à divergence nulle :

$$\begin{cases} p^{n+1} = p^n + \Phi \\ \mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{V} - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \Phi \end{cases} \quad (2)$$

Les spécificités de cette méthode, certainement la plus utilisée pour le couplage entre vitesse et pression, sont bien connues mais il est utile de revisiter quelques un des problèmes physiques soulevés :

- en incompressible le champ de vitesse ne doit en aucune manière être affecté par des variations de masse volumique et sa détermination ne peut être que purement cinématique ; le couplage physique entre vitesse et pression n'existe pas ; d'un côté on souhaite que le champ de vitesse soit à divergence nulle et de l'autre on veut un champ de pression qui permet de satisfaire cette contrainte lors de la résolution de l'équation du mouvement. Le potentiel scalaire obtenu n'est pas la pression thermodynamique. Celle-ci ne pourrait être obtenue que par le relèvement de toutes les contributions associées à un potentiel scalaire lors d'une résolution de l'équation du mouvement sous la contrainte d'incompressibilité ;
- le processus dépend du pas de temps Δt alors que le problème de la décomposition de Helmholtz posé n'en dépend pas : on souhaite séparer les deux composantes irrotationnelle et solénoïdale d'un champ \mathbf{V} de manière instantanée. Les algorithmes les plus simples conduisent à

une erreur de convergence en temps en $\Delta t^{1/2}$ et les plus élaborés permettent d'obtenir un ordre deux ;

- la projection scalaire ne permet pas de satisfaire les conditions aux limites physiques, la composante tangentielle de la vitesse n'est pas imposée sur le bord. A l'issue des deux étapes de prédiction et de projection on a bien un champ à divergence nulle mais qui ne respecte ni l'équation du mouvement ni les conditions aux limites physiques. Ce n'est qu'à l'issue d'un processus itératif que ce résultat est obtenu. La physique du problème est uniquement gouverné par l'équation du mouvement.

2.2 Méthode de projection vectorielle (VPP)

La méthode de projection vectorielle qui a fait l'objet de travaux depuis 1999 dont quelques unes des références sont [7, 2, 3, 8] est maintenant connue sous l'acronyme VPP (Vector Penalty-Projection). Elle a été appliquée à la décomposition de Hodge-Helmholtz récemment par Angot et al. [4] et par Lemoine et al [12]. Cette méthode s'applique aussi bien pour les écoulements incompressibles à masse volumique constante qu'en diphasique, à masse volumique variable.

Elle consiste à rechercher le champ à rotationnel nul \mathbf{V}_Φ du champ de vitesse \mathbf{V} issu d'une étape de prédiction quelconque par la résolution d'une équation de pénalisation de la contrainte d'incompressibilité :

$$\begin{cases} \varepsilon \mathbf{V}_\Phi - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}_\Phi) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) \\ \mathbf{V}_\Phi \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Sigma \end{cases} \quad (3)$$

A partir d'une solution nulle on trouve \mathbf{V}_Φ tel que $\nabla \cdot (\mathbf{V} - \mathbf{V}_\Phi) = 0$; les deux champs \mathbf{V} et \mathbf{V}_Φ ont même divergence. Le champ solénoïdal est ensuite obtenu par différence : $\mathbf{V}_\Psi = \mathbf{V} - \mathbf{V}_\Phi$.

Le potentiel scalaire est ensuite reconstruit exactement en remarquant que \mathbf{V}_Φ est un champ de gradient $\mathbf{V}_\Phi = \nabla\Phi$ et en calculant le potentiel en chaque point à une constante près par :

$$\Phi_B - \Phi_A = \int_A^B \mathbf{V}_\Phi \cdot \mathbf{t} dl \quad (4)$$

Cet algorithme explicite s'applique en 2D et 3D quelle que soit la topologie polygonale ou polyédrique du domaine. Pour un écoulement à masse volumique variable seule cette remontée est modifiée pour obtenir la pression à partir du potentiel scalaire [2].

