



**HAL**  
open science

# Inégalité d'indice de Hodge en géométrie et arithmétique : une approche probabiliste

Huayi Chen

► **To cite this version:**

Huayi Chen. Inégalité d'indice de Hodge en géométrie et arithmétique : une approche probabiliste. 2014. hal-01099049

**HAL Id: hal-01099049**

**<https://hal.science/hal-01099049>**

Preprint submitted on 30 Dec 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# INÉGALITÉ D'INDICE DE HODGE EN GÉOMÉTRIE ET ARITHMÉTIQUE : UNE APPROCHE PROBABILISTE

Huayi Chen

---

*Résumé.* — En utilisant l'approche probabiliste en géométrie arithmétique, on démontre une version forte de l'inégalité d'indice de Hodge pour les  $\mathbb{R}$ -diviseurs adéliques.

*Abstract.* — By using the probabilistic approach in arithmetic geometry, one establishes a strong version of the Hodge index inequality for adelic  $\mathbb{R}$ -divisors.

## Table des matières

1. Introduction.....	1
2. Indice de corrélation de corps convexes .....	6
3. Systèmes linéaires filtrés et inégalité d'indice de Hodge....	12
4. Rappels sur les espaces de Berkovich.....	20
5. Courbes adéliques et $\mathbb{R}$ -diviseurs adéliques.....	24
6. Inégalité d'indice de Hodge pour les $\mathbb{R}$ -diviseurs adéliques .	35
Références.....	47

## 1. Introduction

L'inégalité d'indice de Hodge, qui prédit la signature de la forme quadratique induite par le produit d'intersection sur le groupe de Picard d'une surface projective, est un résultat fondamental en géométrie algébrique. L'analogue de ce théorème en géométrie arithmétique a été démontré par Faltings [15] et Hriljac [20], puis par Moriwaki [26] dans le cas de dimension supérieure, et adapté dans le cadre adélique par Yuan et Zhang [37]. La version arithmétique du résultat est étroitement liée à la conjecture standard arithmétique. On renvoie les lecteurs à [23, 26] pour plus de détails. Dans la littérature, de

nombreuses démonstrations du théorème d'indice de Hodge ont été proposées, dont la plupart font intervenir le théorème de Riemann-Roch. La version arithmétique du théorème à la Faltings et Hriljac utilise en outre le plongement de la surface arithmétique – qui est une courbe projective sur un corps de nombres – dans sa jacobienne, ainsi que la hauteur de Néron-Tate.

Les nombres d'intersection en géométrie algébrique sont analogues aux volumes mixtes en géométrie convexe. En particulier, le théorème d'indice de Hodge peut être interprété comme une conséquence de l'inégalité de Brunn-Minkowski pour la fonction volume. Cette analogie est rendue encore plus claire par la théorie des corps d'Okounkov établie par plusieurs auteurs comme Okounkov [30], Lazarsfeld et Mustață [25], Kaveh et Khovanskii [22]. Dans le cadre de la géométrie d'Arakelov, deux analogues arithmétiques des corps d'Okounkov ont été proposés. L'approche de Yuan [36] repose sur la construction de corps d'Okounkov par rapport à la fibre de la variété au-dessus d'une place finie ; tandis que celle de [7, 4] utilise les  $\mathbb{R}$ -filtrations pour ramener le problème arithmétique à une famille de problèmes géométriques sur la fibre générique de la variété arithmétique.

Dans la littérature, les résultats obtenus par les corps d'Okounkov arithmétiques, comme par exemple l'inégalité de Brunn-Minkowski et l'approximation de Fujita arithmétiques, portent une forme similaire aux résultats classiques. Cependant, la structure relative (à une courbe arithmétique) des variétés arithmétiques fournit plus d'information géométrique et devrait conduire à des résultats plus fins. Le but de cet article est d'expliquer ce phénomène par une démonstration élémentaire d'une version relative du théorème d'indice de Hodge dans les cadres géométrique et arithmétique, qui est plus forte que la version classique. On démontrera une inégalité de nature probabiliste dans un cadre très général de géométrie arithmétique sur une courbe adélique, qui contient simultanément les cas de corps de fonctions, corps de nombres, corps trivialement valués, et toute combinaison convenable de ces objets (cf. §5 *infra*). Cette inégalité est valable en toute dimension, qui indique une nouvelle voie à la généralisation de l'inégalité d'indice de Hodge au cas de dimension supérieure.

Pour rendre la présentation des résultats et de la méthode plus claire, on se place d'abord dans le cadre géométrique et de dimension relative 1, où on considère une surface projective  $S$  sur un corps de base  $k$ , muni d'un  $k$ -morphisme projectif et plat  $\pi$  vers une courbe projective régulière  $C$  sur  $\text{Spec } k$ . Rappelons qu'une version classique de l'inégalité d'indice de Hodge prédit que, si  $L$  et  $M$  sont deux fibrés inversibles amples sur  $S$ , alors la relation

$$(1) \quad (c_1(L)c_1(M))^2 \geq c_1(L)^2 \cdot c_1(M)^2,$$

est vérifiée. On peut réécrire cette inégalité sous la forme

$$(2) \quad \text{vol}(L \otimes M) \geq (\text{vol}(L)^{1/2} + \text{vol}(M)^{1/2})^2,$$

où le *volume* d'un fibré inversible  $A$  sur  $S$  est défini comme

$$\text{vol}(A) := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{rg}_k(H^0(S, A^{\otimes n}))}{n^2/2},$$

qui est égal au nombre d'auto-intersection  $c_1(A)^2$  lorsque  $A$  est ample – c'est une conséquence du théorème de Riemann-Roch asymptotique et du théorème d'annihilation de Serre (voir [24] corollaire 1.4.41 pour une démonstration). La formule (2) est appelée l'inégalité de Brunn-Minkowski, qui est valable dans le cas plus général où les fibrés inversibles  $L$  et  $M$  sont *gros*, c'est-à-dire de volume strictement positif.

Remarquons que l'information du  $k$ -morphisme  $\pi : S \rightarrow C$  n'est utilisée ni dans l'inégalité d'indice de Hodge (1) ni dans l'inégalité de Brunn-Minkowski. On introduit un nouveau invariant  $\text{vol}_\chi^\pi(\cdot)$  relativement à  $\pi$  pour les fibrés inversibles dont les fibres génériques sont gros. Si  $L$  est un  $\mathcal{O}_S$ -module inversible, alors  $\pi_*(L)$  est un fibré vectoriel sur  $C$ . Dans le cas où la restriction de  $L$  à la fibre générique de  $\pi$  est de degré strictement positif, on définit

$$(3) \quad \text{vol}_\chi^\pi(L) := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\chi(\pi_*(L^{\otimes n}))}{n^2/2},$$

où  $\chi(\cdot)$  est la caractéristique d'Euler-Poincaré, qui est définie sur l'ensemble des fibrés vectoriels sur  $C$ . Si  $L$  est un  $\mathcal{O}_S$ -module inversible ample, alors pour tout entier  $n$  suffisamment positif, le faisceau image direct  $\pi_*(L^{\otimes n})$  est de pente minimale strictement positive. Cela peut être considéré comme un analogue dans le cadre de corps de fonctions d'un résultat de Zhang [38, théorème 4.2]. Le théorème de Riemann-Roch pour la courbe  $C$  conduit donc à la relation (voir [9, lemme 2.2] pour la comparaison entre le degré et la dimension de l'espace des sections globales d'un fibré vectoriel lorsque sa pente minimale est strictement positive)

$$(4) \quad \text{vol}_\chi^\pi(L) = \text{vol}(L) = c_1(L)^2.$$

En outre, si  $L$  est un fibré inversible sur  $S$ , on désigne par  $d_\pi(L)$  le degré de  $L|_{S_\eta}$ , où  $\eta$  est le point générique de  $C$  et  $S_\eta$  est la fibre générique de  $\pi$ . L'entier  $d_\pi(L)$  est appelé le *degré générique* de  $L$  relativement au morphisme  $\pi$ . L'application  $d_\pi(\cdot)$  définit en fait un morphisme de groupes de  $\text{Pic}(S)$  vers  $\mathbb{Z}$ . On établira dans cet article le résultat suivant (voir le théorème 6.16 *infra*).

**Théorème 1.1.** — *Soient  $k$  un corps et  $\pi : S \rightarrow C$  un  $k$ -morphisme projectif et plat d'une surface  $S$  sur  $k$  vers une courbe projective régulière  $C$  sur  $k$ . Si  $L$  et  $M$  sont deux fibrés inversibles sur  $S$  dont les fibres génériques sont de degré strictement positif, alors on a*

$$(5) \quad \frac{\text{vol}_\chi^\pi(L \otimes M)}{d_\pi(L) + d_\pi(M)} \geq \frac{\text{vol}_\chi^\pi(L)}{d_\pi(L)} + \frac{\text{vol}_\chi^\pi(M)}{d_\pi(M)}.$$

En utilisant la relation (4), on déduit du théorème 1.1 le résultat suivant, qui implique l'inégalité d'indice de Hodge via l'inégalité arithmético-géométrique.

**Corollaire 1.2.** — *Avec les notations du théorème 1.1, si  $L$  et  $M$  sont deux fibrés inversibles amples sur  $S$ , alors on a*

$$(6) \quad 2c_1(L)c_1(M) \geq \frac{d_\pi(M)}{d_\pi(L)}c_1(L)^2 + \frac{d_\pi(L)}{d_\pi(M)}c_1(M)^2.$$

Pour tout fibré inversible gros  $L$  sur  $S$ , on définit  $d_\pi^+(L)$  comme la borne supérieure des  $d_\pi(A)$ , où  $A$  est un élément du groupe de Picard à coefficients dans  $\mathbb{Q}$  d'une modification birationnelle  $S'$  de  $S$  tel que  $A$  soit ample et que  $\nu^*(L) - A$  soit effectif, où  $\nu : S' \rightarrow S$  désigne le morphisme structurel, qui est projectif et birationnel. On obtient alors du théorème précédent, en utilisant le théorème d'approximation de Fujita [16, 34], le résultat suivant.

**Corollaire 1.3.** — *Avec les notations du théorème 1.1, si  $L$  et  $M$  sont deux fibrés inversibles gros sur  $S$ , alors on a*

$$(7) \quad \frac{\text{vol}(L \otimes M)}{d_\pi^+(L) + d_\pi^+(M)} \geq \frac{\text{vol}(L)}{d_\pi^+(L)} + \frac{\text{vol}(M)}{d_\pi^+(M)}.$$

Une fois encore on peut déduire facilement de (7) l'inégalité de Brunn-Minkowski. De façon similaire, l'inégalité (6) conduit à une forme forte d'inégalité isopérimétrique sous forme d'une minoration du produit d'intersection positif.

Outre que la généralité des résultats obtenus, la méthode de démonstration, qui fait intervenir la corrélation de variables aléatoires à valeurs dans des corps convexes, consiste d'une nouveauté majeure de l'article. Elle donne aussi des idées pour généraliser l'inégalité (5) au cas de dimension supérieure. En effet, en utilisant l'approche probabiliste en géométrie arithmétique développée dans [8], à tout fibré inversible  $L$  sur  $S$  tel que  $d_\pi(L) > 0$ , on peut attacher une fonction continue  $G_L^\pi(\cdot)$  sur le corps d'Okounkov  $\Delta(L_\eta)$  de la fibre générique de  $L$  (qui est égale à  $[0, d_\pi(L)]$  puisque  $S_\eta$  est une courbe). Le quotient  $\text{vol}_X^\pi(L)/d_\pi(L)$  peut alors être interprété comme une espérance  $\mathbb{E}[G_L^\pi(Z_L^\pi)]$ , où  $Z_L^\pi$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\Delta(L_\eta) = [0, d_\pi(L)]$ , qui est uniformément distribuée. Il s'avère que la relation de sur-additivité

$$\forall (x, y) \in \Delta(L_\eta) \times \Delta(M_\eta), \quad G_{L \otimes M}^\pi(x + y) \geq G_L^\pi(x) + G_M^\pi(y)$$

est vérifiée. Le point clé de la démonstration du théorème 1.1 est de construire une structure de corrélation entre les variables aléatoires de telle sorte que  $Z_L^\pi + Z_M^\pi$  soit uniformément distribuée, qui a la même loi que  $Z_{L \otimes M}^\pi$ . L'inégalité (5) résulte donc de la relation

$$\mathbb{E}[G_{L \otimes M}^\pi(Z_L^\pi + Z_M^\pi)] \geq \mathbb{E}[G_L^\pi(Z_L^\pi) + G_M^\pi(Z_M^\pi)] = \mathbb{E}[G_L^\pi(Z_L^\pi)] + \mathbb{E}[G_M^\pi(Z_M^\pi)].$$

En s'appuyant sur cette idée, on introduit un cadre probabiliste pour les corps convexes et établit un théorème d'indice de Hodge abstrait dans la deuxième section (voir le théorème 2.4 *infra*).

**Théorème 1.4.** — Soient  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  deux corps convexe dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $G_1$ ,  $G_2$  et  $G$  trois fonctions mesurables sur  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  et  $\Delta_1 + \Delta_2$  respectivement, qui sont bornées supérieurement. On suppose que la fonction  $G$  est positive et que, pour tout  $(x, y) \in \Delta_1 \times \Delta_2$ , l'inégalité  $G(x + y) \geq G_1(x) + G_2(y)$  est vérifiée. Alors on a

$$(8) \quad \frac{\int_{\Delta_1 + \Delta_2} G(z) \, dz}{\text{vol}(\Delta_1 + \Delta_2)} \geq \rho(\Delta_1, \Delta_2)^{-1} \left( \frac{\int_{\Delta_1} G_1(x) \, dx}{\text{vol}(\Delta_1)} + \frac{\int_{\Delta_2} G_2(y) \, dy}{\text{vol}(\Delta_2)} \right),$$

où  $\rho(\Delta_1, \Delta_2)$  est l'indice de corrélation défini dans §2.1.

Dans le théorème, la constante  $\rho(\Delta_1, \Delta_2)$  mesure la différence minimale possible entre la loi de la somme de deux variables aléatoires uniformes à valeurs dans  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  respectivement, et la loi uniforme sur la somme de Minkowski  $\Delta_1 + \Delta_2$ .

Dans la troisième section, on applique le théorème 1.4 aux systèmes linéaires gradués filtrés pour obtenir une version géométrique de l'inégalité (8) (voir le théorème 3.5 *infra*).

C'est dans les quatrième et cinquième sections que l'on développe le cadre arithmétique dans lequel on établit la nouvelle version arithmétique de l'inégalité d'indice de Hodge. On rappelle d'abord quelques notions dans la théorie de Berkovich, présentées dans le langage fonctoriel, qui sont utiles dans l'étude adélique des diviseurs arithmétiques. On propose ensuite une nouvelle notion : courbe adélique, qui généralise simultanément les corps de fonctions, les corps de nombres, les corps trivialement valués, et les combinaisons de ces corps. Il s'avère que des objets de la géométrie algébrique et de la géométrie arithmétique, comme par exemple les fibrés vectoriels (usuels, hermitiens ou adéliques) et  $\mathbb{R}$ -diviseurs adéliques, ont des généralisations dans le cadre de la géométrie arithmétique sur une courbe adélique. Ces généralisations sont naturelles mais loin d'être évidentes. La difficulté majeure provient de l'absence de modèle entier (même génériquement). Pour surmonter cette difficulté, on adopte le point de vue des métriques de Fubini-Study. Les systèmes linéaires métrisés des  $\mathbb{R}$ -diviseurs adéliques sont étudiés, et les fonctions de volume arithmétiques sont définies.

Dans la sixième et dernière section, on établit l'inégalité d'indice de Hodge arithmétique pour les  $\mathbb{R}$ -diviseurs adéliques. Différentes spécialisations de la courbe adélique conduisent aux versions fortes (et de dimension quelconque) de l'inégalité d'indice de Hodge dans les cadres de la géométrie algébrique et la géométrie arithmétique. Ces résultats indiquent une nouvelle voie dans l'étude

des invariants arithmétiques et ouvre des perspectives de recherche résumées à la fin de l'article.

## 2. Indice de corrélation de corps convexes

Dans ce paragraphe, on considère deux corps convexes  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  dans un espace euclidien  $\mathbb{R}^d$ , où  $d \in \mathbb{N}$ ,  $d \geq 1$ . On se demande la question suivante. Étant données deux variables aléatoires  $Z_1$  et  $Z_2$  à valeurs dans  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  respectivement, qui sont toutes les deux uniformément distribuées, la somme  $Z_1 + Z_2$  peut-elle être uniformément distribuée dans la somme de Minkowski  $\Delta_1 + \Delta_2$ . Si ce n'est pas le cas, quelle est la structure de corrélation optimale entre les variables aléatoires  $Z_1$  et  $Z_2$  de sorte que la somme  $Z_1 + Z_2$  soit la plus uniforme possible. Pour mieux comprendre ce problème, on introduit un invariant numérique pour le couple  $(\Delta_1, \Delta_2)$ , appelé l'*indice de corrélation* entre les corps convexes  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ .

**2.1. Définition de l'indice de corrélation.** — Par corps convexe dans  $\mathbb{R}^d$ , on entend une partie compacte et convexe dans  $\mathbb{R}^d$  dont l'intérieur est non-vide. Si  $\Delta$  est un corps convexe dans  $\mathbb{R}^d$ , la *distribution uniforme* sur  $\Delta$  désigne la mesure de probabilité borélienne sur  $\Delta$  qui est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue vol et dont la densité de Radon-Nikodym par rapport à vol est la fonction constante  $1/\text{vol}(\Delta)$  sur  $\Delta$ . Si une variable aléatoire  $Z$  à valeurs dans  $\Delta$  porte cette mesure comme sa loi de probabilité, on dit que  $Z$  est *uniformément distribuée*.

Soit  $(\Delta_1, \Delta_2)$  un couple de corps convexes dans  $\mathbb{R}^d$ . On désigne par  $\mathcal{A}(\Delta_1, \Delta_2)$  la collection des mesures de probabilité boréliennes sur  $\Delta_1 \times \Delta_2$  dont les images directes par les deux projections  $\Delta_1 \times \Delta_2 \rightarrow \Delta_1$  et  $\Delta_1 \times \Delta_2 \rightarrow \Delta_2$  sont des distributions uniformes. En d'autres termes,  $\mathcal{A}(\Delta_1, \Delta_2)$  est l'ensemble de toutes les distributions cumulatives possibles de couples de variables aléatoires  $(Z_1, Z_2)$  à valeurs dans  $\Delta_1 \times \Delta_2$  dont les lois marginales sont des distributions uniformes. Pour toute mesure  $\nu \in \mathcal{A}(\Delta_1, \Delta_2)$ , on désigne par  $\rho(\nu)$  la valeur

$$\rho(\nu) := \sup_f \frac{\int_{\Delta_1 \times \Delta_2} f(x+y) \nu(dx, dy)}{\int_{\Delta_1 + \Delta_2} f(z) \eta(dz)},$$

où  $f$  parcourt l'ensemble des fonctions boréliennes positives non- $\eta$ -négligeables sur la somme de Minkowski  $\Delta_1 + \Delta_2 := \{x+y \mid x \in \Delta_1, y \in \Delta_2\}$ ,  $\eta$  étant la mesure de Lebesgue normalisée de sorte que  $\eta(\Delta_1 + \Delta_2) = 1$  (c'est-à-dire la loi uniforme sur  $\Delta_1 + \Delta_2$ ). En d'autres termes, si  $(Z_1, Z_2)$  est un couple de variables aléatoires à valeurs dans  $\Delta_1 \times \Delta_2$  qui suit la loi jointe  $\nu$  et si  $Z$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\Delta_1 + \Delta_2$  qui suit la loi uniforme, alors

l'inégalité

$$\mathbb{E}[f(Z_1 + Z_2)] \leq \rho(\nu)\mathbb{E}[f(Z)]$$

est vérifiée pour toute fonction borélienne positive  $f$  sur  $\Delta_1 + \Delta_2$ . En particulier, si on prend  $f$  comme la fonction constante 1, on obtient la relation  $\rho(\nu) \geq 1$ . Dans le cas où  $\rho(\nu) < +\infty$ , la loi de probabilité de  $Z_1 + Z_2$  est absolument continue par rapport à  $\eta$ , et  $\rho(\nu)$  est égal au supremum  $\eta$ -essentiel de sa dérivée de Radon-Nikodym par rapport à la mesure de probabilité  $\eta$ .

**Remarque 2.1.** — En utilisant un argument de classes monotones, on peut montrer que, pour vérifier la relation  $\rho(\nu) \leq a$ , où  $a \geq 1$ , il suffit de montrer que

$$(9) \quad \mathbb{E}[f(Z_1 + Z_2)] \leq a \mathbb{E}[f(Z)]$$

pour toute fonction continue  $f$  sur  $\Delta_1 + \Delta_2$ . Cela provient du lemme suivant.

**Lemme 2.2.** — Soient  $\Omega$  un ensemble non-vide,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{H}$  deux familles de fonctions bornées et positives sur  $\Omega$  telles que  $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$ . On suppose que la famille  $\mathcal{C}$  satisfait aux conditions suivantes :

- (1) la fonction constante 1 appartient à  $\mathcal{C}$ ,
- (2)  $\mathcal{C}$  est stable par combinaison linéaire à coefficients positifs et par multiplication,
- (3) si  $f$  et  $g$  sont deux éléments de  $\mathcal{C}$ , alors  $|f - g| \in \mathcal{C}$ .

On suppose de plus que la famille  $\mathcal{H}$  est stable par convergence uniformément bornée, autrement dit, pour toute suite uniformément bornée  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions dans  $\mathcal{H}$  qui converge simplement, la limite de la suite appartient à  $\mathcal{H}$ . Alors la famille  $\mathcal{H}$  contient toutes les fonctions bornées, positives et  $\sigma(\mathcal{C})$ -mesurables, où  $\sigma(\mathcal{C})$  est la tribu engendrée par  $\mathcal{C}$ .

