



HAL
open science

Une Application de l'Analyse Harmonique non-commutative à l'Analyse de Saillance : Le Cas de 3 Vignettes-Etalons

Salim Lardjane

► **To cite this version:**

Salim Lardjane. Une Application de l'Analyse Harmonique non-commutative à l'Analyse de Saillance :
Le Cas de 3 Vignettes-Etalons. 2013. hal-01098537v1

HAL Id: hal-01098537

<https://hal.science/hal-01098537v1>

Preprint submitted on 26 Dec 2014 (v1), last revised 10 Mar 2022 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NoDerivatives 4.0 International License

UNE APPLICATION DE L'ANALYSE HARMONIQUE NON-COMMUTATIVE A L'ANALYSE DE SAILLANCE : LE CAS DE 3 VIGNETTES-ETALONS

Salim LARDJANE¹

RÉSUMÉ – *Les techniques présentées dans ce travail, basées sur la notion de représentation linéaire d'un groupe non commutatif, permettent d'étudier les problèmes de cohérence des réponses dans les enquêtes subjectives de Santé dont le questionnaire comprend trois vignettes-étalons. L'analyse des réponses des individus aux questions associées aux vignettes-étalons permet de définir une distribution de fréquences sur le groupe des permutations de trois éléments. L'analyse harmonique de cette distribution de fréquences en fournit une décomposition sur une base orthonormée adaptée à la structure de groupe. L'identification des harmoniques les plus importantes et l'interprétation de celles-ci permet d'identifier les vignettes-étalons critiques en termes de problèmes de cohérence des réponses. La méthodologie proposée est illustrée par une application à des données de Santé issues de l'enquête Share 2004.*

MOTS CLÉS – Vignettes-étalons, Mesures subjective de Santé, Groupe symétrique, Représentations linéaires de groupes finis, Analyse harmonique non-commutative.

SUMMARY – An application of non-commutative harmonic analysis to the analysis of saliency : the case of 3 anchoring vignettes

The techniques expounded in this work pertain to the study of response consistency problems in subjective health surveys involving three anchoring vignettes. The observed responses to the vignette questions define a frequency distribution on the group of permutations of three elements. Using harmonic analysis, this frequency distribution is projected on an orthonormal basis adapted to the group structure. The identification of the most important harmonics and their interpretation leads to the identification of the anchoring vignettes which are most critical in terms of response consistency problems. The proposed methodology is exemplified using data from the Share 2004 survey.

KEYWORDS – Anchoring vignettes, Subjective Health, Symetric group, Linear representations of finite groups, Non-commutative harmonic analysis.

1. LMBA UMR CNRS 6205, Université de Bretagne Sud
Centre Yves Coppens, Bat. B, 1er ét., Campus de Tohannic
BP 573, 56017 Vannes, France
salim.lardjane@univ-ubs.fr

1. INTRODUCTION

Dans le cadre d'enquêtes de Santé, il n'est pas toujours possible de mesurer les différentes dimensions de la santé étudiées à l'aide de procédés de mesures physiques ou d'avis de médecins, en raison de coûts trop élevés ou d'impossibilités pratiques. On a alors recours à des mesures subjectives de santé, typiquement obtenues à l'aide de questionnaires d'autoévaluation [Falissard, 2001]. Ces derniers peuvent, par exemple, être construits, lors de la conception d'une étude, en sélectionnant une ou plusieurs dimensions de santé, telles que la douleur physique, la mobilité ou la capacité cognitive, puis en associant à chacune d'entre elles une ou plusieurs questions d'autoévaluation. En répondant à une question d'autoévaluation, un individu évalue lui-même son état de santé, pour une dimension de santé donnée [Nunnaly & Bernstein, 1994]. Le questionnaire utilisé pour l'enquête *Share 2004* illustre cette approche [Börsch-Supan & Jürges, 2005].

Dans le questionnaire *Share 2004*, une question d'autoévaluation est associée à chaque dimension de santé retenue et cinq modalités de réponse sont proposées pour chaque question d'autoévaluation. Les dimensions de santé considérées et les questions d'autoévaluation correspondantes sont directement reprises des questionnaires conçus par l'OMS pour l'Enquête mondiale sur la Santé 2002-2003. Dans ce travail, nous traiterons de la question d'autoévaluation associée à la douleur physique².