Cette méthode possède des différences importantes par rapport à la projection scalaire :

- la résolution de l'équation (3) conduit à une solution \mathbf{V}_Ψ par un processus purement cinématique ; toute la physique du problème est intégrée à la divergence du champ \mathbf{V} ;
- le choix de conditions aux limites sur \mathbf{V}_Φ conduit inéluctablement à une erreur sur le champ \mathbf{V}_Ψ qui ne satisfait plus les conditions aux limites physiques du problème initial. De ce point de vue cette méthodologie n'est pas meilleure que la projection scalaire ;
- elle a par contre des avantages importants par rapport à la projection scalaire ; il a été montré que l'adaptation de l'opérateur gradient au second membre confère des propriétés remarquables à l'équation (3) [3] ; l'équation peut être résolue en quelques itérations de gradient conjugué pré-conditionné et surtout le nombre d'itérations est indépendant du nombre de degrés de liberté du système ;
- la remontée du potentiel scalaire réalisée en calculant la circulation le long d'un segment est explicite.

2.3 Méthode de projection vectorielle discrète (VDP)

La contrainte d'incompressibilité est une approximation adoptée couramment mais malheureusement ce n'est pas une simplification ; elle suppose la vitesse du son infinie et d'un certain point de vue numérique ces ondes sont masquées par l'approche discrétisée en temps. Contrairement à une idée généralement admise la propagation des ondes dans un écoulement à grandes constantes de temps ne pose aucun problème si l'équation du mouvement est bien écrite. Les ondes sont prises en compte pour de petites

constantes de temps et filtrées naturellement pour de plus grandes. La résolution du problème physique réel, pour des fluides (gaz ou liquides) ayant des propriétés fixées, s'avère finalement beaucoup plus aisée que l'utilisation d'approximations discutables sur le fond. La divergence de la vitesse n'est pas un résidu au sens trivial du terme, elle contient une information essentielle sur les échanges entre potentiel scalaire et potentiel vecteur de l'équation du mouvement.

La référence en matière de résolution numérique reste la classe de méthodes où l'équation du mouvement est résolue en même temps que la contrainte; ainsi la solution du problème, la pression thermodynamique et le champ de vitesse satisfaisant aux conditions aux limites du problème physique, est obtenue instantanément. Ces méthodologies utilisant des préconditionnements adaptés sont devenues très compétitives par rapport aux techniques de prédiction-projection.

Ceci étant dit, intéressons nous maintenant à une méthode originale de projection qualifiée de "discrète" basée sur une décomposition complète de Hodge-Helmholtz d'un champ de vitesse donné \mathbf{V} en deux champs ou trois champs :

$$\mathbf{V} = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi + \mathbf{V}_h \quad (5)$$

où Φ est le potentiel scalaire, Ψ le potentiel vecteur et \mathbf{V}_h un champ à divergence et à rotationnel nuls. La décorrélation du champ harmonique \mathbf{V}_h de l'un des deux autres champs est un problème complexe non abordé ici. De manière pratique ce champ harmonique sera intégré à $\mathbf{V}_\Phi = \nabla\Phi$ ou $\mathbf{V}_\Psi = \nabla \times \Psi$ sans que l'on puisse l'en extraire directement.

Le problème posé est donc d'extraire Φ et Ψ indépendamment ou \mathbf{V}_Φ et \mathbf{V}_Ψ indépendamment pour pouvoir vérifier *a posteriori* que $\mathbf{V} = \mathbf{V}_\Phi + \mathbf{V}_\Psi$. Comme le problème est issu la physique, une condition à la limite du champ de vitesse \mathbf{V}_Ψ est donnée, la trace sur de bord de celle-ci, $\mathbf{V}_{\Psi\Sigma} = \mathbf{V}_\Psi \times \mathbf{n}$ sur Σ .

Tous les éléments de base de cette décomposition sont donnés dans la référence [6], il est pas utile de les rappeler ici. La méthodologie numérique DOC (Discrete Operators Calculus) associée à la formulation des équations peut être utilisée pour tous types de maillages polyédriques ou polygonaux.

L'objectif est, à partir d'un champ de vitesse \mathbf{V} de trouver les composantes \mathbf{V}_Φ et \mathbf{V}_Ψ ainsi que les potentiels Φ et Ψ . Le résultat de la projection sera tel que le vecteur \mathbf{V}_Ψ satisfasse aux conditions aux limites du problème physique posé. On vérifiera que les champs \mathbf{V}_Φ et \mathbf{V}_Ψ sont bien orthogonaux sur le domaine et que $\nabla \times \mathbf{V}_\Phi = 0$ et $\nabla \cdot \mathbf{V}_\Psi = 0$.