*Démonstration.* — On désigne par  $\Theta$  la collection des sous-ensemble  $\mathcal{H}'$  de  $\mathcal{H}$  qui contient  $\mathcal{C}$  et qui vérifie les conditions (1)–(3) dans l'énoncé du lemme. La collection  $\Theta$  est non-vide puisque  $\mathcal{C} \in \Theta$ . Elle est en outre ordonnée par la relation d'inclusion. Si  $\Theta_0$  est un sous-ensemble de  $\Theta$  qui est totalement ordonné, alors la réunion des ensembles dans  $\Theta_0$  est un élément de  $\Theta$ , donc est un majorant de  $\Theta_0$  dans  $\Theta$ . Par le lemme de Zorn, il existe un élément  $\mathcal{H}_0 \in \Theta$  qui est maximal pour la relation d'inclusion. Cette maximalité montre aussi que la famille  $\mathcal{H}_0$  est stable par convergence uniformément bornée. En outre, la condition (3) montre que, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions dans  $\mathcal{H}_0$ , alors

$$f \wedge g := \min(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2} \in \mathcal{H}_0.$$

Soit  $\mathcal{F}$  la famille des sous-ensembles  $A$  de  $\Omega$  tels que  $\mathbb{1}_A \in \mathcal{H}_0$ . Alors  $\mathcal{F}$  est une tribu car elle est un  $\pi$ -système (c'est-à-dire que  $A \in \mathcal{F}$  et  $B \in \mathcal{F}$  entraînent



$A \cap B \in \mathcal{F}$ ) et en même temps un  $\lambda$ -système<sup>(1)</sup>. Si  $f$  est une fonction dans  $\mathcal{C}$  et  $t$  est un nombre réel  $> 0$ , alors  $t^{-1}f \wedge 1 \in \mathcal{H}_0$  puisque  $\mathcal{H}_0$  est stable par l'opérateur  $\wedge$ . Comme la suite  $((t^{-1}f \wedge 1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\mathbb{1}_{\{f \geq t\}}$ , on obtient  $\{f \geq t\} \in \mathcal{F}$ . En particulier, toute fonction  $f \in \mathcal{C}$  est  $\mathcal{F}$ -mesurable, d'où  $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$ .

Il reste enfin à vérifier que toute fonction positive, bornée et  $\mathcal{F}$ -mesurable appartient à  $\mathcal{H}_0$ . Soit  $f$  une telle fonction. Pour tout entier  $n \geq 1$ , soit

$$f_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{k/2^n \leq f < (k+1)/2^n\}} + n \mathbb{1}_{\{f \geq n\}}.$$

La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, contenue dans  $\mathcal{H}_0$  et converge vers  $f$ . On obtient  $f \in \mathcal{H}_0$ . Le résultat est donc démontré.  $\square$

On désigne par  $\mathcal{H}$  la famille de fonctions boréliennes, bornées et positives sur  $\Delta_1 + \Delta_2$  qui vérifient la relation (9). Par hypothèse elle contient la famille  $\mathcal{C}$  de toutes les fonctions continues sur  $\Delta_1 + \Delta_2$ , qui satisfait aux conditions (1)–(3) du lemme. En outre, d'après le théorème de convergence dominée, on obtient que  $\mathcal{H}$  est stable par convergence uniformément bornée. Donc le lemme précédent montre que  $\mathcal{H}$  contient toute fonction borélienne, bornée et positive sur  $\Delta_1 + \Delta_2$ .

**Définition 2.3.** — Soit  $(\Delta_1, \Delta_2)$  un couple de corps convexes dans  $\mathbb{R}^d$ . On dit qu'une mesure de probabilité  $\nu \in \mathcal{A}(\Delta_1, \Delta_2)$  est *minkowskienne* si  $\rho(\nu) = 1$ , ou de façon équivalente, pour tout couple de variables aléatoires  $(Z_1, Z_2)$  à valeurs dans  $\Delta_1 \times \Delta_2$  qui suit la loi  $\nu$ , la somme  $Z_1 + Z_2$  suit la loi uniforme sur la somme de Minkowski  $\Delta_1 + \Delta_2$ . On définit en outre l'*indice de corrélation* entre  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  comme

$$\rho(\Delta_1, \Delta_2) := \inf_{\nu \in \mathcal{A}(\Delta_1, \Delta_2)} \rho(\nu).$$

On voit aussitôt que, s'il existe une mesure minkowskienne dans  $\mathcal{A}(\Delta_1, \Delta_2)$ , alors on a  $\rho(\Delta_1, \Delta_2) = 1$ . La réciproque de cet énoncé est aussi vraie. En effet, d'après le théorème de Prokhorov, l'espace  $\mathcal{P}(\Delta_1 \times \Delta_2)$  des mesures de probabilité boréliennes sur  $\Delta_1 \times \Delta_2$ , muni de la topologie de convergence étroite (c'est-à-dire la topologie la moins fine qui rend continue toute application de la forme  $\nu \mapsto \int_{\Delta_1 \times \Delta_2} f d\nu$ , où  $f$  parcourt l'ensemble des fonctions continues sur  $\Delta_1 \times \Delta_2$ ), est un espace topologique séparable, métrisable et compact (voir [11, III.54–60] pour les détails). L'ensemble  $\mathcal{A}(\Delta_1, \Delta_2)$  est un sous-espace fermé de  $\mathcal{P}(\Delta_1 \times \Delta_2)$ , donc est un compact. L'application  $\rho : \mathcal{A}(\Delta_1 \times \Delta_2) \rightarrow [1, +\infty]$

1. C'est-à-dire que  $\mathcal{F}$  vérifie les conditions suivantes : (i)  $\Omega \in \mathcal{F}$ ; (ii) si  $A \in \mathcal{F}$ ,  $B \in \mathcal{F}$  et  $A \subset B$ , alors  $B \setminus A \in \mathcal{F}$ ; (iii) si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante d'éléments de  $\mathcal{F}$ , alors la réunion  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  appartient à  $\mathcal{F}$ .

s'écrit comme la borne supérieure d'une famille de fonctions continues, donc est une fonction semi-continue inférieurement. En particulier, elle atteint sa valeur minimale sur  $\mathcal{A}(\Delta_1, \Delta_2)$ . On en déduit que, si  $\rho(\Delta_1, \Delta_2) = 1$ , alors il existe une mesure minkowskienne dans la famille  $\mathcal{A}(\Delta_1, \Delta_2)$ .

**2.2. Inégalité d'indice de Hodge pour les corps convexes.** — On établit dans la suite une version de l'inégalité d'indice de Hodge dans le cadre de la géométrie convexe.

**Théorème 2.4.** — Soient  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  deux corps convexes dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $G_1$ ,  $G_2$  et  $G$  trois fonctions mesurables sur  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  et  $\Delta_1 + \Delta_2$  respectivement, qui sont bornées supérieurement. On suppose que la fonction  $G$  est positive et que, pour tout  $(x, y) \in \Delta_1 \times \Delta_2$ , l'inégalité  $G(x + y) \geq G_1(x) + G_2(y)$  est vérifiée. Alors on a

$$(10) \quad \frac{\int_{\Delta_1 + \Delta_2} G(z) dz}{\text{vol}(\Delta_1 + \Delta_2)} \geq \rho(\Delta_1, \Delta_2)^{-1} \left( \frac{\int_{\Delta_1} G_1(x) dx}{\text{vol}(\Delta_1)} + \frac{\int_{\Delta_2} G_2(y) dy}{\text{vol}(\Delta_2)} \right).$$

*Démonstration.* — Soient  $\nu$  une mesure de probabilité dans  $\mathcal{A}(\Delta_1, \Delta_2)$ ,  $(Z_1, Z_2)$  un couple de variables aléatoires à valeurs dans  $\Delta_1 \times \Delta_2$  dont la loi de probabilité est  $\nu$ . Soit en outre  $Z$  une variable aléatoire qui est uniformément distribuée sur  $\Delta_1 + \Delta_2$ . Comme la fonction  $G$  est borélienne, positive et bornée, on a

$$\mathbb{E}[G(Z_1 + Z_2)] \leq \rho(\nu) \mathbb{E}[G(Z)].$$

En outre, par l'hypothèse de sur-additivité des fonctions  $G$ ,  $G_1$  et  $G_2$ , on a

$$G(Z_1 + Z_2) \geq G_1(Z_1) + G_2(Z_2),$$

d'où

$$\mathbb{E}[G(Z_1 + Z_2)] \geq \mathbb{E}[G_1(Z_1)] + \mathbb{E}[G_2(Z_2)].$$

Comme les lois marginales du couple  $(Z_1, Z_2)$  sont uniformes, on obtient

$$\frac{\int_{\Delta_1 + \Delta_2} G(z) dz}{\text{vol}(\Delta_1 + \Delta_2)} \geq \rho(\nu)^{-1} \left( \frac{\int_{\Delta_1} G_1(x) dx}{\text{vol}(\Delta_1)} + \frac{\int_{\Delta_2} G_2(y) dy}{\text{vol}(\Delta_2)} \right).$$

Enfin, quitte à prendre la borne supérieure où  $\nu$  parcourt l'ensemble  $\mathcal{A}(\Delta_1, \Delta_2)$ , on obtient l'inégalité souhaitée.  $\square$

**Remarque 2.5.** — Dans le cas où il existe une mesure minkowskienne dans  $\mathcal{A}(\Delta_1, \Delta_2)$ , l'hypothèse de positivité pour la fonction  $G$  dans la proposition précédente peut être relâchée. En effet, dans ce cas-là on peut effectivement choisir un couple  $(Z_1, Z_2)$  de variables aléatoires à valeurs dans  $\Delta_1 \times \Delta_2$  dont les lois marginales sont uniformes, et tel que  $Z_1 + Z_2$  suit la loi uniforme. L'inégalité résulte donc directement de la relation

$$\mathbb{E}[G(Z_1 + Z_2)] \geq \mathbb{E}[G_1(Z_1)] + \mathbb{E}[G_2(Z_2)].$$

**2.3. Majorations de l'indice de corrélation.** — Pour les applications du théorème 2.4, il est important de déterminer si un couple  $(\Delta_1, \Delta_2)$  de corps convexes admet une mesure minkowskienne, et, dans le cas d'absence de mesure minkowskienne, de majorer l'indice de corrélation. La proposition suivante implique que, dans le cas où la dimension de l'espace euclidien vaut 1, tout couple de corps convexes admet toujours une mesure minkowskienne.

**Proposition 2.6.** — *Soient  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  deux corps convexes dans  $\mathbb{R}^d$ . S'il existe  $r > 0$  et  $y \in \mathbb{R}^d$  tels que  $\Delta_2 = \{rx + y \mid x \in \Delta_1\}$ , alors il existe une mesure minkowskienne dans  $\mathcal{A}(\Delta_1, \Delta_2)$ . En particulier, tout couple de corps convexes dans  $\mathbb{R}$  admet une mesure minkowskienne.*

*Démonstration.* — Soit  $Z$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\Delta_1$  qui suit la loi uniforme. Alors  $rZ + y$  suit la loi uniforme sur  $\Delta_2$ . De plus, la somme  $Z + (rZ + y) = (r+1)Z + y$  suit la loi uniforme sur la somme de Minkowski  $\Delta_1 + \Delta_2$ . On obtient donc que la loi du couple  $(Z, rZ + y)$  est une mesure minkowskienne pour  $(\Delta_1, \Delta_2)$ .

Dans le cas  $d = 1$ , les corps convexes dans  $\mathbb{R}$  sont des intervalles fermés et bornés, donc sont proportionnels à translation près. Le résultat montré plus haut est donc valable dans ce cas-là.  $\square$

Soit  $(d_1, \dots, d_n)$  une famille finie d'entiers  $\geq 1$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , soient  $\Delta^{(i)}$  un corps convexe dans  $\mathbb{R}^{d_i}$  et  $\eta^{(i)}$  la distribution uniforme sur  $\Delta^{(i)}$ . Alors la mesure de probabilité produit  $\eta^{(1)} \otimes \dots \otimes \eta^{(n)}$  est la distribution uniforme sur le corps convexe produit  $\Delta^{(1)} \times \dots \times \Delta^{(n)}$ . On en déduit le résultat suivant.

**Proposition 2.7.** — *Soient  $(d_1, \dots, d_n)$  une famille finie d'entiers  $\geq 1$  et  $d$  la somme des  $d_1, \dots, d_n$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , soient  $(\Delta_1^{(i)}, \Delta_2^{(i)})$  un couple de corps convexes dans  $\mathbb{R}^{d_i}$ , et  $\nu^{(i)}$  un élément de  $\mathcal{A}(\Delta_1^{(i)}, \Delta_2^{(i)})$ . Soient en outre*

$$\Delta_j = \Delta_j^{(1)} \times \dots \times \Delta_j^{(n)}, \quad j = 1, 2,$$

et  $\nu = \nu^{(1)} \otimes \dots \otimes \nu^{(n)}$ . Alors on a  $\nu \in \mathcal{A}(\Delta_1, \Delta_2)$  et

$$(11) \quad \rho(\nu) = \prod_{i=1}^n \rho(\nu^{(i)}).$$

En particulier, on a

$$\rho(\Delta_1, \Delta_2) \leq \prod_{i=1}^n \rho(\Delta_1^{(i)}, \Delta_2^{(i)}).$$

En outre, si chacun des couples  $(\Delta_1^{(i)}, \Delta_2^{(i)})$  possède une mesure minkowskienne, alors il en est de même de  $(\Delta_1, \Delta_2)$ .

*Démonstration.* — L'image directe de  $\nu$  sur  $\Delta_j$  ( $j = 1, 2$ ) par la projection  $\Delta_1 \times \Delta_2 \rightarrow \Delta_j$  s'identifie au produit des images directes de  $\nu^{(i)}$  sur  $\Delta_j^{(i)}$  par la projection  $\Delta_1^{(i)} \times \Delta_2^{(i)} \rightarrow \Delta_j^{(i)}$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ), qui est égale à la distribution uniforme sur  $\Delta_j$ . On obtient donc  $\nu \in \mathcal{A}(\Delta_1, \Delta_2)$ . Si  $(f_i)_{i=1}^n$  est une famille de fonctions, où  $f_i$  est une fonction continue sur  $\Delta_1^{(i)} + \Delta_2^{(i)}$ , et si  $f : \Delta_1 + \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}$  est définie comme

$$\forall \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \Delta_1 + \Delta_2, \quad f(z_1, \dots, z_n) = f_1(z_1) \cdots f_n(z_n),$$

alors on a

$$\int_{\Delta_1 + \Delta_2} f(\mathbf{z}) \nu(d\mathbf{z}) = \prod_{i=1}^n \int_{\Delta_1^{(i)} + \Delta_2^{(i)}} f_i d\nu^{(i)}$$

et

$$\int_{\Delta_1 \times \Delta_2} f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \eta(d\mathbf{x}, d\mathbf{y}) = \prod_{i=1}^n \int_{\Delta_1^{(i)} \times \Delta_2^{(i)}} f_i(x_i + y_i) \eta_1^{(i)}(dx_i) \otimes \eta_2^{(i)}(dy_i),$$

où  $\eta_j^{(i)}$  ( $j \in \{1, 2\}$  et  $i \in \{1, \dots, n\}$ ) est la distribution uniforme sur  $\Delta_j^{(i)}$  et  $\eta$  est la distribution uniforme sur  $\Delta_1 \times \Delta_2$ . On en déduit donc

$$\rho(\nu) \geq \prod_{i=1}^n \rho(\nu^{(i)}).$$

En outre, le théorème de Fubini montre que l'inégalité

$$\int_{\Delta_1 \times \Delta_2} f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \eta(d\mathbf{x}, d\mathbf{y}) \leq \left( \prod_{i=1}^n \rho(\nu^{(i)}) \right) \cdot \int_{\Delta_1 + \Delta_2} f(\mathbf{z}) \nu(d\mathbf{z})$$

est satisfaite pour toute fonction continue positive  $f$  sur  $\Delta_1 + \Delta_2$ . On obtient donc l'égalité (11), qui implique les deux derniers énoncés.  $\square$

Soit  $(\Delta_1, \Delta_2)$  un couple de corps convexes dans  $\mathbb{R}^d$ . L'existence d'une mesure minkowskienne dans  $\mathcal{A}(\Delta_1, \Delta_2)$  entraîne que le centre de gravité de la somme de Minkowski  $\Delta_1 + \Delta_2$  coïncide avec la somme des centres de gravité de  $\Delta_1$  et de  $\Delta_2$ . Cependant, cela n'est pas toujours possible lorsque  $d \geq 2$ , cf. [17, page 83] pour un contre-exemple. Il est donc intéressant d'étudier les majorations de l'indice de corrélation  $\rho(\Delta_1, \Delta_2)$ . Le choix de la mesure produit  $\nu_0 \in \mathcal{A}(\Delta_1, \Delta_2)$  des distributions uniformes sur  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  donne déjà une majoration non-triviale. Ce problème est étroitement lié au contrôle de l'entropie de somme de variables aléatoires. Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  dont la loi de probabilité est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. L'entropie de  $X$  est définie comme

$$h(X) := -\mathbb{E}[\log f(X)],$$

pourvu que l'espérance figurant dans la formule est bien définie, où  $f$  est la densité de Radon-Nikodym de la loi de  $X$  par rapport à la mesure de Lebesgue. On définit l'entropie exponentielle de  $X$  comme

$$H(X) := \exp(2h(X)/d).$$

L'inégalité de Shannon dans la théorie d'information [31] montre que, si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , alors on a

$$(12) \quad H(X + Y) \geq H(X) + H(Y),$$

pourvu que les entropies exponentielles sont bien définies. On renvoie les lecteurs à [32] pour une démonstration de cette inégalité. Dans le cas où la variable aléatoire  $X$  est à valeurs dans un corps convexe  $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ , l'entropie de  $X$  est majorée par  $\ln(\text{vol}(\Delta))$ , et l'égalité est atteinte lorsque  $X$  est uniformément distribuée. Plus généralement, l'entropie et le supremum essentiel de la densité d'une variable aléatoire sont proches lorsque cette densité est log-concave. En utilisant cette propriété, Bobkov et Madiman [2] ont obtenu un encadrement de la norme  $L^\infty$  de la densité de la somme de variables aléatoires indépendantes qui sont uniformément distribuées dans des corps convexe.

**Proposition 2.8.** — Soient  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  deux corps convexes dans  $\mathbb{R}^d$ . On a

$$(13) \quad \rho(\Delta_1, \Delta_2) \leq (2e)^d,$$

où  $e$  est la base du logarithme naturel.

*Démonstration.* — Soient  $Z_1$  et  $Z_2$  deux variables aléatoires indépendantes qui sont uniformément distribuées dans les corps convexes  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  respectivement. D'après [2, corollaire 4.4], la densité par rapport à la mesure de Lebesgue de la loi de probabilité de  $Z_1 + Z_2$  est majorée par  $(2e)^d / \text{vol}(\Delta_1 + \Delta_2)$ , d'où le résultat.  $\square$

**Remarque 2.9.** — Si on compare les démonstrations des propositions 2.6 et 2.8, on constate que le choix d'une structure de corrélation forte devrait conduire à une meilleure estimation pour l'indice  $\rho(\Delta_1, \Delta_2)$ . Cette observation est confirmée par un résultat de [10] sur l'entropie maximale de la somme de deux variables aléatoires qui suivent la même loi. Il est envisageable que l'étude sur l'entropie maximale de la somme de variables aléatoires dépendantes conduira à des majorations de l'indice de corrélation de deux corps convexes, qui sont meilleures que l'inégalité (13).

### 3. Systèmes linéaires filtrés et inégalité d'indice de Hodge

Dans ce paragraphe, on établit une inégalité d'indice de Hodge dans le cadre de systèmes linéaires gradués filtrés. On rappelle d'abord la construction du corps d'Okounkov d'un système linéaire gradué et la transformation concave

associée à une filtration sur celui-ci. On renvoie les lecteurs à [25, 22, 4] pour des références. Dans tout le paragraphe, on fixe un corps  $K$  et un schéma projectif et intègre  $X$  sur  $\text{Spec } K$  dont la dimension de Krull  $d$  est supposée être  $\geq 1$ . On suppose en plus que le  $K$ -schéma  $X$  admet un point rationnel régulier  $P$ . Ainsi l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,P}$  est une  $K$ -algèbre locale régulière de dimension  $d$ , dont le corps résiduel s'identifie à  $K$ .

**3.1. Filtration monomiale.** — Quitte à choisir une suite régulière  $z = (z_1, \dots, z_d)$  dans  $\mathcal{O}_{X,P}$ , on peut identifier le complété formel de  $\mathcal{O}_{X,P}$  à l'algèbre des séries formelles  $K[[z_1, \dots, z_d]]$  (voir [14, Proposition 10.16] pour une démonstration). Pour tout élément  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ , on désigne par  $z^\alpha$  le monôme  $z_1^{\alpha_1} \dots z_d^{\alpha_d}$ .

On fixe aussi une relation d'ordre monomiale  $\leq$  sur l'ensemble  $\mathbb{N}^d$ . Par définition, c'est une relation d'ordre totale sur  $\mathbb{N}^d$  telle que  $0 \leq \alpha$  et que

$$\forall \alpha, \alpha', \beta \in \mathbb{N}^d, \quad \alpha \leq \alpha' \implies \alpha + \beta \leq \alpha' + \beta.$$

Cette relation d'ordre permet de définir une  $\mathbb{N}^d$ -filtration décroissante  $\mathbb{F}$  sur  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,P} \cong K[[z_1, \dots, z_d]]$  telle que, pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^d$ ,  $\mathbb{F}^\alpha(\widehat{\mathcal{O}}_{X,P})$  soit l'idéal de  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,P}$  engendré par les monômes  $z^\beta$  avec  $\beta \geq \alpha$ . Cette filtration est *multiplicative*, c'est-à-dire que

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d, \quad \mathbb{F}^\alpha(\widehat{\mathcal{O}}_{X,P}) \cdot \mathbb{F}^\beta(\widehat{\mathcal{O}}_{X,P}) \subset \mathbb{F}^{\alpha+\beta}(\widehat{\mathcal{O}}_{X,P}).$$

Il s'avère que l'algèbre  $\mathbb{N}^d$ -graduée  $\text{gr}(\widehat{\mathcal{O}}_{X,P})$  associée à cette filtration s'identifie à l'algèbre des polynômes  $K[\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_d]$ , où  $\bar{z}_i$  désigne l'image de  $z_i$  dans  $\text{gr}(\widehat{\mathcal{O}}_{X,P})$ . On remarque que  $\text{rg}_K(\text{gr}^\alpha(\widehat{\mathcal{O}}_{X,P})) = 1$  quel que soit  $\alpha \in \mathbb{N}^d$ . Cette observation est importante dans la construction du corps d'Okounkov.