2. LE PROBLEME DE COMPARABILITE DES REPONSES

Lorsque deux individus ont les mêmes attentes ou les mêmes normes en termes de santé et qu'ils répondent de la même manière à une question d'autoévaluation, on a toutes les raisons de penser qu'ils ont des niveaux de santé subjectifs relativement proches; mais s'ils ont des attentes ou des normes différentes, alors leurs réponses à une question d'autoévaluation ne permettent pas nécessairement de comparer leurs états de santé subjectifs [Hopkins & King, 2010], [King & al., 2004], [King & Wand, 2007]. Ainsi, une personne atteinte de troubles respiratoires peut utiliser la modalité « léger » en réponse à une question d'autoévaluation sur sa mobilité pour signifier qu'elle ne pense pas parvenir à effectuer 1 km sans s'essouffler, alors qu'un coureur de demi-fond peut utiliser cette même modalité « léger » pour signifier qu'il ne pense pas parvenir à effectuer ses 20 km de course hebdomadaires habituels. Dans une telle situation, les modalités de réponse sélectionnées ne permettent pas de comparer la mobilité subjective des deux individus.

Divers travaux ont montré que l'occultation de ces problèmes de comparabilité des réponses, lors de l'analyse des données d'enquêtes de santé subjective, pouvait conduire à des contresens graves sur l'état de santé des populations, notamment des plus défavorisées économiquement [Murray & Chen, 1992] [Salomon & al., 2004]

2. Question d'autoévaluation pour la dimension de santé « douleur physique » (questionnaire *Share 2004*) : « Dans l'ensemble, au cours des 30 derniers jours, quel niveau de douleurs physiques avez-vous ressenti ? »

₁ Aucun ₂ Léger ₃ Moyen ₄ Grave ₅ Extrême

[Sen, 2002]. Les résultats de ces études plaident en faveur du recueil d'informations supplémentaires en complément des questions d'autoévaluation lors d'enquêtes de santé subjective.

3. LES VIGNETTES-ETALONS

Le terme *vignette* est utilisé en sciences sociales pour désigner toute description d'une situation fictive soumise à un individu, à laquelle on lui demande de réagir ou qu'on lui demande d'évaluer. L'utilisation des vignettes remonte aux années 1950 et elles ont été et sont toujours utilisées en anthropologie, psychologie et sociologie, mais également en droit, en sciences de l'éducation et en médecine.

On appellera spécifiquement *vignette d'ancrage* ou *vignette-étalon* associée à une question d'autoévaluation toute vignette soumise aux individus enquêtés, portant sur la même dimension de santé que la question d'autoévaluation, et qu'on demande aux individus d'évaluer sur l'échelle utilisée pour la question d'autoévaluation, en réponse à une question aussi proche que possible de celle utilisée pour l'autoévaluation [King & al., 2004]. Par exemple, les trois questions de vignettes associées à la question d'autoévaluation sur la douleur physique dans le questionnaire Share 2004 étaient les suivantes [Börsch-Supan & Jürges, 2005] :

1- « *Paul a un mal de tête une fois par mois qui diminue après qu'il ait pris un cachet. Pendant qu'il a mal à la tête, il peut mener ses activités quotidiennes. En général, au cours des 30 derniers jours, quel niveau de douleurs physiques Paul a-t-il éprouvé ?* »

2- « *Henri a mal dans tout son bras droit et son poignet pendant sa journée de travail. Cela est partiellement atténué la soirée lorsqu'il ne travaille plus devant l'ordinateur. En général, au cours des 30 derniers jours, quel niveau de douleurs physiques Henri a-t-il éprouvé ?* »

3- « *Charles a mal aux genoux, aux coudes, aux poignets et aux doigts, et la douleur est presque continuellement présente. Bien que les médicaments aident, il ne se sent pas bien lorsqu'il se déplace, qu'il tient ou soulève quelque chose. En général, au cours des 30 derniers jours, quel niveau de douleurs physiques Charles a-t-il éprouvé ?* »

Dans l'optique d'une utilisation pour détecter et corriger un problème de comparabilité des réponses, les vignettes-étalons et le protocole d'enquête doivent être conçus de façon à ce que [Lardjane & Dourgnon, 2007] :

- a) tous les répondants comprennent de la même façon la situation décrite dans chacune des vignettes.
- b) chaque répondant utilise les modalités de réponse de la même façon lors de l'autoévaluation et lors de l'évaluation des différentes vignettes.

- c) l'autoévaluation et l'évaluation des différentes vignettes se rapportent à une même dimension de santé pour tous les répondants.

Les hypothèses précédentes sont typiquement vérifiées dans la situation où chaque individu enquêté se « met à la place » de l'individu décrit dans chacune des vignettes et évalue la douleur physique correspondante, et uniquement la douleur physique correspondante, comme si c'était lui-même qui la subissait.

Dans l'optique d'une *correction* des problèmes de comparabilité des réponses, on doit leur adjoindre une hypothèse supplémentaire [Lardjane & Dourgnon, 2007]. A cet effet, notons n le nombre total de vignettes ($n > 1$). L'hypothèse est la suivante :

- d) les n vignettes sont strictement ordonnées pour la dimension de santé considérée, selon $V_1 < V_2 < \dots < V_n$ par ordre de gravité strictement croissant.