3 Exemple de décomposition

Afin de montrer l'intérêt de la méthode originale développée un simple exemple de décomposition d'un champ de vitesse synthétique non périodique continu est donné. Les conditions aux limites sont celles imposées par un décalage dans les deux directions (x, y) de l'espace à deux dimensions ce qui confère un caractère tout à fait général au problème de la décomposition. Le maillage choisi est cartésien pour un domaine bidimensionnel.

La procédure est la suivante : deux champs scalaires Φ et $\Psi = \Psi \cdot \mathbf{e}_z$ où \mathbf{e}_z est la normale au plan (x, y) sont choisis indépendamment et le champ de vecteur \mathbf{V} est construit comme une somme $\mathbf{V} = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi$.

Le domaine est simplement connexe avec $x \in [0, 1]$ et $y \in [0, 1]$; un décalage de $x_0 = 0.15$ et $y_0 = 0.25$ est ensuite imposé dans les deux directions de l'espace :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = \frac{1}{\pi} \cos(\pi(x - x_0)) \sin(\pi(y - y_0)) \\ \Psi = \frac{1}{\pi} \cos(\pi(x - x_0)) \cos(\pi(y - y_0)) \mathbf{e}_z \\ \mathbf{V} = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi \end{array} \right. \quad (6)$$

La figure 1 montre les champs des deux potentiels Φ et Ψ , les deux composantes solénoïdale et irrotationnelle ainsi que le champ \mathbf{V} lui-même. On vérifie que les opérateurs discrets satisfont bien $\nabla \times \mathbf{V}_\Phi = 0$ et $\nabla \cdot \mathbf{V}_\Psi = 0$ à la précision machine. Cette solution est qualifiée de théorique mais elle correspond simplement à la solution construite; elle n'est ni à divergence nulle ni à rotationnel nul. On constate que les conditions aux limites de ces différents champs sont quelconques.

De tous les champs utilisés pour la construction de l'exemple seuls le champ \mathbf{V} et conservé ainsi que la condition à la limite physique $\mathbf{V}_{\Psi\Sigma}$. Toutes les autres données sont "oubliées".

Rien ne présage a priori que les champs synthétiques soient ceux qui seront obtenus par une projection donnée. La projection peut être orthogonale et les conditions $\nabla \times \mathbf{V}_{\Phi} = 0$ et $\nabla \cdot \mathbf{V}_{\Psi} = 0$ peuvent être satisfaites sans pour autant redonner la solution initiale. Tout dépend des conditions aux limites sur les potentiels ou sur les composantes elles-mêmes. Il n'y a aucune chance pour retomber fortuitement sur la solution théorique.