**3.2. Rappels sur les diviseurs de Cartier.** — Soit  $\mathcal{M}_X$  le faisceau engendré par le préfaisceau d'anneaux constant  $K(X)$ , où  $K(X)$  désigne le corps des fonctions rationnelles sur  $X$ . Pour tout sous-ensemble ouvert  $U$  de  $X$ , soit  $\mathcal{M}_X^\times(U)$  l'ensemble des éléments  $\varphi \in \mathcal{M}_X(U)$  tels que l'homothétie  $\mathcal{M}_U \rightarrow \mathcal{M}_U$  définie par  $\varphi$  soit un isomorphisme, où  $\mathcal{M}_U$  désigne la restriction de  $\mathcal{M}_X$  à  $U$ . De façon similaire, on définit  $\mathcal{O}_X^\times$  comme le faisceau de groupes abéliens sur  $X$  tel que, pour tout sous-ensemble ouvert  $U$  de  $X$ ,  $\mathcal{O}_X^\times(U)$  s'identifie à l'ensemble des  $a \in \mathcal{O}_X(U)$  tels que l'homothétie  $\mathcal{O}_U \rightarrow \mathcal{O}_U$  définie par  $a$  soit un isomorphisme. Il s'avère que  $\mathcal{O}_X^\times$  est un sous-faisceau du faisceau de groupes abéliens  $\mathcal{M}_X^\times$ . On appelle *diviseur de Cartier* sur  $X$  tout élément de  $\text{Div}(X) := \Gamma(X, \mathcal{M}_X^\times / \mathcal{O}_X^\times)$ . Par définition, un  $\mathbb{R}$ -diviseur de Cartier sur  $X$  est un élément de  $\text{Div}(X)_\mathbb{R} := \text{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ . Un  $\mathbb{R}$ -diviseur de Cartier  $D$  est dit *effectif* s'il appartient au cône engendré par  $\Gamma(X, (\mathcal{O}_X \cap \mathcal{M}_X^\times) / \mathcal{O}_X^\times)$ , noté comme  $D \geq 0$ .

Si  $f$  est une fonction rationnelle non-nulle sur  $X$ , on désigne par  $(f)$  l'image canonique de  $f$  dans  $\text{Div}(X) = \Gamma(X, \mathcal{M}_X^\times / \mathcal{O}_X^\times)$ . L'application  $(\cdot) : K(X)^\times \rightarrow \text{Div}(X)$  est un morphisme de groupes, qui induit une application  $\mathbb{R}$ -linéaire de  $K(X)^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  vers  $\text{Div}(X)_{\mathbb{R}}$  que l'on note encore comme  $(\cdot)$  par abus de langage. Un diviseur de Cartier ou un  $\mathbb{R}$ -diviseur de Cartier qui appartient à l'image de l'application  $(\cdot)$  est appelé un diviseur ou un  $\mathbb{R}$ -diviseur *principal*. Rappelons que  $(f) = 0$  lorsque  $f$  appartient à  $K^\times$ .

Les diviseurs de Cartier sont naturellement liés aux fibrés inversibles. Étant donné un fibré inversible  $L$  sur  $X$  et une section rationnelle non-nulle  $s$  de  $L$ , on peut construire un diviseur de Cartier  $(s)$  comme la suite. Pour tout sous-ensemble ouvert non-vide  $U$  de  $X$  sur lequel le fibré inversible  $L$  se trivialisait, on choisit une section  $s_U \in \Gamma(U, L)$  qui trivialisait  $L$ . Le quotient  $s/s_U$  est alors une fonction rationnelle non-nulle, dont la classe dans  $\Gamma(U, \mathcal{M}_X^\times / \mathcal{O}_X^\times)$  ne dépend pas de la trivialisaiton  $s_U$ . Le recollement de ces fonctions rationnelles donne alors un diviseur de Cartier que l'on note comme  $(s)$ . Réciproquement, si  $D$  est un diviseur de Cartier sur  $X$ , on peut construire, par recollement de faisceaux, un  $\mathcal{O}_X$ -module inversible que l'on note comme  $\mathcal{O}_X(D)$ . Ce fibré inversible possède naturellement une section rationnelle  $s_D$  telle que  $(s_D) = D$ . On dit que le diviseur de Cartier  $D$  est *ample* (resp. *très ample*) si le fibré inversible  $\mathcal{O}_X(D)$  est ample (resp. très ample). Plus généralement, on dit qu'un  $\mathbb{R}$ -diviseur de Cartier est *ample* s'il peut être écrit comme combinaison linéaire à coefficients strictement positifs d'une famille de diviseurs de Cartier amples.

**3.3. Systèmes linéaires gradués.** — Par *système linéaire gradué*, on entend une sous- $K$ -algèbre graduée de la  $K(X)$ -algèbre de polynômes

$$K(X)[T] = \bigoplus_{n \geq 0} K(X)T^n.$$

On peut construire un système linéaire gradué à partir d'un  $\mathbb{R}$ -diviseur de Cartier. Soit  $D$  un  $\mathbb{R}$ -diviseur de Cartier. On désigne par  $H^0(D)$  l'ensemble

$$\{f \in K(X)^\times \mid (f) + D \geq 0\} \cup \{0\}.$$

C'est un sous-espace  $K$ -vectoriel de rang fini de  $K(X)$ . En outre, si  $D$  et  $D'$  sont deux  $\mathbb{R}$ -diviseurs de Cartier, alors on a une application  $K$ -linéaire naturelle

$$H^0(D) \otimes H^0(D') \longrightarrow H^0(D + D')$$

induite par la loi de multiplication de  $K(X)$ . Ainsi la somme directe

$$V_\bullet(D) := \bigoplus_{n \geq 0} H^0(nD)$$

forme un système linéaire gradué, appelé le système linéaire gradué *total* de  $D$ . Toute sous- $K$ -algèbre graduée de  $V_\bullet(D)$  est appelée un *système linéaire gradué* de  $D$ .

Si  $V_\bullet = \bigoplus_{n \geq 0} V_n$  est un système linéaire gradué, on définit le *volume* de  $V_\bullet$  comme

$$\text{vol}(V_\bullet) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{rg}_K(V_n)}{n^d/d!}.$$

C'est un nombre fini lorsque  $V_\bullet$  est un système linéaire gradué d'un  $\mathbb{R}$ -diviseur de Cartier. Dans le cas où  $V_\bullet$  est le système linéaire gradué total d'un  $\mathbb{R}$ -diviseur de Cartier  $D$ ,  $\text{vol}(V_\bullet)$  est appelé le *volume* de  $D$ , noté comme  $\text{vol}(D)$ . Un  $\mathbb{R}$ -diviseur de Cartier est dit *gros* si son volume est strictement positif.

Pour comprendre la fonction volume via la géométrie convexe, la condition suivante introduite dans [25, §2.3] est importante.

**Définition 3.1.** — Soit  $V_\bullet$  un système linéaire gradué sur  $X$ . On dit que  $V_\bullet$  contient un  $\mathbb{R}$ -diviseur ample s'il existe un  $\mathbb{R}$ -diviseur de Cartier ample  $A$  tel que  $V_n(A) \subset V_n$  pour tout entier  $n$  suffisamment positif.

**Remarque 3.2.** — Un  $\mathbb{R}$ -diviseur de Cartier  $D$  sur  $X$  est *gros* si et seulement s'il peut être décomposé en la somme d'un  $\mathbb{R}$ -diviseur ample et un  $\mathbb{R}$ -diviseur effectif. En outre, les cônes des  $\mathbb{R}$ -diviseurs amples et des  $\mathbb{R}$ -diviseurs gros sont ouverts dans  $\text{Div}(X)_\mathbb{R}$ . Donc la condition dans la définition précédente est équivalente à chacune des conditions suivantes :

- (a) Il existe un  $\mathbb{Q}$ -diviseur de Cartier ample  $A$  (c'est-à-dire une combinaison linéaire à coefficients rationnels et strictement positifs de diviseurs de Cartier ample) tel que  $V_n(A) \subset V_n$  pour tout entier  $n$  suffisamment positif.
- (b) Il existe un  $\mathbb{Q}$ -diviseur de Cartier  $D$  (c'est-à-dire un élément de  $\text{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ) qui est gros et tel que  $V_n(D) \subset V_n$  pour tout entier  $n$  suffisamment positif.

**3.4. Corps d'Okounkov.** — Soient  $D$  un  $\mathbb{R}$ -diviseur de Cartier sur  $X$  et  $V_\bullet$  un système linéaire gradué de  $D$ . Suivant [25, 22], on peut attacher à  $V_\bullet$  un corps convexe dans  $\mathbb{R}^d$ , dont la masse est égale à  $\text{vol}(V_\bullet)/d!$  lorsque  $V_\bullet$  contient un diviseur ample. Quitte à remplacer  $D$  par un diviseur de Cartier  $D'$  tel que  $D' - D$  soit effectif, on peut supposer que  $D$  est un diviseur de Cartier. Soient  $P$  le point rationnel régulier fixé dans §3.1 et  $f$  une fonction rationnelle sur  $X$  qui définit le diviseur de Cartier localement en  $P$ . Le système linéaire gradué total  $V_\bullet(D)$  de  $D$  est en fait une sous- $K$ -algèbre de

$$\bigoplus_{n \geq 0} (\mathcal{O}_{K,P} f^n) T^n.$$

Rappelons que différents choix du générateur  $f$  définissent les mêmes sous-modules de  $K(X)$  comme les coefficients dans la somme directe au-dessus. Quitte à choisir une suite régulière dans l'anneau local régulier  $\mathcal{O}_{K,P}$  et une relation d'ordre monomiale sur  $\mathbb{N}^d$ , on peut construire une  $\mathbb{N}^d$ -filtration sur le  $\mathcal{O}_{K,P}$ -module monogène  $\mathcal{O}_{K,P} f^n$ , qui induit une  $\mathbb{N}^d$ -filtration décroissante sur



$V_n$ . Soit  $\text{gr}(V_n)$  le  $K$ -module  $\mathbb{N}^d$ -gradué associé à cette filtration. Il s'avère que la somme directe

$$\text{gr}(V_\bullet) := \bigoplus_{n \geq 0} \text{gr}(V_n)$$

est naturellement munie d'une structure de  $K$ -algèbre  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^d$ -gradué. C'est un anneau intègre.

On désigne par  $\Gamma(V_\bullet)$  l'ensemble des  $(n, \alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^d$  tels que  $\text{gr}^\alpha(V_n) \neq 0$ . C'est un sous-semi-groupe de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^d = \mathbb{N}^{d+1}$ , appelé le *semi-groupe d'Okounkov* de  $V_\bullet$ . L'algèbre  $\text{gr}(V_\bullet)$  s'identifie en fait à l'algèbre du semi-groupe  $\Gamma(V_\bullet)$ . Soit  $\Sigma(V_\bullet)$  le cône convexe dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  engendré par  $\Gamma(V_\bullet)$ . Le *corps d'Okounkov* de  $V_\bullet$  est alors défini comme (cf. [25, p. 18])

$$\Delta(V_\bullet) := \Sigma(V_\bullet) \cap (\{1\} \times \mathbb{R}^n).$$

D'après [25] Lemma 2.12 et Proposition 2.1, si  $V_\bullet$  contient un diviseur ample, alors le groupe  $\mathbb{Z}^{n+1}$  est engendré par  $\Gamma(V_\bullet)$ , et donc on a

$$\text{vol}(\Delta(V_\bullet)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{rg}_k(V_n)}{n^d},$$

où  $\text{vol}(\Delta(V_\bullet))$  désigne la mesure de Lebesgue de  $\Delta(V_\bullet)$ .

**3.5. Systèmes linéaires gradués et filtrés.** — Soit  $V$  un espace vectoriel de rang fini sur  $K$ . Par  $\mathbb{R}$ -filtration sur  $V$ , on entend une famille  $(\mathcal{F}^t V)_{t \in \mathbb{R}}$  de sous-espaces  $K$ -vectoriel de  $V$  indexée par  $\mathbb{R}$ , qui vérifie les conditions suivantes :

- (a)  $\mathcal{F}^t(V) = \{0\}$  pour  $t$  suffisamment positif,
- (b)  $\mathcal{F}^t(V) = V$  pour  $t$  suffisamment négatif,
- (c) la fonction  $t \mapsto \text{rg}_K(\mathcal{F}^t(V))$  est localement constante à gauche.

On dit que la filtration  $\mathcal{F}$  est *triviale* si  $\mathcal{F}_t(V) = \{0\}$  lorsque  $t > 0$ , et  $\mathcal{F}_t(V) = V$  lorsque  $t \leq 0$ . Si  $\mathcal{F}$  est une  $\mathbb{R}$ -filtration sur  $V$ , on définit

$$(14) \quad e_{\max}(V, \mathcal{F}) := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \mathcal{F}^t(V) \neq \{0\}\}$$

comme le plus grand point de saut de la filtration. Si l'espace vectoriel  $V$  est non-nul, la dérivée au sens de distribution de la fonction

$$(t \in \mathbb{R}) \longmapsto 1 - \frac{\text{rg}_K(\mathcal{F}^t(V))}{\text{rg}_K(V)}$$

définit une mesure de probabilité borélienne sur  $\mathbb{R}$ , notée comme  $\nu_{(V, \mathcal{F})}$ .

Soient  $D$  un  $\mathbb{R}$ -diviseur de Cartier sur  $X$  et  $V_\bullet$  un système linéaire gradué de  $D$ . On suppose donnée, pour chaque entier  $n \geq 0$ , une  $\mathbb{R}$ -filtration  $\mathcal{F}$  sur  $V_n$ . On convient que la filtration sur  $V_0$  est triviale et on suppose en outre que

la famille de filtrations  $\mathcal{F}$  sur  $V_\bullet$  est *multiplicative*, autrement dit, pour tous  $n, m \in \mathbb{N}$  et  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ , on a

$$(\mathcal{F}^{t_1} V_n)(\mathcal{F}^{t_2} V_m) \subset \mathcal{F}^{t_1+t_2} V_{n+m}.$$

En particulier, pour tout nombre réel  $t$ , les espaces vectoriels  $V_n^t := \mathcal{F}^{nt} V_n$  forment un système linéaire gradué de  $D$

$$V_\bullet^t := \bigoplus_{n \geq 0} V_n^t.$$

Par la construction des corps d'Okounkov que l'on a rappelée, on obtient une famille décroissante  $(\Delta(V_\bullet^t))_{t \in \mathbb{R}}$  de parties convexes et compactes de  $\mathbb{R}^d$ . De plus, pour tous  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  et tout  $\lambda \in [0, 1]$ ,

$$\lambda \Delta(V_\bullet^{t_1}) + (1 - \lambda) \Delta(V_\bullet^{t_2}) \subset \Delta(V_\bullet^{\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2}).$$

En particulier, la suite  $(e_{\max}(V_n, \mathcal{F}))_{n \geq 0}$  est sur-additive. On définit

$$e_{\max}(V_\bullet, \mathcal{F}) := \sup_{n \geq 1} \frac{e_{\max}(V_n, \mathcal{F})}{n}.$$

Si  $V_n \neq \{0\}$  pour  $n$  suffisamment grand, (c'est le cas notamment quand  $V_\bullet$  contient un  $\mathbb{R}$ -diviseur ample), alors on a

$$e_{\max}(V_\bullet, \mathcal{F}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{\max}(V_n, \mathcal{F})}{n}.$$

On peut considérer  $e_{\max}(V_\bullet, \mathcal{F})$  comme un seuil de trivialité pour la famille de systèmes linéaires gradués  $(V_\bullet^t)_{t \in \mathbb{R}}$ . En effet, quand  $t > e_{\max}(V_\bullet, \mathcal{F})$ , par définition on a  $V_n^t = \{0\}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ . En revanche, lorsque  $V_\bullet$  contient un  $\mathbb{R}$ -diviseur ample, il est démontré dans [4, lemme 1.5] que, pour tout nombre réel  $t < e_{\max}(V_\bullet, \mathcal{F})$ , le système linéaire gradué  $V_\bullet^t$  contient un  $\mathbb{R}$ -diviseur ample.

On suppose désormais que  $e_{\max}(V_\bullet, \mathcal{F}) < +\infty$  et que  $V_\bullet$  contient un  $\mathbb{R}$ -diviseur ample. La *transformée concave* de  $\mathcal{F}$  est définie comme la fonction concave  $G_{(V_\bullet, \mathcal{F})}$  de  $\Delta(V_\bullet)$  vers  $\mathbb{R}$  telle que

$$G_{(V_\bullet, \mathcal{F})}(x) := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid x \in \Delta(V_\bullet^t)\}.$$

C'est une fonction concave et semi-continue supérieurement sur  $\Delta(V_\bullet)$ , qui est à valeurs réelles et continue sur  $\Delta(V_\bullet)^\circ$ . En outre, on a  $G_{(V_\bullet, \mathcal{F})} \leq e_{\max}(V_\bullet, \mathcal{F})$ .

On rappelle un théorème de limite pour les systèmes linéaires gradués et filtrés comme la suite. Ce résultat a été établi dans [4] (voir le théorème 1.11 du *loc. cit.* pour une démonstration). Ici on donne une reformulation de ce résultat en utilisant le langage probabiliste.

**Théorème 3.3.** — *Soient  $X$  un schéma projectif intègre de dimension  $d \geq 1$  sur un corps  $K$ , qui admet un point rationnel régulier, et  $D$  un  $\mathbb{R}$ -diviseur de Cartier sur  $X$ . Soit  $V_\bullet$  un système linéaire gradué de  $D$ , qui contient un*

diviseur ample, et est muni d'une famille multiplicative de filtrations  $\mathcal{F}$  telle que  $e_{\max}(V_{\bullet}, \mathcal{F}) < +\infty$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , soit  $Y_n$  une variable aléatoire dont la loi de probabilité est  $\nu_{(V_n, \mathcal{F})}$ . Alors la suite de variables aléatoires  $(Y_n/n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers la mesure de probabilité  $\nu_{(V_{\bullet}, \mathcal{F})}$  qui est l'image directe de la mesure de Lebesgue normalisée sur  $\Delta(V_{\bullet})$  par la transformation concave  $G_{(V_{\bullet}, \mathcal{F})}$ .

Rappelons qu'une suite de variables aléatoires  $(Z_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers une mesure limite  $\nu$  si, pour toute fonction borélienne et bornée sur  $\mathbb{R}$  on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[h(Z_n)] = \int_{\mathbb{R}} h(x) \nu(dx).$$

On peut montrer que, dans le cas de la convergence en loi de la suite  $(Z_n)_{n \geq 1}$ , cette égalité est vérifiée plus généralement pour toute fonction borélienne et bornée  $h$  sur  $\mathbb{R}$  dont l'ensemble des points de discontinuité est négligeable par rapport à la mesure limite  $\nu$ . On renvoie les lecteurs à [11, chapitre III] corollaire 57 pour les détails.

Bien que la définition des corps d'Okounkov dépend du choix d'un point rationnel régulier de la variété, une suite régulière de l'anneau local en ce point, ainsi qu'une relation d'ordre monomiale sur  $\mathbb{N}^d$ , la loi de probabilité limite  $\nu_{(V_{\bullet}, \mathcal{F})}$  est intrinsèque. En effet, si  $Y$  est une variable aléatoire qui suit la loi  $\nu_{(V_{\bullet}, \mathcal{F})}$ , alors on a

$$\mathbb{P}(Y \geq t) = \frac{\text{vol}(V_{\bullet}^t)}{\text{vol}(V_{\bullet})} = \frac{\text{vol}(\Delta(V_{\bullet}^t))}{\text{vol}(\Delta(V_{\bullet}))}.$$

On définit le *volume arithmétique* du système linéaire gradué filtré  $(V_{\bullet}, \mathcal{F})$  comme

$$(15) \quad \widehat{\text{vol}}(V_{\bullet}, \mathcal{F}) := (d+1) \int_0^{+\infty} \text{vol}(V_{\bullet}^t) dt = (d+1) \text{vol}(V_{\bullet}) \mathbb{E}[Y^+],$$

où  $Y$  est une variable aléatoire qui suit la loi limite  $\nu_{(V_{\bullet}, \mathcal{F})}$ , et  $Y^+ = \max(Y, 0)$ . On définit le  $\chi$ -*volume arithmétique* de  $(V_{\bullet}, \mathcal{F})$  comme

$$(16) \quad \widehat{\text{vol}}_{\chi}(V_{\bullet}, \mathcal{F}) := (d+1) \text{vol}(V_{\bullet}) \mathbb{E}[Y].$$

Dans le cas où la filtration  $\mathcal{F}$  provient d'une structure de  $\mathbb{R}$ -diviseur arithmétique adélique sous forme de filtration par minima,  $\widehat{\text{vol}}(V_{\bullet}, \mathcal{F})$  et  $\widehat{\text{vol}}_{\chi}(V_{\bullet}, \mathcal{F})$  correspondent aux volume arithmétique et  $\chi$ -volume arithmétique du  $\mathbb{R}$ -diviseur arithmétique.

Le théorème de limite 3.3 conduit naturellement au corollaire suivant.

**Corollaire 3.4.** — Avec les notations et sous les hypothèses du théorème 3.3, on a

$$(17) \quad \widehat{\text{vol}}(V_\bullet, \mathcal{F}) = (d+1)! \int_{\Delta(V_\bullet^0)} G_{(V_\bullet, \mathcal{F})}(x) dx,$$

$$(18) \quad \widehat{\text{vol}}_\chi(V_\bullet, \mathcal{F}) = (d+1)! \int_{\Delta(V_\bullet)} G_{(V_\bullet, \mathcal{F})}(x) dx.$$

**3.6. Inégalité d'indice de Hodge.** — Soient  $U_\bullet$ ,  $V_\bullet$  et  $W_\bullet$  trois systèmes linéaires gradués de  $\mathbb{R}$ -diviseurs de Cartiers sur  $X$ , contenant des  $\mathbb{R}$ -diviseurs amples. On suppose que chacun des systèmes linéaires gradués est muni d'une famille multiplicative de  $\mathbb{R}$ -filtrations  $\mathcal{F}$ . Le but de ce sous-paragraphe est de montrer le résultat suivant.

**Théorème 3.5.** — Si  $e_{\max}(W_\bullet, \mathcal{F}) < +\infty$  et si la condition suivante est vérifiée :

$$(19) \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{F}^a(U_n) \cdot \mathcal{F}^b(V_n) \subset \mathcal{F}^{a+b}(W_n),$$

alors on a

$$(20) \quad \widehat{\text{vol}}(W_\bullet, \mathcal{F}) \geq \frac{\text{vol}(\Delta(U_\bullet^0) + \Delta(V_\bullet^0))}{\rho(\Delta(U_\bullet^0), \Delta(V_\bullet^0))} \left( \frac{\widehat{\text{vol}}(U_\bullet, \mathcal{F})}{\text{vol}(\Delta(U_\bullet^0))} + \frac{\widehat{\text{vol}}(V_\bullet, \mathcal{F})}{\text{vol}(\Delta(V_\bullet^0))} \right).$$

Si le couple de corps convexes  $(\Delta(U_\bullet), \Delta(V_\bullet))$  possède une mesure minkowskienne et si la relation  $\Delta(W_\bullet) = \Delta(U_\bullet) + \Delta(V_\bullet)$  est vérifiée, alors on a

$$(21) \quad \frac{\widehat{\text{vol}}_\chi(W_\bullet, \mathcal{F})}{\text{vol}(W_\bullet)} \geq \frac{\widehat{\text{vol}}_\chi(U_\bullet, \mathcal{F})}{\text{vol}(U_\bullet)} + \frac{\widehat{\text{vol}}_\chi(V_\bullet, \mathcal{F})}{\text{vol}(V_\bullet)}.$$

*Démonstration.* — On peut supposer que  $U_\bullet$ ,  $V_\bullet$  et  $W_\bullet$  sont tous des systèmes linéaires gradués d'un même diviseur de Cartier. La condition (19) implique que  $U_n \cdot V_n \subset W_n$  pour tout entier  $n \geq 0$ . On obtient donc  $\Delta(U_\bullet) + \Delta(V_\bullet) \subset \Delta(W_\bullet)$ . En outre, pour la même raison on a

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \Delta(U_\bullet^a) + \Delta(V_\bullet^b) \subset \Delta(W_\bullet^{a+b}).$$

On en déduit donc

$$\forall (x, y) \in \Delta(U_\bullet) \times \Delta(V_\bullet), \quad G_{(W_\bullet, \mathcal{F})}(x+y) \geq G_{(U_\bullet, \mathcal{F})}(x) + G_{(V_\bullet, \mathcal{F})}(y).$$

Les inégalités (20) et (21) résultent donc du théorème 2.4 (voir aussi la remarque 2.5) et du corollaire 3.4.  $\square$

#### 4. Rappels sur les espaces de Berkovich

Le but de ce paragraphe est de présenter quelques notions et résultats dans la théorie des espaces de Berkovich qui seront utilisés dans la suite. Ces notions et résultats sont classiques, mais la présentation ici est légèrement différente : on adopte un point de vue fonctoriel pour faciliter la présentation des métriques sur les objets définis par des propriétés universelles. On renvoie les lecteurs à [1, 13, 29] pour des références. On fixe dans ce paragraphe un corps  $k$  muni d'une valeur absolue  $|\cdot|$ , qui est supposé être complet et localement compact par rapport à cette valeur absolue. Bien entendu, on n'exclut pas le cas où la valeur absolue  $|\cdot|$  est triviale, c'est-à-dire que  $|a| = 1$  pour tout  $a \in k^\times$ .