Ainsi, pour la douleur physique dans l'enquête *Share*, nous ferons l'hypothèse que $1 < 2 < 3$ où on a désigné par 1, 2 et 3 les différentes vignettes présentées plus haut. Nous verrons que cet ordre, qui peut sembler assez naturel, n'est pas partagé par tous les répondants.

L'ordre strict mentionné dans l'hypothèse d) sera appelé *ordre privilégié* ou *ordre de référence*. Les diverses procédures proposées pour corriger le problème de comparabilité des réponses à l'aide de vignettes-étalons reposent de façon essentielle sur le fait que les évaluations des vignettes par les répondants soient cohérentes avec l'hypothèse d), ce qui requiert en particulier que des niveaux de santé suffisamment distincts soient associés aux différentes vignettes. Il y a donc un arbitrage à effectuer, lors de la conception du questionnaire, entre le nombre de vignettes à inclure et une différenciation suffisante de celles-ci [Lardjane & Dourgnon, 2007]. Dans toute la suite, on se limitera au cas $n = 3$.

Dans la situation idéale où l'ordre sur les vignettes qui est déduit d'une comparaison de leurs évaluations est le même pour tous les répondants, il est possible de comparer l'état de santé de deux répondants quelconques. Lorsque c'est le cas, on peut naturellement adopter cet ordre commun comme ordre privilégié dans l'hypothèse d). Dans le cas plus général, et plus réaliste, où l'ordre privilégié n'est pas un ordre partagé par l'ensemble des répondants, on introduit la notion de cohérence des réponses : par souci de concision, les réponses d'un individu enquêté seront qualifiées simplement de *cohérentes* si l'évaluation qu'il fait des vignettes est cohérente avec l'hypothèse d) c'est-à-dire si elle respecte l'ordre privilégié.

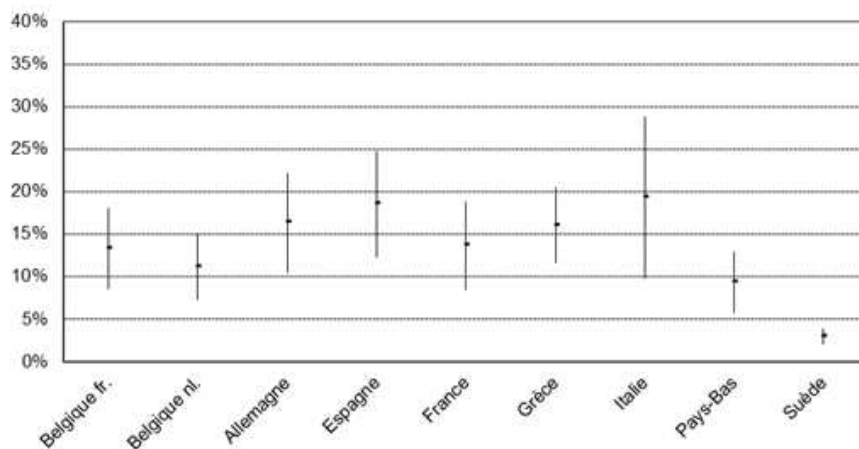
Un individu dont les réponses sont *cohérentes* et qui évalue son état de santé à l'aide d'une modalité strictement supérieure (en gravité) à celle utilisée pour une vignette donnée, est en moins bonne santé subjective qu'un individu *dont les réponses sont cohérentes* et qui évalue son propre état de santé à l'aide d'une modalité strictement inférieure (en gravité) à celle utilisée pour cette même vignette, et ce *indépendamment de la population à laquelle il appartient*. Dans ce type de comparaisons, les vignettes sont utilisées comme des *étalons* ou *points d'ancrage*

permettant de comparer les autoévaluations.

Dans le cadre de la méthodologie développée dans [Lardjane & Dourgnon, 2007], l'existence de problèmes de cohérences conduit à des *intervalles d'incertitude* sur la proportions d'individus évaluant leur état de santé équivalent à, ou moins bon que, l'appréciation qui est la leur du cas décrit dans une vignette donnée, et ce pour chaque sous-population.

L'amplitude de ces intervalles d'incertitude dépend de façon directe de l'ampleur du problème de cohérence des réponse dans les différentes sous-populations [7]. Des intervalles d'incertitude d'amplitude trop importante ont tendance à se recouvrir et, par la même, ne permettent pas de conclure quant à la comparaison de l'état de santé global des sous-populations.