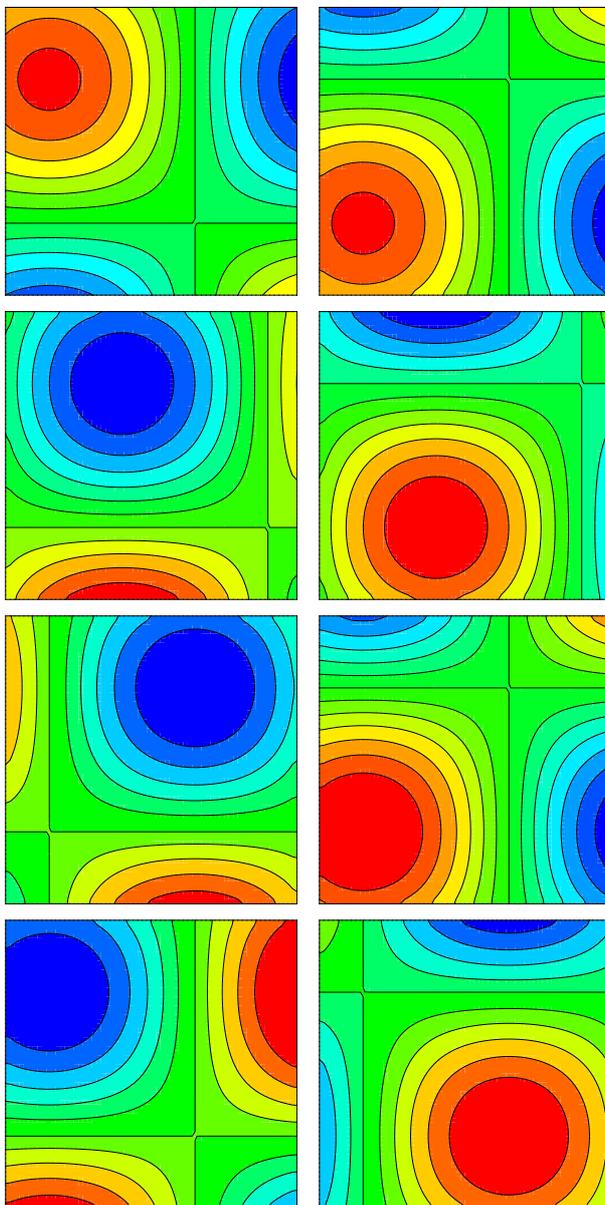


FIGURE 1. Cas test de décomposition - solution initiale et résultat de la décomposition par la méthode VDP - de gauche à droite et de haut en bas, $\Phi : (min = -0.2836, max = 0.3182)$; $\Psi : (-0.2799, 0.3182)$; $\mathbf{V}_x : (-1.4133, 0.9748)$; $\mathbf{V}_y : (-0.9748, 1.4133)$; $\mathbf{V}_{\phi x} : (-0.999, 0.6893)$; $\mathbf{V}_{\phi y} : (-0.8790, 0.999)$; $\mathbf{V}_{\psi x} : (-0.999, 0.8790)$; $\mathbf{V}_{\psi y} : (-0.6893, 0.999)$.

Si la solution obtenue correspond bien à la solution initiale et satisfait bien aux conditions aux limites physiques alors on peut considérer que la méthodologie utilisée et les conditions aux limites appliquées aux potentiels ou aux composantes sont les seules qui puissent conduire à ce résultat même si cela ne constitue pas une preuve de l'unicité de la solution.

Méthode de projection scalaire et méthode de projection-pénalisation vectorielle (VPP)

Le cas est soumis à la méthode de projection scalaire; l'ordre de grandeur du terme à divergence non nulle est ici du même ordre de grandeur que la solution \mathbf{V}_Ψ recherchée. Ce n'est pas le cas pour les problèmes de mécanique des fluides où les écarts à l'incompressibilité sont plus faibles. La solution est toutefois obtenue aisément pour un maillage cartésien de 64^2 mailles. La solution de l'équation (1) porte sur le potentiel scalaire Φ et le champ de vitesse en est déduit par la relation (2). Ce champ est bien à divergence nulle et le rotationnel de $\nabla\Phi$ est bien nul aussi aux erreurs machine près.

L'observation du potentiel scalaire Φ ne montre qu'une lointaine ressemblance avec la fonction Φ de la figure 1. Les différences entre les maxima des deux champs est aussi très différent. Il devient inutile de tracer les autres champs qui sont aussi très différents de la solution initiale recherchée. Il y a pourtant un ordre de convergence spatiale qui pourrait être recherché et qui serait proche de deux compte tenu de la discrétisation spatiale utilisée pour toutes les méthodes. La convergence temporelle n'a pas de sens dans ce contexte.

De même la projection vectorielle, VPP, est utilisée pour calculer la solution du problème, \mathbf{V}_Ψ et Φ . Le champ à divergence nulle est obtenue par la différence entre le champ \mathbf{V} et \mathbf{V}_Φ tandis que le potentiel scalaire est remonté exactement par la circulation de cette composante entre deux points de pression par la relation (4).

Comme attendu le résultat sur le potentiel scalaire est identique à celui de la projection vectorielle (VPP) à une constante additive près qui est due à la remontée explicite de la pression. La figure 2 montre bien la similitude entre les résultats de la projection scalaire et vectorielle.

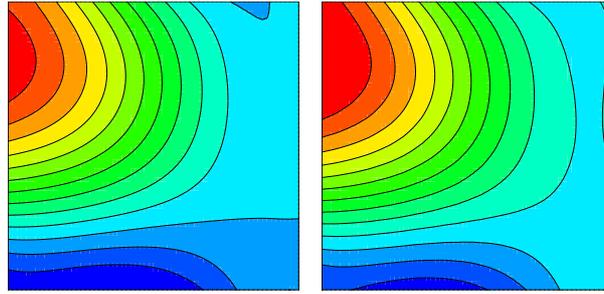


FIGURE 2. Champ du potentiel Φ des projection scalaire (à gauche) et vectorielle (VPP) (à droite) - Φ_s : ($min = -0.3924, max = 0.5490$) Φ_v : ($min = -0.0434, max = 0.8985$).

On peut observer sur la figure 2 que la condition à la limite de Neumann $\nabla\Phi \cdot \mathbf{n} = 0$ supposée être imposée n'est pas respectée. Ce phénomène que l'on retrouve pour les cas pratiques de projection pour les équations de Navier-Stokes n'est pas surprenant. Il s'explique par l'action de l'opérateur divergence aux bords du domaine et par nature du second membre. Le gradient du potentiel scalaire Φ au bord conduit à penser que la condition réellement prise en compte en discret est $\nabla\Phi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$. En fait ces deux conditions sont erronées du point de vue discret et il faudrait résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \left(\frac{\Delta t}{\rho} \nabla \Phi \right) = -\nabla \cdot \mathbf{V}_\Phi \\ \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V}_\Phi \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \Sigma \end{cases} \quad (7)$$

mais si l'on connaît \mathbf{V}_Φ il est inutile de résoudre ce système, il suffit de remonter le potentiel explicitement par la relation (4). En effet si $\nabla \cdot \mathbf{V}_\Phi = \nabla \cdot \mathbf{V}$ dans le domaine il n'en est pas de même aux limites. De même si la propriété $\nabla \cdot \mathbf{V}_\Psi = 0$ dans le domaine elle n'est pas vérifiée de manière discrète aux bords.

Comme on le voit les résultats théoriques sur les conditions aux limites à imposer peuvent être mis en défaut lors de la discrétisation des opérateurs.

Ces résultats montrent que ces méthodes de projection, scalaire ou vectorielle existantes, même si elles permettent de retrouver un champ à divergence nulle à l'issue de l'étape de projection ne satisfont pas les conditions aux limites du problème physique. La projection dégrade la solution obtenue à l'étape de

prédiction. Ce n'est qu'à la convergence d'un processus itératif que la physique contenue dans la résolution de l'équation du mouvement et la résolution de la contrainte finissent par fournir une solution correcte.

Projection vectorielle discrète (VDP)

Le cas test est maintenant traité par la méthode de projection vectorielle discrète et la même procédure est appliquée au champ \mathbf{V} . La solution du problème fournit les champs des potentiels scalaire Φ et Ψ et les composantes \mathbf{V}_Φ et \mathbf{V}_Ψ indépendamment ce qui permet de retrouver le champ de vitesse initial \mathbf{V} par addition. Dans le cas où $\mathbf{V}_h \neq 0$ la composante irrotationnelle inclut cette contribution mais la partie solénoïdale reste inchangée.

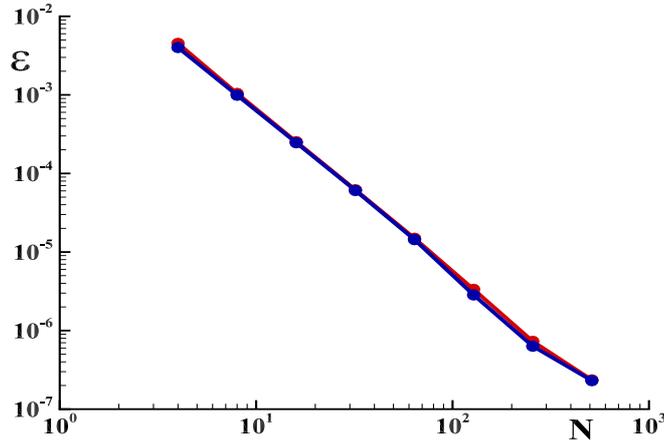


FIGURE 3. Projection vectorielle discrète (VDP), erreur en norme L^2 de la solution numérique et ordre de convergence $\alpha \approx 2$ sur les potentiels scalaire Φ (en rouge) et vecteur Ψ (en bleu).

Les champs obtenus par la méthode de projection discrète (VDP) sont très proches de ceux de la solution initiale représentés sur la figure 1 et les différences ne sont pas visibles sur les graphes. Un ordre de convergence peut alors être recherché en augmentant le nombre de cellules N par direction.

La figure 3 montre l'évolution de l'erreur en norme L^2 de convergence sur Φ et sur Ψ où l'ordre deux est obtenu. Les erreurs sur les composantes \mathbf{V}_Φ et \mathbf{V}_Ψ donnent aussi un ordre de convergence égal à deux ; d'ailleurs les opérateurs gradient et rotationnel dual sont exacts dans le cas présent.

4 Conclusions

Les méthodes de prédiction-corrrection ont été développées depuis près d'un demi-siècle sous des formes très variées et sont utilisées très largement en mécanique des fluides numérique. Elles sont faciles à mettre en oeuvre, précises et sont bien adaptées aux architectures informatiques. Leur principal intérêt c'est qu'elles donnent une solution physique globalement acceptable dans tous les cas. Pour autant des failles sur l'introduction d'erreurs de fragmentation, sur certaines conditions aux limites non respectées, ... ouvrent la voie à la recherche d'alternatives plus fiables ou à des algorithmes permettant de combler certaines lacunes.

C'est l'objectif de cette étude qui vise à proposer un algorithme entièrement original, VDP, pour accéder à champ à divergence nul mais qui satisfait aux conditions aux limites du problème physique. Un simple exemple de décomposition d'un champ construit à partir de deux fonctions analytiques à conditions aux limites non triviales permet de montrer qu'il est possible de mettre en oeuvre une méthodologie ayant les propriétés suivantes :

- la décomposition est orthogonale sur un domaine simplement connexe ; cette propriété est due aux topologies primale et duale choisies ;
- les deux potentiels Φ et Ψ sont obtenus indépendamment et les composantes solénoïdale et irrotationnelle redonnent bien le champ initial \mathbf{V} ;

- la condition à la limite physique sur le champ à divergence nulle est bien respectée de manière instantanée ;
- l'ordre de convergence spatial est égal à deux.

Même si elle n'a pas encore été appliquée dans d'autres conditions la méthode est utilisable en 3D pour des topologies primale et duale polyédriques.

Références

- [1] E. Ahusborde, M. Azaiez, J-P. Caltagirone, M. Gerritsma, and A. Lemoine. Discrete hodge-helmholtz decomposition. *Monografias Matemáticas Garcia de Galdeano*, 39 :1–10, 2014.
- [2] Ph. Angot, J-P. Caltagirone, and P. Fabrie. A fast vector penalty-projection method for incompressible non-homogeneous or multiphase navier-stokes problems. *Applied Mathematics Letters*, 25(11) :1681–1688, 2012.
- [3] Ph. Angot, J-P. Caltagirone, and P. Fabrie. A new fast method to compute saddle-points in constrained optimization and applications. *Applied Mathematics Letters*, 25(3) :245–251, 2012.
- [4] Ph. Angot, J-P. Caltagirone, and P. Fabrie. Fast discrete helmholtz-hodge decompositions in bounded domains. *Applied Mathematics Letters*, 26(4) :445–451, 2013.
- [5] H. Bhatia, G. Norgard, V. Pascucci, and P.T. Bremer. The helmholtz-hodge decomposition - a survey. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 99(1), 2012.
- [6] J-P. Caltagirone. *Discrete Mechanics*. ISTE, John Wiley & Sons, London, 2015.
- [7] J-P. Caltagirone and J. Breil. A vector projection method for solving the navier-stokes equations. *C.R. Acad. Sciences IIB*, 327(11) :1179–1184, 1999.
- [8] R. Cheaytou. *Etude des méthodes de pénalité-projection vectorielle pour les équations de Navier-Stokes avec conditions aux limites ouvertes*. Thèse de l’Université d’Aix-Marseille, 30 avril 2014.
- [9] A.J. Chorin. Numerical solution of the navier-stokes equations. *Math. Comput.*, 22 :745–762, 1968.
- [10] M. Fortin and R. Glowinski. *Mécanique de lagrangien augmenté, Application à la résolution numérique de problèmes aux limites*. Dunod, Paris, 1982.
- [11] J.L. Guermond, P. Mineev, and Jie Shen. An overview of projection methods for incompressible flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195 :6011–6045, 2006.
- [12] A. Lemoine, J-P. Caltagirone, P. Azaiez, and S. Vincent. Discrete helmholtz-hodge decomposition on polyhedral meshes using compatible discrete operators. *Journal of Scientific Computing*, DOI 10.1007/s10915-014-9952-8, 2014.
- [13] R. Temam. Sur l’approximation de la solution des équations de navier-stokes par la méthode des pas fractionnaires. *Arch. Ration. Mech.*, 33 :377–385, 1969.
- [14] S. Vincent, J-P. Caltagirone, P. Lubin, and T.N. Randrianarivelo. An adaptative augmented lagrangian method for three-dimensional multi-material flows. *Computers & fluids*, 33(10) :1273–1279, 2004.