**4.1. Espace de Berkovich associé à un schéma.** — Soit  $X$  un schéma projectif et intègre sur  $\text{Spec } k$ . On peut considérer  $X$  comme un foncteur covariant de la catégorie des  $k$ -algèbres commutatives vers celle des ensembles, qui envoie toute  $k$ -algèbre  $A$  en l'ensemble des  $k$ -morphisms de  $\text{Spec } A$  vers  $X$ . Ensemblistement le schéma  $X$  s'identifie à la limite inductive de la restriction de ce foncteur à la sous-catégorie pleine des corps extensions de  $k$  (cf. [12, chap I, §1, n°4] proposition 4.9).

On entend par *extension valuée* de  $k$  tout corps  $k'$  extension de  $k$  munie d'une valeur absolue qui prolonge  $|\cdot|$ . Les extensions valuées de  $k$  et les homomorphismes  $k$ -linéaires de corps qui respectent les valeurs absolues forment une catégorie que l'on note comme  $\mathbf{EV}_k$ . On désigne par  $w$  le foncteur d'oubli de  $\mathbf{EV}_k$  vers la catégorie des  $k$ -algèbres commutatives qui consiste à oublier la structure de valeur absolue.

Si  $y$  est un  $k$ -point de  $X$  à valeurs dans une extension valuée de  $k$ , on utilise les expressions  $\kappa(y)$  et  $|\cdot|_y$  pour désigner le corps valué et sa valeur absolue respectivement.

L'*espace de Berkovich* (en tant qu'ensemble) associé au schéma  $X$  est défini comme la limite inductive du foncteur composé  $X \circ w$ , noté comme  $X^{\text{an}}$ . On désigne par  $j : X^{\text{an}} \rightarrow X$  l'application induite par la propriété universelle de la limite inductive. Si  $x$  est un point de  $X$ , on désigne par  $\kappa(x)$  le corps résiduel de  $j(x)$ . Pour tout  $k$ -point  $y$  de  $X$  à valeurs dans une extension valuée de  $k$ , qui représente le point  $x$ , le corps  $\kappa(y)$  est une extension de  $\kappa(x)$  et la restriction de la valeur absolue  $|\cdot|_y$  à  $\kappa(x)$  ne dépend pas du choix du représentant  $y$ . On désigne par  $|\cdot|_x$  cette valeur absolue.

L'espace  $X^{\text{an}}$  est naturellement muni de la topologie de Zariski : la topologie la moins fine qui rend l'application  $j$  continue. On munit l'espace  $X^{\text{an}}$  d'une autre topologie qui est plus fine que la topologie de Zariski. Soient  $U$  un sous-ensemble ouvert de  $X$  et  $f$  une fonction régulière sur  $U$ . Pour tout  $x \in U^{\text{an}} = j^{-1}(U)$ , on désigne par  $f(x)$  l'image de  $f$  dans  $\kappa(x)$  par l'application de réduction. Soit en outre  $|f|_x(x)$  la valeur absolue de  $f(x)$  par rapport à  $|\cdot|_x$ . On

obtient ainsi une fonction positive  $|f|$  définie sur  $j^{-1}(U)$ . On appelle *topologie analytique* sur  $X^{\text{an}}$  la topologie la moins fine qui rend continues l'application  $j$  et toute fonction de la forme  $|f|$ , où  $f$  est une fonction régulière sur un ouvert Zariski de  $X$ .

**4.2. Fibrés inversibles métrisés.** — On désigne par  $\mathcal{C}_{X^{\text{an}}}^0$  le faisceau d'anneaux des fonctions continues à valeurs réelles sur l'espace topologique  $X^{\text{an}}$ . Soit  $L$  un  $\mathcal{O}_X$ -module inversible. On appelle *métrique continue* sur  $L$  tout morphisme de faisceaux d'ensembles  $\|\cdot\|$  de  $L$  vers  $j_*(\mathcal{C}_{X^{\text{an}}}^0)$  qui vérifie les conditions suivantes :

- (a) pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , toute section  $s \in \Gamma(U, L)$  et tout point  $x \in U^{\text{an}}$ , la valeur de la fonction  $\|s\|$  en  $x$  ne dépend que de  $s(x)$ , la réduction de  $s$  dans  $L(x) = L \otimes \kappa(x)$ ,
- (b) pour tout point  $x \in X^{\text{an}}$ , le morphisme de faisceaux  $\|\cdot\|$  induit une norme sur l'espace  $\kappa(x)$ -vectoriel  $L(x)$ , où on considère la valeur absolue  $|\cdot|_x$  sur  $\kappa(x)$ .

Si  $L$  est muni d'une métrique continue  $\|\cdot\|_L$ , alors le faisceau dual  $L^\vee$  est naturellement muni d'une métrique continue  $\|\cdot\|_{L^\vee}$  telle que  $|\alpha(s)| = \|\alpha\|_{L^\vee} \cdot \|s\|_L$  pour toutes sections  $\alpha$  et  $s$  de  $L^\vee$  et  $L$  au-dessus d'un ouvert Zariski de  $X$ .

Comme  $X$  est un  $k$ -schéma projectif, l'espace topologique  $X^{\text{an}}$  est compact (cf. [1, proposition 3.4.8]). Si  $L$  est un fibré inversible sur  $X$  muni d'une métrique continue  $\|\cdot\|$ , alors l'application  $\|\cdot\|_{\text{sup}} : \Gamma(X, L) \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui envoie  $s \in \Gamma(X, L)$  en

$$\sup_{x \in X^{\text{an}}} \|s\|(x)$$

est une norme sur  $\Gamma(X, L)$ , qui est une ultranorme lorsque  $(k, |\cdot|)$  est un corps valué non-archimédien.

Un exemple typique de métrique continue sur un fibré inversible est la métrique de Fubini-Study. Soit  $V$  un espace vectoriel de rang fini sur  $k$ , muni d'une norme  $\|\cdot\|$ , qui est supposée être une ultra-norme lorsque  $k$  est non-archimédienne. Si  $k'$  est une extension valuée de  $k$ , alors on peut naturellement définir une norme sur l'espace  $k'$ -vectoriel  $V \otimes_k k'$  par dualité. On considère  $V \otimes_k k'$  comme l'espace dual de  $\text{Hom}_k(V, k')$ . On munit  $\text{Hom}_k(V, k')$  de la norme d'opérateur et  $V \otimes_k k'$  de la norme duale. On suppose que le schéma  $X$  est un sous-schéma fermé de l'espace projectif  $\mathbb{P}(V)$  et que le fibré inversible  $L$  est la restriction du faisceau inversible universel  $\mathcal{O}_V(1)$ . Pour tout point  $x \in X^{\text{an}}$ , le morphisme  $j(x) : \text{Spec } \kappa(x) \rightarrow X$  induit un homomorphisme surjectif  $V \otimes_k \kappa(x) \rightarrow L(x)$ . On munit  $L(x)$  de la norme quotient et obtient ainsi une métrique continue sur  $L$ , appelée la *métrique de Fubini-Study* associée au plongement  $X \rightarrow \mathbb{P}(V)$ .

**4.3. Fonction de Green.** — Soit  $X$  un schéma projectif et intègre sur  $\text{Spec } k$ . Rappelons que tout ouvert Zariski non-vide de  $X^{\text{an}}$  est dense pour la topologie analytique (cf. [1, proposition 3.4.5]). On désigne par  $\widetilde{\mathcal{C}}^0(X^{\text{an}})$  l'espace des fonctions continues sur un ouvert Zariski non-vide de  $X^{\text{an}}$ . Si deux fonctions  $f$  et  $g$  dans  $\widetilde{\mathcal{C}}^0(X^{\text{an}})$  sont égales sur un ouvert Zariski non-vide, on dit que  $f$  et  $g$  sont équivalentes, noté comme  $f \sim g$ . La relation  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $\widetilde{\mathcal{C}}^0(X^{\text{an}})$ . On désigne par  $\widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\text{an}})$  l'espace quotient de  $\widetilde{\mathcal{C}}^0(X^{\text{an}})$  par cette relation d'équivalence. L'addition et la multiplication de fonctions induisent naturellement une structure de  $\mathbb{R}$ -algèbre sur  $\widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\text{an}})$ . Si  $U$  est un ouvert Zariski non-vide de  $X$ , l'application d'inclusion de  $\mathcal{C}^0(U^{\text{an}})$  dans  $\widetilde{\mathcal{C}}^0(X^{\text{an}})$  induit un homomorphisme de  $\mathbb{R}$ -algèbres  $\mathcal{C}^0(U^{\text{an}})$  vers  $\widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\text{an}})$ . Cet homomorphisme est injectif (car tout ouvert Zariski non-vide de  $X^{\text{an}}$  est dense pour la topologie analytique), et donc permet, dans le cas nécessaire, de considérer une fonction de  $\mathcal{C}^0(U^{\text{an}})$  comme un élément de  $\widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\text{an}})$  par abus de notation. Si un élément de  $\widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\text{an}})$  appartient à l'image de cet homomorphisme, on dit qu'il s'étend (de façon unique) en une fonction continue sur  $U^{\text{an}}$ .

Soit  $D$  un diviseur de Cartier sur  $X$ . On appelle *fonction de Green* de  $D$  tout élément  $g \in \widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\text{an}})$  tel que, pour toute fonction rationnelle  $f$  sur  $X$  qui définit le diviseur  $D$  sur un ouvert Zariski non-vide  $U$ , l'élément  $g + \ln |f| \in \widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\text{an}})$  s'étend en une fonction continue sur  $U^{\text{an}}$ . Par définition, si  $D = (f)$  est un diviseur principal, où  $f$  est une fonction rationnelle sur  $X$ , alors la fonction  $-\ln |f|$  est une fonction de Green du diviseur de Cartier  $D$ . Si  $D$  est le diviseur de Cartier trivial, qui est défini par la fonction rationnelle de l'unité sur  $X$ , alors les fonctions de Green de  $D$  sont précisément les éléments de  $\widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\text{an}})$  qui s'étendent en des fonctions continues sur  $X$ .

Les fonctions de Green sont étroitement liées aux métriques continues sur les fibrés inversibles. Soient  $L$  un fibré inversible sur  $X$  muni d'une métrique continue et  $s$  une section rationnelle non-nulle de  $L$ . Alors la fonction  $-\ln \|s\|$ , qui est bien définie et continue en dehors des lieux de zéro et de pôle de  $s$ , est une fonction de Green du diviseur  $(s)$ . Réciproquement, si  $D$  est un diviseur de Cartier sur  $X$  et si  $g$  est une fonction de Green de  $D$ , alors pour toute fonction rationnelle  $f$  sur  $X$  qui définit le diviseur  $D$  sur un ouvert Zariski non-vide  $U$ , l'élément  $f^{-1}s_D$  est une section trivialisante de  $\mathcal{O}_X(D)$  sur  $U$ . L'élément  $-(g + \ln |f|)$  s'étend en une fonction continue sur  $U^{\text{an}}$  dont l'exponentielle est notée comme  $\|f^{-1}s_D\|_g$ . On obtient ainsi une métrique continue  $\|\cdot\|_g$  sur  $\mathcal{O}_X(D)$  telle que  $g = -\ln \|s_D\|_g$  dans  $\widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\text{an}})$ .

On désigne par  $\widehat{\text{Div}}(X)$  l'ensemble des couples de la forme  $(D, g)$ , où  $D$  est un diviseur de Cartier sur  $X$  et  $g$  est une fonction de Green de  $D$ . Il s'avère que, si  $D_1$  et  $D_2$  sont des diviseurs de Cartier sur  $X$ , et  $g_1$  et  $g_2$  sont des fonctions

de Green de  $D_1$  et  $D_2$  respectivement, alors  $g_1 + g_2$  est une fonction de Green de  $D_1 + D_2$ . En particulier, l'espace  $\widehat{\text{Div}}(X)$  forme un groupe commutatif par rapport à la loi d'addition  $((D_1, g_1), (D_2, g_2)) \mapsto (D_1 + D_2, g_1 + g_2)$ .

Plus généralement, si  $D$  est un  $\mathbb{R}$ -diviseur de Cartier sur  $X$ , on appelle *fonction de Green* de  $D$  tout élément  $g \in \widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\text{an}})$  qui peut s'écrire sous la forme  $g = \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_n g_n$ , où  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont des nombres réelles, chaque  $g_i$  est une fonction de Green d'un diviseur de Cartier  $D_i$ , tels que

$$\lambda_1 D_1 + \cdots + \lambda_n D_n = D.$$

Les couples de la forme  $(D, g)$ , où  $D$  est un  $\mathbb{R}$ -diviseur de Cartier sur  $X$  et  $g$  est une fonction de Green de  $D$ , forment un espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$  que l'on note comme  $\widehat{\text{Div}}_{\mathbb{R}}(X)$ . Cet espace vectoriel s'identifie au quotient de  $\widehat{\text{Div}}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  par le sous-espace vectoriel engendré par les éléments de la forme  $\lambda(D, g) - (\lambda D, \lambda g)$ , où  $(D, g) \in \widehat{\text{Div}}(X)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . En particulier, si  $D$  est un  $\mathbb{R}$ -diviseur de Cartier sur  $X$ ,  $g$  est une fonction de Green de  $D$ , et  $\varphi$  est une fonction continue sur  $X^{\text{an}}$ , alors  $g + \varphi$  est aussi une fonction de Green de  $D$  (on peut considérer  $\varphi$  comme une fonction de Green du  $\mathbb{R}$ -diviseur trivial).

**Proposition 4.1.** — *Si  $D$  est le  $\mathbb{R}$ -diviseur de Cartier trivial sur  $X$  et  $g$  est une fonction de Green sur  $D$ , alors l'élément  $g \in \widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\text{an}})$  s'étend en une fonction continue sur  $X^{\text{an}}$ .*

*Démonstration.* — Par définition il existe des éléments  $(D_1, g_1), \dots, (D_n, g_n)$  dans  $\widehat{\text{Div}}(X)$  et des nombres réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que  $\lambda_1 D_1 + \cdots + \lambda_n D_n = 0$  et que  $g = \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_n g_n$ . On peut alors choisir un recouvrement  $\mathcal{U}$  de  $X$  par des ouverts Zariski, stable par intersection et tel que, pour chaque  $U \in \mathcal{U}$ , il existe une famille  $f_1, \dots, f_n$  de fonctions rationnelles sur  $X$ , qui définissent  $D_1, \dots, D_n$  sur  $U$  respectivement, et vérifient  $f_1^{\lambda_1} \cdots f_n^{\lambda_n} \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X^\times) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  (où la structure de  $\mathbb{R}$ -module est notée multiplicativement), qui implique  $|f_1|^{\lambda_1} \cdots |f_n|^{\lambda_n} = 1$ . Par définition, chaque élément  $g_i + \ln |f_i|$  s'étend en une fonction continue sur  $U^{\text{an}}$ . On en déduit que

$$g = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i (g_i + \ln |f_i|)$$

s'étend aussi (de façon unique) en une fonction continue sur  $U^{\text{an}}$ . Par recollement on obtient que la fonction  $g$  s'étend en une fonction continue sur  $X^{\text{an}}$ .  $\square$

La proposition 4.1 montre en particulier que, si  $(D, g)$  est un élément de  $\widehat{\text{Div}}_{\mathbb{R}}(X)$ , alors pour n'importe quelle décomposition  $D = \lambda_1 D_1 + \cdots + \lambda_n D_n$  de  $D$  en combinaison linéaire de diviseurs de Cartier  $D_1, \dots, D_n$ , il existe des fonctions de Green  $g_1, \dots, g_n$  de  $D_1, \dots, D_n$  respectivement, telles que  $g = \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_n g_n$ . En effet, sans perte de généralité, on peut supposer



$\lambda_n \neq 0$ . Si on choisit arbitrairement des fonctions de Green  $g_1, \dots, g_{n-1}, g'_n$  de  $D_1, \dots, D_n$  respectivement, alors

$$g - \lambda_1 g_1 - \dots - \lambda_{n-1} g_{n-1} - \lambda_n g'_n$$

est une fonction de Green du  $\mathbb{R}$ -diviseur de Cartier trivial, donc s'étend en une fonction continue  $\varphi$  sur  $X^{\text{an}}$ . Par conséquent  $g_n = g'_n + \lambda_n^{-1} \varphi$  est une fonction de Green de  $D_n$  et on a  $g = \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n$ .

**Remarque 4.2.** — Soient  $D$  un diviseur de Cartier effectif sur  $X$  muni d'une fonction de Green  $g$ . Localement sur un ouvert  $U$ , le diviseur  $D$  est défini par une fonction régulière  $f$ . L'élément  $g + \ln |f|$  dans  $\widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\text{an}})$  s'étend de façon unique en une fonction continue sur  $U$ . On en déduit que la fonction  $e^{-g} = |f| \cdot e^{-(g + \ln |f|)}$  s'étend de façon unique en une fonction continue sur  $U$ . Par recollement on obtient que l'élément  $e^{-g} \in \widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\text{an}})$  s'étend en une fonction continue sur  $X^{\text{an}}$ . Plus généralement, si  $D$  est un  $\mathbb{R}$ -diviseur effectif muni d'une fonction de Green  $g$ , alors il existe des diviseurs de Cartier effectifs  $D_1, \dots, D_n$ , des fonctions de Green  $g_1, \dots, g_n$  de  $D_1, \dots, D_n$  respectivement, ainsi que des nombres positifs  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que

$$(D, g) = \lambda_1 (D_1, g_1) + \dots + \lambda_n (D_n, g_n).$$

L'élément  $e^{-g}$  dans  $\widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\text{an}})$  s'étend donc en une fonction continue sur  $X^{\text{an}}$ , qui est égale à  $e^{-\lambda_1 g_1 - \dots - \lambda_n g_n}$ . On en déduit que  $g \in \widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\text{an}})$  s'étend en une fonction continue sur  $X^{\text{an}}$  à valeurs dans  $] -\infty, +\infty]$ , qui est donc bornée inférieurement. En particulier, si  $D$  est un  $\mathbb{R}$ -diviseur effectif, alors il existe une fonction de Green de  $D$  qui s'étend en une fonction continue positive à valeurs dans  $[0, +\infty]$ , quitte à rajouter une constante très positive à une fonction de Green donnée. Une telle fonction de Green est dite *bornée inférieurement*<sup>(2)</sup> par zéro.

## 5. Courbes adéliques et $\mathbb{R}$ -diviseurs adéliques

Le but de ce paragraphe est de décrire un cadre général dans lequel on développe des applications du théorème 3.5. On fixe un corps  $K$  et on suppose donnée une famille non-vide  $M_K$  de valeurs absolues sur  $K$  (si  $v$  est un élément de  $M_K$ , on désigne par  $|\cdot|_v$  la valeur absolue correspondante), une famille  $\Theta_K = (n_v)_{v \in M_K}$  de nombres positifs indexés par  $M_K$ , telles que, pour tout  $a \in K \setminus \{0\}$ , la relation  $|a|_v = 1$  est vérifiée pour toute sauf un nombre fini de

2. On évite l'utilisation du mot *positive* ici pour ne pas confondre avec la pluri-sous-harmonicité, qui est souvent considérée comme une condition de positivité dans la littérature.

places  $v \in M_K$ , et que la formule de produit suivante soit vérifiée

$$(22) \quad \prod_{v \in M_K} |a|_v^{n_v} = 1.$$

Cette condition implique qu'il y a au plus un nombre fini de valeurs absolues non-archimédiennes dans  $M_K$ . Pour tout  $v \in M_K$ , on désigne par  $K_v$  le complété du corps  $K$  par rapport à la valeur absolue  $|\cdot|_v$ . Le triplet  $(K, M_K, \Theta_K)$  est appelé une *courbe adélique*. Les éléments de  $M_K$  sont appelés des *places*.

Un exemple très classique est le corps de nombres. Soient  $K$  un corps de nombres et  $M_K$  l'ensemble des places de  $K$ . Pour toute  $v \in M_K$ , soit  $|\cdot|_v$  la valeur absolue dans la classe  $v$  qui étend la valeur absolue usuelle sur  $\mathbb{Q}$ , ou une valeur absolue  $p$ -adique (de sorte que la valeur absolue de  $p$  est  $1/p$ ), où  $p$  est un nombre premier. Si  $v$  est une place de  $K$ , on désigne par  $n_v$  la dimension de  $K_v$  sur  $\mathbb{Q}_v$ . Alors le triplet formé par  $K$ ,  $M_K$  et  $\Theta_K = (n_v)_{v \in M_K}$  est une courbe adélique.

Un autre exemple naturel est le corps de fonctions. Soit  $k$  un corps et  $C$  une courbe projective régulière sur  $\text{Spec } k$ . Soient  $K = k(C)$  le corps des fonctions rationnelles sur  $C$ , et  $M_K$  l'ensemble des points fermés dans la courbe  $C$ . Pour tout  $x \in M_K$ , soit  $|\cdot|_x$  la valeur absolue sur  $K$  telle que  $|a|_x = \exp(-\text{ord}_x(a))$  pour tout  $a \in K^\times$ , où  $\text{ord}_x(\cdot)$  désigne la valuation discrète associée à l'anneau de valuation  $\mathcal{O}_{C,x}$ . Pour tout  $x \in M_K$ , soit  $n_x$  la dimension du corps résiduel  $\kappa(x)$  sur  $k$ . Alors le triplet formé par  $K$ ,  $M_K$  et  $\Theta_K = (n_x)_{x \in M_K}$  est une courbe adélique.

Soient  $K$  un corps quelconque, et  $M_K$  une famille non-vide de copies de la valeur absolue triviale. Pour toute famille  $\Theta_K$  de nombres positifs indexées par  $M_K$ , le triplet  $(K, M_K, \Theta_K)$  est une courbe adélique. Cet exemple est beaucoup moins considéré dans la littérature par rapport aux exemples mentionnés plus haut. En outre, la proposition suivante permet de construire beaucoup d'autres exemples «intermédiaires» de courbes adéliques.

**Proposition 5.1.** — *Soient  $K$  un corps,  $(K, M_K, \Theta_K)$  et  $(K, M'_K, \Theta'_K)$  deux courbes adéliques qui admettent  $K$  comme corps sous-jacent. Alors le triplet  $(K, M_K \amalg M'_K, \Theta_K \amalg \Theta'_K)$  est une courbe adélique, où  $M_K \amalg M'_K$  désigne la réunion disjointe de  $M_K$  et  $M'_K$ , et  $\Theta_K \amalg \Theta'_K$  est défini de façon similaire.*

Dans le reste du paragraphe, on fixe une courbe adélique  $S = (K, M_K, \Theta_K)$  et on convient que  $\Theta_K$  est de la forme  $(n_v)_{v \in M_K}$ .

**5.1. Fibré vectoriel adélique sur  $S$ .** — Soient  $E$  un espace vectoriel de rang fini sur  $K$  et  $e = (e_1, \dots, e_r)$  une base de  $E$ . Si  $v$  est un élément de  $M_K$ , on désigne par  $\|\cdot\|_{e,v}$  la norme sur l'espace vectoriel  $E_{K_v} = E \otimes_K K_v$  telle que

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in K_v^r, \quad \|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r\|_{e,v} = \max_{i \in \{1, \dots, r\}} |\lambda_i|_v.$$

Dans le cas où  $v$  est une place non-archimédienne,  $e$  est une base orthonormée<sup>(3)</sup> de la norme  $\|\cdot\|_{e,v}$ .

La notion de fibré vectoriel adélique sur un corps global a été introduite dans [18]. Ici on étend la définition de cette notion dans le cadre plus général de courbes adéliques.

**Définition 5.2.** — On appelle *fibré vectoriel adélique* sur la courbe adélique  $S = (K, M_K, \Theta_K)$  tout couple  $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_v)_{v \in M_K})$ , où  $E$  est un espace vectoriel de rang fini sur  $K$ , et  $\|\cdot\|_v$  est une norme sur  $E \otimes_K K_v$ . On demande en outre qu'il existe une base  $e$  de  $E$  et un sous-ensemble fini  $M_e$  de  $M_K$  tels que  $\|\cdot\|_v = \|\cdot\|_{e,v}$  quel que soit  $v \in M_K \setminus M_e$ . Si de plus  $\text{rg}(E) = 1$ , on dit que  $\overline{E}$  est un *fibré inversible adélique*.

**Remarque 5.3.** — Dans la définition, on demande seulement l'existence d'une base  $e$  telle que  $\|\cdot\|_v = \|\cdot\|_{e,v}$  pour toute sauf un nombre fini de places  $v \in M_K$ . Cependant, on peut vérifier que cette condition est en fait satisfaite pour n'importe quelle base de  $E$ . En effet, la matrice de transition  $A$  entre deux bases  $e$  et  $e'$  de  $E$  est une matrice inversible à coefficients dans  $K$ . Il existe donc un sous-ensemble fini  $M_{e,e'}$  de  $M_K$  contenant toutes les valeurs absolues archimédiennes et tel que tous les coefficients des matrices  $A$  et  $A^{-1}$  soient de valeur absolue  $\leq 1$  par rapport aux valeurs absolues en dehors de ce sous-ensemble. On en déduit que  $\|\cdot\|_{e,v} = \|\cdot\|_{e',v}$  pour toute  $v \in M_K \setminus M_{e,e'}$ . En particulier, pour tout vecteur  $\ell \in E$ , la relation  $\|\ell\|_v = 1$  est vérifiée pour toute sauf un nombre fini de places  $v \in M_K$ .

**Remarque 5.4.** — Soit  $K'$  une extension finie de  $K$ . Pour toute place  $v \in M_K$ , on fixe une extension de la valeur absolue  $|\cdot|_v$  sur  $K'$ . Il s'avère que, pour tout élément  $\beta \in K'$ , il existe un sous-ensemble fini  $M_\beta$  de  $M_K$  et tel que  $|\beta|_v = 1$  pour toute sauf un nombre fini de places  $v \in M_K$ . En effet, si on désigne par

$$F(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$$

le polynôme minimal de  $\beta$  et on choisit un sous-ensemble fini  $M_\beta$  de  $M_K$  contenant toutes les places archimédiennes et tel que  $|a_i|_v \in \{0, 1\}$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  et toute  $v \in M_K \setminus M_\beta$ , alors on a  $|\beta|_v = 1$  pour toute  $v \in M_K \setminus M_\beta$ . Soit  $E$  un espace vectoriel de rang fini sur  $K$ , muni d'une famille de normes  $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_K}$ , où  $\|\cdot\|_v$  est une norme sur  $E \otimes_K K_v$ . Pour toute place  $v \in M_K$ , la norme  $\|\cdot\|_v$  induit une norme d'opérateur  $\|\cdot\|'_v$  sur  $E \otimes_K K'_v$  en identifiant  $E \otimes_K K'_v$  à  $\text{Hom}(E^\vee, K'_v)$ , où on considère la norme duale sur  $E^\vee$ . La norme  $\|\cdot\|'_v$  s'identifie à  $\|\cdot\|_v$  sur  $E \otimes_K K_v$  lorsque  $v$  est archimédienne

3. Soient  $k$  un corps muni d'une valeur absolue non-archimédienne et  $V$  un espace vectoriel de rang fini sur  $k$ , muni d'une norme  $\|\cdot\|$ . On dit qu'une base  $(x_i)_{i=1}^r$  de  $V$  est *orthonormée* si, pour tout  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in k^r$ , on a  $\|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r\| = \max_{i \in \{1, \dots, r\}} |\lambda_i|$ .

ou  $\|\cdot\|_v$  est une ultranorme. Pour montrer que  $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_v)_{v \in M_K})$  est un fibré vectoriel adélique sur  $K$ , il suffit de vérifier qu'il existe une base  $e'$  de  $E \otimes_K K'$  qui est orthonormée pour toute sauf un nombre fini de normes  $\|\cdot\|'_v$  ( $v \in M_K$ ). En effet, si on fixe une base  $e$  de  $E$  sur  $K$  et la considère comme une base de  $E \otimes_K K'$ , alors l'argument dans la remarque précédente s'applique encore aux matrices de transition (à coefficients dans  $K'$ ) entre  $e$  et  $e'$ .

Soient  $\overline{E}$  et  $\overline{F}$  deux fibrés vectoriels adéliques sur  $K$ . Pour toute place  $v \in M_K$ , soit  $\|\cdot\|_v$  la norme d'opérateur sur  $E_{K_v} \otimes_{K_v} F_{K_v} \cong \text{Hom}_{K_v}(E_{K_v}^\vee, F_{K_v})$ , où on considère la norme duale sur  $E_{K_v}^\vee$ . Si  $(e_i)_{i=1}^m$  et  $(f_j)_{j=1}^n$  sont des bases de  $E$  et  $F$  sur  $K$ , qui sont des bases orthonormées de  $E_{K_v}$  et  $F_{K_v}$  respectivement, où  $v$  est une place non-archimédienne, alors  $(e_i \otimes f_j)_{i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}}$  est une base orthonormée pour la norme  $\|\cdot\|_v$  sur  $(E \otimes F)_{K_v}$ . En particulier, l'espace vectoriel  $E \otimes_K F$  muni de ces normes forme un fibré vectoriel adélique que l'on note comme  $\overline{E} \otimes_\varepsilon \overline{F}$  (cf. [3, §2.2.4]).

Si  $\overline{L}$  est un fibré inversible adélique sur  $S$ , on définit le *degré d'Arakelov* de  $\overline{L}$  comme

$$\widehat{\text{deg}}(\overline{L}) := - \sum_{v \in M_K} n_v \ln \|s\|_v \in \mathbb{R},$$

où  $s$  est un élément non-nul de  $L$ . La formule de produit (22) montre que cette définition ne dépend pas du choix de  $s$ . Dans le cas où la courbe adélique provient d'un corps de nombres, cette définition coïncide avec celle du degré d'Arakelov d'un fibré inversible hermitien classique.

Le degré d'Arakelov est un invariant arithmétique important, qui permet de construire une  $\mathbb{R}$ -filtration sur un fibré vectoriel adélique. Soit  $\overline{E}$  un fibré vectoriel adélique tel que  $E$  soit non-nul. Pour tout sous-espace vectoriel  $L$  de rang 1 de  $E$ , les normes induites sur  $L \otimes_K K_v$  ( $v \in M_K$ ) définissent une structure de fibré inversible adélique sur  $L$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on désigne par  $\mathcal{F}^t(\overline{E})$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par toutes les droites  $L \subset E$  telles que  $\widehat{\text{deg}}(\overline{L}) \geq t$ . La famille  $(\mathcal{F}^t(\overline{E}))_{t \in \mathbb{R}}$  forme une  $\mathbb{R}$ -filtration décroissante de l'espace vectoriel  $E$ , appelée la *filtration par minima* de  $\overline{E}$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, \text{rg}(E)\}$ , on définit le  $i^{\text{ème}}$  *minimum logarithmique* de  $\overline{E}$  comme le nombre

$$\nu_i(\overline{E}) := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \text{rg}(\mathcal{F}^t(\overline{E})) \geq i\}.$$

**5.2.  $\mathbb{R}$ -diviseurs adéliques.** — La notion de  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique sur une variété arithmétique est introduite par Moriwaki dans [29], qui généralise naturellement la notion de diviseur de Cartier arithmétique, où on remplace la structure entière par une famille de fonctions de Green sur les fibres de la variétés arithmétiques au-dessus des places non-archimédiennes du corps de nombres  $K$ . On étend la définition de cette notion dans le cadre de courbe adélique. Dans la suite, on considère un schéma projectif et géométriquement

intègre  $X$  sur  $\text{Spec } K$ . Pour toute place  $v \in M_K$ , soit  $X_v$  le  $K_v$ -schéma  $X \otimes_K K_v$  obtenu par extension de scalaires. On désigne par  $X_v^{\text{an}}$  l'espace de Berkovich associé à  $X_v$ , dont la construction est rappelée dans §4.

Soit  $D$  un diviseur de Cartier sur  $X$ . Pour toute place  $v \in M_K$ , soit  $D_v$  la tirée en arrière de  $D$  sur le schéma  $X_v$ . Par *famille de Green* de  $D$  on entend une famille  $g = (g_v)_{v \in M_K}$ , où chaque  $g_v$  est une fonction de Green du diviseur de Cartier  $D_v$ . On introduit une loi d'addition sur l'ensemble des diviseurs de Cartier sur  $X$  muni d'une famille de Green en posant

$$(D, (g_v)_{v \in M_K}) + (D', (g'_v)_{v \in M_K}) := (D + D', (g_v + g'_v)_{v \in M_K}).$$

Cela définit une structure de groupe commutatif sur l'ensemble des diviseurs de Cartier munis de familles de Green.

On suppose que le schéma  $X$  est plongé dans un espace projectif  $\mathbb{P}(E)$ , où  $E$  est un espace vectoriel de rang fini sur  $K$ , et que  $D$  est le diviseur associé à une section rationnelle non-nulle  $s$  de  $L = \mathcal{O}_E(1)|_X$ , où  $\mathcal{O}_E(1)$  désigne le faisceau inversible universel sur  $\mathbb{P}(E)$ . Si  $E$  est muni d'une famille de normes  $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_K}$  de sorte que  $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_v)_{v \in M_K})$  devienne un fibré vectoriel adélique sur  $S$ , alors chaque norme  $\|\cdot\|_v$  induit une métrique continue sur  $L_v$  (la tirée en arrière de  $L$  sur  $X_v$ ), comme expliquée dans §4.2. Par abus de langage, on désigne encore par  $\|\cdot\|_v$  cette métrique continue sur  $L_v$ , appelée la métrique de *Fubini-Study*. Ainsi la famille  $(-\ln \|s\|_v)_{v \in M_K}$  forme une famille de Green de  $D = (s)$ . Le couple  $((s), (-\ln \|s\|_v)_{v \in M_K})$  est appelé le *diviseur adélique* associé à  $s$ , noté comme  $\widehat{(s)}$ . La proposition suivante montre que deux familles de Green obtenues de cette façon sont égales sauf sur un nombre fini de places  $v \in M_K$ .

**Proposition 5.5.** — *Soient  $\overline{E}$  et  $\overline{F}$  deux fibrés vectoriels adéliques,  $X$  un schéma projectif et géométriquement intègre sur  $\text{Spec } K$ , et  $L$  un fibré inversible sur  $X$ . On suppose que  $\alpha : X \rightarrow \mathbb{P}(E)$  et  $\beta : X \rightarrow \mathbb{P}(F)$  sont deux immersions fermées telles que  $L = \alpha^*(\mathcal{O}_E(1)) = \beta^*(\mathcal{O}_F(1))$ . Alors pour toute sauf un nombre fini de places  $v \in M_K$ , les fibrés vectoriels adéliques  $\overline{E}$  et  $\overline{F}$  induisent la même métrique de Fubini-Study sur  $L_v$ .*

*Démonstration.* — Traitons d'abord le cas où  $E = F$  et les immersions  $\alpha$  et  $\beta$  sont identiques. Dans ce cas-là, les structures de fibrés vectoriels adéliques de  $\overline{E}$  et  $\overline{F}$  coïncident sur toute sauf un nombre fini de  $v \in M_K$ . Le résultat de la proposition est donc trivial. Plus généralement, si les applications de restriction

$$E = \Gamma(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_E(1)) \rightarrow \Gamma(X, L) \quad \text{et} \quad F = \Gamma(\mathbb{P}(F), \mathcal{O}_F(1)) \rightarrow \Gamma(X, L)$$

sont toutes surjectives, alors les immersions fermées  $\alpha$  et  $\beta$  se factorisent par  $X \rightarrow \mathbb{P}(\Gamma(X, L))$ . On se ramène donc au cas précédent en considérant les structures de fibré vectoriel adélique quotients sur  $\Gamma(X, L)$ .

Dans le cas général, il existe un entier  $n \geq 1$  tel que les applications de restrictions  $S^n E = \Gamma(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_E(n)) \rightarrow \Gamma(X, L^{\otimes n})$  et  $S^n F = \Gamma(\mathbb{P}(F), \mathcal{O}_F(n)) \rightarrow \Gamma(X, L^{\otimes n})$  soient surjectives. On peut appliquer le résultat de la proposition dans cette situation pour montrer que toutes les structures de fibré vectoriel adélique sur  $S^n E$  et  $S^n F$  induisent la même métrique de Fubini-Study sur  $L_v$  pour toute sauf un nombre fini de  $v \in M_K$ .

Il reste à montrer que, si  $n \geq 1$  est un entier et si  $S^n E$  est muni d'une structure de fibré vectoriel adélique, alors la métrique de Fubini-Study sur  $L_v^{\otimes n}$  induite par la structure de fibré vectoriel adélique sur  $S^n E$  et la  $n^{\text{ième}}$  puissance tensorielle de la métrique de Fubini-Study sur  $L_v$  induite par la structure de fibré vectoriel adélique sur  $E$  coïncident pour toute sauf un nombre fini de  $v \in M_K$ . La validité de cet énoncé ne dépend pas du choix des structures de fibré vectoriel adélique sur  $E$  et sur  $S^n E$ . Sans perte de généralité, on suppose que  $E$  est muni de la famille de normes  $(\|\cdot\|_{e,v})_{v \in M_K}$ , où  $e = (e_i)_{i=1}^r$  est une base de  $E$ ; on suppose aussi que  $S^n E$  est muni de la famille de normes  $(\|\cdot\|_{S^n e,v})_{v \in M_K}$ , où  $S^n e$  est la base de  $S^n E$  définie comme  $(e_1^{m_1} \cdots e_r^{m_r})_{m_1 + \cdots + m_r = n}$ . Lorsque  $v$  est non-archimédienne, la norme  $\|\cdot\|_{S^n e,v}$  s'identifie à la norme quotient induite par l'application surjective  $E^{\otimes n} \rightarrow S^n E$ , où on considère la norme produit tensoriel sur  $E^{\otimes n}$  (de sorte que  $(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n})_{(i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, r\}^n}$  soit une base orthonormée). Si  $K'_v$  est une extension valuée de  $K_v$  et si  $\ell_v$  est un quotient de rang 1 de  $E \otimes_K K'_v$ , alors l'homomorphisme surjectif  $E_{K'_v} \rightarrow \ell_v$  induit par passage à la puissance symétrique un homomorphisme surjectif  $S^n(E_{K'_v}) \cong S^n(E) \otimes_K K'_v \rightarrow \ell_v^{\otimes n}$ , et la norme quotient de  $\|\cdot\|_{S^n e,v}$  sur  $\ell_v^{\otimes n}$  s'identifie à la norme quotient induite par  $E^{\otimes n} \otimes_K K'_v \rightarrow \ell_v^{\otimes n}$ . Le résultat est donc démontré.  $\square$

**Définition 5.6.** — Soit  $D$  un diviseur de Cartier sur  $X$ . On dit qu'une famille de Green  $g = (g_v)_{v \in M_K}$  sur  $D$  est de type *presque Fubini-Study* s'il existe un fibré vectoriel adélique  $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_v)_{v \in M_K})$ , une immersion fermée  $i : X \rightarrow \mathbb{P}(E)$  et une section rationnelle non-nulle  $s$  de  $i^*(\mathcal{O}_E(1))$  tels que  $D = (s)$  et que  $g_v = -\ln \|s\|_{\text{FS},v}$  pour toute sauf un nombre fini de places  $v \in M_K$ , où  $\|\cdot\|_{\text{FS},v}$  est la métrique de Fubini-Study sur  $\mathcal{O}_E(1)_v$  induite par  $\|\cdot\|_v$ .

L'existence de famille de Green de type presque Fubini-Study pour un diviseur Cartier  $D$  entraîne que le diviseur  $D$  est très ample. Réciproquement, étant donné un diviseur de Cartier très ample  $D$ , il existe toujours une famille de Green de  $D$  qui est de type presque Fubini-Study. En outre, la proposition 5.5 montre que, si  $g$  et  $g'$  sont deux familles de Green de type presque Fubini-Study d'un même diviseur de Cartier  $D$ , alors l'égalité  $g_v = g'_v$  est vérifiée pour toute sauf un nombre fini de places  $v \in M_K$ .

**Proposition 5.7.** — Soient  $D$  et  $D'$  deux diviseurs de Cartier sur  $X$ ,  $g$  et  $g'$  deux familles de Green de  $D$  et  $D'$  respectivement. On suppose que les familles

de Green  $g$  et  $g'$  sont de type presque Fubini-Study, alors la famille de Green  $g + g'$  de  $D + D'$  est aussi de type presque Fubini-Study.

*Démonstration.* — Soient  $\overline{E}$  et  $\overline{F}$  deux fibrés vectoriels adéliques,  $\alpha : X \rightarrow \mathbb{P}(E)$  et  $\beta : X \rightarrow \mathbb{P}(F)$  deux immersions fermées telles que  $\mathcal{O}_X(D) \cong \alpha^* \mathcal{O}_E(1)$  et  $\mathcal{O}_X(D') \cong \beta^* \mathcal{O}_F(1)$ . Pour toute place  $v \in M_K$ , on munit  $\mathcal{O}_X(D)_v$  et  $\mathcal{O}_X(D')_v$  des métriques de Fubini-Study (qui proviennent des normes sur  $E \otimes_K K_v$  et  $F \otimes_K K_v$  respectivement). Soit  $\gamma : X \rightarrow \mathbb{P}(E \otimes_K F)$  l'immersion fermée induite par le morphisme de Segre  $\varsigma : \mathbb{P}(E) \times_K \mathbb{P}(F) \rightarrow \mathbb{P}(E \otimes_K F)$ . Pour toute place non-archimédienne  $v \in M_K$ , la métrique produit tensoriel sur  $\mathcal{O}_X(D + D')_v \cong \mathcal{O}_X(D)_v \otimes \mathcal{O}_X(D')_v$  induite par les métriques de Fubini-Study sur  $\mathcal{O}_E(1)_v$  et  $\mathcal{O}_F(1)_v$  coïncide avec la restriction de la métrique de Fubini-Study sur  $\mathcal{O}_{E \otimes F}(1)_v$  par le plongement  $\gamma$ , où on considère les normes du fibré vectoriel adélique  $\varepsilon$ -produit tensoriel  $\overline{E} \otimes_\varepsilon \overline{F}$  (voir §5.1 pour sa définition). La proposition est donc démontrée.  $\square$

**Corollaire 5.8.** — Soient  $D$  et  $D'$  deux diviseurs de Cartier très amples tels que  $D - D'$  soit aussi très ample. Si  $g$  et  $g'$  sont des familles de Green de  $D$  et  $D'$  respectivement, qui sont de type presque Fubini-Study, alors la famille de Green  $g - g'$  de  $D - D'$  est aussi de type presque Fubini-Study.

*Démonstration.* — Soit  $g''$  une famille de Green de  $D - D'$  qui est de type presque Fubini-Study. La proposition 5.7 montre que  $g'' + g'$  est une famille de Green de type presque Fubini-Study de  $D$ . D'après la proposition 5.5, on obtient que  $g'_v + g''_v = g_v$  pour toute sauf un nombre fini de places dans  $M_K$ . La famille de Green  $g - g'$  est donc de type presque Fubini-Study.  $\square$

**Définition 5.9.** — On appelle  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique sur  $X$  tout couple de la forme

$$(D, g = (g_v)_{v \in M_K}),$$

où  $D$  est un  $\mathbb{R}$ -diviseur de Cartier sur  $X$  et  $g_v$  est une fonction de Green de  $D_v$ , qui satisfont à la condition suivante : il existe des diviseurs de Cartier  $D_1, \dots, D_n$  sur  $X$ , des familles de Green  $g_1, \dots, g_n$  de type presque Fubini-Study de  $D_1, \dots, D_n$  respectivement, et des nombres réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , tels que  $D = \lambda_1 D_1 + \dots + \lambda_n D_n$  et que

$$\forall v \in M_K, \quad g_v = \lambda_1 g_{1,v} + \dots + \lambda_n g_{n,v}.$$

On désigne par  $\widehat{\text{Div}}_{\mathbb{R}}(X)$  l'espace vectoriel des  $\mathbb{R}$ -diviseurs adéliques sur  $X$ . On a une application  $\mathbb{R}$ -linéaire de  $K(X)^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  vers  $\widehat{\text{Div}}_{\mathbb{R}}(X)$  qui envoie toute fonction rationnelle non-nulle  $f$  en

$$\widehat{(f)} := ((f), (-\ln |f|_v)_{v \in M_K}).$$

Les  $\mathbb{R}$ -diviseurs adéliques qui appartiennent à l'image de cette application sont dits *principaux*.