Illustrons l'utilisation de ces intervalles d'incertitude par une comparaison des échantillons *Share* 2004 par origine, pour la troisième vignette associée à la dimension de santé douleur physique. Le graphique ci-dessous [Lardjane & Dourgnon, 2007] fournit la proportion par échantillon de ceux qui évaluent, du point de vue de la douleur physique, leur état de santé comme équivalent ou moins bon que l'appréciation qui est la leur du cas décrit dans la troisième vignette.



Lecture : en Grèce, 17% des répondants évaluent leur état de santé équivalent ou moins bon (du point de vue de la douleur physique) que l'évaluation qu'ils font du cas présenté dans la troisième vignette. L'existence de cas de non-cohérence conduit à définir un intervalle d'incertitude allant de 12% à 21%.

L'examen du graphique amène naturellement à conclure, sous les hypothèses faites, que la proportion d'individus dans l'échantillon suédois qui évaluent leur état de santé comme équivalent ou moins bon que celui décrit dans la troisième vignette est moindre que dans les autres échantillons et que ces derniers ne peuvent être

distingués en raison de l'ampleur des intervalles d'incertitude.

Ainsi, l'amélioration de la comparabilité de l'état de santé subjectif des différents échantillons passe par une réduction des problèmes de cohérence des réponse. A cet effet, nous allons détailler ceux-ci dans le cadre de l'enquête Share 2004.

4. PROBLEMES DE COHERENCE POUR L'ECHANTILLON SHARE 2004

Afin d'étudier le problème de cohérence dans le cadre d'une étude par vignettes-étalons, une première approche consiste à construire la distribution de fréquences des différents classements possibles des vignettes par les individus enquêtés : nous limitant au cas $n = 3$, comme mentionné précédemment, on désignera ceux-ci par 123, 132, 213, 231, 312 et 321 ; ainsi l'ordre 213 correspond à la situation où un individu classe la deuxième vignette avant la première et la première avant la troisième, c'est-à-dire que son évaluation de la deuxième vignette est inférieure à son évaluation de la première et que cette dernière est inférieure à son évaluation de la troisième. L'ordre 123 correspond à l'ordre privilégié, les vignettes étant supposées numérotées dans cet ordre (hypothèse d).

Dans le cas de l'enquête Share 2004, les distributions de fréquences obtenues sur les différents échantillons sont les suivantes :

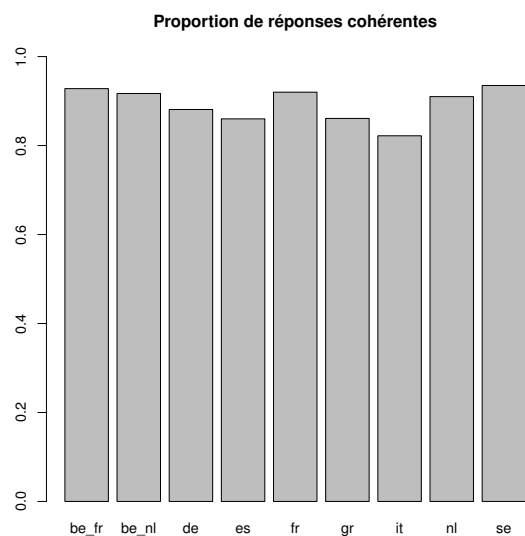
ordre des vignettes	be(fr)	be(fl)	de	es	fr	gr
123	0.928	0.917	0.881	0.860	0.920	0.861
132	0.012	0.054	0.083	0.038	0.021	0.081
213	0.044	0.016	0.026	0.057	0.045	0.040
231	0.004	0.006	0.004	0.023	0.007	0.003
312	0.012	0.006	0.006	0.019	0.005	0.014
321	0.000	0.000	0.000	0.004	0.002	0.001

ordre des vignettes	it	nl	se
123	0.822	0.910	0.935
132	0.063	0.071	0.002
213	0.049	0.009	0.034
231	0.028	0.007	0.005
312	0.035	0.002	0.017
321	0.002	0.000	0.007

On remarque de façon immédiate que l'essentielle des distributions de fréquences se concentre sur les trois premiers classements possibles des vignettes, correspondant pour 123 à l'ordre privilégié, pour 132 à la transposition de la deuxième et troisième vignette et pour 213 à la transposition de la première et de la deuxième vignette.

Une première visualisation des échantillons en termes de cohérence des réponses peut être obtenue en portant sur un diagramme en barres la proportion de réponses cohérentes pour chaque échantillon.

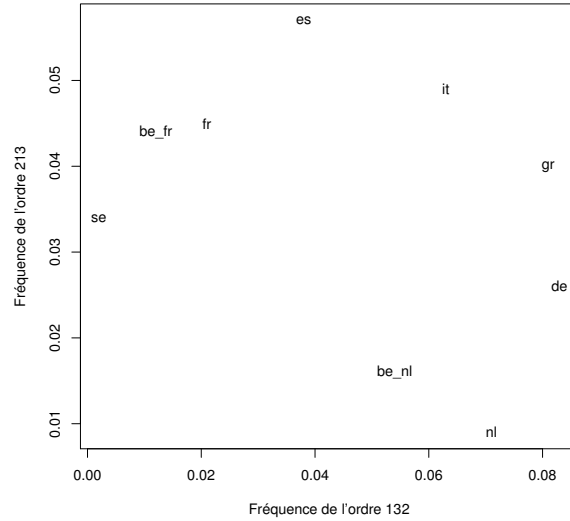
Le graphique obtenu est le suivant :



On remarque que la proportion de réponses cohérentes est supérieure à 80% dans tous les échantillons, mais qu'elle est moindre dans les échantillons espagnol, grec et italien.

Une deuxième visualisation des échantillons peut être obtenue en portant sur un même graphique la proportion d'individus classant les vignettes dans l'ordre 132 et celle de ceux classant les vignettes dans l'ordre 213.

Le graphique obtenu est le suivant :



Ce graphique met en évidence que la transposition des première et deuxième vignettes est plus fréquente pour les échantillons de langue latine que pour les échantillons de langue germanique, l'échantillon grec étant intermédiaire, et que la transposition des deuxième et troisième vignettes est moins fréquente au sein des échantillons belge francophone, français et suédois qu'au sein des autres échantillons.

5. DISTRIBUTIONS DE FREQUENCES INDUITES SUR LE GROUPE SYMETRIQUE \mathfrak{S}_3

Afin d'aller plus loin dans l'analyse comparative des distributions de fréquences des réponses pour les différents échantillons, commençons par remarquer que chaque classement des vignettes peut être obtenu à partir de l'ordre privilégié par une *permutation* et une seule. Ceci permet de mettre en correspondance bijective l'ensemble X des classements possibles des vignettes :

$$X = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$$

et le groupe symétrique \mathfrak{S}_3 dont les éléments sont, en notation par cycles,

$$\text{id}, (23), (13), (12), (123), (132), (13)$$

cette correspondance étant donnée par la table suivante :

ordre des vignettes	élément de \mathfrak{S}_3
123	id
132	(2 3)
213	(1 2)
231	(1 2 3)
312	(1 3 2)
321	(1 3)

On peut donc *identifier* X à \mathfrak{S}_3 . Il ne s'agit pas d'un isomorphisme de groupes, aucune opération interne n'étant définie sur X , mais seulement d'une bijection.

Cette dernière permet toutefois de mettre en correspondance bijective les distributions de fréquences sur X et les distributions de fréquences sur \mathfrak{S}_3 .

De façon plus précise, les distributions de fréquence sur \mathfrak{S}_3 induites par les distributions de fréquences des différents échantillons sur X , sont les suivantes :

t	be(fr)	be(fl)	de	es	fr	gr
id	0.928	0.917	0.881	0.860	0.920	0.861
(2 3)	0.012	0.054	0.083	0.038	0.021	0.081
(1 2)	0.044	0.016	0.026	0.057	0.045	0.040
(1 2 3)	0.004	0.006	0.004	0.023	0.007	0.003
(1 3 2)	0.012	0.006	0.006	0.019	0.005	0.014
(1 3)	0.000	0.000	0.000	0.004	0.002	0.001

t	it	nl	se
id	0.822	0.910	0.935
(2 3)	0.063	0.071	0.002
(1 2)	0.049	0.009	0.034
(1 2 3)	0.028	0.007	0.005
(1 3 2)	0.035	0.002	0.017
(1 3)	0.002	0.000	0.007

L'avantage du passage à \mathfrak{S}_3 est que l'étude des distributions de fréquences ci-dessus peut être faite en exploitant la structure de groupe de \mathfrak{S}_3 , ainsi que nous le verrons dans la suite.

6. FORMULE D'INVERSION DE FOURIER

Considérons l'application, à valeurs complexes, définie sur \mathfrak{S}_3 par la table suivante :

id	(1 2 3)	(1 3 2)	(2 3)	(1 3)	(1 2)
+1	+1	+1	-1	-1	-1

Celle-ci est appelée *signature* et associe à une permutation la quantité -1 s'il s'agit d'une transposition de deux éléments et +1 sinon.

Considérons par ailleurs l'application, à valeurs dans $GL_2(\mathbb{C})$, définie sur \mathfrak{S}_3 de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\rho(\text{id}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \rho((12)) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \rho((23)) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \\ \rho((13)) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \\ \rho((123)) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \\ \rho((132)) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Les deux applications précédentes ont la particularité d'être des *homomorphismes de groupes* de \mathfrak{S}_3 vers leurs ensembles images respectifs, munis, pour sgn de la multiplication scalaire et, pour ρ , de la multiplication matricielle. Il s'agit en fait de deux *représentations linéaires irréductibles* de \mathfrak{S}_3 [Serre, 1969] [Diaconis, 1988] [Peyré, 2004].