**Proposition 5.10.** — Soient  $(D, g)$  et  $(D, g')$  deux  $\mathbb{R}$ -diviseurs adéliques sur  $X$  qui ont le même  $\mathbb{R}$ -diviseur sous-jacent. Alors la relation  $g_v = g'_v$  est vérifiée pour toute sauf un nombre fini de places  $v \in M_K$ .

*Démonstration.* — Montrons l'énoncé suivant qui est équivalent à celui dans la proposition : si  $(\mathbf{0}, g)$  est un  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique, où  $\mathbf{0}$  désigne le  $\mathbb{R}$ -diviseur trivial, alors  $g_v = 0$  pour toute sauf un nombre fini de  $v \in M_K$ . Par définition, il existe des diviseurs de Cartier  $D_1, \dots, D_n$  sur  $X$ , des familles de Green  $g_1, \dots, g_n$  de type presque Fubini-Study de  $D_1, \dots, D_n$  respectivement, et des nombres réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que  $\lambda_1 D_1 + \dots + \lambda_n D_n = \mathbf{0}$  et que

$$\forall v \in M_K, \quad g_v = \lambda_1 g_{1,v} + \dots + \lambda_n g_{n,v}.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que  $D_1, \dots, D_m$  sont linéairement indépendantes dans  $\text{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  et que  $D_{m+1}, \dots, D_n$  appartiennent au sous-espace vectoriel de  $\text{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  engendré par  $D_1, \dots, D_m$ . Soit  $N \geq 1$  un entier tel que  $ND_j \in \mathbb{Z}D_1 + \dots + \mathbb{Z}D_m$  pour tout  $j \in \{m+1, \dots, n\}$ . On écrit  $ND_j$  sous la forme

$$ND_j = a_{j,1}D_1 + \dots + a_{j,m}D_m,$$

où  $a_{j,1}, \dots, a_{j,m}$  sont des entiers. La proposition 5.7 et son corollaire 5.8 montrent que

$$g'_j := a_{j,1}g_1 + \dots + a_{j,m}g_m$$

est une famille de Green de type presque Fubini-Study de  $ND_j$ . La proposition 5.5 montre que l'égalité  $g'_{j,v} = Ng_{j,v}$  est vérifiée pour toute sauf un nombre fini de places  $v \in M_K$ . Comme  $D_1, \dots, D_m$  sont linéairement indépendantes, on a

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad \lambda_i + \sum_{j=m+1}^n a_{j,i} \frac{\lambda_j}{N} = 0.$$

En particulier, pour toute sauf un nombre fini de places  $v \in M_K$ , on a

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k g_{k,v} = \sum_{i=1}^m \lambda_i g_{i,v} + \sum_{j=m+1}^n \frac{\lambda_j}{N} \sum_{i=1}^m a_{j,i} g_{i,v} = 0.$$

Le résultat est donc démontré.  $\square$

**5.3. Système linéaire adélique.** — Soient  $S = (K, M_K, \Theta_K)$  une courbe adélique et  $X$  un schéma géométriquement intègre sur  $\text{Spec } K$ . Étant donné un  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique  $\overline{D} = (D, (g_v)_{v \in M_K})$ , on peut construire une famille de normes sur  $H^0(D) \otimes_K K_v$ ,  $v \in M_K$ , qui est définie de manière suivante. Tout élément  $f \in H^0(D) \otimes_K K_v$  détermine une fonction rationnelle sur  $X_v$  que l'on note encore comme  $f$  par abus de langage. En outre, on a  $(f) + D_v \geq 0$ . Par



conséquent,  $|f|_v \cdot e^{-g_v}$  s'étend en une fonction continue sur  $X_v^{\text{an}}$  (cf. la remarque 4.2), que l'on note comme  $\|f\|_{g_v}$  ou comme  $\|f\|_{\overline{D},v}$ . Si la fonction rationnelle  $s$  est non-nulle, cette fonction n'est pas identiquement nulle. On définit

$$\|f\|_{g_v, \text{sup}} := \sup_{x \in X_v^{\text{an}}} \|f\|_{g_v}(x).$$

Le nombre  $\|f\|_{g_v, \text{sup}}$  est noté aussi comme  $\|f\|_{\overline{D},v, \text{sup}}$ . Si  $f_1$  et  $f_2$  sont deux éléments de  $H^0(D) \otimes_K K_v$ , alors on a

$$\|f_1 + f_2\|_{g_v} \leq \|f_1\|_{g_v} + \|f_2\|_{g_v}.$$

On en déduit que  $\|\cdot\|_{g_v, \text{sup}}$  est une norme sur  $H^0(D) \otimes_K K_v$ . Cette norme est ultramétrique lorsque  $v$  est une place non-archimédienne.

Dans le cas où  $D$  est un diviseur de Cartier, l'espace vectoriel  $H^0(D)$  est isomorphe à l'espace des sections globales du faisceau inversible  $\mathcal{O}(D)$ . Comme expliqué dans §4.3, la fonction de Green  $g_v$  détermine une métrique continue sur le faisceau inversible  $\mathcal{O}(D)_v$ . Si  $f$  est un élément de  $H^0(D) \otimes_K K_v$ , alors  $\|f\|_{g_v}$  s'identifie à la norme de la section  $f s_D$  par rapport à cette métrique, où  $s_D$  est la section rationnelle canonique de  $\mathcal{O}(D)$ .

**Définition 5.11.** — Soit  $\overline{D} = (D, (g_v)_{v \in M_K})$  un  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique sur  $X$ . On suppose que  $D$  est effectif. La fonction rationnelle de l'unité  $\mathbf{1}$  appartient donc à  $H^0(D)$ . Pour tout  $v \in M_K$ , on a

$$\|\mathbf{1}\|_{g_v, \text{sup}} = \exp\left(-\inf_{x \in X_v^{\text{an}}} g_v(x)\right),$$

où on a considéré  $g_v$  comme une application continue de  $X_v^{\text{an}}$  vers  $] -\infty, +\infty]$ . En particulier, si toutes les fonctions de Green  $(g_v)_{v \in M_K}$  sont bornées inférieurement par zéro, alors on a  $\|\mathbf{1}\|_{g_v, \text{sup}} \leq 1$  pour toute place  $v \in M_K$ . Dans ce cas-là, on dit que le  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique  $\overline{D}$  est *effectif*.

Soient  $\overline{D}$  et  $\overline{D}'$  deux  $\mathbb{R}$ -diviseurs adéliques sur  $X$ . La loi de multiplication de  $K(X)$  induit une application  $K$ -linéaire de  $H^0(D) \otimes_K H^0(D')$  vers  $H^0(D+D')$ . En outre, si  $f$  est un élément de  $H^0(D) \otimes_K K_v$  et si  $f'$  est un élément de  $H^0(D') \otimes_K K_v$ , alors on a

$$\|ff'\|_{\overline{D}+\overline{D}',v} = \|f\|_{\overline{D},v} \cdot \|f'\|_{\overline{D}',v},$$

où  $v$  est une place dans  $M_K$ . En particulier, on a

$$\|ff'\|_{\overline{D}+\overline{D}',v, \text{sup}} \leq \|f\|_{\overline{D},v, \text{sup}} \cdot \|f'\|_{\overline{D}',v, \text{sup}}.$$

On en déduit que, si  $\overline{D}$  et  $\overline{D}'$  sont deux  $\mathbb{R}$ -diviseurs adéliques tels que  $\overline{D}' - \overline{D}$  soit effectif, alors on a  $H^0(D) \subset H^0(D')$ . De plus, pour toute place  $v \in M_K$  et tout élément  $f \in H^0(D) \otimes_K K_v$ , on a  $\|f\|_{\overline{D},v} \leq \|f\|_{\overline{D}',v}$ . En d'autres termes, l'application d'inclusion de  $H^0(D) \otimes_K K_v$  dans  $H^0(D') \otimes_K K_v$  a pour norme d'opérateur  $\leq 1$ .

Les propositions suivantes ainsi que leur corollaire montrent que, pour tout  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique  $\overline{D}$ , l'espace vectoriel  $H^0(D)$  muni des normes  $(\|\cdot\|_{\overline{D},v,\text{sup}})_{v \in M_K}$  forme un fibré vectoriel adélique.

**Proposition 5.12.** — Soient  $\overline{E}$  un fibré vectoriel adélique,  $X$  un sous-schéma fermé géométriquement intègre de  $\mathbb{P}(E)$ , et  $L$  la restriction de  $\mathcal{O}_E(1)$  à  $X$ . On suppose que l'application de restriction  $H^0(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_E(1)) \rightarrow H^0(X, L)$  est surjective. Pour tout  $v \in M_K$ , soit  $\|\cdot\|_{\text{FS},v}$  la métrique de Fubini-Study sur  $L_v$  induit par la norme d'indice  $v$  dans la structure de fibré vectoriel adélique de  $\overline{E}$ . Pour tout élément  $s \in H^0(X_v, L_v) = H^0(X, L) \otimes_K K_v$ , soit

$$\|s\|_{v,\text{sup}} = \sup_{x \in X_v^{\text{an}}} \|s\|_{\text{FS},v}(x).$$

Alors l'espace vectoriel  $H^0(X, L)$  muni des normes  $(\|\cdot\|_{v,\text{sup}})_{v \in M_K}$  forme un fibré vectoriel adélique sur  $K$ .

*Démonstration.* — Quitte à remplacer  $\overline{E}$  par  $H^0(X, L)$  muni des normes quotients, on peut supposer que  $E = H^0(X, L)$ . Il existe alors des points  $P_1, \dots, P_n$  de  $X$  dans une extension finie  $K'$  de  $K$ , qui forment un système génératrice et linéairement indépendant de sous-espaces vectoriels de rang 1 de  $E^\vee \otimes_K K'$  (ici on considère les  $K$ -points de  $\mathbb{P}(E)$  à valeurs dans  $K'$  comme des quotients de rang 1 de  $E \otimes_K K'$ , ou des sous-espaces de rang 1 de  $E^\vee \otimes_K K'$ ). Soit  $(s_1, \dots, s_n)$  une base de  $E \otimes_K K'$  telle que, pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ , la restriction de  $s_i$  à la droite  $P_j$  soit nulle. Le résultat de la proposition ne dépend pas du choix des normes dans la structure du fibré vectoriel adélique sur  $\overline{E}$ . On peut donc supposer, sans perte de généralité, que  $(s_1, \dots, s_n)$  est une base orthonormée de  $E \otimes_K K'_v$  lorsque  $v \in M_K$  est une place non-archimédienne (comme dans la remarque 5.4, on étend arbitrairement chaque valeur absolue  $|\cdot|_v$  sur  $K'$  afin d'étendre la norme  $\|\cdot\|_v$  sur  $E \otimes_K K'_v$ ). Si  $s = \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n$  est un élément de  $E \otimes_K K_v$  (vu comme un sous-ensemble de  $E \otimes_K K'_v$ ), alors on a

$$\|s\|_{\text{FS},v}(x) \leq \|s\|_v = \max(|\lambda_1|_v, \dots, |\lambda_n|_v)$$

puisque la métrique de Fubini-Study est induite par les normes quotients. En outre, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  on a

$$\|s\|_{\text{FS},v}(P_i) = \inf_{\substack{\alpha \in E \otimes_K K'_v \\ \alpha|_{P_i} = 0}} \|s + \alpha\|_v = |\lambda_i|_v.$$

On obtient donc  $\|s\|_{v,\text{sup}} = \|s\|_v$ , d'où le résultat de la proposition.  $\square$

**Proposition 5.13.** — Soit  $\overline{D} = (D, (g_v)_{v \in M_K})$  un  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique sur  $X$ . On suppose que  $D$  est effectif. Alors la relation

$$\inf_{x \in X_v^{\text{an}}} g_v(x) = 0$$

est vérifiée pour toute sauf un nombre fini de places  $v \in M_K$ . En particulier, pour tout  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique  $D$  sur  $\mathbb{R}$ , il existe toujours une famille de Green  $g$  de  $D$  telle que le  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique  $(D, g)$  soit effectif.

*Démonstration.* — Traitons d'abord le cas où  $D$  est un diviseur de Cartier. On choisit un diviseur de Cartier  $D_1$  sur  $X$  qui est très ample et tel que  $D_2 := D + D_1$  soit aussi très ample. Soient  $E_1 = H^0(D_1)$  et  $E_2 = H^0(D_2)$ . Comme  $D$  est un diviseur effectif, on a  $E_1 \subset E_2$ . On munit  $E_2$  d'une structure de fibré vectoriel adélique  $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_K}$  et munit  $E_1$  des normes induites. Soient  $g_1 = (g_{1,v})_{v \in M_K}$  et  $g_2 = (g_{2,v})_{v \in M_K}$  des familles de Green de  $D_1$  et  $D_2$ , qui proviennent des métriques de Fubini-Study sur  $\mathcal{O}(D_1)$  et  $\mathcal{O}(D_2)$  respectivement. En particulier, on a  $g_{2,v} \geq g_{1,v}$  pour toute  $v \in M_K$ .

La proposition 5.10 montre que la validité du résultat de la proposition présente ne dépend pas du choix de la famille de Green  $g$ . On peut donc supposer, sans perte de généralité, que  $g = g_2 - g_1$ . Dans ce cas-là, pour toute place  $v \in M_K$ , la fonction  $g_v$  est bornée inférieurement par zéro. En outre, la proposition précédente 5.3 montre qu'il existe un sous-ensemble fini  $\mathfrak{S}$  de  $M_K$  tel que les relations

$$\|\mathbf{1}\|_{g_{1,v}, \text{sup}} = \|\mathbf{1}\|_{g_{2,v}, \text{sup}} = 1$$

soient vérifiées pour toute place  $v \in M_K \setminus \mathfrak{S}$  (voir aussi la remarque 5.3). Cela montre que, pour toute  $v \in M_K \setminus \mathfrak{S}$ , il existe  $x_v \in X_v^{\text{an}}$  tel que

$$\|\mathbf{1}\|_{g_{1,v}}(x_v) = \|\mathbf{1}\|_{g_{2,v}}(x_v) = 1.$$

On obtient donc  $g_v(x_v) = 0$ .

Pour le cas où  $D$  est un diviseur quelconque, on peut écrire  $\overline{D}$  sous la forme

$$\overline{D} = \lambda_1 \overline{D}_1 + \cdots + \lambda_n \overline{D}_n,$$

où  $D_1, \dots, D_n$  sont des diviseurs de Cartier effectifs, et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont des nombres positifs. Sans perte de généralité, on peut supposer les  $\overline{D}_i$  effectifs. Soient  $a_1, \dots, a_n$  des entiers tels que  $a_i \geq \lambda_i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , et

$$\overline{D}' = (D', (g'_v)_{v \in M_K}) := a_1 \overline{D}_1 + \cdots + a_n \overline{D}_n.$$

Par définition, on a  $g'_v \geq g_v \geq 0$  pour toute  $v \in M_K$ . Comme  $D'$  est un diviseur de Cartier effectif, d'après ce que l'on a démontré plus haut, on obtient qu'il existe un sous-ensemble fini  $\mathfrak{S}$  de  $M_K$  tel que  $\inf_{x \in X_v^{\text{an}}} g'_v(x) = 0$  pour toute  $v \in M_K \setminus \mathfrak{S}$ . On en déduit que  $\inf_{x \in X_v^{\text{an}}} g_v(x) = 0$  pour toute  $v \in M_K \setminus \mathfrak{S}$ . Le premier énoncé de la proposition est donc démontré.

Pour établir le deuxième énoncé, on peut commencer par une famille de Green arbitraire  $\tilde{g}$  telle que  $(D, \tilde{g})$  soit un  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique. Le premier énoncé de la proposition montre que, pour toute sauf un nombre fini de  $v \in M_K$ , la fonction  $\tilde{g}_v$  est bornée inférieurement par zéro. En outre, d'après la remarque 4.2, toute fonction  $\tilde{g}_v$  est bornée inférieurement. Quitte à rajouter des constantes positives à un nombre fini de fonctions de Green  $\tilde{g}_v$ , on obtient une

famille de Green  $g$  qui consiste des fonctions bornées inférieurement par zéro et telle que  $(D, g)$  soit un  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique. Le résultat est donc démontré.  $\square$

**Corollaire 5.14.** — Soit  $\overline{D} = (D, g)$  un  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique sur  $X$ . L'espace vectoriel  $H^0(D)$  muni des normes  $(\|\cdot\|_{\overline{D}, v, \text{sup}})_{v \in M_K}$  forme un fibré vectoriel adélique.

*Démonstration.* — Soit  $D'$  un diviseur de Cartier très ample sur  $X$  tel que  $D'' := D' - D$  soit effectif. D'après la démonstration de la proposition 5.13, il existe une famille de Green  $g''$  sur  $D''$  telle que  $(D'', g'')$  soit effectif. On munit le diviseur de Cartier  $D'$  de la famille de Green  $g' := g'' + g$ . En outre, on identifie  $H^0(D)$  à un sous-espace vectoriel de  $H^0(D')$ . Comme  $g''_v \geq 0$  pour toute place  $v \in M_K$ , on obtient que  $\|f\|_{\overline{D}, v} \geq \|f\|_{\overline{D}', v}$ , et donc  $\|f\|_{\overline{D}, v, \text{sup}} \geq \|f\|_{\overline{D}', v, \text{sup}}$  pour tout  $f \in H^0(D) \otimes_K K_v$ . D'après la proposition 5.12, l'espace vectoriel  $H^0(D')$  muni des normes  $(\|\cdot\|_{\overline{D}', v, \text{sup}})_{v \in M_K}$  forme un fibré vectoriel adélique. Soit  $(e_i)_{i=1}^m$  une base de l'espace vectoriel  $H^0(D)$ . On la complète en une base de l'espace vectoriel  $H^0(D')$  par des vecteurs  $e_{m+1}, \dots, e_n$ . D'après la remarque 5.3, il existe un sous-ensemble fini  $\Theta$  de  $M_K$ , qui contient toutes les places archimédiennes et tel que  $(e_i)_{i=1}^n$  soit une base orthonormée de  $H^0(D') \otimes_K K_v$  pour toute place  $v \in M_K \setminus \Theta$ . En outre, d'après la proposition 5.13, on obtient que, quitte à élargir l'ensemble  $S$ , on peut supposer que  $\|e_i\|_{\overline{D}, v, \text{sup}} = 1$  pour toute  $v \in M_K \setminus \Theta$ . On en déduit que, pour toute  $v \in M_K \setminus \Theta$  et tout  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in K_v$ , on a

$$\|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m\|_{\overline{D}, v, \text{sup}} \geq \|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m\|_{\overline{D}', v, \text{sup}} = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} |\lambda_i|_v.$$

En outre, on a

$$\|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m\|_{\overline{D}, v, \text{sup}} \leq \max_{i \in \{1, \dots, m\}} |\lambda_i|_v \cdot \|e_i\|_{\overline{D}, v, \text{sup}}.$$

Cela montre que  $(e_i)_{i=1}^m$  est une base orthonormée de  $H^0(D) \otimes_K K_v$  pour toute  $v \in M_K \setminus \Theta$ . Autrement dit,  $H^0(D)$  muni des normes  $(\|\cdot\|_{\overline{D}, v, \text{sup}})_{v \in M_K}$  est un fibré vectoriel adélique.  $\square$

## 6. Inégalité d'indice de Hodge pour les $\mathbb{R}$ -diviseurs adéliques

Dans ce paragraphe, on applique l'inégalité d'indice de Hodge démontrée dans §3.6 aux  $\mathbb{R}$ -diviseurs adéliques. On fixe dans ce paragraphe une courbe adélique  $S = (K, M_K, \Theta_K)$ , un schéma projectif et géométriquement intègre  $X$  sur  $\text{Spec } K$ . Soit  $d$  la dimension de Krull du schéma  $X$ . On suppose que  $d \geq 1$ .

**6.1. Fonctions de volume.** — Soient  $\overline{D}$  un  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique sur le schéma  $X$  et  $V_\bullet = \bigoplus_{n \geq 0} V_n$  un système linéaire gradué du  $\mathbb{R}$ -diviseur  $D$ , supposé contenir un  $\mathbb{R}$ -diviseur ample (cf. la définition 3.1). Pour tout entier  $n \geq 0$ , on munit l'espace vectoriel  $V_n$  de la famille de normes  $(\|\cdot\|_{n\overline{D},v,\text{sup}})_{v \in M_K}$ . Le corollaire 5.14 montre que cette construction définit une structure de fibré vectoriel adélique sur  $V_n$ . On désigne par  $\overline{V}_\bullet$  la famille de fibrés vectoriels adéliques  $(\overline{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Définition 6.1.** — On définit le *volume arithmétique* de  $\overline{V}_\bullet$  le nombre

$$\widehat{\text{vol}}(\overline{V}_\bullet) := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{(d+1)!}{n^{d+1}} \sum_{i=1}^{\text{rg}(V_n)} \max(\nu_i(\overline{V}_n), 0),$$

où les  $\nu_i(\cdot)$  sont les minima logarithmiques successifs, définis dans §5.1. De façon similaire, on définit le  *$\chi$ -volume arithmétique* de  $\overline{V}_\bullet$  comme le nombre

$$\widehat{\text{vol}}_\chi(\overline{V}_\bullet) := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{(d+1)!}{n^{d+1}} \sum_{i=1}^{\text{rg}(V_n)} \nu_i(\overline{V}_n).$$

Si  $V_\bullet = V_\bullet(D)$  est le système linéaire gradué total de  $D$ , on utilise les expressions  $\widehat{\text{vol}}(\overline{D})$  et  $\widehat{\text{vol}}_\chi(\overline{D})$  pour désigner  $\widehat{\text{vol}}(\overline{V}_\bullet)$  et  $\widehat{\text{vol}}_\chi(\overline{V}_\bullet)$  respectivement.

**Remarque 6.2.** — Dans le cas où la courbe adélique  $S$  provient d'un corps de nombres, les nombres  $\widehat{\text{vol}}(\overline{D})$  et  $\widehat{\text{vol}}_\chi(\overline{D})$  s'identifient aux volumes arithmétiques définis dans [27] et [35] respectivement. Cela provient essentiellement du lemme de Siegel pour les fibrés vectoriels adéliques (voir [19]). On renvoie les lecteurs à [9, §6 et §8] pour plus de détails sur cette comparaison. Attention, bien que l'on peut définir formellement  $\widehat{H}^0(\overline{V}_n)$  comme l'ensemble des éléments  $s \in V_n$  tels que  $\|s\|_{n\overline{D},v,\text{sup}} \leq 1$  pour toute  $v \in M_K$ , une généralisation naïve de la définition du volume arithmétique dans [27] ou [29] semble inadéquate dans le cadre de courbes adéliques générales.