Soit à présent f une fonction quelconque définie sur \mathfrak{S}_3 à valeurs complexes. On appellera *transformée de Fourier* [Peyré, 2004] de f la donnée des quantités définies par

$$\begin{aligned}\widehat{f}_1 &= \sum_{t \in \mathfrak{S}_3} f(t) \\ \widehat{f}_2 &= \sum_{t \in \mathfrak{S}_3} \text{sgn}(t) f(t)\end{aligned}$$

et de la matrice

$$\widehat{f}_3 = \sum_{t \in \mathfrak{S}_3} \rho(t) f(t)$$

On dispose alors de la formule suivante, dit *formule d'inversion de Fourier* [Diaconis, 1988] [Peyré, 2004] permettant d'obtenir les valeurs de f à partir de sa transformée de Fourier :

$$f(t) = \frac{1}{6} \left(\widehat{f}_1 + \text{sgn}(t) \cdot \widehat{f}_2 + 2\text{Tr}(\rho(t^{-1}) \widehat{f}_3) \right)$$

Cette formule est l'analogie, sur \mathfrak{S}_3 , de la formule d'inversion de Fourier usuelle et constitue, sous sa forme générale, l'un des résultats essentiels de l'analyse harmonique non commutative.

7. ANALYSE HARMONIQUE SUR \mathfrak{S}_3

Développer la trace dans la formule d'inversion de Fourier permet d'obtenir une analyse harmonique de f comme somme de fonctions orthonormées pour le produit hermitien

$$\langle \phi | \psi \rangle = \frac{1}{6} \sum_{t \in \mathfrak{S}_3} \phi(t) \overline{\psi(t)}$$

A cet effet, commençons par définir quatre nouvelles fonctions sur \mathfrak{S}_3 en posant

$$\sqrt{2}\rho(t^{-1}) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$$

On peut démontrer que les fonctions $1, \text{sgn}(t), a(t), b(t), c(t), d(t)$ sont orthogonales et de même norme 1 [Serre, 1969] [Diaconis, 1988] [Peyré, 2004]. On les désignera sous le nom d'*harmoniques*.

Les valeurs qu'elles prennent sur les éléments de \mathfrak{S}_3 sont résumées dans le tableau suivant :

x	123	213	132	321	231	312
t	id	(12)	(23)	(13)	(123)	(132)
t^{-1}	id	(12)	(23)	(13)	(132)	(123)
$a(t)$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$
$b(t)$	0	0	$\sqrt{3/2}$	$-\sqrt{3/2}$	$\sqrt{3/2}$	$-\sqrt{3/2}$
$c(t)$	0	0	$\sqrt{3/2}$	$-\sqrt{3/2}$	$-\sqrt{3/2}$	$\sqrt{3/2}$
$d(t)$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$
$\text{sgn}(t)$	+1	-1	-1	-1	+1	+1
$1(t)$	1	1	1	1	1	1

Notons $[\widehat{f}_3]_{ij}$ les éléments de la matrices $2 \times 2 \widehat{f}_3$. Alors, en développant la trace dans la formule d'inversion de Fourier, on obtient :

$$f(t) = \frac{1}{6} \left(\widehat{f}_1 + \widehat{f}_2 \text{sgn}(t) + \sqrt{2}[\widehat{f}_3]_{11}a(t) + \sqrt{2}[\widehat{f}_3]_{21}b(t) + \sqrt{2}[\widehat{f}_3]_{12}c(t) + \sqrt{2}[\widehat{f}_3]_{22}d(t) \right)$$

Les coefficients des différentes harmoniques dans la décomposition précédente seront appelés *coefficients de Fourier* de f .

Dans le cas des données Share 2004, les valeurs des coefficients de la décomposition harmonique des distributions de fréquences des différents échantillons sont données dans le tableau suivant :

<i>Ech.</i>	$1(t)$	$\text{sgn}(t)$	$a(t)$	$b(t)$	$c(t)$	$d(t)$
be(fr)	0.17	0.15	0.21	0.00	0.00	0.23
be(nl)	0.17	0.14	0.22	0.01	0.01	0.21
de	0.17	0.13	0.21	0.02	0.02	0.20
es	0.17	0.13	0.19	0.01	0.01	0.21
fr	0.17	0.14	0.21	0.00	0.00	0.22
gr	0.17	0.12	0.20	0.02	0.01	0.20
it	0.17	0.13	0.18	0.01	0.01	0.19
nl	0.17	0.14	0.22	0.01	0.02	0.21
se	0.17	0.15	0.21	0.00	0.00	0.22

On voit de façon immédiate qu'à part le terme constant, les harmoniques $\text{sgn}(t)$, $a(t)$ et $d(t)$ suffisent à décrire approximativement les variations des distributions de fréquences pour les différents échantillons.

8. ANALYSE DE SAILLANCE

Afin d'interpréter les harmoniques précédentes, on va s'intéresser à leurs valeurs sur id , (12) et (23), l'essentiel des différentes distributions de fréquences étant concentré sur ces trois éléments de \mathfrak{S}_3 .

A cet effet, intéressons-nous aux signes des valeurs prises par les harmoniques sur ces trois éléments. Ceux-ci sont résumés par le tableau suivant. Par souci de clarté, on identifie chacun de ces trois éléments à l'élément de X correspondant.

Harmonique	123	213	132
$\text{sgn}(t)$	+	-	-
$a(t)$	+	-	+
$d(t)$	+	+	-

On constate que $\text{sgn}(t)$ prend une valeur positive si la deuxième vignette est en deuxième position et négative sinon. De même, $a(t)$ prend une valeur positive si la première vignette est en première position et négative sinon. Enfin, $d(t)$ prend une valeur positive si la troisième vignette est en troisième position et négative sinon. Nous dirons que $\text{sgn}(t)$ est *associée* à la deuxième vignette, $a(t)$ à la première et $d(t)$ à la troisième.

De plus, on voit que plus le coefficient associé à l'une des trois harmoniques précédentes est élevé, plus la fréquence des classements où elle est classée correctement est élevée et celle des classements où elle est mal classée est faible. On interprétera donc ces coefficients comme des indicateurs de *saillance* de la position des différentes vignettes. Plus un coefficient sera élevé, plus la position de la vignette

correspondante sera saillante, c'est-à-dire pourra être mieux distinguée des autres.

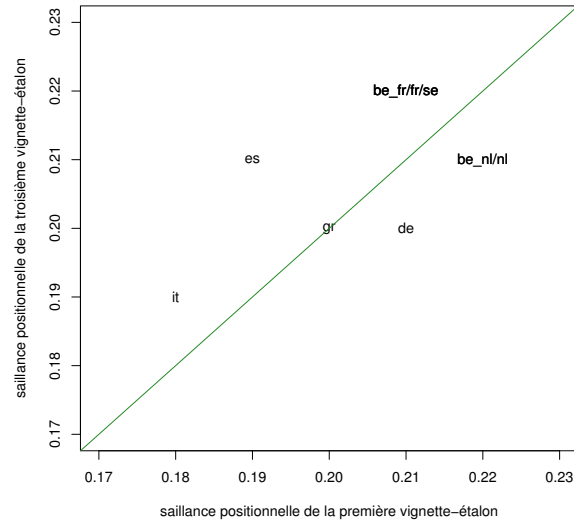
Les résultats obtenus plus haut signifient donc que l'analyse de la cohérence des réponses sur les différents échantillons se ramène à l'analyse de la saillance positionnelle des différentes vignettes sur les différents échantillons et que la saillance d'une vignette peut être quantifiée à l'aide du coefficient de Fourier correspondant à l'harmonique qui lui est associée.

Notons S_1 , S_2 , S_3 les saillances ainsi quantifiées des vignettes 1, 2 et 3 respectivement. Leurs valeurs sur les différents échantillons sont données par le tableau suivant.

<i>Ech.</i>	S_1	S_2	S_3
be(fr)	0.21	0.15	0.23
be(nl)	0.22	0.14	0.21
de	0.21	0.13	0.20
es	0.19	0.13	0.21
fr	0.21	0.14	0.22
gr	0.20	0.13	0.20
it	0.18	0.13	0.19
nl	0.22	0.14	0.21
se	0.21	0.15	0.22

On remarque de façon immédiate que la position de la deuxième vignette est moins saillante que celles de la première et de la troisième sur l'ensemble des échantillons. C'est somme toute logique, la deuxième vignette, de par sa position intermédiaire, pouvant raisonnablement être confondue avec la première et la troisième alors que la première peut être raisonnablement confondue avec la deuxième mais beaucoup plus difficilement avec la troisième et qu'il en va de même pour la troisième, qui peut être raisonnablement confondue avec la deuxième mais beaucoup plus difficilement avec la première.

De plus, le calcul des corrélations entre S_1 , S_2 et S_3 sur les différents échantillons met en évidence le fait que S_2 et S_3 sont très corrélées (coefficient de corrélation linéaire supérieur à 0.90). Afin de visualiser les problèmes de cohérence des réponses sur les différents échantillons, on pourra donc se limiter à la représentation simultanée de S_1 et S_3 pour les différents échantillons. Le graphique obtenu est le suivant.