Dans le cas où la courbe adélique  $S$  provient du corps des fonctions rationnelles sur une courbe projective régulière  $C$  sur un corps de base  $k$  et  $\overline{D}$  est déterminé par un faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur un modèle entier  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow C$  de  $X$  (c'est-à-dire un morphisme projectif et plat dont la fibre générique s'identifie à  $X$ ), la fonction  $\widehat{\text{vol}}(\overline{D})$  s'identifie à la fonction volume usuelle évaluée en  $\mathcal{L}$ , et  $\widehat{\text{vol}}_\chi(\overline{D})$  est égal à

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{(d+1)!}{n^{d+1}} \deg(\pi_*(\mathcal{L}^{\otimes n})) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{(d+1)!}{n^{d+1}} \chi(\pi_*(\mathcal{L}^{\otimes n})),$$

où  $\deg(\cdot)$  désigne la fonction de degré définie sur l'ensemble des fibrés vectoriels sur  $C$ , et  $\chi(\cdot)$  est la fonction de caractéristique d'Euler-Poincaré.

Pour pouvoir appliquer les résultats développés dans §3.6, il faut montrer que le premier minimum logarithmique de  $\overline{V}_n$  croît au plus linéairement par rapport à  $n$ . Pour cela on introduit la notion du minimum essentiel pour un  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique.

Si  $K'$  est une extension finie de  $K$  et si  $v \in M_K$ , on désigne par  $M_{K'}(v)$  l'ensemble des valeurs absolues sur  $K'$  qui prolonge  $|\cdot|_v$ . Si  $x$  est un  $K$ -point de  $X$  à valeurs dans  $K'$ , pour toute  $w \in M_{K'}(v)$ , le point  $x$  induit un  $K_v$ -point de  $X_v$  à valeurs dans l'extension valuée  $K'_w$  de  $K_v$ , qui détermine un point dans l'espace analytique  $X_v^{\text{an}}$  que l'on note comme  $x_w$ .

Soit  $\overline{D} = (D, (g_v)_{v \in M_K})$  un  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique sur  $X$ . On suppose dans un premier temps que  $D$  est un diviseur de Cartier. On définit une fonction de hauteur  $h_{\overline{D}}$  sur l'ensemble  $X(\overline{K})$  des  $K$ -points algébriques du schéma  $X$ , où  $\overline{K}$  désigne une clôture algébrique de  $K$ . Soient  $x$  un  $K$ -point algébrique de  $X$  et  $K'$  un corps de définition du point  $x$ . Soit  $f$  une fonction rationnelle de  $X$  qui définit le diviseur de Cartier  $D$  dans un voisinage  $U$  de  $x$ . Par définition, pour toute place  $v \in M_K$ , l'élément  $g_v + \ln |f|_v \in \widehat{\mathcal{C}}^0(X^{\text{an}})$  s'étend en une fonction continue sur  $U_v^{\text{an}}$ . On définit

$$(23) \quad h_{\overline{D}}(x) := \sum_{v \in M_K} \sum_{w \in M_{K'}(v)} \frac{[K'_w : K_v]}{[K^{\text{fs}} : K]} (g_v + \ln |f|_v)(x_w),$$

où  $K^{\text{fs}}$  désigne la fermeture séparable du corps  $K$  dans  $K'$ . Il s'avère que la valeur de  $h_{\overline{D}}(x)$  ne dépend pas du choix de corps de définition  $K'$ . On voit aussitôt de cette définition que, si  $\overline{D}$  est un  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique principal, alors la fonction  $h_{\overline{D}}$  est nulle. En outre, cette fonction de hauteur est additive par rapport à  $\overline{D}$  : si  $\overline{D}$  et  $\overline{D}'$  sont deux  $\mathbb{R}$ -diviseurs adéliques tels que  $D$  et  $D'$  soient des diviseurs de Cartier, on a  $h_{\overline{D} + \overline{D}'} = h_{\overline{D}} + h_{\overline{D}'}$  comme fonctions sur  $X(\overline{K})$ . Cette observation permet de définir la fonction de hauteur associée à un  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique général : si  $\overline{D}$  est un  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique sur  $X$ , qui s'écrit sous la forme  $\overline{D} = \lambda_1 \overline{D}_1 + \cdots + \lambda_n \overline{D}_n$ , où  $\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_n$  sont des  $\mathbb{R}$ -diviseurs adéliques sur  $X$  tels que  $D_1, \dots, D_n$  soient des diviseurs de Cartiers, on définit

$$h_{\overline{D}} := \lambda_1 h_{\overline{D}_1} + \cdots + \lambda_n h_{\overline{D}_n}.$$

**Proposition 6.3.** — *Si  $\overline{D}_1$  et  $\overline{D}_2$  sont deux  $\mathbb{R}$ -diviseurs adéliques tels que  $D_1 = D_2$ , alors la fonction  $|h_{\overline{D}_1} - h_{\overline{D}_2}|$  sur  $X(\overline{K})$  est bornée.*

*Démonstration.* — Soient  $\overline{D} = \overline{D}_2 - \overline{D}_1$  et  $g = (g_v)_{v \in M_K}$  la famille de Green de  $\overline{D}$ . D'après la proposition 5.10, on obtient qu'il existe un sous-ensemble fini  $\mathfrak{S} \subset M_K$  tel que  $g_v = 0$  quel que soit  $v \in M_K \setminus \mathfrak{S}$ . En outre, la proposition 4.1 montre que chaque  $g_v$  est une fonction continue sur  $X_v^{\text{an}}$ , donc est bornée. Il existe alors une constante  $C > 0$  telle que  $\|g_v\|_{\text{sup}} \leq C$  pour toute  $v \in \Lambda$ . On

en déduit que, pour tout  $x \in X(\overline{K})$  de corps de définition  $K'$ , on a

$$|h_{\overline{D}_1}(x) - h_{\overline{D}_2}(x)| = \left| \sum_{v \in \Lambda} \sum_{w \in M_{K'}(v)} \frac{[K_w^{\text{fs}} : K_v]}{[K^{\text{fs}} : K]} g_v(x_w) \right| \leq C \cdot \text{card}(\Lambda).$$

Le résultat est donc démontré.  $\square$

**Remarque 6.4.** — Dans le cas où  $D$  est un diviseur de Cartier, il est parfois plus commode de construire la fonction de hauteur avec le point de vue de fibré inversible adélique. Soit  $L$  le faisceau inversible  $\mathcal{O}_X(D)$ . Pour toute place  $v \in M_K$ , la fonction de Green  $g_v$  induit une métrique continue  $\|\cdot\|_{g_v}$  sur  $L_v$ , comme expliqué dans §4.3. On désigne par  $\overline{L}$  le couple  $(L, (\|\cdot\|_{g_v})_{v \in M_K})$ . Il s'avère que la fonction  $h_{\overline{D}}$  s'identifie à  $h_{\overline{L}} : X(\overline{K}) \rightarrow \mathbb{R}$  qui envoie  $x \in X(\overline{K})$  en

$$- \sum_{v \in M_K} \sum_{w \in M_{K'}(v)} \frac{[K_w^{\text{fs}} : K_v]}{[K^{\text{fs}} : K]} \ln \|s\|(x_w),$$

où  $s$  est une section rationnelle de  $L$  qui trivialise  $L$  autour du point  $x$ .

**Définition 6.5.** — Soit  $\overline{D}$  un  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique. Pour tout nombre réel  $\lambda$ , on désigne par  $X(\overline{K})_{\lambda}^{\overline{D}}$  l'ensemble des points algébriques  $x \in X(\overline{K})$  tels que  $h_{\overline{D}}(x) \leq \lambda$ . On définit le *minimum essentiel* de  $\overline{D}$  comme

$$\widehat{\mu}_{\text{ess}}(\overline{D}) := \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid X(\overline{K})_{\lambda}^{\overline{D}} \text{ est Zariski dense dans } X\}.$$

On peut réécrire  $\widehat{\mu}_{\text{ess}}(\overline{D})$  comme

$$\sup_{Z \subsetneq X} \inf_{x \in (X \setminus Z)(\overline{K})} h_{\overline{D}}(x),$$

où  $Z$  parcourt l'ensemble des sous-schémas fermés de  $X$  qui sont strictement contenus dans  $X$ . Par définition, la fonction  $\widehat{\mu}_{\text{ess}}(\overline{D})$  est positivement homogène, autrement dit, pour tout  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique  $\overline{D}$  et tout  $\lambda \geq 0$ , on a

$$\widehat{\mu}_{\text{ess}}(\lambda \overline{D}) = \lambda \widehat{\mu}_{\text{ess}}(\overline{D}).$$

**Proposition 6.6.** — Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont des nombres positifs et si  $\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_n$  sont des  $\mathbb{R}$ -diviseurs adéliques tels que la somme  $\lambda_1 \widehat{\mu}_{\text{ess}}(\overline{D}_1) + \dots + \lambda_n \widehat{\mu}_{\text{ess}}(\overline{D}_n)$  soit bien définie, alors on a

$$\widehat{\mu}_{\text{ess}}(\lambda_1 \overline{D}_1 + \dots + \lambda_n \overline{D}_n) \geq \lambda_1 \widehat{\mu}_{\text{ess}}(\overline{D}_1) + \dots + \lambda_n \widehat{\mu}_{\text{ess}}(\overline{D}_n).$$

En particulier, la fonction  $\widehat{\mu}_{\text{ess}}(\overline{D})$  est concave sur l'espace vectoriel  $\widehat{\text{Div}}_{\mathbb{R}}(X)$ .

*Démonstration.* — Par définition on a

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{\text{ess}}(\lambda_1 \overline{D}_1 + \cdots + \lambda_n \overline{D}_n) &= \sup_{Z \subsetneq X} \inf_{x \in (X \setminus Z)(\overline{K})} \sum_{i=1}^n \lambda_i h_{\overline{D}_i}(x) \\ &\geq \sup_{Z \subsetneq X} \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \inf_{x \in (X \setminus Z)(\overline{K})} h_{\overline{D}_i}(x) \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \widehat{\mu}_{\text{ess}}(\overline{D}_i), \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient du fait que l'ensemble des sous-schémas fermés de  $X$  qui sont strictement contenus dans  $X$  est filtrant par rapport à la relation d'inclusion.  $\square$

Le minimum essentiel est un invariant arithmétique birationnel qui décrit de façon numérique la positivité des  $\mathbb{R}$ -diviseurs adéliques.

**Proposition 6.7.** — *Soit  $\overline{D}$  un  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique sur  $X$ . Si  $\overline{D}$  est effectif, alors on a  $\widehat{\mu}_{\text{ess}}(\overline{D}) \geq 0$ .*

*Démonstration.* — D'après la proposition précédente, il suffit de traiter le cas où  $D$  est un diviseur de Cartier. Soit  $U$  un ouvert Zariski non-vide de  $X$  sur lequel le diviseur  $D$  est trivial. Pour tout point alébrique  $x$  de  $U$  à valeurs dans une extension finie  $K'$  de  $K$ , on a

$$h_{\overline{D}}(x) = \sum_{v \in M_K} \sum_{w \in M_{K'}(v)} \frac{[K_w^{\text{fs}} : K_v]}{[K^{\text{fs}} : K]} g_v(x_w) \geq 0$$

puisque les fonctions de Green  $g_v$  sont supposées être bornées inférieurement par zéro. La proposition est donc démontrée.  $\square$

**Proposition 6.8.** — *Pour tout  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique  $\overline{D}$  sur  $X$ , la relation  $\widehat{\mu}_{\text{ess}}(\overline{D}) < +\infty$  est vraie.*

*Démonstration.* — Les propositions 6.6 et 6.7 montrent que, si  $\overline{D}'$  est un  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique effectif, alors on a

$$\widehat{\mu}_{\text{ess}}(\overline{D} + \overline{D}') \geq \widehat{\mu}_{\text{ess}}(\overline{D}) + \widehat{\mu}_{\text{ess}}(\overline{D}') \geq \widehat{\mu}_{\text{ess}}(\overline{D}).$$

On peut donc supposer que  $D$  est un diviseur de Cartier très ample sans perte de généralité. D'après la normalisation de Noether, il existe un espace vectoriel  $E$  de rang fini sur  $K$  et un morphisme fini  $\pi$  de  $X$  vers  $\mathbb{P}(E)$  tels que  $\mathcal{O}(D) \cong \pi^*(\mathcal{O}_E(1))$ .

En outre, la proposition 6.3 montre que la validité de la proposition ne dépend pas du choix de la famille de Green du  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique  $\overline{D}$ . On peut donc supposer que la famille de Green de  $\overline{D}$  provient d'une famille de métriques sur  $\mathcal{O}(D)$  qui sont des tirées en arrière des métriques de Fubini-Study sur  $\mathcal{O}_E(1)$  associées à une structure de fibré vectoriel adélique sur  $E$ .



En particulier, si  $x$  est un  $K$ -point algébrique de  $X$ , alors on a

$$h_{\overline{D}}(x) = h_{\overline{\mathcal{O}_E(1)}}(\pi(x)).$$

En particulier,  $\widehat{\mu}_{\text{ess}}(\overline{D})$  est égal au minimum essentiel du  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique associé à une section rationnelle de  $\mathcal{O}_E(1)$  (que l'on note comme  $\widehat{\mu}_{\text{ess}}(\overline{\mathcal{O}_E(1)})$  dans la suite). Il reste à établir que ce minimum essentiel est  $< +\infty$ . Sans perte de généralité, on peut supposer l'existence d'une base  $(\alpha_i)_{i=1}^n$  de  $E^\vee$  telle que

$$\forall v \in M_K, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K_v^n, \quad \|\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n\|_v = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |\lambda_i|_v,$$

où on considère la norme duale sur  $E^\vee \otimes_K K_v$  induite par la structure de fibré vectoriel adélique sur  $E$ . Avec cette hypothèse, si  $y$  est un point algébrique de  $\mathbb{P}(E)$  dont les coordonnées homogènes (où on adopte la convention de Grothendieck dans la construction de l'espace projectif  $\mathbb{P}(E)$ ) dans la base  $(\alpha_i)_{i=1}^n$  sont des racines de l'unité, on a  $h_{\overline{\mathcal{O}_E(1)}}(y) = 0$ . On obtient donc  $\widehat{\mu}_{\text{ess}}(\overline{\mathcal{O}_E(1)}) \leq 0$ . Le résultat est démontré.  $\square$

La proposition 6.8 nous permet d'appliquer le théorème limite 3.3 au système linéaire gradué arithmétique d'un  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique.

**Proposition 6.9.** — Soient  $\overline{D}$  un  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique sur  $X$  et  $V_\bullet$  un système linéaire gradué de  $D$ . On munit chaque espace vectoriel  $V_n$  de la structure de fibré vectoriel adélique  $(\|\cdot\|_{n\overline{D}, v, \text{sup}})_{v \in M_K}$ . Alors on a

$$\nu_1(\overline{V}_n) \leq n \widehat{\mu}_{\text{ess}}(\overline{D}),$$

où par convention  $\nu_1(\overline{V}_n) = -\infty$  si  $V_n$  est l'espace vectoriel nul.

*Démonstration.* — Soient  $L$  un sous-espace vectoriel de rang 1 de  $V_n$  tel que  $\widehat{\deg}(\overline{L}) = \nu_1(\overline{V}_n)$ , et  $f$  un élément non-nul de  $L$ . Par définition, le  $\mathbb{R}$ -diviseur  $(f) + D$  est effectif, et pour toute place  $v \in M_K$ , la fonction  $|f|e^{-g_v}$  s'étend en une fonction continue  $\|f\|_{\overline{D}, v}$  sur  $X_v^{\text{an}}$ . Il existe alors un sous-schéma fermé  $Z \subsetneq X$  (on peut prendre  $Z$  comme le support du  $\mathbb{R}$ -diviseur  $(f) + nD$ ) tel que, pour tout point algébrique  $x \in (X \setminus Z)(\overline{K})$  de corps de définition  $K'$ , on ait

$$\begin{aligned} nh_{\overline{D}}(x) &= \sum_{v \in M_K} \sum_{w \in M_{K'}(v)} \frac{[K_w^{\text{fs}} : K_v]}{[K^{\text{fs}} : K]} (ng_v - \ln |f|_v)(x_w) \\ &= - \sum_{v \in M_K} \sum_{w \in M_{K'}(v)} \frac{[K_w^{\text{fs}} : K_v]}{[K^{\text{fs}} : K]} \ln \|f\|_{\overline{D}, v}(x_w) \geq \widehat{\deg}(\overline{L}). \end{aligned}$$

On en déduit  $n \widehat{\mu}_{\text{ess}}(\overline{D}) \geq \nu_1(\overline{V}_n)$ .  $\square$

**Remarque 6.10.** — Soit  $\overline{E}$  un fibré vectoriel adélique sur la courbe arithmétique  $(K, M_K, \Theta_K)$ . On désigne par  $\overline{E}^\vee$  son dual (l'espace vectoriel dual  $E^\vee$  muni des normes duales), dont la structure de fibré vectoriel adélique permet de construire une famille de métriques de Fubini-Study sur le faisceau inversible universel  $\mathcal{O}_{E^\vee}(1)$  dont toute section rationnelle non-nulle définit un  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique. On désigne par  $h_{\overline{E}}$  la fonction de hauteur sur  $\mathbb{P}(E^\vee)$  associée à un tel  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique. Il s'avère que  $\nu_1(\overline{E})$  s'identifie à l'infimum de cette fonction restreinte à l'ensemble des points rationnels de  $\mathbb{P}(E^\vee)$ . On définit  $\tilde{\nu}_1(\overline{E})$  comme le *minimum absolu* de la fonction de hauteur  $h_{\overline{E}}$ , c'est-à-dire l'infimum de la fonction  $h_{\overline{E}}$  sur l'ensemble des points algébriques de  $\mathbb{P}(E^\vee)$ . Par définition, on a  $\nu_1(\overline{E}) \leq \tilde{\nu}_1(\overline{E})$ . En outre, la méthode de démonstration de la proposition 6.9 montre que  $\tilde{\nu}_1(\overline{V}_n) \leq n \hat{\mu}_{\text{ess}}(\overline{D})$ . Motivé par les résultats de l'approche arakelovienne sur le problème d'équidistribution, notamment [33, 35], on propose la conjecture suivante.

**Conjecture.** — Soient  $\overline{D}$  un  $\mathbb{R}$ -diviseur de Cartier et  $V_\bullet$  le système linéaire gradué total de  $D$ . On suppose que  $V_\bullet$  contient un  $\mathbb{R}$ -diviseur ample et que les fonctions de Green de  $D$  sont de type pluri-sous-harmonique (voir [29, §0.2] pour la définition). Alors on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \tilde{\nu}_1(\overline{V}_n) = \hat{\mu}_{\text{ess}}(\overline{D})$$

L'énoncé de la conjecture est soutenu par des évidences fournies par des recherches récentes sur l'arithmétique des variété torique, notamment [5, 6]. On peut montrer que cette conjecture est équivalente à un analogue du théorème d'approximation de Fujita pour l'invariant arithmétique birationnel  $\hat{\mu}_{\text{ess}}(\cdot)$ .

Soient  $(K, M_K, \Theta_K)$  une courbe adélique et  $X$  un schéma projectif et géométriquement intègre sur  $\text{Spec } K$ . Soit  $\overline{D}$  un  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique. Si  $V_\bullet$  est un système linéaire gradué de  $\overline{D}$ , alors chaque espace vectoriel  $V_n$  est muni d'une famille de normes  $(\|\cdot\|_{n\overline{D}, v, \text{sup}})_{v \in M_K}$  de sorte que  $\overline{V}_n = (V_n, (\|\cdot\|_{n\overline{D}, v, \text{sup}})_{v \in M_K})$  devienne un fibré vectoriel adélique. Comme expliqué dans §5.1, on peut construire une  $\mathbb{R}$ -filtration par minima  $\mathcal{F}$  sur l'espace vectoriel  $\overline{V}_n$ , dont les points de saut sont des minima logarithmiques successifs de  $\overline{V}_n$ . Dans le cas où  $V_n \neq \{0\}$ , on désigne par  $Z_{\overline{V}_n}$  la variable aléatoire associée à l'espace filtré  $(V_n, \mathcal{F})$ . Par définition, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(Z_{\overline{V}_n} \geq t) = \frac{\text{rg}(\mathcal{F}^t(\overline{V}_n))}{\text{rg}(V_n)}.$$

En particulier, l'espérance de  $Z_{\overline{V}_n}$  s'identifie à la moyenne des minima logarithmiques de  $\overline{V}_n$  :

$$\mathbb{E}[Z_{\overline{V}_n}] = \frac{1}{\text{rg}(V_n)} \sum_{i=1}^{\text{rg}(V_n)} \nu_i(\overline{V}_n).$$

En outre, la proposition 6.9 montre que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \nu_1(\overline{V}_n) \leq \widehat{\mu}_{\text{ess}}(\overline{D}) < +\infty.$$

Dans le cas où le système linéaire gradué  $V_\bullet$  contient un  $\mathbb{R}$ -diviseur ample (voir la définition 3.1), le théorème 3.3 conduit au résultat suivant.

**Proposition 6.11.** — *Soient  $\overline{D}$  un  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique sur  $X$  et  $V_\bullet$  un système linéaire gradué de  $D$ . On suppose que  $V_\bullet$  contient un  $\mathbb{R}$ -diviseur ample. La suite de variables aléatoires  $(\frac{1}{n} Z_{\overline{V}_n})_{n \geq 1}$  converge en loi vers une mesure de probabilité borélienne sur  $\mathbb{R}$ , dont le support est contenu dans  $] -\infty, \widehat{\mu}_{\text{ess}}(\overline{D})]$ .*

*Démonstration.* — Il suffit de vérifier que le système de filtrations par minima est multiplicatif. Cela provient notamment de la relation suivante : pour tout  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ , tout  $(f, f') \in V_n \times V_m$  et toute  $v \in M_K$ , on a

$$(24) \quad \|f f'\|_{(n+m)\overline{D}, v, \text{sup}} \leq \|f\|_{n\overline{D}, v, \text{sup}} \cdot \|f'\|_{m\overline{D}, v, \text{sup}}.$$

□

Dans la suite, on utilise l'expression  $Z_{\overline{V}_\bullet}$  pour désigner une variable aléatoire qui suit la loi limite prédit dans la proposition précédente. Comme un corollaire de la proposition 6.11, on peut interpréter les fonctions de volume arithmétique comme des espérances par rapport à  $Z_{\overline{V}_\bullet}$ .

**Corollaire 6.12.** — *Avec les notations et sous les hypothèses de la proposition précédente, on a*

$$(25) \quad \widehat{\text{vol}}(\overline{V}_\bullet) = (d+1) \text{vol}(V_\bullet) \mathbb{E}[Z_{\overline{V}_\bullet}^+],$$

où  $Z_{\overline{V}_\bullet}^+ = \max(Z_{\overline{V}_\bullet}, 0)$ , et

$$(26) \quad \widehat{\text{vol}}_\chi(\overline{V}_\bullet) \leq (d+1) \text{vol}(V_\bullet) \mathbb{E}[Z_{\overline{V}_\bullet}],$$

Si de plus la condition de finitude

$$(27) \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \nu_{\text{rg}(V_n)}(\overline{V}_n) > -\infty$$

est vérifiée, alors l'inégalité (26) devient une égalité.

*Démonstration.* — Comme la suite de variables aléatoires  $(\frac{1}{n}Z_{\overline{V}_n})_{n \geq 1}$  est uniformément bornée supérieurement, on a

$$\mathbb{E}[Z_{V_\bullet}^+] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[Z_{V_n}^+] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \operatorname{rg}(V_n)} \sum_{i=1}^{\operatorname{rg}(V_n)} \max(\nu_i(\overline{V}_n), 0).$$

En outre, comme  $V_\bullet$  contient un  $\mathbb{R}$ -diviseur ample, on a

$$\operatorname{vol}(V_\bullet) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d!}{n^d} \operatorname{rg}(V_n).$$

Le produit de ces deux formules conduit à (25). De façon similaire, pour tout  $k \in \mathbb{R}$  on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\max(Z_{V_\bullet}, -k)] &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \operatorname{rg}(V_n)} \sum_{i=1}^{\operatorname{rg}(V_n)} \max(\nu_i(\overline{V}_n), -k) \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \operatorname{rg}(V_n)} \sum_{i=1}^{\operatorname{rg}(V_n)} \nu_i(\overline{V}_n). \end{aligned}$$

Par passage à la limite lorsque  $k \rightarrow +\infty$ , on obtient

$$\mathbb{E}[Z_{V_\bullet}] \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \operatorname{rg}(V_n)} \sum_{i=1}^{\operatorname{rg}(V_n)} \nu_i(\overline{V}_n)$$

et en déduit (26). Sous l'hypothèse de finitude (27), la suite de variables aléatoires  $(\frac{1}{n}Z_{\overline{V}_n})_{n \geq 1}$  est uniformément bornée. L'inégalité au-dessus devient donc une égalité, et il en est de même de (26).  $\square$

**Remarque 6.13.** — La condition de finitude (27) dans le corollaire 6.12 est vérifiée notamment lorsque le système linéaire gradué  $V_\bullet$  est une algèbre de type fini sur  $K$ . En outre, le résultat de [28] montre que, si  $D$  est un diviseur de Cartier,  $V_\bullet$  est le système linéaire gradué total de  $D$  et s'il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que le système linéaire gradué

$$V_\bullet^t = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{F}^{nt}(V_n)$$

admette l'ensemble vide comme lieu de base stable, alors la condition de finitude (27) est satisfaite. Inspiré par cette observation, on propose la conjecture suivante.

**Conjecture.** — Soient  $\overline{D}$  un  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique sur  $X$  et  $V_\bullet$  un système linéaire gradué de  $D$ , qui contient un  $\mathbb{R}$ -diviseur ample. Alors on a

$$(28) \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \nu_{\operatorname{rg}(V_n)}(\overline{V}_n) = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \mathbf{Bs}(V_\bullet^t) = \mathbf{Bs}(V_\bullet)\},$$

où  $\mathbf{Bs}(\cdot)$  désigne le lieu de base stable de système linéaire gradué. En outre, la borne inférieure du support de la loi limite prédite par la proposition 6.11 s'identifie à

$$\sup\{t \in \mathbb{R} \mid \mathbf{B}_+(V_\bullet^t) = \mathbf{B}_+(V_\bullet)\},$$

où  $\mathbf{B}_+(\cdot)$  désigne le lieu de base augmenté, qui s'identifie à la réunion de sous-variétés fermées sur lesquelles le volume restreint du système linéaire gradué s'annule. En particulier, la condition de finitude (27) est toujours vérifiée.

Dans le cas où  $V_\bullet$  est le système linéaire gradué total de  $D$ , il est démontrée dans [21] que la limite inférieure dans la formule (28) est finie.

**6.2. Inégalité d'indice de Hodge arithmétique.** — Dans ce sous-paragraphe, on applique le théorème 3.5 dans le cadre de la géométrie arithmétique sur une courbe adélique pour obtenir l'inégalité d'indice de Hodge arithmétique. Dans la suite, on fixe une courbe arithmétique  $(K, M_K, \Theta_K)$  et un  $K$ -schéma projectif et géométriquement intègre  $X$ . On suppose que le schéma  $X$  admet un point rationnel régulier<sup>(4)</sup> et on choisit une suite régulière  $(z_1, \dots, z_d)$  dans l'idéal maximal de l'anneau local du schéma  $X$  en ce point régulier, où  $d$  est la dimension de Krull de  $X$ . On fixe en outre une relation d'ordre monomiale sur  $\mathbb{N}^d$ . Si  $V_\bullet$  est un système linéaire gradué d'un  $\mathbb{R}$ -diviseur sur  $X$ , on désigne par  $\Delta(V_\bullet)$  son corps d'Okouknov. Rappelons que l'on a  $d! \text{vol}(\Delta(V_\bullet)) = \text{vol}(V_\bullet)$  lorsque  $V_\bullet$  contient un diviseur ample.

Soient  $\overline{D}$  un  $\mathbb{R}$ -diviseur adélique sur  $X$  et  $V_\bullet$  un système linéaire gradué de  $D$ , qui contient un diviseur ample. On munit chaque espace vectoriel  $V_n$  de la famille de normes  $(\|\cdot\|_{n\overline{D}, v, \text{sup}})_{v \in M_K}$  pour former un fibré vectoriel adélique sur la courbe adélique  $(K, M_K, \Theta_K)$ . Soit  $V_\bullet^0$  le système linéaire gradué  $\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{F}^0(V_n)$ .

**Théorème 6.14.** — Soient  $\overline{D}_1$  et  $\overline{D}_2$  deux  $\mathbb{R}$ -diviseurs adéliques sur  $X$ , et  $\overline{D} = \overline{D}_1 + \overline{D}_2$ . Soient  $U_\bullet, V_\bullet$  et  $W_\bullet$  des systèmes linéaires gradués de  $D_1, D_2$  et  $D$  respectivement, qui contiennent des diviseurs amples, et tels que  $U_n \cdot V_n \subset W_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors on a

$$(29) \quad \widehat{\text{vol}}(\overline{W}_\bullet) \geq \frac{\text{vol}(\Delta(U_\bullet^0) + \Delta(V_\bullet^0))}{\rho(\Delta(U_\bullet^0), \Delta(V_\bullet^0))} \left( \frac{\widehat{\text{vol}}(\overline{U}_\bullet)}{\text{vol}(\Delta(U_\bullet^0))} + \frac{\widehat{\text{vol}}(\overline{V}_\bullet)}{\text{vol}(\Delta(V_\bullet^0))} \right).$$

Si le couple de corps convexe  $(\Delta(U_\bullet), \Delta(V_\bullet))$  possède une mesure minkowskienne et vérifie relation  $\Delta(W_\bullet) = \Delta(U_\bullet) + \Delta(V_\bullet)$ , et si le système linéaire

4. Cette hypothèse est en fait anodin car on peut toujours trouver un point rationnel régulier, quitte à faire un changement de base à une extension finie de  $K$ . L'extension de scalaire d'un système linéaire gradué dans ce procédé ne change pas le volume du système linéaire gradué.

gradué  $W_\bullet$  satisfait à la condition de finitude (27), alors on a

$$(30) \quad \frac{\widehat{\text{vol}}_\chi(\overline{W}_\bullet)}{\text{vol}(W_\bullet)} \geq \frac{\widehat{\text{vol}}_\chi(\overline{U}_\bullet)}{\text{vol}(U_\bullet)} + \frac{\widehat{\text{vol}}_\chi(\overline{V}_\bullet)}{\text{vol}(V_\bullet)}.$$

*Démonstration.* — Si  $n \geq 0$  est un entier et si  $f \in U_n$ ,  $g \in V_n$ , pour tout  $v \in M_K$  on a

$$\|fg\|_{n(\overline{D}_1 + \overline{D}_2), v, \text{sup}} \leq \|f\|_{n\overline{D}_1, v, \text{sup}} \cdot \|g\|_{n\overline{D}_2, v, \text{sup}}.$$

On en déduit que la relation (19) dans le théorème 3.5 est vérifiée, si on convient que les occurrences de  $\mathcal{F}$  dans la formule (19) désignent des filtrations par minima. La première assertion provient donc de l'inégalité (21). Pour la deuxième assertion, comme le système linéaire gradué  $W_\bullet$  est supposé satisfaire à la condition de finitude (27), d'après le corollaire 6.12 on obtient  $\widehat{\text{vol}}_\chi(\overline{W}_\bullet) = \widehat{\text{vol}}_\chi(W_\bullet, \mathcal{F})$  (voir (16) pour la définition de  $\widehat{\text{vol}}_\chi(W_\bullet, \mathcal{F})$ ). On déduit donc des inégalités (21) et (26) la relation (30). Le théorème est donc démontré.  $\square$

Comme application du théorème, on établit le résultat suivant, qui implique les inégalités d'indice de Hodge géométrique et arithmétique.

**Corollaire 6.15.** — Soient  $\overline{D}_1$  et  $\overline{D}_2$  deux  $\mathbb{R}$ -diviseurs adéliques sur  $X$ . On suppose que  $D_1$  et  $D_2$  sont des  $\mathbb{R}$ -diviseurs gros, et que leurs images dans  $\text{Div}_\mathbb{R}(X)/\text{PDiv}_\mathbb{R}(X)$  sont proportionnelles, où  $\text{PDiv}_\mathbb{R}(X)$  désigne l'image de  $(\cdot) : K(X)^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \rightarrow \text{Div}_\mathbb{R}(X)$ . Si le système linéaire gradué total de  $D_1 + D_2$  vérifie la condition de finitude (27), alors on a

$$\frac{\widehat{\text{vol}}_\chi(\overline{D}_1 + \overline{D}_2)}{\text{vol}(D_1 + D_2)} \geq \frac{\widehat{\text{vol}}_\chi(\overline{D}_1)}{\text{vol}(D_1)} + \frac{\widehat{\text{vol}}_\chi(\overline{D}_2)}{\text{vol}(D_2)}.$$

*Démonstration.* — Il suffit d'appliquer le théorème aux systèmes linéaires gradués totaux de  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_1 + D_2$ .  $\square$

La condition de finitude figurant dans le corollaire est satisfaite notamment lorsque  $D_1 + D_2$  est un diviseur de Cartier ample (de sorte que  $V_\bullet(D_1 + D_2)$  soit une algèbre de type fini). En particulier, lorsque le schéma  $X$  est une courbe projective, la spécialisation de la courbe adélique  $(K, M_K, \Theta_K)$  dans différentes situations permet de retrouver les théorèmes d'indice de Hodge géométrique et arithmétique.

**Théorème 6.16.** — Soient  $k$  un corps et  $\pi : S \rightarrow C$  un  $k$ -morphisme projectif et plat d'une surface sur  $k$  vers une courbe projective régulière sur  $k$ . Si  $L$  et  $M$  sont deux fibrés inversibles sur  $S$  dont les fibres génériques sont de degré strictement positif, alors on a

$$(31) \quad \frac{\text{vol}_\chi^\pi(L \otimes M)}{d_\pi(L) + d_\pi(M)} \geq \frac{\text{vol}_\chi^\pi(L)}{d_\pi(L)} + \frac{\text{vol}_\chi^\pi(M)}{d_\pi(M)},$$

où la fonction  $\text{vol}_X^\pi(\cdot)$  est définie dans (3).

*Démonstration.* — On applique le corollaire 6.15 à la situation où  $K$  est le corps de fonctions  $k(C)$ , et les diviseurs adéliques  $\overline{D}_1$  et  $\overline{D}_2$  proviennent des  $\mathcal{O}_S$ -module  $L$  et  $M$  respectivement. Plus précisément, on choisit une section rationnelle  $s$  de  $L$ , dont la restriction à la fibre générique de  $\pi$  détermine le diviseur de Cartier  $D_1$ . Les fonctions de Green de  $\overline{D}_1$  sont données par  $-\ln \|s\|_v$ , où  $\|\cdot\|_v$  est la métrique sur  $L_{K_v}$  définie par la structure de  $\mathcal{O}_S$ -module sur  $L$ . Le diviseur adélique  $\overline{D}_2$  est défini de façon similaire. Comme expliqué dans [9, proposition 8.1], on déduit du lemme de Siegel à la Roy et Thunder les relations  $\text{vol}_X^\pi(L) = \widehat{\text{vol}}_X(\overline{D}_1)$ ,  $\text{vol}_X^\pi(M) = \widehat{\text{vol}}_X(\overline{D}_2)$  et  $\text{vol}_X^\pi(L \otimes M) = \widehat{\text{vol}}_X(\overline{D}_1 + \overline{D}_2)$ . Le résultat du théorème découle donc du corollaire 6.15.  $\square$

Similairement, si on applique le corollaire 6.15 au cas où  $K$  est un corps de nombres, on obtient le résultat suivant.

**Théorème 6.17.** — *Soient  $K$  un corps de nombres et  $X$  une courbe projective et géométriquement intègre sur  $\text{Spec } K$ . Si  $\overline{L}$  et  $\overline{M}$  sont deux fibrés inversibles adéliques sur  $X$  dont les fibres génériques sont de degré strictement positif, alors*

$$(32) \quad \frac{\widehat{\text{vol}}_X(\overline{L} \otimes \overline{M})}{\deg(L) + \deg(M)} \geq \frac{\widehat{\text{vol}}_X(\overline{L})}{\deg(L)} + \frac{\widehat{\text{vol}}_X(\overline{M})}{\deg(M)},$$

En particulier, si les métriques sur  $\overline{L}$  et  $\overline{M}$  sont semi-positives, alors on a

$$(33) \quad 2\widehat{c}_1(\overline{L})\widehat{c}_1(\overline{M}) \geq \frac{\deg(M)}{\deg(L)}\widehat{c}_1(\overline{L})^2 + \frac{\deg(L)}{\deg(M)}\widehat{c}_1(\overline{M})^2.$$

**6.3. Perspectives.** — Les résultats que l'on a présentés permettent d'unifier l'étude des inégalités d'indice de Hodge dans les cadres géométrique et arithmétique. La méthode proposée dans cet article est basée sur la géométrie des corps convexes et a une nature probabiliste. Le théorème 2.4 de l'inégalité d'indice de Hodge, dont la démonstration est particulièrement simple, conduit naturellement aux inégalités d'indice de Hodge géométrique et arithmétique, en s'appuyant sur l'interprétation probabiliste des invariants géométriques. En outre, elle indique une autre voie pour généraliser ces inégalités aux cas de dimension supérieure, qui ouvre des perspectives de recherche. Outre que les deux conjectures mentionnées plus haut dans le paragraphe, les points suivants sont aussi importants et consistent des travaux de suite.

- (1) Dans le cas des variétés torique, les corps d'Okounkov correspondent aux polytopes qui définissent des faisceaux inversibles. Il est plus facile à rendre explicites les corps convexes dans le théorème 6.14. Un critère d'existence de mesure minkowskienne pour un couple de polytopes conduira à des

inégalités forte sur des nombres d'intersection arithmétique des diviseurs adéliques toriques.

- (2) Il s'avère que l'inégalité (33) est plus forte que l'inégalité d'indice de Hodge usuelle. Correspondamment, il y a plus de situations où cette inégalité devient une égalité. On peut montrer que, si dans le théorème 6.17 les faisceaux inversibles sous-jacents  $L$  et  $M$  sont identiques, alors l'inégalité (33) devient une égalité. En outre, la démonstration du théorème 2.4 suggère que la condition d'égalité dans l'inégalité d'indice de Hodge forte conduit à des contraintes tout à fait intéressantes sur les systèmes linéaires gradués arithmétiques à examiner dans la future.

### Références

- [1] V. G. BERKOVICH – *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.
- [2] S. BOBKOV & M. MADIMAN – « Reverse Brunn-Minkowski and reverse entropy power inequalities for convex measures », *Journal of Functional Analysis* **262** (2012), no. 7, p. 3309–3339.
- [3] J.-B. BOST & H. CHEN – « Concerning the semistability of tensor products in Arakelov geometry », *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Neuvième Série* **99** (2013), no. 4, p. 436–488.
- [4] S. BOUCKSOM & H. CHEN – « Okounkov bodies of filtered linear series », *Compositio Mathematica* **147** (2011), no. 4, p. 1205–1229.
- [5] J. I. BURGOS GIL, P. PHILIPPON & M. SOMBRA – « Arithmetic geometry of toric varieties. Metrics, measures and heights », *Astérisque* (2014), no. 360, p. vi+222.
- [6] ———, « Successive minima of toric height functions », [arXiv:1403.4048](https://arxiv.org/abs/1403.4048), 2014.
- [7] H. CHEN – « Arithmetic Fujita approximation », *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série* **43** (2010), no. 4, p. 555–578.
- [8] ———, *Géométrie d'Arakelov : théorèmes de limite et comptage des points rationnels*, Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université Paris Diderot, décembre 2011.
- [9] ———, « Majorations explicites des fonctions de Hilbert-Samuel géométrique et arithmétique », à paraître dans *Mathematische Zeitschrift*, 2014.
- [10] T. M. COVER & Z. ZHANG – « On the maximum entropy of the sum of two dependent random variables », *Institute of Electrical and Electronics Engineers. Transactions on Information Theory* **40** (1994), no. 4, p. 1244–1246.
- [11] C. DELLACHERIE & P.-A. MEYER – *Probabilités et potentiel*, Hermann, Paris, 1975, Chapitres I à IV.



- [12] M. DEMAZURE & P. GABRIEL – *Groupes algébriques. Tome I : Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs*, Masson & Cie, Éditeur, Paris, 1970, Avec un appendice *Corps de classes local* par Michiel Hazewinkel.
- [13] A. DUCROS – « Espaces analytiques  $p$ -adiques au sens de Berkovich », *Astérisque* (2007), no. 311, p. Exp. No. 958, viii, 137–176, Séminaire Bourbaki. Vol. 2005/2006.
- [14] D. EISENBUD – *Commutative algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer-Verlag, New York, 1995, With a view toward algebraic geometry.
- [15] G. FALTINGS – « Calculus on arithmetic surfaces », *Annals of Mathematics. Second Series* **119** (1984), no. 2, p. 387–424.
- [16] T. FUJITA – « Approximating Zariski decomposition of big line bundles », *Kodai Mathematical Journal* **17** (1994), no. 1, p. 1–3.
- [17] J. GALLIER – *Geometric methods and applications*, second éd., Texts in Applied Mathematics, vol. 38, Springer, New York, 2011.
- [18] É. GAUDRON – « Pentes de fibrés vectoriels adéliques sur un corps globale », *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* **119** (2008), p. 21–95.
- [19] ———, « Géométrie des nombres adélique et lemmes de Siegel généralisés », *Manuscripta Mathematica* **130** (2009), no. 2, p. 159–182.
- [20] P. HRILJAC – « Heights and Arakelov’s intersection theory », *American Journal of Mathematics* **107** (1985), no. 1, p. 23–38.
- [21] H. IKOMA – « Boundedness of the successive minima on arithmetic varieties », *Journal of Algebraic Geometry* **22** (2013), no. 2, p. 249–302.
- [22] K. KAVEH & A. G. KHOVANSKII – « Newton-Okounkov bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory », *Annals of Mathematics. Second Series* **176** (2012), no. 2, p. 925–978.
- [23] K. KÜNNEMANN – « Some remarks on the arithmetic Hodge index conjecture », *Compositio Mathematica* **99** (1995), no. 2, p. 109–128.
- [24] R. LAZARSFELD – *Positivity in algebraic geometry. I*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 48, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [25] R. LAZARSFELD & M. MUSTAŢĂ – « Convex bodies associated to linear series », *Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure. Quatrième Série* **42** (2009), no. 5, p. 783–835.
- [26] A. MORIWAKI – « Hodge index theorem for arithmetic cycles of codimension one », *Mathematical Research Letters* **3** (1996), no. 2, p. 173–183.
- [27] ———, « Continuity of volumes on arithmetic varieties », *Journal of algebraic geometry* **18** (2009), no. 3, p. 407–457.
- [28] ———, « Free basis consisting of strictly small sections », *International Mathematics Research Notices. IMRN* (2011), no. 6, p. 1245–1267.
- [29] ———, « Adelic divisors on arithmetic varieties », to appear in *Memoirs of the American Mathematical Society*, 2014.

- [30] A. OKOUNKOV – « Brunn-Minkowski inequality for multiplicities », *Inventiones Mathematicae* **125** (1996), no. 3, p. 405–411.
- [31] C. E. SHANNON – « A mathematical theory of communication », *The Bell System Technical Journal* **27** (1948), p. 379–423, 623–656.
- [32] A. J. STAM – « Some inequalities satisfied by the quantities of information of Fisher and Shannon », *Information and Control* **2** (1959), p. 101–112.
- [33] L. SZPIRO, E. ULLMO & S. ZHANG – « Équirépartition des petits points », *Inventiones Mathematicae* **127** (1997), no. 2, p. 337–347.
- [34] S. TAKAGI – « Fujita's approximation theorem in positive characteristics », *Journal of Mathematics of Kyoto University* **47** (2007), no. 1, p. 179–202.
- [35] X. YUAN – « Big line bundles over arithmetic varieties », *Inventiones Mathematicae* **173** (2007), no. 3, p. 603–649.
- [36] ———, « On volumes of arithmetic line bundles », *Compositio Mathematica* **145** (2009), no. 6, p. 1447–1464.
- [37] X. YUAN & S.-W. ZHANG – « The arithmetic hodge index theorem for adelic line bundles I : number fields », [arxiv:1304.3538](https://arxiv.org/abs/1304.3538), 2013.
- [38] S. ZHANG – « Positive line bundles on arithmetic varieties », *Journal of the American Mathematical Society* **8** (1995), no. 1, p. 187–221.

---

30 décembre 2014

HUAYI CHEN, Université Grenoble Alpes, Institut Fourier, F-38000 Grenoble, France • *E-mail* : [huayi.chen@ujf-grenoble.fr](mailto:huayi.chen@ujf-grenoble.fr)  
*Url* : [www-fourier.ujf-grenoble.fr/~huayi](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~huayi)