On voit que la saillance de la première vignette est supérieure à celle de la troisième vignette pour le groupe composé des échantillons allemand, néerlandais et belge flamand et qu'elle lui est inférieure pour les autres échantillons à l'exclusion de l'échantillon grec, pour lequel les saillances de ces deux vignettes sont approximativement égales. Pour les échantillons allemand, néerlandais et belge flamand, une réduction du problème de cohérence des réponses passe par une amélioration de la saillance positionnelle de la troisième vignette. On distingue également un groupe composé des trois échantillons, belge wallon, français et suédois. Pour ce groupe, une réduction du problème de cohérence des réponses passe par une amélioration de la saillance positionnelle de la première vignette. Enfin, pour les échantillons espagnol et italien, ainsi que pour l'échantillon grec, une réduction du problème de cohérence des réponses passe par une amélioration des saillances positionnelles des première et troisième vignette.

Notons que pour tous les échantillons de langue latine, la saillance positionnelle de la troisième vignette est supérieure à celle de la première vignette, mais que c'est également le cas de l'échantillon suédois. Cela signifie que pour ces échantillons, la situation décrite dans la troisième vignette est plus facilement identifiée comme étant la plus grave que n'est identifiée comme étant la moins grave celle décrite dans la première vignette.

Notons également que l'amélioration de la saillance positionnelle d'une vignette ne peut être faite qu'en travaillant sur l'ensemble des vignettes et qu'en particulier, l'amélioration de la saillance de la première ou de la troisième vignette passe par une amélioration de celle de la seconde.

9. CONCLUSION

L'analyse harmonique effectuée a montré que sur les données Share 2004, l'analyse de la cohérence des réponses *se ramenait* à l'analyse de la saillance positionnelle des différentes vignettes et qu'il était en particulier suffisant de s'intéresser aux saillances des première et troisième vignette.

On peut conjecturer que ce résultat reste valide plus généralement dans le cadre de l'approche par vignette-étalons des comparaisons de santé subjective, dans la mesure où la distribution de fréquence des permutations possibles des différentes vignettes reste essentiellement concentrée sur les mêmes éléments que dans le cas des données Share 2004, c'est-à-dire sur 123, 213 et 132.

Ces résultats plaident en faveur d'une analyse systématique de la saillance positionnelle des vignettes dans le cadre de l'approche par vignettes-étalons, notamment lors de la phase de conception ou de traduction des vignettes.

Remerciements : Sylvain Barré (LMBA-UBS), Paul Dourgnon (IRDES), Frédéric Matheus (LMBA-UBS), Bertrand Patureau (LMBA-UBS).

BIBLIOGRAPHIE

BÖRSCH-SUPAN A., JÜRGES H. (ÉDS.) (2005). *The Survey of Health, Ageing and Retirement in Europe - Methodology*, Mannheim : MEA.

DIACONIS, P. (1988). *Group representations in probability and statistics*, Institute of Mathematical Statistics.

FALISSARD B. (2001). *Mesurer la subjectivité en Santé*, Masson, Paris.

HOPKINS D., KING, G. (2010). "Improving Anchoring Vignettes : Designing Surveys to Correct Interpersonal Incomparability". *Public Opinion Quarterly*, vol. 74(2) 201-222.

KING G., MURRAY C.J.L., SALOMON J.A., TANDON A. (2004). "Enhancing the Validity and Cross-Cultural Comparability of Measurement in Survey Research (corrected version)", *American Political Science Review*, vol. 98(1), pp. 191-207.

KING, G., WAND, J. (2007). "Comparing Incomparable Survey Responses : New Tools for Anchoring Vignettes". *Political Analysis* 15, pp. 46-66.

LARDJANE S., DOURGNON D. (2007). "Les comparaisons internationales d'état de santé subjectif sont-elles pertinentes? Une évaluation par la méthode des vignettes-étalons". *Economie & Statistique* 403-404 pp. 165-177.

MURRAY C.J.L., CHEN L.C. (1992). "Understanding Morbidity Change", *Population and Development Reviews*, vol. 18(3), pp. 48 1-503.

NUNNALLY J.C., BERNSTEIN I.H. (1994). *Psychometric Theory*, McGraw-Hill.

PEYRÉ G. (2004). *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*, Ellipses.

SALOMON J.A., TANDON A., MURRAY C.J.L. (2004). "Comparability of Self Rated Health : Cross Sectional Multi-Country Survey Using Anchoring Vignettes", *British Medical Journal*, vol. 328(7434), pp. 258-260.

SEN A. (2002). "Perception versus Observation", *British Medical Journal*, vol. 324(7342), pp. 860-861.

SERRE J.-P. (1967). *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann.