HAL
open science

GROUPE DE PICARD DES VARIÉTÉS DE MODULES DE FAISCEAUX SEMI-STABLES SUR P 2 (C)

Jean-Marc Drézet

To cite this version:

Jean-Marc Drézet. GROUPE DE PICARD DES VARIÉTÉS DE MODULES DE FAISCEAUX SEMI-STABLES SUR P 2 (C). Annales de l'Institut Fourier, 1988, 38, pp.105-168. hal-01091268

HAL Id: hal-01091268

https://hal.science/hal-01091268v1

Submitted on 5 Dec 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

GROUPE DE PICARD DES VARIÉTÉS DE MODULES DE FAISCEAUX SEMI-STABLES SUR $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$

JEAN–MARC DRÉZET

Sommaire

1. Introduction 1
2. Préliminaires 5
3. Fibrés en droites sur un quotient 14
4. Groupe de Picard 17
5. Le cas $c_1 = 0$, $r > 2$ 20
6. Le cas $-r < c_1 < 0$, $r > 2$. 27
7. Le cas $c_1 = -1$, $r > 2$ 37
8. Le cas $r = 2$ 40

Références 42

1. Introduction

Soient r, c_1, c_2 des entiers, avec $r \geq 2$. On se propose ici de calculer le groupe de Picard de la variété de modules $M(r, c_1, c_2)$ des faisceaux cohérents semi-stables sur $\mathbb{P}_2$, de rang r et de classes de Chern c_1, c_2.

Les premiers résultats dans cette direction ont été obtenus par J. Le Potier ([17]) qui a déterminé le groupe de Picard des variétés de modules de fibrés stables de rang 2 et de degré pair sur $\mathbb{P}_2$. Plus récemment, S.A Strømme ([25]) a calculé $\mathrm{Pic}(M(2, c_1, c_2))$ dans les cas où c_1 ou c_2 est impair. Dans [17], c'est le groupe de Picard d'un ouvert lisse de $M(2, c_1, c_2)$ qui est obtenu, et dans [25] celui des variétés de modules $M(2, c_1, c_2)$ qui sont lisses. Le premier résultat de cet article est le

Théorème A : *La variété de modules $M(r, c_1, c_2)$ est localement factorielle.*

On en déduit que le groupe de Picard de $M(r, c_1, c_2)$ est isomorphe au groupe des classes d'équivalence linéaire de ses diviseurs de Weil. Le calcul effectif de $\mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2))$ fait intervenir les conditions d'existence des faisceaux stables sur $\mathbb{P}_2$. D'après [6] et [7], il existe une unique application $\delta : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ possédant la propriété suivante : on a $\dim(M(r, c_1, c_2)) > 0$ si et seulement si

$$\Delta(r, c_1, c_2) = \frac{1}{r}\left(c_2 - \frac{r-1}{2r}c_1^2\right) \ \geq \ \delta\left(\frac{c_1}{r}\right) \ .$$

Si on a égalité, on dit que $M(r, c_1, c_2)$ est de *hauteur nulle* (cf. 2.2). On peut maintenant énoncer le

Théorème B : *Supposons que* $\dim(M(r, c_1, c_2)) > 0$. *Alors on a*

(i) $\mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2)) \simeq \mathbb{Z}$ *si* $M(r, c_1, c_2)$ *est de hauteur nulle.*

(ii) $\mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2)) \simeq \mathbb{Z}^2$ *si* $M(r, c_1, c_2)$ *n'est pas de hauteur nulle.*

Donnons maintenant une construction des éléments de $\mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2))$. On appelle *famille de faisceaux de* $M(r, c_1, c_2)$ paramétrée par une variété algébrique S un faisceau cohérent E sur $S \times \mathbb{P}_2$, plat sur S, tel que pour tout point fermé s de S, $E_s = E_{|\{s\}\times\mathbb{P}_2}$ soit semi-stable, de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. Dans toute la suite on n'utilisera que des familles paramétrées par des variétés *lisses*. On note $K(S)$ le groupe de Grothendieck de S. Soit E une famille de faisceaux de $M(r, c_1, c_2)$ paramétrée par S. On note p_S, p_2 les projections $S \times \mathbb{P}_2 \to S$ et $S \times \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$. Deux familles E, E' de faisceaux de $M(r, c_1, c_2)$ paramétrées par S sont dites *équivalentes* s'il existe un fibré en droites L sur S et un isomorphisme $E' \simeq E \otimes p_S^*(L)$. On note $F(S)$ l'ensemble des classes d'équivalence de telles familles. On définit ainsi un foncteur F de la catégorie des variétés algébriques lisses dans celle des ensembles (cf. 2.1).

On note $\eta = \eta(r, c_1, c_2)$ la classe dans $K(\mathbb{P}_2)$ d'un fibré vectoriel algébrique V sur $\mathbb{P}_2$, de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. On note $H = H(r, c_1, c_2)$ le noyau du morphisme de groupes

$$\chi_\eta : K(\mathbb{P}_2) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

défini par : $\chi_\eta([W]) = \chi(V \otimes W)$ pour tout fibré vectoriel algébrique W sur $\mathbb{P}_2$, $[W]$ désignant la classe de W dans $K(\mathbb{P}_2)$. La classe η, le morphisme χ_η ainsi que H ne dépendent que de r, c_1, c_2. Notons que H est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$.

Le morphisme $\gamma_E : H \to \mathrm{Pic}(S)$, restriction du morphisme $K(\mathbb{P}_2) \to \mathrm{Pic}(S)$ associant à $[W]$ le fibré en droites $\det(p_{S!}[E \otimes p_2^*(W)])^{-1}$ ne dépend que de la classe d'équivalence de E (d'après la définition de H), et en dépend fonctoriellement. On en déduit un morphisme

$$\gamma : H \longrightarrow \mathrm{Pic}(F)$$

où $\mathrm{Pic}(F)$ est le groupe de Picard du foncteur F (cf. 2.1.4). D'autre part, il existe un morphisme canonique

$$\sigma : \mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(F)$$

déduit de la propriété universelle de $M(r, c_1, c_2)$. On a alors le

Théorème C : *Il existe un unique morphisme*

$$\mathbf{L} : H \longrightarrow \mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2))$$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\mathbf{L}"'] & \mathrm{Pic}(F) \\ & \mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2)) \arrow[u, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

Plus concrètement, si $W_1, \ldots, W_k$ sont des fibrés vectoriels algébriques sur $\mathbb{P}_2$, $n_1, \ldots, n_k$ des entiers tels que $\alpha = -\sum_{1 \leq i \leq k} n_i [W_i] \in H$, on a

$$f_E^*(\mathbf{L}(\alpha)) \simeq \bigotimes_{1 \leq i \leq k} \det(p_{S!}[E \otimes p_2^*(W_i)])^{\otimes n_i} .$$

où $f_E : S \to M(r, c_1, c_2)$ est le morphisme déduit de E (cf. 2.1).

Soit χ la caractéristique d'Euler-Poincaré des faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}_2$ de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. Le résultat précédent n'apporte quelque chose que dans le cas où r, c_1 et χ ne sont pas premiers entre eux. En effet, dans le cas contraire, il existe un *faisceau universel* E_0 sur $M(r, c_1, c_2) \times \mathbb{P}_2$ (cf. 2.1), et il suffit de prendre

$$\mathbf{L}(\alpha) = \bigotimes_{1 \leq i \leq k} \det(p_{M!}[E_0 \otimes p_2^*(W_i)])^{\otimes n_i} ,$$

p_M désignant la projection $M(r, c_1, c_2) \times \mathbb{P}_2 \to M(r, c_1, c_2)$. On peut maintenant décrire $\mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2))$:

Théorème D : *Si $M(r, c_1, c_2)$ n'est pas de hauteur nulle, le morphisme de groupes*

$$\mathbf{L} : H \longrightarrow \mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2))$$

est un isomorphisme.

Il reste à traiter le cas des variétés de modules de hauteur nulle. On appelle *fibré exceptionnel* sur $\mathbb{P}_2$ un fibré vectoriel algébrique stable G tel que $\mathrm{Ext}^1(G, G) = \{0\}$ (cf. [7]). Supposons que $M(r, c_1, c_2)$ soit de hauteur nulle. On peut alors définir un fibré exceptionnel F possédant la propriété suivante : pour tout faisceau semi-stable V de rang r et de classes de Chern c_1, c_2, on a $h^i(F^* \otimes V) = 0$ pour tout $i \geq 0$ (cf. 2.2). Alors $[F^*] \in H$, et $\gamma([F^*])$ est l'élément neutre de $\mathrm{Pic}(F)$. On prouvera le

Théorème E : *Si $M(r, c_1, c_2)$ est de hauteur nulle, de fibré exceptionnel induit F, le morphisme de groupes*

$$\mathbf{L} : H \longrightarrow \mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2))$$

est surjectif, et son noyau est le sous-groupe engendré par $[F^*]$.

Soit $M = M(r, c_1, c_2)$ une variété de modules de dimension positive, M_0 l'ouvert des points lisses de M. On a $\mathrm{codim}_M(M \backslash M_0) \geq 2$ car M est normale. On peut donc définir le déterminant ω_M du faisceau cotangent de M. On a alors

Théorème F : *On a $\omega_M = \mathbf{L}(\beta)$, avec $\beta = \eta^* \otimes \omega - \eta^*$, η^* désignant la classe duale de η, et ω celle du fibré canonique sur $\mathbb{P}_2$.*

(La classe duale de $[V]$, V étant un fibré vectoriel algébrique sur $\mathbb{P}_2$, est la classe du dual V^* de V).

Voici le plan des démonstrations. On montrera (cf. 2.5) qu'on peut se ramener au cas où $-1 < \frac{c_1}{r} \leq 0$ (la variété de modules et les faisceaux correspondants sont dits *normalisés*). On représente ensuite naturellement $M(r, c_1, c_2)$ comme bon quotient d'une variété lisse $\mathcal{M}$ de complexes de fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}_2$ par un groupe réductif $G_{\mathcal{M}}$ (cf. 2.6).

Soient $M_s(r, c_1, c_2)$ l'ouvert de $M(r, c_1, c_2)$ correspondant aux faisceaux stables, $\mathcal{M}_s$ son image réciproque dans $\mathcal{M}$. Alors le morphisme quotient $\mathcal{M}_s \to M_s(r, c_1, c_2)$ est un quotient géométrique. Il en découle un morphisme

$$\pi_{\mathcal{M}} : \mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(M_s(r, c_1, c_2)) \ ,$$

$\mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}})$ désignant le groupe des caractères de $G_{\mathcal{M}}$.

Dans le chapitre 3 on montrera qu'en fait $\pi_{\mathcal{M}}$ est à valeurs dans $\mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2))$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}}) \arrow[r, "\pi_{\mathcal{M}}"] \arrow[dr, "\tau_M"'] & \mathrm{Pic}(M_s(r, c_1, c_2)) \\
& \mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2)) \arrow[u, "restriction"']
\end{tikzcd}$$

d'où le morphisme τ_M. Cela signifie que tout fibré en droites sur $M_s(r, c_1, c_2)$ provenant d'un caractère de $G_{\mathcal{M}}$ peut être prolongé à $M(r, c_1, c_2)$. On en déduit dans le chapitre 3 les théorèmes A et B en utilisant de plus les résultats suivants :

1) Le morphisme canonique $\pi_{\mathcal{M}} : \mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}}) \to \mathrm{Pic}(M_s(r, c_1, c_2))$ est surjectif, et c'est un isomorphisme si $M(r, c_1, c_2)$ n'est pas de hauteur nulle (démonstrations dans les chapitres 5 à 8).
2) Si $M(r, c_1, c_2)$ est de hauteur nulle et non isomorphe à $\mathbb{P}_5$, on a $\mathrm{Pic}(M_s(r, c_1, c_2)) \simeq \mathbb{Z}$ (ce résultat provient de [6]).

Les autres théorèmes sont démontrés dans le chapitre 4. On définit d'abord pour cela un morphisme de groupes $\Lambda : \mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}}) \to H$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}}) \arrow[r, "\tau_M"] \arrow[d, "\Lambda"] & \mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2)) \arrow[d, "\sigma"] \\
H \arrow[r, "\gamma"] \arrow[ur, dashed, "\mathbf{L}"] & \mathrm{Pic}(F)
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. En général, Λ est un isomorphisme. Ceci permet de définir $\mathbf{L}$.

On suppose ici que le corps de base est $\mathbb{C}$, mais les résultats précédents s'étendent sans difficulté au cas où le corps de base est algébriquement clos de caractéristique nulle.

J'ai beaucoup profité de l'aide efficace de J. Le Potier pour effectuer ce travail. Je tiens ici à l'en remercier. Je remercie aussi le referee pour les améliorations qu'il a apportées à la présentation des résultats.

2. Préliminaires

2.1 – Faisceaux semi-stables

2.1.1 – Formulaire et notations

Soit E un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_2$, de rang $r > 0$, et de classes de Chern c_1, c_2. On pose

$$\Delta(r, c_1, c_2) \;=\; \Delta(E) \;=\; \frac{1}{r}\left(c_2 - \frac{r-1}{2r}c_1^2\right) \;,$$

qu'on appelle le *discriminant* de E. On appelle *pente* de E le nombre rationnel $\dfrac{c_1}{r}$ et on le note $\mu(E)$. Posons $P(X) = \dfrac{1}{2}X^2 + \dfrac{3}{2}X + 1$. Le théorème de Riemann-Roch prend la forme suivante : on a $\chi(E) = r\big(P(\mu(E)) - \Delta(E)\big)$, $\chi(E)$ désignant la caractéristique d'Euler-Poincaré de E. Si E, F sont des faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}_2$, on pose

$$\chi(E, F) \;=\; \sum_{i=0}^{2}(-1)^i \dim(\mathrm{Ext}^i(E, F)) \;.$$

Alors on a, si $\mathrm{rg}(E) > 0$ et $\mathrm{rg}(F) > 0$,

$$\chi(E, F) \;=\; \mathrm{rg}(E)\,\mathrm{rg}(F)\big(P(\mu(F) - \mu(E)) - \Delta(E) - \Delta(F)\big)$$

(proposition (1.1) de [7]). On a, pour tout entier $i \geq 0$ un isomorphisme canonique $\mathrm{Ext}^1(E, F) \simeq \mathrm{Ext}^{2-i}(F, E(-3))^*$ (dualité de Serre, proposition (1.2) de [7]), même si $\mathrm{rg}(E)$ ou $\mathrm{rg}(F)$ est nul.

On note Q le fibré quotient canonique de $\mathcal{O} \otimes H^0(\mathcal{O}(1))^*$ sur $\mathbb{P}_2$.

2.1.2 – Faisceaux semi-stables

Soit E un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_2$. On dit que E est *semi-stable* (resp. *stable*) s'il est sans torsion et si pour tout sous-faisceau propre F de E on a $\mu(F) \leq \mu(E)$, et en cas d'égalité $\dfrac{\chi(F)}{\mathrm{rg}(F)} \leq \dfrac{\chi(E)}{\mathrm{rg}(E)}$ (resp. $<$). Cette notion de stabilité est celle de D. Gieseker ([11]) et M. Maruyama ([19]). Les variétés de modules $M(r, c_1, c_2)$ sont construites dans l'article précédemment cité de Gieseker.

Si E est semi-stable, il existe une filtration de E, dite *de Jordan-Hölder* : $0 = E_0 \subset \cdots \subset E_m = E$, telle que pour $1 \leq i \leq m$, E_i/E_{i-1} soit stable et de mêmes pente et discriminant que E. Une telle filtration n'est pas toujours unique, mais la classe d'isomorphisme du gradué (c'est à dire la somme directe des E_i/E_{i-1}) ne dépend que de celle de E. On notera $\mathrm{Gr}(E)$ la classe d'isomorphisme de $\oplus_{1\leq i\leq m}E_i/E_{i-1}$.

Soit E un faisceau cohérent sans torsion sur $\mathbb{P}_2$. Il existe une unique filtration de E : $0 = E_0 \subset \cdots \subset E_m = E$, telle que pour $1 \leq i \leq m$, E_i/E_{i-1} soit l'unique sous-faisceau G de E/E_{i-1} possédant les propriétés suivantes : pour tout sous-faisceau propre H de E/E_{i-1}, on a $\mu(H) \leq \mu(G)$, et si $\mu(H) = \mu(G)$, on a $\Delta(H) \geq \Delta(G)$, et si enfin $\mu(H) = \mu(G)$ et $\Delta(H) = \Delta(G)$, alors $\mathrm{rg}(H) \leq \mathrm{rg}(G)$. On l'appelle la *filtration de Harder-Narasimhan* de E.

2.1.3 – Variétés de modules

Soient $r > 0$, c_1, c_2 des entiers. Soit $F = F(r, c_1, c_2)$ le foncteur contravariant de la catégorie des variétés algébriques complexes dans celle des ensembles associant à S l'ensemble des classes d'équivalence de familles plates de faisceaux semi-stables de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 sur $\mathbb{P}_2$ paramétrées par S (cf. Introduction).

La *variété de modules* $M = M(r, c_1, c_2)$ est une variété algébrique, unique à isomorphisme près, possédant les propriétés suivantes :

(i) Il existe un morphisme de foncteurs $F \to \mathrm{Hom}(-, M)$.

(ii) Si M' est une variété algébrique et $F \to \mathrm{Hom}(-, M')$ un morphisme de foncteurs, il existe un unique morphisme $f : M \to M'$ tel qu'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}(-, M) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(-,f)"] \\ F \arrow[ur] \arrow[r] & \mathrm{Hom}(-, M') \end{tikzcd}$$

En particulier, d'après (i), d'une famille E de faisceaux de $M(r, c_1, c_2)$ paramétrée par S on déduit un morphisme

$$f_E : S \longrightarrow M(r, c_1, c_2) \ .$$

La variété $M(r, c_1, c_2)$ est projective, normale et irréductible ([7], [19]). Les points fermés de $M(r, c_1, c_2)$ sont les classes d'équivalence de faisceaux semi-stables de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 (deux tels faisceaux E, E' étant équivalents si $\mathrm{Gr}(E) = \mathrm{Gr}(E')$).

2.1.4 – Groupe de Picard du foncteur F

Un élément L de $\mathrm{Pic}(F)$ est la donnée, pour toute variété algébrique lisse S et tout $E \in F(S)$, d'un élément L_E de $\mathrm{Pic}(S)$ dépendant fonctoriellement de E, c'est à dire que pour tout morphisme $f : T \to S$ de variétés algébriques lisses et tout $E \in F(S)$, on a $f^*(L_E) \simeq L_{f^*(E)}$. La structure de groupe abélien de $\mathrm{Pic}(F)$ est définie par : $(L.L')_E = L_E \otimes L'_E$. L'élément neutre de $\mathrm{Pic}(F)$ est évidemment défini par : $L_E = \mathcal{O}_S$, pour tous S et $E \in F(S)$.

On définit maintenant un morphisme de groupes

$$\sigma : \mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(F) \ .$$

Pour tout $L \in \mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2))$, toute variété algébrique S et tout $E \in F(S)$, on a $\sigma(L)_E = f_E^*(L)$. Le morphisme σ est injectif. Pour le voir il suffit de trouver une famille E telle que le morphisme $f_E^* : \mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2)) \to \mathrm{Pic}(S)$ soit injectif. D'après Gieseker ([11]) il existe une variété algébfique lisse R sur laquelle opère un groupe $\mathrm{PGL}(N)$, et un élément E de $F(R)$ tel que $f_E : R \to M(r, c_1, c_2)$ soit un bon quotient de R par $\mathrm{PGL}(N)$ (cf. 3-). Un fibré de $\ker(f_E^*)$ provient d'un caractère de $\mathrm{PGL}(N)$, et comme le seul caractère de $\mathrm{PGL}(N)$ est trivial, f_E^* est injectif.

2.2. – Fibrés exceptionnels et variétés de modules de hauteur nulle

Soit $M(r, c_1, c_2)$ une variété de modules de hauteur nulle. Posons $\mu = \dfrac{c_1}{r}$. D'après [6], il existe un fibré exceptionnel G, unique à isomorphisme près, tel que $|\mu - \mu(G)| < x_G$, x_G désignant la solution inférieure à 1 de l'équation $X^2 - 3X + \dfrac{1}{\mathrm{rg}(G)^2} = 0$.

Si $\mu \leq \mu(G)$, on a pour tout $i \geq 0$ et tout faisceau semi-stable E de rang r et de classes de Chern c_1, c_2, $h^i(G^* \otimes E) = 0$. Si $\mu > \mu(G)$, on a pour tout $i \geq 0$ et tout faisceau semi-stable E de rang r et de classes de Chern c_1, c_2, $h^i(G(3) \otimes E) = 0$. On dit que G est le fibré exceptionnel induit par $M(r, c_1, c_2)$ (ou plus précisément induit par r, c_1, c_2). Les égalités précédentes découlent de la semi-stabilité de E et de la relation $\delta(\mu) = P(-|\mu(G) - \mu|) - \Delta(G)$, d'où on déduit $\chi(G^* \otimes E) = 0$ (resp. $\chi(G(3) \otimes E) = 0$) si $\mu \leq \mu(G)$ (resp. $\mu > \mu(G)$). Pour plus de détails voir [6] et [7].

2.3 – Groupe de Picard, diviseurs de Weil, groupe de Grothendieck

Soit S une variété algébrique intègre. On note $\mathrm{Pic}(S)$ le groupe de Picard de S, c'est à dire le groupe des classes d'isomorphisme de fibrés en droites algébriques sur S.

Supposons que S soit normale. On note $\mathrm{Cl}(S)$ le groupe des classes d'équivalence linéaire de diviseurs de Weil de S. On a un morphisme canonique $\alpha_S : \mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Cl}(S)$ qui est injectif. C'est un isomorphisme si et seulement si S est localement factorielle. Pour plus de détails, voir [13], prop. 1-12 et [20], p. 141.

Soit S une variété algébrique lisse. On note $K(S)$ le groupe de Grothendieck des classes d'équivalence de faisceaux cohérents sur S (voir [3]). On notera $[E]$ l'image dans $K(S)$ d'un faisceau cohérent E sur S.

Si T est une autre variété lisse, et $f : T \to S$ un morphisme projectif, on définit un morphisme de groupes $f_! : K(T) \to K(S)$ en associant à $[E]$ l'élément $\sum (-1)^i [R^i f_*(E)]$ de $K(S)$.

Il existe un unique morphisme de groupes $\det : K(S) \to \mathrm{Pic}(S)$ tel que pour tout faisceau localement libre E sur S, $\det([E])$ soit le déterminant habituel de E.

2.4 – Familles complètes de faisceaux sur $\mathbb{P}_2$

Dans ce qui suit T désigne une variété algébrique lisse irréductible et F un faisceau cohérent sur $T \times \mathbb{P}_2$ plat sur T tel que pour tout point fermé t de T, F_t soit sans torsion, de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. On suppose que $\dim(M(r, c_1, c_2)) > 0$. On introduit dans [7] deux conditions :

(KS) Le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer de F au point t de T est surjectif.

(L) On a $\mathrm{Ext}^2(F_t, F_t) = \{0\}$.

Soit $(H_1, \ldots, H_m)$ une suite de polynômes à une variable à coefficients rationnels. On dit qu'un faisceau cohérent sans torsion E sur $\mathbb{P}_2$ est *de poids* $(H_1, \ldots, H_m)$ si la filtration de

Harder-Narasimhan de E est de longueur m : $0 = E_0 \subset \cdots \subset E_m = E$, et si pour $1 \leq i \leq m$, $\mathrm{Gr}_i(E) = E_i/E_{i-1}$ a pour polynôme de Hilbert H_i.

Soit E un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_2$. On dit que E est *p-semi-stable* (resp. *p-stable*) s'il est sans torsion et si pour tout sous-faisceau propre E' de E on a $\mu(E') \leq \mu(E)$ (resp. $<$). On a les implications suivantes :

$$\begin{array}{ccc} E \text{ est p-stable} & \Longrightarrow & E \text{ est stable} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ E \text{ est p-semi-stable} & \Longleftarrow & E \text{ est semi-stable} \end{array}$$

Soit $(H_1, \ldots, H_m)$ le poids d'un faisceau cohérent sans torsion E. Alors on a pour $1 \leq i \leq m$, $H_i(X) = r_i(P(\mu_i + X) - \Delta_i)$, où r_i, μ_i, Δ_i désignent respectivement le rang, la pente et le discriminant du i-ième gradué de la filtration de Harder-Narasimhan de E. Alors E est p-semi-stable si et seulement si $\mu_1 = \mu(E)$, et on a aussi dans ce cas $\mu_2 = \cdots = \mu_m = \mu(E)$.

Proposition 2.1 : *Supposons que $c_1 = 0$, que les conditions* (L) *et* (KS) *soient satisfaites, que pour tout point t de T, F_t soit p-semi-stable et que $h^0(F_t) = 0$. Soit T^{ss} l'ouvert de T des points t tels que F_t soit semi-stable. Alors on a* $\mathrm{codim}_T(T \backslash T^{ss}) \geq 2$.

Démonstration. Les poids des faisceaux F_t sont en nombre fini d'après [7], et si $\alpha = (H_1, \ldots, H_m)$ est l'un d'eux, l'ensemble T_α des points t de T tels que F_t soit de poids α est une sous-variété localement fermée lisse de T de codimension $d_\alpha = \sum_{i<j} r_i r_j (\Delta_i + \Delta_j - 1)$, avec les notations précédentes (proposition (3.3) de [7]). Supposons que $m > 1$. Soit $t \in T$. On pose $n_i = c_2(\mathrm{Gr}_i(F_t))$ pour $1 \leq i \leq m$. Alors on a $\Delta_i = \dfrac{n_i}{r_i}$. On verra plus loin que $n_i \geq r_i$. Donc

$$d_\alpha \ \geq \ r_1 r_m \left(\frac{n_1}{r_1} + \frac{n_m}{r_m} - 1 \right) \ = \ r_m(n_1 - r_1) + n_m r_1 \ .$$

Il faut montrer que $d_\alpha \geq 2$, et pour cela il suffit de prouver que $n_1 \geq r_1$ et $n_m \geq 2$. Le faisceau $\mathrm{Gr}_1(F_t)$ est semi-stable de pente 0, donc on a $\mathrm{Hom}(\mathrm{Gr}_1(F_t), \mathcal{O}(-3)) = \{0\}$, d'où par dualité de Serre $h^2(\mathrm{Gr}_1(F_t)) = 0$. Puisque $h^0(F_t) = 0$, on a aussi $h^0(\mathrm{Gr}_1(F_t)) = 0$, donc

$$h^1(\mathrm{Gr}_1(F_t)) \ = \ -\chi(\mathrm{Gr}_1(F_t)) \ = \ n_1 - r_1 \ \geq \ 0,$$

ce qui démontre la première inégalité. En ce qui concerne la seconde, si $2 \leq i \leq n$, notons que par définition de la filtration de Harder-Narasimhan on a $\dfrac{H_1(X)}{r_1} > \dfrac{H_i(X)}{r_i}$ pour tout X assez grand, ce qui équivaut à $\dfrac{n_1}{r_1} < \dfrac{n_i}{r_i}$. Puisque $\dfrac{n_1}{r_1} \geq 1$, on a $n_i > r_i$, et en particulier $n_m \geq 2$. Ceci achève la démonstration de la proposition 2.1. □

On ne suppose plus à présent que $c_1 = 0$. Le résultat suivant est démontré dans [6] (proposition 34) :

Proposition 2.2 : *Supposons que F soit une famille de faisceaux de $M(r, c_1, c_2)$ vérifiant la condition* (KS)*. Soit T^s l'ouvert de T des points t tels que F_t soit stable. Alors, si $M(r, c_1, c_2)$ n'est pas une variété de modules de hauteur nulle isomorphe à $\mathbb{P}_5$, on a* $\operatorname{codim}_T(T \backslash T^s) \geq 2$.

On en déduit le

Corollaire 2.3 : *Soit $M_s(r, c_1, c_2)$ l'ouvert de $M(r, c_1, c_2)$ correspondant aux faisceaux stables. Alors, si $M(r, c_1, c_2)$ n'est pas une variété de modules de hauteur nulle isomorphe à $\mathbb{P}_5$, on a* $\operatorname{codim}_{M(r,c_1,c_2)}(M(r, c_1, c_2) \backslash M_s(r, c_1, c_2)) \geq 2$.

Les fibrés exceptionnels induits par les exceptions du corollaire 2.3 sont de rang 1.

Soit E un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}_2$, de rang r, ℓ une droite de $\mathbb{P}_2$. Alors il existe une unique suite décroissante $(k_i^\ell)_{1 \leq i \leq r}$ d'entiers, telle que

$$E_{|\ell} \simeq \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \mathcal{O}_\ell(k_i^\ell)$$

(Grothendieck [12]). Il existe une seule telle suite $(k_i^0)_{1 \leq i \leq r}$, telle que l'ensemble des droites ℓ telles que $(k_i^\ell)_{1 \leq i \leq r} = (k_i^0)_{1 \leq i \leq r}$ soit un ouvert non vide de $\mathbb{P}_2^*$. On dit que $(k_i^0)_{1 \leq i \leq r}$ est le *type de décomposition générique* de E.

Soit E_0 un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}_1$. On dit que E_0 est *rigide* si $\operatorname{Ext}^1(E_0, E_0) = \{0\}$. Si $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(k_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(k_r)$, cela revient à dire que l'ensemble des k_i est réduit à un entier ou à deux entiers consécutifs. On dit que E *est de type de décomposition générique rigide* si le fibré sur $\mathbb{P}_1$ somme directe des $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(k_i^0)$ est rigide.

Proposition 2.4 : *Supposons que F vérifie les conditions* (L) *et* (KS) *et que pour tout $t \in T$, F_t soit localement libre et de type de décomposition générique rigide. Soit T^{ss} l'ouvert de T des points t tels que F_t soit semi-stable. Alors, si $M(r, c_1, c_2)$ n'est pas de hauteur nulle, on a* $\operatorname{codim}_T(T \backslash T^{ss}) \geq 2$.

Ce résultat est dû à J. Le Potier.

Démonstration. D'après [7], $T \backslash T^{ss}$ est la réunion d'un nombre fini de sous-variétés lisses localement fermées disjointes. Soit $t \in T \backslash T^{ss}$, Y la sous-variété lisse contenant t. Alors on a d'après la proposition (3.3) de [7]

$$\operatorname{codim}_T(Y) = -\sum_{1 \leq i < j \leq m} \chi(\operatorname{Gr}_i(F_t)), \operatorname{Gr}_j(F_t))$$

(m désignant la longueur de la filtration de Harder-Narasimhan de F_t). Chacun des termes de cette somme est négatif ou nul d'après la démonstration du lemme (4.8) de [7]. Supposons que $\operatorname{codim}_T(Y) = 1$. Alors on a $\chi(\operatorname{Gr}_1(F_t), \operatorname{Gr}_m(F_t)) = 0$ ou -1. Si $\chi(\operatorname{Gr}_1(F_t), \operatorname{Gr}_m(F_t)) = 0$, d'après la démonstration du lemme (4.8) de [7], $\operatorname{Gr}_1(F_t)$ ou $\operatorname{Gr}_m(F_t)$ est semi-exceptionnel, c'est à dire somme directe de fibrés exceptionnels deux à deux isomorphes. Supposons que $\operatorname{Gr}_1(F_t)$ soit semi-exceptionnel (l'autre cas est analogue). Alors, on a

$$\begin{aligned}\chi(\mathrm{Gr}_1(F_t),F_t) &= \chi(\mathrm{Gr}_1(F_t),\mathrm{Gr}_1(F_t)) + \sum_{i>1}\chi(\mathrm{Gr}_1(F_t),\mathrm{Gr}_i(F_t)) \\ &\geq \chi(\mathrm{Gr}_1(F_t),\mathrm{Gr}_1(F_t)) - 1 \geq 0 \ .\end{aligned}$$

Mais on a $\mu(\mathrm{Gr}_1(F_t)) \geq \mu(F_t)$, et $M(r,c_1,c_2)$ n'est pas de hauteur nulle. Donc, conformément à la condition pour que $\dim(M(r,c_1,c_2)) > 0$ (cf. [7]), on a $\chi(\mathrm{Gr}_1(F_t),F_t) < 0$, ce qui est contradictoire. 0n ne peut donc pas avoir $\chi(\mathrm{Gr}_1(F_t),\mathrm{Gr}_m(F_t)) = 0$.

Supposons maintenant que $\chi(\mathrm{Gr}_1(F_t),\mathrm{Gr}_m(F_t)) = -1$, c'est à dire

$$(1) \qquad \Delta_1 + \Delta_m = \frac{1}{r_1 r_m} + P(\mu_m - \mu_1) \ ,$$

où r_i (resp. Δ_i) est le rang (resp. discriminant) de $\mathrm{Gr}_i(F_t)$. On a vu que ni $\mathrm{Gr}_1(F_t)$ ni $\mathrm{Gr}_m(F_t)$ ne peuvent être semi-exceptionnels, donc on a $(2\Delta_i - 1)r_i^2 \geq 1$ pour $i = 1, m$, car $(2\Delta_i - 1)r_i^2 = d_i - 1$, d_i étant la dimension de la variété de modules contenant $\mathrm{Gr}_i(F_t)$. On a $d_i \geq 1$ car $\mathrm{Gr}_i(F_t)$ n'est pas semi-exceptionnel, et en fait $d_i \geq 2$ car il n'existe pas de variété de modules de dimension 1 d'après [7]. Donc

$$\frac{1}{r_1 r_m} + P(\mu_m - \mu_1) \geq 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_m^2}\right) \ ,$$

c'est à dire

$$1 - P(\mu_m - \mu_1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_m}\right)^2 \leq 0 \ .$$

Mais d'après la démonstration du lemme (4.8) de [7], on a $0 \leq \mu_1 - \mu_m \leq 1$, donc $1 - P(\mu_m - \mu_1) \geq 0$, d'où

$$1 - P(\mu_m - \mu_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_m}\right)^2 = 0 \ ,$$

et $\mu_1 = \mu_m$, $r_1 = r_m$. On a $\Delta_i \geq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{r_i^2}\right)$ pour $i = 1, m$, et d'après (1) on a $\Delta_1 + \Delta_m = 1 + \frac{1}{r_i^2}$, donc $\Delta_1 = \Delta_m$ et finalement les polynômes de Hilbert de $\mathrm{Gr}_1(F_t)$ et $\mathrm{Gr}_m(F_t)$ sont égaux. Ceci contredit la définition de la filtration de Harder-Narasimhan de F_t. On a donc bien $\mathrm{codim}_T(Y) \neq 1$. La démonstration du fait que $\mathrm{codim}_T(Y) \neq 0$ est analogue, en plus facile. On a donc bien $\mathrm{codim}_T(T \backslash T^{ss}) \geq 2$. Ceci démontre la proposition 2.4. □

2.5 – Variétés de modules normalisées

Rappelons qu'un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_2$ de rang $r > 0$ et de première classe de Chern c_1 est dit *normalisé* si $-1 < \frac{c_1}{r} \leq 0$. Soit k un entier. Si E est un faisceau cohérent de rang r et de classes de Chern c_1, c_2, on note c_1', c_2' les classes de Chern de $E(k)$. C'est à dire

$$c_1' = c_1 + rk, \quad c_2' = c_2 + (r-1)c_1 k + \frac{r(r-1)}{2}k^2 \ .$$

On définit un isomorphisme $M(r,c_1,c_2) \simeq M(r,c_1',c_2')$ en associant au point correspondant au faisceau semi-stable E le point correspondant à $E(k)$. Cet isomorphisme est compatible avec

un isomorphisme évident de foncteurs $\Theta : F(r, c_1, c_2) \simeq F(r, c'_1, c'_2)$. Le produit tensoriel par $[\mathcal{O}(-k)]$ définit un automorphisme $\Theta_k : K(\mathbb{P}_2) \to K(\mathbb{P}_2)$. Il est immédiat que Θ_k induit un isomorphisme $H(r, c_1, c_2) \simeq H(r, c'_1, c'_2)$, qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H(r, c_1, c_2) & \xrightarrow{\gamma} & \mathrm{Pic}(F(r, c_1, c_2)) \\ \downarrow{\scriptstyle \Theta_k} & & \downarrow{\scriptstyle \Theta} \\ H(r, c'_1, c'_2) & \xrightarrow{\gamma} & \mathrm{Pic}(F(r, c'_1, c'_2)) \end{array}$$

et que $\Theta_k(\eta^*(r, c_1, c_2)) = \eta^*(r, c'_1, c'_2)$. Il en découle que pour démontrer les théorèmes A à F on peut supposer que la variété de modules est normalisée (si k est la partie entière de $-\dfrac{c_1}{r}$, on a en effet $-1 < \dfrac{c'_1}{r} \leq 0$).

2.6 – Complexes de Kronecker

2.6.1 – Définitions. On rappelle ici des résultats de [7]. Soit $K^\bullet$ un complexe fini de faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}_2$. On définit le *rang* $\mathrm{rg}(K^\bullet)$, le *degré* $c_1(K^\bullet)$, la *caractéristique d'Euler* $\chi(K^\bullet)$ et le *polynôme de Hilbert* $P_{K^\bullet}$ de $K^\bullet$ par

$$\mathrm{rg}(K^\bullet) \;=\; \sum_i (-1)^i \,\mathrm{rg}(K^i), \quad c_1(K^\bullet) \;=\; \sum_i (-1)^i c_1(K^i),$$
$$\chi(K^\bullet) \;=\; \sum_i (-1)^i \chi(K^i), \quad P_{K^\bullet} \;=\; \sum_i (-1)^i P_{K^i}$$

(P_{K^i} désignant le polynôme de Hilbert de K^i). On appelle *complexe de Kronecker* un complexe du type

$$0 \longrightarrow \wedge^2 Q^* \otimes H_{-1} \longrightarrow Q^* \otimes H_0 \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H_1 \longrightarrow 0 \ ,$$

où le terme du milieu est en degré 0, les H_i étant des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie. On définit de manière évidente les morphismes de complexes de Kronecker, les sous-complexes de Kronecker et complexes de Kronecker quotients d'un complexe de Kronecker. On montre ainsi que les complexes de Kronecker forment une catégorie abélienne. Ils sont utilisés dans [1] pour étudier les fibrés stables de rang 2 sur $\mathbb{P}_2$. Ce sont des cas particuliers de monades (cf. Horrocks [15]).

Soit $K^\bullet$ un complexe de Kronecker de rang r, de degré c_1 et de caractéristique d'Euler χ. On dit que $K^\bullet$ est *semi-stable* (resp. *stable*) si pour tout sous-complexe de Kronecker propre $K'^\bullet$ de $K^\bullet$ on a pour $m \gg 0$, $rP_{K'^\bullet}(m) - \mathrm{rg}(K'^\bullet)P_{K^\bullet}(m) \leq 0$ (resp $.<$). Ceci équivaut à $rc_1(K'^\bullet) - \mathrm{rg}(K'^\bullet)c_1 \leq 0$, et en cas d'égalité $r\chi(K'^\bullet) - \mathrm{rg}(K'^\bullet)\chi \leq 0$ (resp. $<$).

Soit $M(r, c_1, c_2)$ une variété de modules telle que $M_s(r, c_1, c_2)$ soit non vide, et que $-r < c_1 \leq 0$. Soit E un faisceau semi-stable de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 sur $\mathbb{P}_2$. On associe à E un complexe de Kronecker K_E

$$0 \longrightarrow \wedge^2 Q^* \otimes H^1(E(-2)) \xrightarrow{u_E} Q^* \otimes H^1(E(-1)) \xrightarrow{v_E} \mathcal{O} \otimes H^1(E) \longrightarrow 0$$

an moyen de la suite spectrale de Beilinson ([1], [2], [18]). La dimension de l'espace vectoriel $H^1(E(-i))$ pour $i = 0, 1, 2$ ne dépend que de r, c_1, c_2. On a

$$\dim(H^1(E(-i))) \;=\; -\chi(E(-i)) \;=\; -r\left(P\left(\frac{c_1}{r} - i\right) - \Delta(r, c_1, c_2)\right) \;.$$

Le morphisme de faisceaux u_E est injectif, v_E est surjectif, $\ker(v_E)/\operatorname{im}(u_E)$ est isomorphe à E et K_E est semi-stable. Si E est stable, K_E l'est aussi.

Réciproquement, soit

$$0 \longrightarrow \wedge^2 Q^* \otimes H_{-1} \xrightarrow{u} Q^* \otimes H_0 \xrightarrow{v} \mathcal{O} \otimes H_1 \longrightarrow 0$$

un complexe de Kronecker semi-stable (resp. stable), la dimension de H_i étant $n_i = -\chi(E(i-1))$ pour $i = -1, 0, 1$. Alors le morphisme de faisceaux u est injectif, v est surjectif, et $\ker(v)/\operatorname{im}(u)$ est semi-stable (resp. stable) de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. De plus, le complexe de Kronecker précédent est isomorphe à celui qui est associé à $\ker(v)/\operatorname{im}(u)$.

Soit $\mathcal{M}$ la variété des tels complexes de Kronecker semi-stables. Elle est lisse et irréductible. Sur $\mathcal{M} \times \mathbb{P}_2$ existe un *complexe universel* dont la cohomologie en degré 0 est une famille de faisceaux de $M(r, c_1, c_2)$ paramétrée par $\mathcal{M}$. On en déduit un morphisme $\pi : \mathcal{M} \to M(r, c_1, c_2)$.

Le groupe $G_{\mathcal{M}} = (\mathrm{GL}(n_{-1}) \times \mathrm{GL}(n_0) \times \mathrm{GL}(n_1))/\mathbb{C}^*$ agit sur $\mathcal{M}$ de la façon suivante :

$$G_{\mathcal{M}} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$$

$$(\mathbb{C}^*(g_{-1}, g_0, g_1), (u, v)) \longmapsto \big((I_{Q^*} \otimes g_0) \circ u \circ (I_{\wedge^2 Q^*} \otimes g_{-1})^{-1}, g_1 \circ v \circ (I_{Q^*} \otimes g_0)^{-1}\big).$$

En fait, π est un bon quotient de $\mathcal{M}$ par $G_{\mathcal{M}}$ (proposition (2.6) de [7]).

Pour tout $(u, v) \in \mathcal{M}$, le stabilisateur de (u, v) dans $G_{\mathcal{M}}$ s'identifie naturellement à $\operatorname{End}(\ker(v)/\operatorname{im}(u))/\mathbb{C}^*$.

2.6.2 – Les caractères de $G_{\mathcal{M}}$. On note $\mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}})$ le groupe des caractères de $G_{\mathcal{M}}$. Supposons d'abord que $n_1 > 0$ et $n_{-1} > 0$. Les caractères de $G_{\mathcal{M}}$ sont définis par les triplets (a_0, a_1, a_2) d'entiers tels que $a_2 n_{-1} + a_1 n_0 + a_0 n_1 = 0$. Le caractère associé à (a_0, a_1, a_2) est

$$\lambda_{a_0,a_1,a_2} : G_{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

$$\mathbb{C}^*(g_{-1}, g_0, g_1) \longmapsto \det(g_{-1})^{a_2} \det(g_0)^{a_1} \det(g_1)^{a_0}.$$

Le groupe $\mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$. Si $n_{-1} = 0$ ou $n_1 = 0$, $\mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}})$ s'identifie de même à un sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$ isomorphe à $\mathbb{Z}$.

2.6.3 – Le morphisme $\Lambda : \mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}}) \to H$. On supposera d'abord que $n_1 > 0$, $n_{-1} > 0$. Considérons le morphisme de groupes

$$\Lambda_0 : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow K(\mathbb{P}_2)$$

$$(a_0, a_2, a_2) \longmapsto \sum_{0 \le i \le 2} a_i [\mathcal{O}(-i)].$$

Lemme 2.5 : *Le morphisme Λ_0 est un isomorphisme.*

Démonstration. Soit $x = \sum_{0\leq i\leq 2} [\mathcal{O}(-i)]$. Alors on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(x) &= a_0 + a_2 + a_2, \\
c_1(x) &= -a_1 - 2a_2 \\
c_2(x) &= 2a_1a_2 + 2a_2(a_2-1) + \frac{a_1(a_1-1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}c_1(x)^2 - \frac{1}{2}a_1 - 2a_2.
\end{aligned}$$

Le résultat découle du fait que pour tout triplet (r, c_1, c_2) d'entiers, le système d'équations

$$\begin{aligned}
r &= a_0 + a_2 + a_2, \\
c_1 &= -a_1 - 2a_2 \\
c_2 - \frac{1}{2}c_1^2 &= -\frac{1}{2}a_1 - 2a_2.
\end{aligned}$$

possède une solution entière (a_0, a_1, a_2) unique. C'est

$$\begin{aligned}
a_0 &= r - c_2 + \frac{c_1(c_1+3)}{2}, \\
a_1 &= 2c_2 - c_1^2 - 2c_1, \\
a_2 &= -c_2 + \frac{c_1(c_1+1)}{2}
\end{aligned}$$

□

Remarque : un calcul simple montre que l'inverse de Λ_0 est défini par

$$\Lambda_0^{-1}([W]) \;=\; (\chi(W), -\chi(W\otimes Q^*), \chi(W(-1)))$$

pour tout fibré vectoriel algébrique W sur $\mathbb{P}_2$.

Par définition des entiers n_i, l'égalité $a_2n_{-1} + a_1n_0 + a_0n_1 = 0$ équivaut à $\chi_\eta(\Lambda_0(a_0, a_1, a_2)) = 0$. Par conséquent, en voyant comme dans 2.6.2 $\mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}})$ comme un sous-groupe de $\mathbb{Z}^3$, on a

$$\Lambda_0(\mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}})) \;=\; H(r, c_1, c_2)\ .$$

Le morphisme Λ est simplement la restriction de Λ_0. C'est un isomorphisme.

Étudions maintenant le cas $n_1 = 0$ (le cas $n_{-1} = 0$ est analogue). Dans ce cas $M(r, c_1, c_2)$ est une variété de modules de hauteur nulle de fibré exceptionnel associé $\mathcal{O}$. Le morphisme Λ est défini par

$$\Lambda(a_1, a_2) \;=\; a_1[\mathcal{O}(-1)] + a_2[\mathcal{O}(-2)]\ ,$$

pour tous entiers a_1, a_2 tels que $a_2n_{-1} + a_1n_0 = 0$. Dans ce cas ce n'est bien entendu pas un isomorphisme, mais on a un isomorphisme $H \simeq (\mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}})) \oplus \mathbb{Z}[\mathcal{O}]$.

2.7 – Variétés de saut et formule de Porteous

On décrit ici certains résultats de [10] et [14]. Soient S une variété algébrique lisse irréductible, E un fibré vectoriel de rang 2 sur S, P le fibré en droites projectives sur S déduit de E. On note $p : P \to S$ la projection. Soit G un faisceau cohérent sur P, plat sur S. Pour tout point fermé s de S, on pose $G_s = G_{|p^{-1}(s)}$. Supposons que pour tout s, G_s soit sans torsion, et que si χ désigne la caractéristique d'Euler des faisceaux G_s on ait $\chi \leq 0$. On définit dans [14], pour tout s, une application linéaire canonique

$$d_s : T_sS \longrightarrow L(H^0(G_s), H^1(G_s))$$

(T_sS désignant l'espace tangent de S en s). Si E est trivial, on a $P \simeq S \times \mathbb{P}_1$, et d_s s'interprète de la façon suivante : soient

$$\omega_s : T_sS \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(G_s, G_s)$$

le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer de G en s,

$$\eta_s : \mathrm{Ext}^1(G_s, G_s) \longrightarrow L(H^0(G_s), H^1(G_s))$$

l'application canonique (appelée "comorphisme de Petri" dans [14]). Alors on a $d_s = -\eta_s \circ \omega_s$ ([14], 7.7). Dans le cas général, on peut définir un sous-schéma fermé $Z^1(G)$, dont le support est l'ensemble des s tels que $h^0(G_s) \geq 1$. On a, pour toute composante irréductible Y de $Z^1(G)$, $\mathrm{codim}_S(Y) \leq 1 - \chi$. En cas d'égalité (pour toutes les composantes), ou si $Z^1(G) = \emptyset$, l'élément de l'anneau de Chow de S associé à $Z^1(G)$ est donné par

$$[Z^1(G)] \ = \ c_{1-\chi}(-p_!(G))$$

(formule de Porteous). Soit S un point du support de $Z^1(G)$ tel que $h^0(G_s) = 1$. Alors, si d_s est surjective, $Z^1(G)$ est lisse en s.

3. Fibrés en droites sur un quotient

Dans cette partie on définit le morphisme $\mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}}) \to \mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2))$. On sait très bien définir le morphisme $\mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}}) \to \mathrm{Pic}(M_s(r, c_1, c_2))$. Le problème est donc de prolonger les fibrés en droites sur $M_s(r, c_1, c_2)$ provenant de $\mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}})$ à $M(r, c_1, c_2)$. Plus généralement, étant donné un bon quotient $\pi : X \to N$ par un groupe réductif G, le *lemme de descente* donne des conditions suffisantes pour qu'un caractère de G définisse un fibré en droites sur N (voir 3.2 pour une définition précise). On voit ensuite facilement que ces conditions sont vérifiées par tout caractère de $G_{\mathcal{M}}$, dans le cas du quotient $\mathcal{M} \to M(r, c_1, c_2)$.

3.1 – Lemme de descente

Soient G un groupe algébrique réductif connexe, X une variété algébrique intègre sur laquelle opère algébriquement le groupe G. On suppose qu'il existe un bon quotient $\pi : X \to N$.

Rappelons qu'on appelle *G-fibré vectoriel* sur X un fibré vectoriel algébrique sur X muni d'une action linéaire algébrique de G au dessus de l'action de G sur X. Pour tout fibré vectoriel algébrique E sur N, le fibré $\pi^*(E)$ a une structure naturelle de G-fibré sur X. Si F est un

G-fibré vectoriel, on dit que F *descend à* N s'il existe un fibré vectoriel E sur N tel que les G-fibrés F et $\pi^*(E)$ soient isomorphes.

Théorème 3.1 : ("Lemme de descente") *Soit F un G-fibré vectoriel sur X. Alors F descend à N si et seulement si pour tout point fermé x de X tel que Gx soit fermée, le stabilisateur G_x de x dans G agit trivialement sur F_x.*

(cf. [26], théorème 2.3).

3.2 – Fibrés en droites et caractères

On conserve les notations de 3.1. Considérons une action linéaire de G sur le fibré trivial $X \times \mathbb{C}$, au-dessus de l'action de G sur X. Elle provient d'un *morphisme croisé*, c'est à dire un morphisme $\chi : G \times X \to \mathbb{C}^*$ tel qu'on ait $\chi(gg', x) = \chi(g, g'x)\chi(g', x)$ pour tous $g, g' \in G$ et $x \in X$. On a alors $g(x, t) = (gx, \chi(g, x)t)$ pour tous $g \in G$, $x \in X$ et $t \in \mathbb{C}$.

Tout caractère λ de G définit un morphisme croisé : $\chi(g, x) = \lambda(g)$. Réciproquement, si toute fonction inversible sur G est le produit d'un caractère par une constante, tout morphisme croisé provient d'un caractère (proposition 14 de [6]). On supposera que c'est la cas dans tout ce qui suit. Notons L_λ le G-fibré en droites sur X induit par λ. Du théorème 3.1 on déduit immédiatement la

Proposition 3.2 : *Le G-fibré L_λ descend à N si et seulement si pour tout point fermé x de X tel que Gx soit fermée, on a $\lambda_{|G_x} = 1$.*

3.3 – Application

On prend pour X l'espace $\mathcal{M}$ des complexes de Kronecker semi-stables du type

$$\wedge^2 Q^* \otimes H_{-1} \longrightarrow Q^* \otimes H_0 \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H_1$$

défini en 2.6. Sur $\mathcal{M}$ agit le groupe réductif $G_{\mathcal{M}} = \left(\prod_{-1 \leq i \leq 1} \mathrm{GL}(H_i)\right) / \mathbb{C}^*$, et il existe un bon quotient $\pi : \mathcal{M} \to M$ (M est une varieté de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2$). Posons $n_i = \dim(H_i)$ pour $i = -1, 0, 1$. On supposera dans ce qui suit que n_{-1}, n_0, n_1 sont non nuls. Les autres cas se traitent de façon analogue.

Toute fonction inversible sur $G_{\mathcal{M}}$ est le produit d'un caractère de $G_{\mathcal{M}}$ par une constante. Donc, comme on l'a noté dans 3.2, les morphismes croisés $G_{\mathcal{M}} \times \mathcal{M} \to \mathbb{C}^*$ proviennent des caractères de $G_{\mathcal{M}}$. Le résultat à démontrer est la

Proposition 3.3 : *Soient $\lambda \in \mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}})$ et x un point fermé de $\mathcal{M}$ tel que $G_{\mathcal{M}x}$ soit fermée. Alors on a $\lambda_{|G_{\mathcal{M}x}} = 1$.*

Lemme 3.4 : *Soit E un faisceau cohérent semi-stable sur $\mathbb{P}_2$. Soit σ un endomorphisme de E. Alors il existe une filtration de Jordan-Hölder de E invariante par σ.*

Démonstration. Considérons la filtration suivante de E : $0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_m = E$, où, pour $1 \leq i \leq m$, E_i/E_{i-1} est la somme de tous les sous-faisceaux de E/E_{i-1}, stables et de mêmes pente et discriminant que E. Il est clair que cette filtration est invariante par σ. On cherche une filtration de Jordan-Hölder de E invariante par σ plus fine que la filtration précédente. On est donc ramené au cas où E est une somme directe de faisceaux stables. On peut écrire $E = \bigoplus_{1\leq i\leq n} E'_i \otimes \mathbb{C}^{m_i}$, les E'_i étant des faisceaux stables de mêmes pente et discriminant que E, non isomorphes deux à deux. Les sous-faisceaux $E'_i \otimes \mathbb{C}^{m_i}$ de E sont invariants par σ. On est donc ramené au cas où $E = E' \otimes \mathbb{C}^n$, E' étant un faisceau stable. Un endomorphisme de E provient d'une matrice $n \times n$, et en trigonalisant celle-ci, on obtient une filtration de Jordan-Hölder de E invariante par σ. Ceci démontre le lemme 3.4. □

Soit λ un caractère de $G_{\mathcal{M}}$, défini par le triplet d'entiers (a_0, a_1, a_2) (cf. 2.6.2).

Soient $x_0 \in \mathcal{M}$, $0 = z_0 \subset z_1 \subset \cdots \subset z_m = x_0$ une filtration de x_0 par des sous-complexes de Kronecker, correspondant à une filtration de Jordan-Hölder de la cohomologie E de x_0 en degré 0. On peut écrire

$$z_j/z_{j-1} : \wedge^2 Q^* \otimes H^j_{-1} \longrightarrow Q^* \otimes H^j_0 \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H^j_1 \ ,$$

pour $1 \leq i \leq m$, et (n_{-1}, n_0, n_1) est un multiple entier de $(\dim(H^j_i))_{-1\leq i\leq 1}$. Soient $\mathcal{M}_j$ la variété de complexes de Kronecker semi-stables contenant z_j/z_{j-1}, $G_{\mathcal{M}_j}$ le groupe analogue à $G_{\mathcal{M}}$ opérant sur $\mathcal{M}_j$, λ_j le caractère de $G_{\mathcal{M}_j}$ défini par (a_0, a_1, a_2). Alors, si g est un élément de $G_{\mathcal{M}}$ laissant invariante la filtration précédente de x_0, et si g_j désigne l'élément de $G_{\mathcal{M}}$ induit par g, on a

$$\lambda(g) \ = \ \prod_{1\leq j\leq m} \lambda_j(g_j) \ .$$

On va en déduire la proposition 3.3.

Supposons que $g \in (G_{\mathcal{M}})_{x_0}$. D'après le lemme 3.4, on peut supposer que la filtration précédente de x_0 est invariante par g. Pour $1 \leq j \leq m$, g_j est un élément du stabilisateur de z_j/z_{j-1}. Puisque la cohomologie en degré 0 de z_j/z_{j-1} est stable, g_j est l'élément neutre de $G_{\mathcal{M}_j}$, donc $\lambda_j(g_j) = 1$. On a donc $\lambda(g) = 1$, ce qui démontre la proposition 3.3.

4. Groupe de Picard

Soit $M = M(r, c_1, c_2)$ une variété de modules de dimension positive, $M_s = M_s(r, c_1, c_2)$, $\mathcal{M}$ la variété de complexes de Kronecker associée à M (cf. 2.6). On a un morphisme de groupes

$$\pi_{\mathcal{M}} : \mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(M_s)$$

qui d'après la proposition 3.3 et le théorème 3.1 se factorise de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}}) \arrow[rr, "\overline{\pi}_{\mathcal{M}}"] \arrow[dr, "\pi_{\mathcal{M}}"'] & & \mathrm{Pic}(M) \arrow[dl, "j"] \\ & \mathrm{Pic}(M_s) & \end{tikzcd}$$

j étant la restriction. On démontrera dans la suite la

Proposition 4.1 : *Le morphisme de groupes $\pi_{\mathcal{M}}$ est surjectif. C'est un isomorphisme si la variété de modules M n'est pas de hauteur nulle.*

Donnons les grands traits de sa démonstration. On peut se ramener au cas où $-r < c_1 \leq 0$.

Si $c_1 = 0$, on étudie directement la variété $\mathcal{M}$ (cf. 5). Cette méthode s'inspire de [17].

Si $c_1 \neq 0$, on utilise la description d'Ellingsrud ([8]) de certains ouverts de M (cf. 6).

Dans les cas où $c_1 = -1$ ou $1 - r$, il sera nécessaire d'étudier certaines sous-variétés de M (cf. 7).

Enfin, on traitera dans 8 le cas $r = 2$, en utilisant des résultats de Strømme ([25]) et Le Potier ([17]).

On suppose dans le reste de cette partie que la proposition 4.1 est démontrée. On va en déduire les théorèmes A à F.

4.1 – Démonstration du théorème A

Il faut montrer que M est localement factorielle. C'est évident si $M \simeq \mathbb{P}_5$. Sinon, d'après le corollaire 2.3 on a $\mathrm{codim}_M(M \backslash M_s) \geq 2$. Il suffit donc de montrer que la restriction $j : \mathrm{Pic}(M) \to \mathrm{Pic}(M_s)$ est surjective. C'est une conséquence de la surjectivité de $\pi_{\mathcal{M}}$ et de sa factorisation précédente.

4.2 – Démonstration du théorème B

Si M n'est pas de hauteur nulle, on a $\mathrm{codim}_M(M \backslash M_s) \geq 2$, donc, M étant localement factorielle, on a $\mathrm{Pic}(M) \simeq \mathrm{Pic}(M_s)$. Ce dernier est isomorphe à $\mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}})$ d'après la proposition 4.1, et $\mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}}) \simeq \mathbb{Z}^2$. Donc $\mathrm{Pic}(M) \simeq \mathbb{Z}^2$.

Si M est de hauteur nulle, et si $M \simeq \mathbb{P}_5$, on a $\mathrm{Pic}(M) \simeq \mathbb{Z}$. Si M n'est pas isomorphe à $\mathbb{P}_5$, on a encore $\mathrm{codim}_M(M \backslash M_s) \geq 2$, et $\mathrm{Pic}(M) \simeq \mathrm{Pic}(M_s)$. Soit M_0 l'ouvert des points lisses de M. Il contient M_s et d'après [6] (théorème 7), on a $\mathrm{Pic}(M_0) \simeq \mathbb{Z}$. On a donc $\mathrm{Pic}(M) \simeq \mathbb{Z}$.

4.3 – Démonstration du théorème C

Il faut définir le morphisme $\mathbf{L} : H(r, c_1, c_2) = H \to \mathrm{Pic}(M)$. La variété $\mathcal{M}$ est constituée de complexes de Kronecker du type

$$\wedge^2 Q^* \otimes H_{-1} \longrightarrow Q^* \otimes H_0 \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H_1 \ .$$

Posons $n_i = \dim(H_i)$ pour $i = -1, 0, 1$. Supposons que $n_{-1} > 0$ et $n_1 > 0$. On a alors un isomorphisme $\Lambda : \mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}}) \simeq H$ (cf. 2.6.3). 0n prend simplement $\mathbf{L} = \overline{\pi}_{\mathcal{M}} \circ \Lambda^{-1}$. Pour voir que cet isomorphisme convient, il suffit de montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}}) & \xrightarrow{\overline{\pi}_{\mathcal{M}}} & \mathrm{Pic}(M) \\ {\scriptstyle\Lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ H & \xrightarrow{\gamma} & \mathrm{Pic}(F) \end{array}$$

Soit λ un caractère de $G_{\mathcal{M}}$, défini par un triplet (a_0, a_1, a_2) (cf. 2.6.2). Posons $\alpha = \Lambda(\lambda)$.

Soit V la cohomologie en degré 0 du complexe de Kronecker universel sur $\mathcal{M} \times \mathbb{P}_2$. On a des isomorphismes canoniques

$$R^1 p_{\mathcal{M}*}(V \otimes p_2^*(\mathcal{O}(-i))) \ \simeq \ \mathcal{O} \otimes H_{-i+1}$$

pour $i = 0, 1, 2$, $p_{\mathcal{M}}$, p_2 désignant les projections $\mathcal{M} \times \mathbb{P}_2 \to \mathcal{M}$ et $\mathcal{M} \times \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$. Donc, par définition de γ, Λ et $\overline{\pi}_{\mathcal{M}}$, on a des $G_{\mathcal{M}}$-isomorphismes

$$(2) \qquad \pi^*(\overline{\pi}_{\mathcal{M}}(\lambda)) \ \simeq \ \gamma(\alpha)_V \ \simeq \bigotimes_{0 \le i \le 2} \det(H_{-i+1})^{a_i} \ .$$

Soit S une variété algébrique lisse, E une famille de faisceaux de $M(r, c_1, c_2)$ paramétrée par S. Les faisceaux $R^1 p_{S*}(E \otimes p_2^*(\mathcal{O}(-i)))$, $i = 0, 1, 2$, sont localement libres, et on a, pour tout $s \in S$, sur un voisinage ouvert U_s de s des trivialisations

$$R^1 p_{S*}(E \otimes p_2^*(\mathcal{O}(-i)))_{|U_s} \ \simeq \ \mathcal{O}_{U_s} \otimes H_{-i+1} \ .$$

d'où on déduit, à l'aide de la suite spectrale de Beilinson, un morphisme $f_s : U_s \to \mathcal{M}$ tel que $f_{E|U_s} = \pi \circ f_s$. On en déduit à l'aide de (2) et de f_s, un isomorphisme

$$\gamma(\alpha)_{E|U_s} \xrightarrow{\phi} f_E^*(\overline{\pi}_{\mathcal{M}}(\lambda))_{|U_s}$$

Si on prend une trivialisation différente de (2), le morphisme induit $U_s \to \mathcal{M}$ est le produit de f_s par un morphisme $U_s \to G_{\mathcal{M}}$. Il en découle que ϕ ne dépend pas de la trivialisation (2). Les isomorphismes ϕ se recollent donc et définissent un isomorphisme

$$\gamma(\alpha)_E \ \simeq \ f_E^*(\overline{\pi}_{\mathcal{M}}(\lambda)) \ .$$

On a donc bien $\sigma(\overline{\pi}_{\mathcal{M}}) = \gamma(\Lambda(\lambda))$. L'existence de $\mathbf{L}$ est ainsi prouvée. Son unicité découle de l'injectivité de σ (cf. 2.1.4).

Supposons maintenant que $n_1 = 0$ (le cas $n_{-1} = 0$ est analogue). Dans ce cas $M(r, c_1, c_2)$ est de hauteur nulle, de fibré exceptionnel induit $\mathcal{O}$. On a d'après 2.6.3 un isomorphisme naturel

$$H \ \simeq \ \Lambda(\mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}})) \oplus \mathbb{Z}[\mathcal{O}] \ .$$

On définit alors $\mathbf{L}$ par

$$\mathbf{L}([\mathcal{O}]) \ = \ \mathcal{O}_{M(r,c_1,c_2)}, \qquad \text{et} \ \ \mathbf{L} \ = \ \overline{\pi}_{\mathcal{M}} \circ \Lambda^{-1} \ \ \text{sur} \ \ \Lambda(\mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}})) \ .$$

Pour montrer que $\sigma \circ \mathbf{L} = \gamma$, il reste à prouver que le diagramme $(*)$ est commutatif, ce qui est analogue au cas précédent. L'injectivité de σ entraine aussi l'unicité de $\mathbf{L}$.

Ceci achève la démonstration du théorème C.

4.4 – Démonstrations des théorèmes D et E

Le théorème D découle du fait que $\mathbf{L} = \overline{\pi}_{\mathcal{M}} \otimes \Lambda^{-1}$, et de ce que $\overline{\pi}_{\mathcal{M}}$ est un isomorphisme si M n'est pas de hauteur nulle.

Démontrons le théorème E. Supposons que M soit de hauteur nulle. Puisque $\overline{\pi}_{\mathcal{M}}$ est surjectif, il découle de la définition de $\mathbf{L}$ (cf. 4.3), que $\mathbf{L}$ l'est aussi. Puisque $\mathrm{Pic}(M) \simeq \mathbb{Z}$, on a $\ker(\mathbf{L}) \simeq \mathbb{Z}$. Il faut montrer que $\ker(\mathbf{L})$ est engendré par $[F^*]$, F désignant le fibré exceptionnel induit par M. On sait déjà que $[F^*]$ est dans $\ker(\mathbf{L})$. Il reste donc à montrer que $[F^*]$ ne peut pas se mettre sous la forme $[F^*] = nz$, avec n entier, $n > 1$, et $z \in K(\mathbb{P}_2)$. D'après 2.6.3, cela revient à prouver que les entiers $\chi(F^*)$, $\chi(F^* \otimes Q^*)$ et $\chi(F^*(-1))$ sont premiers entre eux. Mais on peut voir (par un calcul direct ou en utilisant la suite spectrale de Beilinson), qu'on a

$$\mathrm{rg}(F^*) \;=\; -\chi(F^* \otimes Q^*) + \chi(F^*) + \chi(F^*(-1)) \;, \qquad c_1(F^*) \;=\; \chi(F^* \otimes Q^*) - 2\chi(F^*(-1)) \;.$$

Puisque le rang et la première classe de Chern d'un fibré exceptionnel sont premiers entre eux d'après [7], $\chi(F^*)$, $\chi(F^* \otimes Q^*)$ et $\chi(F^*(-1))$ sont aussi premiers entre eux. Ceci achève la démonstration du théorème E.

4.5 – Démonstration du théorème F

Supposons d'abord que $\mathrm{codim}_M(M \backslash M_s) \geq 2$. On supposera que $n_1 > 0$, $n_{-1} > 0$ (les autres cas sont analogues). On a d'après [7] une suite exacte de fibrés vectoriels sur $\pi^{-1}(M_s) = \mathcal{M}_s$:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h} \pi^*(T_{M_s}) \longrightarrow 0,$$

avec $A = \mathcal{O}_{\mathcal{M}_s} \otimes (\oplus_{-1 \leq i \leq 1} \mathrm{End}(H_i)) / \mathbb{C}^*$, B étant le noyau du morphisme

$$d : \mathcal{O}_{\mathcal{M}_s} \times \big(\mathrm{Hom}(\wedge^2 Q^* \otimes H_{-1}, Q^* \otimes H_0) \oplus \mathrm{Hom}(Q^* \otimes H_0, \mathcal{O} \otimes H_1)\big) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{M}_s} \otimes \mathrm{Hom}(\wedge^2 Q^* \otimes H_{-1}, \mathcal{O} \otimes H_1) \;,$$

défini an-dessus du point (u, v) de $\mathcal{M}$ par $d(u', v') = v'u - vu'$. Les morphismes f, h, d sont des $G_{\mathcal{M}}$-morphismes et d est surjectif. On a un isomorphisme de $G_{\mathcal{M}}$-fibrés en droites $\pi^*(\omega_M)_{|\mathcal{M}_s} \simeq \det(B)^{-1} \det(A)$. Le $G_{\mathcal{M}}$-fibré $\det(B)$ se calcule à partir des déterminants des fibrés de départ et d'arrivée de d. Il en découle, puisque $\mathrm{codim}_M(M \backslash M_s) \geq 2$, qu'on a $\omega_M = \overline{\pi}_{\mathcal{M}}(\lambda)$, λ étant le caractère de $G_{\mathcal{M}}$ défini par

$$\alpha \;=\; (3(n_0 - n_{-1}), 3(n_{-1} - n_1), 3(n_1 - n_0)) \;.$$

Un calcul simple montre que $\Lambda(\alpha) = \eta^*\omega - \eta^*$. Le théorème F en découle.

Si $\mathrm{codim}_M(M \backslash M_s) = 1$, M est isomorphe à $\mathbb{P}_5$, et le théorème F est alors une conséquence de [6], IV, 7.

5. Le cas $c_1 = 0$, $r > 2$

.

Rappelons que $\mathcal{M}$ désigne la variété des complexes de Kronecker associée à $M(r, 0, c_2)$. Soit $\mathcal{M}_p$ l'espace des complexes de Kronecker (u, v) tels que le morphisme de faisceaux u soit injectif, v surjectif, et $\ker(v)/\operatorname{im}(u)$ p-semi-stable (cf. 2.4). Soit $\mathcal{M}_s$ l'ouvert de $\mathcal{M}$ des complexes de Kronecker stables, $\mathcal{M}_0$ l'ouvert de $\mathcal{M}_s$ des complexes (u, v) tels que $\ker(v)/\operatorname{im}(u)$ soit localement libre. On supposera d'abord que $M(r, 0, c_2)$ n'est pas de hauteur nulle, (c'est à dire que $r < c_2$). La variété $\mathcal{M}_p$ est lisse. Pour le voir on procède comme pour montrer que $\mathcal{M}$ est lisse (proposition (2.6) de [7]), en remarquant que pour tout faisceau p-semi-stable E, on a $\operatorname{Ext}^2(E, E) = \{0\}$.

Lemme 5.1 : *On a* $\operatorname{codim}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}\backslash\mathcal{M}_s) \geq 2$, $\operatorname{codim}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}_p\backslash\mathcal{M}_s) \geq 2$ *et* $\operatorname{codim}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}_s\backslash\mathcal{M}_0) \geq 2$.

Démonstration. 0n applique les résultats de 2.4 à la cohomologie V du complexe de Kronecker universel sur $\mathcal{M} \times \mathbb{P}_2$. Cette famille de faisceaux sur $\mathbb{P}_2$ vérifie bien les propriétés (L) et (KS). D'après la proposition 2.1 on a $\operatorname{codim}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}_p\backslash\mathcal{M}) \geq 2$, et d'après la proposition 2.2, $\operatorname{codim}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}\backslash\mathcal{M}_s) \geq 2$, ce qui démontre les deux premières inégalités. La troisième découle de la proposition 2.8 de [7], et du fait que $r > 2$. □

D'après [17], on a une suite exacte de groupes abéliens

$$\mathcal{O}^*(\mathcal{M}_s)/\mathbb{C}^* \longrightarrow \operatorname{Char}(G_{\mathcal{M}}) \longrightarrow \operatorname{Pic}(M_s(r, 0, c_2)) \xrightarrow{\pi^*} \operatorname{Pic}(\mathcal{M}_s)$$

(cf. prop. 3.2), car l'action de $G_{\mathcal{M}}$ sur $\mathcal{M}$ est libre, et $\pi : \mathcal{M}_s \to M_s(r, 0, c_2)$ est un quotient géométrique. Pour démontrer la proposition 4.1 il suffit donc d'après le lemme 5.1 de prouver la

Proposition 5.2 : *On a* $\mathcal{O}^*(\mathcal{M}_p) = \mathbb{C}^*$ *et* $\operatorname{Pic}(\mathcal{M}_p) = 0$.

5.1 – Restriction à des droites

Pour tout élément non nul z de $H^0(\mathcal{O}(1))$, soit $\mathcal{M}_z$ l'ouvert de $\mathcal{M}_p$ constitué des complexes (u, v) tels que la restriction de $\ker(v)/\operatorname{im}(u)$ à la droite de $\mathbb{P}_2$ d'équation $z = 0$ soit un faisceau trivial.

Lemme 5.3 : *On a, si* $z, z' \in H^0(\mathcal{O}(1))$ *sont linéairement indépendants,* $\operatorname{codim}_{\mathcal{M}_p}(\mathcal{M}_p\backslash(\mathcal{M}_z \cup \mathcal{M}_{z'})) \geq 2$.

Démonstration. D'après le lemme 5.1 il suffit de montrer que

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{M}_0}(\mathcal{M}_0\backslash(\mathcal{M}_z \cup \mathcal{M}_{z'})) \ \geq \ 2.$$

D'après Hulek [16], les ouverts $\mathcal{M}_z$ et $\mathcal{M}_{z'}$ sont non vides. Donc, si $Y = \mathcal{M}_0 \cap (\mathcal{M}_z\backslash\mathcal{M}_{z'})$, et si $\overline{Y}$ désigne l'adhérence de Y dans $\mathcal{M}_0$, il suffit de montrer que $\mathcal{M}_0\backslash(\mathcal{M}_z \cup \mathcal{M}_{z'})$ est contenu dans $\overline{Y}\backslash Y$. Cela revient à montrer, puisque V vérifie la condition (KS), que tout fibré stable E de

rang r et de classes de Chern 0, c_2 dont les restrictions aux droites ℓ, ℓ' d'équations respectives $z=0$, $z'=0$, sont non triviales, peut se déformer en fibrés dont la restriction à ℓ est triviale, mais non la restriction à ℓ'. Autrement dit, il faut prouver que l'application canonique

$$\lambda : \mathrm{Ext}^1(E,E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(E_{|\ell}, E_{|\ell}) \oplus \mathrm{Ext}^1(E_{|\ell'}, E_{|\ell'})$$

est surjective. Le faisceau $\mathrm{End}(E)_{|\ell\cup\ell'}$ est un sous-faisceau de $\mathrm{End}(E)_{|\ell} \oplus \mathrm{End}(E)_{|\ell'}$, et le quotient est concentré en le point d'intersection de ℓ et ℓ'. On en déduit que l'application canonique

$$\mu : \mathrm{Ext}^1(E_{|\ell\cup\ell'}, E_{|\ell\cup\ell'}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(E_{|\ell}, E_{|\ell}) \oplus \mathrm{Ext}^1(E_{|\ell'}, E_{|\ell'})$$

est surjective. On a d'autre part une suite exacte

$$0 \longrightarrow E(-2) \longrightarrow E \longrightarrow E_{|\ell\cup\ell'} \longrightarrow 0$$

d'où on déduit, en utilisant le fait que $\mathrm{Ext}^2(E, E(-2)) = \{0\}$, que

$$\nu : \mathrm{Ext}^1(E,E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(E_{|\ell\cup\ell'}, E_{|\ell\cup\ell'})$$

est surjective. Donc $\lambda = \mu \circ \nu$ est surjective. Ceci démontre le lemme 5.3. □

Pour démontrer la proposition 5.2 il reste à prouver la

Proposition 5.4 : *On a*

a – $\mathcal{O}^*(\mathcal{M}_z \cup \mathcal{M}_{z'}) = \mathbb{C}^*$.

b – $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_z \cup \mathcal{M}_{z'}) = 0$.

5.2 – Démonstration de la proposition 5.4

5.2.1 – Préliminaires sur les matrices

Soient r, n des entiers tels que $n > r > 2$. Soit $M(n)$ l'espace des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. On dira (suivant [16]) que $A \in M(n) = L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ est *régulier* si son polynôme minimal est de degré n. C'est le cas si et seulement si pour tout sous-espace spectral $E \subset \mathbb{C}^n$ de A, la matrice de $A_{|E}$ dans une base convenable de E est un bloc de Jordan.

Soient $A \in M(n)$ et Y_A est le sous-espace vectoriel de $M(n)$ des matrices de la forme $[A, B]$, $B \in M(n)$. D'après [16], si A est régulière, Y_A est l'ensemble des matrices C telles que $\mathrm{Tr}(A^k C) = 0$ pour $0 \leq k \leq n$, et $\mathrm{codim}_{M(n)}(Y_A) = n$.

Lemme 5.5 : *Si A est une matrice régulière de blocs carrés*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} ,$$

alors Y_A est l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} M_1 & P \\ Q & M_2 \end{pmatrix}$$

avec M_1 dans Y_{A_1} et M_2 dans Y_{A_2}.

Démonstration. Il est facile de voir que les matrices de Y_A sont de la forme $\begin{pmatrix} M_1 & P \\ Q & M_2 \end{pmatrix}$ avec M_1 dans Y_{A_1} et M_2 dans Y_{A_2}. Et comme ces matrices forment un sous-espace vectoriel E de codimension n, on a $Y_A = E$. □

Lemme 5.6 : *Soit $A \in M(n)$ une matrice non régulière. Alors on a* $\operatorname{codim}_{M(n)}(Y_A) > n$.

Démonstration. C'est facile à voir si A ne possède qu'une valeur propre (par exemple si A est une homothétie, on a $Y_A = \{0\}$). Si ce n'est pas le cas il existe un sous-espace spectral $E \subset \mathbb{C}^n$ de A tel que $E \neq \mathbb{C}^n$ et que $A_{|E}$ ne soit pas régulière. Soit F la somme directe des autres sous-espaces spectraux. On a alors $\mathbb{C}^n = E \oplus F$. Relativement à cette décomposition Y_A est constitué d'endomorphismes ayant des matrices de la forme $\begin{pmatrix} M_1 & P \\ Q & M_2 \end{pmatrix}$ avec M_1 dans Y_{A_1} et M_2 dans Y_{A_2}. En raisonnant par récurrence on peut supposer que $\operatorname{codim}_{\mathrm{End}(F)}(Y_{A_2}) \geq \dim(F)$, et on a $\operatorname{codim}_{\mathrm{End}(E)}(Y_{A_1}) > \dim(E)$ d'après ce qui précède. Donc on a $\operatorname{codim}_{M(n)}(Y_A) > n$. □

Pour $0 \leq s \leq n$, soit R_s la sous-variété de $M(n)$ des matrices de rang s. On note X_A^r la variété des matrices de la forme $[A, B]$, de rang r. K. Hulek a montré dans [16] que si A est régulière, alors X_A^r est irréductible de dimension $2rn - r^2 - n$. On a si A est régulière

$$\dim(X_A^r) \;=\; \dim(Y_A) - \operatorname{codim}_{M(n)}(R_r)\ .$$

Lemme 5.7 : *L'espace vectoriel Y_A est engendré par X_A^r.*

Démonstration. On prouve d'abord que

$$\overline{X_A^r} \;=\; X_A^r \cup X_A^{r-1} \cup \cdots \cup X_A^0\ .$$

On a $\overline{R_r} = R_0 \cup R_1 \cup \cdots \cup R_r$, et $\overline{R_r}$ est une variété irréductible, donc toutes les composantes irréductibles de $X_A^r \cup X_A^{r-1} \cup \cdots \cup X_A^0 = Y_A \cap \overline{R_r}$ sont de dimension au moins $\dim(Y_A) - \operatorname{codim}_{M(n)}(R_r) = \dim(X_A^r)$. Comme $\dim(X_A^s) < \dim(X_A^r)$ si $r > s$, $Y_A \cap R_r$ est irréductible, donc $X_A^r \cup X_A^{r-1} \cup \cdots \cup X_A^0 \subset \overline{X_A^r}$. L'inclusion réciproque étant immédiate, notre égalité est prouvée. Montrons maintenant que X_A^r engendre Y_A. Puisque X_A^r engendre le même sous-espace vectoriel de Y_A que son adhérence, il suffit de montrer que $X_A^2 \cup X_A^1$ engendre Y_A. Il suffit, d'après le lemme 5.5, pour prouver que $X_A^2 \cup X_A^1$ engendre Y_A, de considérer les cas où A est une matrice diagonale possédant n valeurs propres distinctes ou bien une matrice de Jordan. Dans le premier cas, Y_A est constitué des matrices dont les termes diagonaux sont nuls. On construit une base de Y_A dont les éléments sont dans X_A^1 en considérant des matrices dont un seul terme est non nul. Si A est une matrice de Jordan, Y_A est constitué des matrices $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ telles que pour $k = 0, \ldots, n-1$ on ait $a_{1+k,1} + a_{2+k,2} + \cdots + a_{n,n-k} = 0$. On construit une base de Y_A en prenant d'une part des matrices n'ayant qu'un seul terme non nul d'indice (i, j) avec $i \leq j$, et d'autre part des matrices (a_{ij}) telles qu'il existe un entier k avec $0 \leq k \leq n-1$ tel que $a_{ij} = 0$ si $i - j \neq k$ et possédant exactement deux termes non nuls. Les matrices du premier type appartiennent à X_A^1, celles du second à X_A^2. Donc si A est une matrice régulière, X_A^r engendre bien Y_A. □

Lemme 5.8 : *Si A est une matrice non régulière, alors* $\dim(X_A^r) < 2rn - r^2 - n$.

Démonstration. Remarquons d'abord qu'il existe une matrice régulière A_0 telle que $Y_A \subset Y_{A_0}$: il suffit de trouver une matrice régulière A_0 telle que toute matrice commutant avec A_0 commute aussi avec A, car alors si C commute avec A_0, pour toute matrice B on a $\mathrm{Tr}([A,B]C) = 0$, donc $[A,B] \in Y_{A_0}$. Pour trouver A_0 on peut supposer que A est une matrice diagonale de matrices $B_1, \ldots, B_m$ régulières. On prend pour A_0 une matrice du même type avec $B_i - a_i I$ à la place de B_i, les scalaires a_i étant choisis de telle sorte que A_0 soit régulière. L'inclusion $Y_A \subset Y_{A_0}$ est stricte car A n'est pas régulière. On a $X_A^r = X_{A_0}^r \cap Y_A$, et comme $X_{A_0}^r$ engendre Y_{A_0}, que $\dim(Y_A) < \dim(Y_{A_0})$, et que $X_{A_0}^r$ est irréductible, on a $\dim(X_A^r) < \dim(X_{A_0}^r) = 2rn - r^2 - n$. □

Soit $H \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré au plus $n-1$. Soit D_H la variété des matrices dont le polynôme minimal est H. Alors D_H est la réunion d'un nombre fini de sous-variétés localement fermées $D_H^{(1)}, \ldots, D_h^{(k)}$, où chaque $D_H^{(i)}$ est une orbite de l'action de $\mathrm{GL}(n)$ sur $M(n)$ par conjugaison : $D_H^{(i)} = \{C^{-1}D_iC; C \in \mathrm{GL}(n)\}$. Il en découle que si $C(D_i)$ désigne le commutant de D_i, on a

$$\mathrm{codim}_{M(n)}(D_H^{(i)}) \;=\; \dim(C(D_i)) \;=\; \mathrm{codim}_{M(n)}(Y_{D_i})\ .$$

Soit Z_r la sous-variété de $M(n)^2$ constituée des couples (A,B) tels que $\mathrm{rg}([A,B]) = r$. Soit Z_r^{reg} l'ouvert constitué des (A,B) tels que A soit régulière. En utilisant le fait que pour toute $A \in M(n)$ régulière on a $\dim(X_A^r) = 2rn - r^2 - n$, et le morphisme $(A,B) \mapsto (A,[A,B])$ de Z_r^{reg} dans $M(n)^2$, on voit aisément que $\dim(Z_r^{reg}) = 2rn - r^2 + n^2$.

Lemme 5.9 : *On a* $\mathrm{codim}_{Z_r}(Z_r \backslash Z_r^{reg}) \geq 2$.

Démonstration. Soient $H \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré au plus $n-1$ et $C_H \subset M(n)^2$ la sous-variété constituée des (A,B) tels que $A \in D_H$ et $\mathrm{rg}([A,B]) = r$. Il suffit de montrer que $\dim(C_H) < 2rn - r^2 - n + n^2$. Avec les notations précédentes, on a $C_H = C^{(1)} \cup \cdots \cup C^{(k)}$, avec $C^{(i)} = \{(A,B) \in C_H; A \in D_i\}$. Soit $d_i = \mathrm{codim}_{M(n)}(Y_{D_i}) - n > 0$. Soit

$$\Phi : C^{(i)} \longrightarrow M(n)^2$$

$$(A,B) \longmapsto (A,[A,B])$$

D'après les lemme 5.8 on a

$$\dim(\mathrm{im}(\Phi)) \;<\; \dim(D_i) + 2rn - r^2 - n \;=\; n^2 - 2n - d_i + 2rn - r^2.$$

Comme les fibres de Φ sont isomorphes à $C(D_i)$ et sont de dimension $n + d_i$ on obtient que $\dim(C^{(i)}) < 2rn - r^2 - n + n^2$. □

5.2.2 – Étude de $\mathcal{M}_z$

Posons $n = c_2$. On a alors $n > r > 2$. Les éléments de $\mathcal{M}_p$ sont des complexes

$$0 \longrightarrow \wedge^2 Q^* \otimes \mathbb{C}^n \xrightarrow{u} Q^* \otimes \mathbb{C}^n \xrightarrow{v} \mathcal{O} \otimes \mathbb{C}^{n-r} \longrightarrow 0.$$

Soient $t_u : H^0(\mathcal{O}(1)) \to M(n)$ l'application déduite de u, et $s_v : H^0(\mathcal{O}(1)) \to L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n-r})$ celle déduite de v.

Proposition 5.10 : *On a*

(i) $\mathcal{O}^*(\mathcal{M}_z)/\mathbb{C}^* \simeq \mathbb{Z}$, *et ce groupe est engendré par la fonction* $(u,v) \mapsto \det(t_u(z))$.

(ii) $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_z) = 0$.

Soient z', z'' des éléments de $H^0(\mathcal{O}(1))$ tels que (z, z', z'') soit une base de $H^0(\mathcal{O}(1))$. Le morphisme

$$h : \mathcal{M}_z \longrightarrow M(n)^3 \times L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n-r})^3$$

$$(u,v) \longmapsto (t_u(z), t_u(z'), t_u(z''), s_u(z), s_u(z'), s_u(z''))$$

induit un isomorphisme de $\mathcal{M}_z$ sur la sous-variété de $M(n)^3 \times L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n-r})^3$ constituée des $(A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2)$ tels que A_0 soit inversible, qu'on ait $B_j A_i = B_i A_j$ pour $0 \leq i, j \leq 2$, et que pour tout couple $((a_0, a_1, a_2), (b_0, b_1, b_2))$ d'éléments linéairement indépendants de $\mathbb{C}^3$ on ait

$$\mathrm{im}\left(\sum_{0\leq i\leq 2} a_i B_i\right) + \mathrm{im}\left(\sum_{0\leq i\leq 2} b_i B_i\right) \;=\; \mathbb{C}^{n-r}\ .$$

En effet, si $(A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2) = h(u,v)$, la première condition signifie que la restriction de $\ker(v)/\mathrm{im}(u)$ à la droite des zéros de z est triviale, la seconde que $v \circ u = 0$, et la troisième que v est surjectif. Réciproquement, si $(A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2)$ possède les trois propriétés précédentes, on en déduit un complexe de Kronecker (u,v) avec u injectif (comme morphisme de faisceaux) et v surjectif. Le faisceau $\mathrm{coker}(u)$ est sans torsion : cela découle du fait que le complexe de Kronecker réduit à u est semi-stable, A_0 étant inversible. L'absence de torsion de $\mathrm{coker}(u)$ découle alors de la proposition 2.3 de [7]. Donc $\ker(v)/\mathrm{im}(u)$ est sans torsion. La restriction de ce faisceau à la droite des zéros de z est triviale, car A_0 est inversible, donc $\ker(v)/\mathrm{im}(u)$ est de type de décomposition générique trivial, donc il est p-semi-stable. Par conséquent (u,v) est un élément de $\mathcal{M}_z$. On identifiera donc par la suite $\mathcal{M}_z$ et la sous-variété localement fermée image de h.

On a un isomorphisme

$$\mathcal{M}_z \longrightarrow C_r \times \mathrm{GL}(n)$$

$$(u,v) \longmapsto \big((t_u(z')t_u(z)^{-1}, t_u(z'')t_u(z)^{-1}, s_v(z))\ ,\ t_u(z)\big),$$

où C_r est définie de la façon suivante : c'est la variété des $(A_1, A_2, B_0) \in M(n)^2 \times L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n-r})$ tels que $\mathrm{im}([A_1, A_2]) \subset \ker(B_0)$, que B_0 soit surjective et que pour toutes valeurs propres a_1 de A_1 et a_2 de A_2 on ait $\mathrm{im}(A_1 - a_1 I) + \mathrm{im}(A_2 - a_2 I) + \ker(B_0) = \mathbb{C}^n$. Pour démontrer la proposition 5.10 il suffit de prouver la

Proposition 5.11 : *On a*

(i) $\mathcal{O}^*(C_r) = \mathbb{C}^*$,

(ii) $\mathrm{Pic}(C_r) = 0$.

On a $\dim(\mathcal{M}_z) = 3n^2$. Il en découle que $\dim(C_r) = 2n^2$. Soit X_r la sous-variété de $M(n)^2 \times L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n-r})$ des (A_1, A_2, B_0) vérifiant seulement les deux premières conditions précédentes, c'est à dire tels que $\mathrm{im}([A_1, A_2]) \subset \ker(B_0)$ et que B_0 soit surjective. Pour tout entier s tel que $0 \leq s \leq r$, soit X_r^s la sous-variété (localement fermée) de X_r, constituée des (A_1, A_2, B_0) tels que $\mathrm{rg}([A_1, A_2]) = s$. Alors X_r^r est un $\mathrm{GL}(n-r)$-fibré principal de base Z_r. Soit $X_r^{r,reg}$ l'ouvert des points de X_r^r au dessus de Z_r^{reg}.

Soit s un entier tel que $0 < s < r$. La donnée d'une surjection $\mathbb{C}^{n-s} \to \mathbb{C}^{n-r}$ définit un morphisme $X_s^s \to X_r^s$ qui est surjectif et dont les fibres sont de dimension $(n-s)(r-s)$. Donc, puisque $\dim(X_s^s) = \dim(X_r^r) = 2n^2$ (d'après [16], lemma 2.3.5 et prop. 2.3.6), on a $\mathrm{codim}_{X_r}(X_r^s) = (n-s)(r-s)$. On a $\dim(X_0^0) = 2n^2 + n$, d'où on déduit $\mathrm{codim}_{X_r}(X_r^0) = (r-1)n$. Il découle des égalités précédentes que $\mathrm{codim}_{X_r}(X_r \backslash X_r^r) \geq 2$. Le lemme 5.9 entraine que $\mathrm{codim}_{X_r}(X_r \backslash X_r^{r,reg}) \geq 2$. Posons $C_r^{reg} = C_r \cap X_r^{r,reg}$. Pour démontrer la proposition 5.11 il suffit donc de prouver la

Proposition 5.12 : *On a*

(i) $\mathcal{O}^*(C_r^{reg}) = \mathbb{C}^*$.

(ii) $\mathrm{Pic}(C_r^{reg}) = 0$.

Soit S l'ouvert de $L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n-r})$ des applications linéaires surjectives, et

$$F : (M(n) \times S) \times M(n) \longrightarrow (M(n) \times S) \times L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n-r})$$

$$((A, B_0), B) \longmapsto ((A, B_0), B_0[A, B]).$$

C'est un morphisme de fibrés vectoriels sur $M(n) \times S$. Pour tout $A \in M(n)$, on note $C(A)$ le commutant de A dans $M(n)$. Soit $M(n)^{reg}$ l'ouvert de $M(n)$ constitué des matrices régulières,

Lemme 5.13 : (i) *Le morphisme F est surjectif en (A, B_0) si et seulement si aucun élément non nul de $C(A)$ ne s'annule sur* $\ker(B_0)$.

(ii) *Il existe un ouvert U de $M(n) \times S$ tel que F soit surjectif en tout point de U et que*

$$\ker(F_{|U}) \subset C_r^{reg} \ , \quad \mathrm{codim}_{C_r}(C_r^{reg} \backslash \ker(F_{|U})) \geq 2 \ , \quad \mathrm{codim}_{M(n)\times S}((M(n) \times S) \backslash U) \geq 2 \ .$$

.

Démonstration. **(i)** On utilise les notations de 5.2.1. On munit $M(n)$ du produit scalaire défini par la trace. Alors $F_{(A,B_0)}$ est surjective si et seulement si $Y_A + L(\mathbb{C}^n, \ker(B_0)) = M(n)$, c'est à dire si et seulement si $Y_A^\perp \cap L(\mathbb{C}^n, \ker(B_0))^\perp = \{0\}$, et (i) découle du fait que $Y_A^\perp = C(A)$, et que $L(\mathbb{C}^n, \ker(B_0))^\perp$ est l'espace des endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ qui s'annulent sur $\ker(B_0)$.

(ii) Si A est une matrice régulière, on a $C(A) = \mathbb{C}[A]$, et $C[A] \cap L(\mathbb{C}^n, \ker(B_0))^\perp$ est un idéal de $\mathbb{C}[A]$, engendré par un élément $P_{A,B_0}(A)$, P_{A,B_0} étant un polynôme de degré au plus n divisant le polynôme minimal de A. On a

$$\dim(C[A] \cap L(\mathbb{C}^n, \ker(B_0))^\perp) \ = \ n - \deg(P_{A,B_0}) \ .$$

Pour $1 \leq k \leq n-1$, soit $V_{B_0,k}$ la sous-variété de $M(n)^{reg}$ des A telles que $\deg(P_{A,B_0}) = k$. Toute matrice A de $V_{B_0,k}$ possède un sous-espace invariant de dimension k contenant $\ker(B_0)$ (c'est

$\ker(P_{A,B_0})$). Donc $r \leq k$ et

$$\dim(V_{B_0,k}) \ \leq \ (k-r)(n-k)+k^2+n(n-k) \ = \ n^2-r(n-k) \ .$$

Soit W_k la sous-variété de $M(n)_{reg} \times S$ des (A, B_0) tels que $A \in V_{B_0,k}$. Si $(A, B_0) \in W_k$, $\mathrm{im}(F_{(A,B_0)})$ est de codimension $n-k$, donc $\ker(F_{(A,B_0)})$ est de dimension $d = nr+n-k$. On a donc

$$\dim(\ker(F_{|W_k})) = \dim(W_k)+d \leq n^2-r(n-k)+n(n-r)+d = 2n^2-(n-k)(r-1).$$

Soit U le complémentaire de l'union des W_k pour $r \leq k \leq n-1$. Alors $\ker(F_{|U})$ est contenu dans C_r^{reg}, puisque si $(A, B_0) \in U$, et si a est une valeur propre de A, on a $\ker(B_0)+\mathrm{im}(A-aI) = \mathbb{C}^n$, car A n'est pas dans $V_{B_0,k}$. D'après ce qui précède on a donc, puisque $\dim(C_r^{reg}) = 2n^2$

$$\mathrm{codim}_{C_r^{reg}}(C_r^{reg} \setminus \ker(F_{|U})) \ \geq \ r-1 \ \geq \ 2 \ .$$

La troisième inégalité est immédiate. Ceci achève la démonstration du lemme 5.13. □

On démontre maintenant la proposition 5.12. On a $\mathcal{O}^*(C_r^{reg}) = \mathcal{O}^*(\ker(F_{|U}))$, $\mathrm{Pic}(C_r^{reg}) = \mathrm{Pic}(\ker(F_{|U}))$ et $\ker(F_{|U})$ est un fibré vectoriel sur U, donc $\mathcal{O}^*(C_r^{reg}) \simeq \mathcal{O}^*(U)$ et $\mathrm{Pic}(C_r^{reg}) \simeq \mathrm{Pic}(U)$. Mais U est un ouvert de $M(n) \times S$ dont le complémentaire est de codimension au moins 2, donc $\mathcal{O}^*(U) = \mathbb{C}^*$ et $\mathrm{Pic}(U) = 0$, ce qui démontre la proposition 5.12.

Les propositions 5.10 et 5.11 sont donc aussi démontrées.

5.2.3 – Démonstration de la proposition 5.4

Prouvons d'abord **a-**, c'est-à-dire que $\mathcal{O}^*(\mathcal{M}_z \cup \mathcal{M}_{z'}) = \mathbb{C}^*$. Soit Δ l'hypersurface de $\mathcal{M}_z \cup \mathcal{M}_{z'}$ définie par l'équation $\phi(u,v) = \det(t_u(z)) = 0$. Il suffit, d'après la proposition 5.10 de montrer que Δ est non vide. Soit $((A_1, A_2, B_0), C) \in \mathcal{M}_{z'}$, avec $A_1 = t_u(z)t_u(z')^{-1}$ (cf. 5.2.2, on a un isomorphisme $\mathcal{M}_{z'} \simeq C_r \times \mathrm{GL}(n)$). Alors, si a_1 est une valeur propre de A_1, $((A_1 - a_1 I, A_2, B_0), C)$ est un élément de $\mathcal{M}_{z'} \cap \Delta$, donc $\Delta \neq \emptyset$.

Prouvons maintenant **b-**, c'est-à-dire que $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_z \cup \mathcal{M}_{z'}) = 0$. Il suffit de montrer que Δ est une hypersurface intègre de $\mathcal{M}_{z'}$. En effet, on a dans ce cas une suite exacte

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathrm{Pic}(\mathcal{M}_z \cup \mathcal{M}_{z'}) \xrightarrow{restr.} \mathrm{Pic}(\mathcal{M}_z) = 0$$

le morphisme i associant à 1 le faisceau d'idéaux de Δ. Or celui-ci est trivial car Δ est défini par une équation algébrique. Donc $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_z \cup \mathcal{M}_{z'}) = 0$.

Montrons que Δ est une hypersurface intègre de $\mathcal{M}_z$. Avec les notations du lemme 5.13, cela découle du fait que la sous-variété de $\ker(F_{|U})$ définie par l'équation $\det(A) = 0$ est une hypersurface intègre de $\ker(F_{|U})$.

Ceci achève la démonstration de la proposition 5.4.

5.3 – Le cas des variétés de hauteur nulle

La variété $M(r, c_1, c_2)$ est de hauteur nulle si et seulement si $r = n$. Dans ce cas, $\mathcal{M}_s$ est un ouvert de l'espace affine $\mathrm{Hom}(\wedge^2 Q^* \otimes \mathbb{C}^n, Q^* \otimes \mathbb{C}^n)$, donc $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_s) = 0$, d'où la surjectivité du morphisme $\pi_{\mathcal{M}}$. Ceci achève la démonstration de la proposition 4.1 dans le cas où $c_1 = 0$, $r > 2$.

6. Le cas $-r < c_1 < 0$, $r > 2$.

Il s'agit toujours de démontrer la proposition 3.1 dans les cas précisés dans le titre. Pour cela, on utilise une description due à G. Ellingsrud ([8]) d'un ouvert U de $M_s(r, c_1, c_2)$. On montre que le morphisme de groupes $\mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}}) \to \mathrm{Pic}(U)$ induit par $\pi_{\mathcal{M}}$ est surjectif. Dans certains cas, $M_s(r, c_1, c_2) \backslash U$ peut contenir des hypersurfaces de $M(r, c_1, c_2)$. On montrera alors que les faisceaux d'idéaux de ces hypersurfaces proviennent de $\mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}})$. La démonstration de quelques résultats concernant les cas $c_1 = -1$ ou $1 - r$ sera effectuée dans le chapitre 7.

6.1 – La construction d'Ellingsrud et son utilisation

6.1.1 – Fibrés sur $\mathbb{P}_2$ et éclatements de $\mathbb{P}_2$

Soient r, c_1, c_2 des entiers tels que $-r < c_1 < 0$, $r > 2$, et que $M(r, c_1, c_2)$ soit de dimension positive. On donne ici une description de certains ouverts de $M(r, c_1, c_2)$, tirée de [8].

Soient $x \in \mathbb{P}_2$ et U_x l'ouvert de $M_s(r, c_1, c_2)$ constitué des fibrés vectoriels dont la restriction à toute droite passant par x est rigide. Dans le cas où c_1 est distinct de -1 et $1 - r$, on verra que $\mathrm{codim}_{M_s(r,c_1,c_2)}(M_s(r, c_1, c_2) \backslash U_x) \geq 2$. Soit P_x l'éclatement de $\mathbb{P}_2$ en x. C'est la sous-variété de $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2^*$ des couples (y, ℓ), ℓ étant une droite de $\mathbb{P}_2$ contenant x et y. Soient $p : P_x \to \mathbb{P}_2$ et $q : P_x \to L$ les projections, L désignant la droite de $\mathbb{P}_2^*$ définie par x. La fibre $p^{-1}(x)$ s'identifie à L (à l'aide de q). Soit E un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}_2$, de type de décomposition $(-1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0)$ sur toute droite passant par x, de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. Posons

$$A \;=\; q_*(p^*(E)), \quad B \;=\; \big(q_*(p^*(E^*(-1))\big)^* \;.$$

Ce sont des fibrés vectoriels sur L, et on a sur P_x une suite exacte

$$0 \longrightarrow q^*(A) \longrightarrow p^*(E) \longrightarrow q^*(B) \otimes p^*(\mathcal{O}(-1)) \longrightarrow 0 \;.$$

On a

$$\mathrm{rg}(A) = r + c_1,\ \mathrm{rg}(B) = -c_1,\ c_1(A) = -c_2 + \frac{c_1(c_1+1)}{2} = -c_1(B) \;.$$

De plus, si E est stable, A est de type de décomposition négatif et B de type de décomposition positif. Il n'y a donc qu'un nombre fini de choix possibles pour les types de décomposition de A et B.

Réciproquement, on considère des fibrés vectoriels A, B sur $\mathbb{P}_1$ possédant les propriétés précédentes, c'est-à-dire que

$$\mathrm{rg}(A) = r + c_1,\ \mathrm{rg}(B) = -c_1,\ c_1(A) = -c_2 + \frac{c_1(c_1+1)}{2} = -c_1(B) \;,$$

que A est de type de décomposition négatif, et B de type de décomposition positif. Les constructions qui vont suivre ne dépendent que des classes d'isomorphisme de A et B, c'est-à-dire de leurs types de décomposition (cf. 2.4.3), notés respectivement α, β.

Il existe un fibré vectoriel sur L, unique à isomorphisme près, rigide et de rang et première classe de Chern donnés. On notera A_0 et B_0 des fibrés rigides sur L tels que

$$\mathrm{rg}(A_0) = r + c_1,\ \mathrm{rg}(B_0) = -c_1,\ c_1(A_0) = -c_2 + \frac{c_1(c_1+1)}{2} = -c_1(B_0)\ ,$$

Les types de décomposition de A_0 et B_0 seront notés respectivement α_0, β_0.

Les extensions

$$0 \longrightarrow q^*(A) \longrightarrow p^*(E) \longrightarrow q^*(B) \otimes p^*(\mathcal{O}(-1)) \longrightarrow 0$$

sont classifiées par $V_{\alpha\beta} = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{P_x}}(q^*(B) \otimes p^*(\mathcal{O}(-1)), q^*(A))$. Sur $V_{\alpha\beta} \times P_x$ existe une *extension universelle*

$$0 \longrightarrow p_1^*(q^*(A)) \longrightarrow F \longrightarrow p_1^*(q^*(B) \otimes p^*(\mathcal{O}(-1))) \longrightarrow 0\ ,$$

p_1 désignant la projection $V_{\alpha\beta} \times P_x \to P_x$. Sur $V_{\alpha\beta}$ agit le groupe $G = (\mathrm{Aut}(A) \times \mathrm{Aut}(B))/\mathbb{C}^*$, et pour tous $\epsilon, \epsilon' \in V_{\alpha,\beta}$, on a $F_\epsilon \simeq F_{\epsilon'}$ si et seulement si ϵ, ϵ' sont dans la même G-orbite. Soit $V^s_{\alpha\beta}$ l'ouvert de $V_{\alpha\beta}$ des points ϵ tels que F_ϵ provienne d'un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}_2$ (cela revient à dire que la restriction de F_ϵ à $p^{-1}(x)$ est triviale) qui soit stable. Alors G agit librement sur $V^s_{\alpha\beta}$. Soit F' le fibré vectoriel sur $V^s_{\alpha\beta} \times \mathbb{P}_2$ déduit de F, c'est-à-dire l'image directe par $I \times p$ de la restriction de F à $V^s_{\alpha\beta} \times P_x$. On déduit de F' un morphisme $f_{\alpha\beta} : V^s_{\alpha\beta} \to M(r, c_1, c_2)$ dont les fibres sont les orbites de l'action de G.

6.1.2 – Plan des démonstrations

On verra que $X_0 = \mathrm{im}(f_{\alpha_0\beta_0})$ est un ouvert de $M_s(r, c_1, c_2)$. On définit dans 6.6 un morphisme $X_0 \to \mathcal{M}$ compatible avec un morphisme de groupes $\psi : G \to G_{\mathcal{M}}$. On déduit de ψ un morphisme de groupes $\overline{\psi} : \mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}}) \to \mathrm{Char}(G)$.

D'autre part, on construira un morphisme naturel surjectif $G_1 \to \mathrm{Pic}(X_0)$, G_1 désignant un quotient de $\mathrm{Char}(G)$, et ce morphisme est un isomorphisme si $M(r, c_1, c_2)$ n'est pas de hauteur nulle. Le composé

$$\mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}}) \longrightarrow G_1 \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_0)$$

est le morphisme déduit de $\pi_{\mathcal{M}}$. Il est surjectif. On en déduira la proposition 4.1 dans 6.8.

Dans certains cas $U_x \backslash X_0$ est constitué d'un certain nombre d'hypersurfaces irréductibles de la forme $\overline{\mathrm{im}(f_{\alpha\beta})}$, et on prouvera que leurs faisceaux d'idéaux proviennent de $\mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}})$ (6.9). Si $c_1 \neq -1$ et $c_1 \neq 1 - r$, $M_s(r, c_1, c_2) \backslash U_x$ est de codimension au moins 2 et sinon c'est une hypersurface et on montrera dans le chapitre 7 que son faisceau d'idéaux provient de $\mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}})$.

6.1.3 – Dimension des $\overline{\mathrm{im}(f_{\alpha\beta})}$

Un calcul élémentaire donne si $V^s_{\alpha\beta}$ n'est pas vide

$$\dim(\overline{\mathrm{im}(f_{\alpha\beta})}) \ = \ \dim(M(r, c_1, c_2)) - \dim(\mathrm{Ext}^1(A, A)) - \dim(\mathrm{Ext}^1(B, B))\ .$$

On peut aussi déduire ce résultat du

Lemme 6.1 – *Soit* $0 \to q^*(A) \to \mathcal{E} \to q^*(B) \otimes p^*(\mathcal{O}(-1)) \to 0$ *une suite exacte. Soit* $h : V^s_{\alpha\beta} \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ *l'application déduite de cette suite. Alors on a un isomorphisme*

$$\mathrm{coker}(h) \;\simeq\; \mathrm{Ext}^1(A, A) \oplus \mathrm{Ext}^1(B, B)\ .$$

Démonstration. On considère la suite spectrale $E^{m,n}_r$ associé à la filtration $q^*(A) \subset \mathcal{E}$ de $\mathcal{E}$, convergeant vers $\mathrm{Ext}^{m+n}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$. On va décrire les termes de niveau E_1 pouvant éventuellement être non nuls. On a $\mathrm{Ext}^1(q^*(A), q^*(B) \otimes p^*(\mathcal{O}(-1))) = \{0\}$ (cela se voit en utilisant le foncteur q^*). De même, $\mathrm{Ext}^2(q^*(B) \otimes p^*(\mathcal{O}(-1)), q^*(A)) = \mathrm{Hom}(q^*(B) \otimes p^*(\mathcal{O}(-1)), q^*(A)) = \{0\}$. Les termes $E^{m,n}_1$ éventuellement non nuls qui restent sont figurés ci-dessous

$$\begin{array}{ccccc}
 & \uparrow{\scriptstyle n} & & & \\
 & \mathrm{Ext}^1(A,A) \oplus \mathrm{Ext}^1(B,B) & & & \\
 & | & & & \\
\bullet \text{ —— } & \mathrm{Hom}(A,A) \oplus \mathrm{Hom}(B,B) & \text{————} & V^s_{\alpha\beta} & \xrightarrow{m} \\
 & | & & &
\end{array}$$

On en déduit une suite exacte

$$V^s_{\alpha\beta} \xrightarrow{h} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(A, A) \oplus \mathrm{Ext}^1(B, B) \longrightarrow 0\ ,$$

ce qui démontre le lemme 6.1. □

6.2 – Caractérisation des fibrés provenant de $\mathbb{P}_2$

Soit $H_{\alpha\beta}$ l'ensemble des $\epsilon \in V_{\alpha\beta}$ tels que F_ϵ ne provienne pas d'un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}_2$. C'est l'ensemble des ϵ tels que $h^0(p^{-1}(x), F_\epsilon \otimes \mathcal{O}_{p^{-1}(x)}(-1)) \neq 0$. D'après le théorème de semi-continuité, c'est donc une sous-variété fermée de $V_{\alpha\beta}$. Soit ϵ le point de $V_{\alpha\beta} \backslash H_{\alpha\beta}$ correspondant à l'extension du lemme 6.1. Alors l'application $h : V_{\alpha\beta} \to \mathrm{Ext}^1(F_\epsilon, F_\epsilon)$ n'est autre que le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer de F_ϵ au point ϵ (cf. Newstead [23], Appendix). On déduit du lemme 6.1 que si A et B sont rigides (c'est-à dire $A = A_0$, $B = B_0$), F est une déformation complète de F_ϵ.

Lemme 6.2 – *On suppose que* $\dim(\mathrm{Ext}^1(A, A)) + \dim(\mathrm{Ext}^1(B, B)) \leq 1$. *Alors* $H_{\alpha\beta} \neq V_{\alpha\beta}$.

Démonstration. Soit $\epsilon \in V_{\alpha\beta}$. La restriction à $p^{-1}(x)$ de l'extension donnée par ϵ donne une suite exacte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow F_{\epsilon|p^{-1}(x)} \longrightarrow B \longrightarrow 0\ . \tag{3}$$

À ϵ on a donc associé une extension de B par A. Le morphisme induit $V_{\alpha\beta} \to \mathrm{Ext}^1(B, A)$ est la restriction naturelle. Ce morphisme est surjectif : pour le voir, il suffit de montrer

que si J est le faisceau d'idéaux de $p^{-1}(x)$, on a $h^2(q^*(B^*\otimes A)\otimes p^*(\mathcal{O}(1))\otimes J)=0$. Mais $J=p^*(\mathcal{O}(-1))\otimes q^*(\mathcal{O}(1))$, donc

$$h^2(q^*(B^*\otimes A)\otimes p^*(\mathcal{O}(1))\otimes J) \;=\; h^2(q^*(B^*\otimes A(1))) \;=\; h^2(B^*\otimes A(1)) \;=\; 0\ .$$

Pour démontrer le lemme 6.2, il suffit de trouver un point ϵ de $V_{\alpha\beta}$ tel que $F_{|V_{\alpha\beta}\times p^{-1}(x)}$ soit une déformation complète de $F_{\epsilon|p^{-1}(x)}$. Pour cela, il suffit que le morphisme déduit de (3)

$$\phi : \mathrm{Ext}^1(B,A)\longrightarrow \mathrm{Ext}^1(F_{\epsilon|p^{-1}(x)},F_{\epsilon|p^{-1}(x)})$$

est surjectif. Comme dans le lemme 6.1, on considère la suite spectrale $E_r^{m,n}$ associée à la filtration $A\subset F_{\epsilon|p^{-1}(x)}$, convergeant vers $\mathrm{Ext}^{m+n}(F_{\epsilon|p^{-1}(x)},F_{\epsilon|p^{-1}(x)})$. Elle montre que $\mathrm{coker}(\phi)$ est isomorphe au conoyau du morphisme canonique

$$\psi : \mathrm{Hom}(A,B)\longrightarrow \mathrm{Ext}^1(A,A)\oplus \mathrm{Ext}^1(B,B)$$

défini par l'élément $e(\epsilon)$ de $\mathrm{Ext}^1(B,A)$ déduit de (3) et les accouplements

$$\mathrm{Hom}(A,B)\times \mathrm{Ext}^1(B,A)\longrightarrow \mathrm{Ext}^1(A,A) \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}(A,B)\times \mathrm{Ext}^1(B,A)\longrightarrow \mathrm{Ext}^1(B,B)\ .$$

Il est évident que ϕ est surjectif si A et B sont rigides. On va montrer que c'est aussi le cas si $\dim(\mathrm{Ext}^1(A,A))+\dim(\mathrm{Ext}^1(B,B))=1$, et si ϵ est convenablement choisi. On peut supposer que $\dim(\mathrm{Ext}^1(A,A))=1$ et $\mathrm{Ext}^1(B,B)=\{0\}$ (l'autre cas est analogue). Il faut alors trouver ϵ tel que la multiplication par $e(\epsilon):\mathrm{Hom}(A,B)\to \mathrm{Ext}^1(A,A)$ soit surjective. Pour cela, il suffit d'après (3) qu'on ait $h^1(F_{\epsilon|p^{-1}(x)}\otimes A^*)=0$. C'est le cas si les entiers qui apparaissent dans le type de décomposition de $F_{\epsilon|p^{-1}(x)}$ sont supérieurs ou égaux à -1.

Il reste alors à trouver un ϵ dans $V_{\alpha\beta}$ tel que $F_{\epsilon|p^{-1}(x)}$ soit trivial ou de type de décomposition $(1,0,\dots,0,-1)$. Soit $\epsilon\in V_{\alpha\beta}$ tel que $F_{\epsilon|p^{-1}(x)}$ soit d'un type de décomposition différent des précédents. On a alors $\dim(\mathrm{Ext}^1(F_{\epsilon|p^{-1}(x)},F_{\epsilon|p^{-1}(x)}))\geq 2$. Le morphisme de restriction $\mathrm{Ext}^1(F_\epsilon,F_\epsilon)\to \mathrm{Ext}^1(F_{\epsilon|p^{-1}(x)},F_{\epsilon|p^{-1}(x)})$ est surjectif : pour le voir il suffit de prouver que $\mathrm{Ext}^2(F_\epsilon,F_\epsilon\otimes J)=\{0\}$. Par dualité de Serre sur P_x on a
$\mathrm{Ext}^2(F_\epsilon,F_\epsilon\otimes J)\simeq \mathrm{Hom}(F_\epsilon,F_\epsilon\otimes J^*\otimes\omega)^*$, avec $\omega=p^*(\mathcal{O}(-2))\otimes q^*(\mathcal{O}(-1))$, et
$\mathrm{Hom}(F_\epsilon,F_\epsilon\otimes J^*\otimes\omega)=\mathrm{Hom}(F_\epsilon,F_\epsilon\otimes p^*(\mathcal{O}(-2))\otimes q^*(\mathcal{O}(-1)))=\{0\}$, à cause du type de décomposition de F_ϵ sur une droite de $\mathbb{P}_2$ passant par x.

On en déduit avec le lemme 6.1 que l'image du morphisme de déformation infinitésimale $V_{\alpha\beta}\to \mathrm{Ext}^1(F_{\epsilon|p^{-1}(x)},F_{\epsilon|p^{-1}(x)})$ est de codimension au plus 1. L'étude des déformations des fibrés sur $\mathbb{P}_1$ de [4] (voir aussi [5]) montre que la sous-variété de $V_{\alpha\beta}$ des ϵ' tels que $F_{\epsilon'|p^{-1}(x)}$ ne soit ni trivial ni de type de décomposition $(1,0,\dots,0,-1)$ est de codimension au moins 1 en ϵ. Elle ne peut donc pas être égale à $V_{\alpha\beta}$ tout entier. Ceci achève la démonstration du lemme 6.2. □

Remarque : En fait, il découle de la démonstration du lemme 6.2 que dans tous les cas, pour tout $\epsilon\in V_{\alpha\beta}$, le morphisme canonique $\mathrm{Ext}^1(F_\epsilon,F_\epsilon)\to \mathrm{Ext}^1(F_{\epsilon|p^{-1}(x)},F_{\epsilon|p^{-1}(x)})$ est surjectif. Il en découle que pour tout $\epsilon\in V_{\alpha_0\beta_0}$, $F_{|V_{\alpha_0\beta_0}\times p^{-1}(x)}$ est une déformation complète de $F_{\epsilon|p^{-1}(x)}$.

Corollaire 6.3 : *La sous-variété $H_{\alpha_0\beta_0}$ est une hypersurface irréductible de $V_{\alpha_0\beta_0}$.*

Démonstration. Posons $E_0=\mathcal{O}_L(1)\oplus(r-2)\mathcal{O}_L\oplus\mathcal{O}_L(-1)$. Il découle de la théorie des déformations des fibrés sur $\mathbb{P}_1$ (Brieskorn [4]) et du lemme 6.2 que les $\epsilon\in V_{\alpha_0\beta_0}$ tels que $F_{\epsilon|p^{-1}(x)}$ soit

isomorphe à E_0 constituent une hypersurface lisse X. Pour tout $\epsilon \in V_{\alpha_0\beta_0}$, la suite exacte

$$(4) \qquad 0 \to A_0 \longrightarrow F_{\epsilon|p^{-1}(x)} \longrightarrow B_0 \longrightarrow 0$$

montre que $F_{\epsilon|p^{-1}(x)}$ est trivial si et seulement si l'application $D_\epsilon : H^0(B_0(-1)) \to H^1(A_0(-1))$ déduite de (4) est bijective. Donc $H_{\alpha_0\beta_0}$ est défini par l'équation $\det(D_\epsilon) = 0$, et c'est une hypersurface contenant X. Pour voir que $H_{\alpha_0\beta_0}$ est irréductible, il reste à montrer que $H_{\alpha_0\beta_0}\backslash X$ est de codimension au moins 3 dans $V_{\alpha_0\beta_0}$ (car $H_{\alpha_0\beta_0}$ est une sous-variété homogène). Cela découle du fait que si $F_{\epsilon|p^{-1}(x)}$ n'est ni trivial ni isomorphe à E_0 on a $\dim(\mathrm{Ext}^1(F_{\epsilon|p^{-1}(x)}, F_{\epsilon|p^{-1}(x)})) \geq 3$. Ceci démontre le corollaire 6.3. □

6.3 – Existence de fibrés stables

Lemme 6.4 : *Si $M(r, c_1, c_2)$ n'est pas de hauteur nulle, et si $\dim(\mathrm{Ext}^1(A, A)) + \dim(\mathrm{Ext}^1(B, B)) = 1$, $V^s_{\alpha\beta}$ n'est pas vide.*

Démonstration. On a déjà vu que $V_{\alpha\beta} \neq H_{\alpha\beta}$. Il reste à montrer qu'il existe un $\epsilon \in V_{\alpha\beta}\backslash H_{\alpha\beta}$ tel que F'_ϵ soit stable. Soient $\epsilon \in V_{\alpha\beta}\backslash H_{\alpha\beta}$ et (S, s_0) le germe d'une variété lisse tel qu'il existe une déformation semi-universelle F'' de F'_ϵ paramétrée par S avec $F''_{s_0} \simeq F'_\epsilon$. On déduit de F' un morphisme $\Phi : U \to S$, U désignant le germe de $V_{\alpha\beta}$ en ϵ, et on a $\Phi(\epsilon) = s_0$, $\Phi^*(F'') \simeq F'_{|U\times\mathbb{P}_2}$. On a $T_{s_0}S = \mathrm{Ext}^1(F'_\epsilon, F'_\epsilon)$, et d'après le lemme 6.1, l'image de l'application tangente $T_\epsilon V_{\alpha\beta} \to T_{s_0}S$ est un hyperplan.

La sous-variété Z des points s tels que F''_s ne soit pas semi-stable est de codimension au moins 2, d'après les propositions 2.2 et 2.4. Donc $\mathrm{im}(\Phi)$ n'est pas contenu dans Z. Il en découle qu'il existe $\epsilon' \in V_{\alpha\beta}\backslash H_{\alpha\beta}$ tel que F'_ϵ soit stable. Ceci démontre le lemme 6.4. □

En utilisant la proposition 2.4 on obtient aussi le

Corollaire 6.5 : *Si $M(r, c_1, c_2)$ n'est pas de hauteur nulle, on a $\mathrm{codim}_{V_{\alpha_0\beta_0}}\left((V_{\alpha_0\beta_0}\backslash H_{\alpha_0\beta_0})\backslash V^s_{\alpha_0\beta_0}\right) \geq 2$.*

6.4 – Caractères du groupe G

On va déterminer le groupe des caractères du groupe

$$G \;=\; (\mathrm{Aut}(A_0) \times \mathrm{Aut}(B_0))/\mathbb{C}^* \;.$$

On s'en sert plus loin pour étudier $\mathrm{Pic}(\mathrm{im}(f_{\alpha_0\beta_0}))$. On peut écrire $A_0 = a\mathcal{O}(k) \oplus a_0\mathcal{O}(k+1)$, $B_0 = b\mathcal{O}(k') \oplus b_0\mathcal{O}(k'+1)$, avec $a > 0$, $b > 0$. Les automorphismes de A_0 s'identifient aux matrices du type

$$M \;=\; \begin{pmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{pmatrix} \;,$$

avec $X \in \mathrm{GL}(a)$, $Y \in \mathrm{GL}(a_0)$, Z étant un morphisme $a\mathcal{O}(k) \to a_0\mathcal{O}(k+1)$. Le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(A_0)$ constitué des M telles que X et Y soient les matrices identités est un espace vectoriel,

donc tout morphisme $\mathrm{Aut}(A_0) \to \mathbb{C}^*$ est constant sur ce sous-groupe. On en déduit que

$$\mathrm{Char}(\mathrm{Aut}(A_0)) \;=\; \mathrm{Char}(\mathrm{GL}(a) \times \mathrm{GL}(a_0)) \ ,$$

et de même

$$\mathrm{Char}(\mathrm{Aut}(B_0)) \;=\; \mathrm{Char}(\mathrm{GL}(b) \times \mathrm{GL}(b_0)) \ .$$

Supposons que a_0 et b_0 soient non nuls. Alors $\mathrm{Char}(G)$ est constitué des morphismes

$$\begin{aligned} \phi_{s,t,u,v} : (\mathrm{Aut}(A_0) \times \mathrm{Aut}(B_0))/\mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ \mathbb{C}^* \left(\begin{pmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X' & Z' \\ 0 & Y' \end{pmatrix} \right) &\longmapsto \det(X)^s \det(Y)^t \det(X')^u \det(Y')^v \end{aligned}$$

s, t, u, v étant des entiers tels que $sa + ta_0 + ub + vb_0 = 0$. Donc $\mathrm{Char}(G)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^3$. Si un des entiers a_0, b_0 est nul (resp. les deux), alors $\mathrm{Char}(G)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$ (resp. $\mathbb{Z}$), et on définit de même les caractères $\phi_{s,t,u}$ (resp. $\phi_{s,t}$).

6.5 – Suites exactes canoniques

Elles sont utilisées dans 6.6 pour définir un morphisme $V^s_{\alpha_0\beta_0} \to \mathcal{M}$.

Lemme 6.6 : *Soit $\epsilon \in V^s_{\alpha\beta}$. Alors on a des suites exactes de fibrés vectoriels sur L*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \mathcal{O}_L(-1) \otimes H^1(F'_\epsilon(-1)) \xrightarrow{u} \mathcal{O}_L \otimes H^1(F'_\epsilon) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_L(-1) \otimes H^1(F'_\epsilon(-2)) \xrightarrow{v} \mathcal{O}_L \otimes H^1(F'_\epsilon(-1)) \longrightarrow B(-1) \longrightarrow 0,$$

u et v étant les morphismes canoniques.

Démonstration. Pour définir u et v on remarque que $H^0(\mathcal{O}_L(1))^* \subset H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1))$. Considérons le complexe de Kronecker de F'_ϵ (cf. 2.6) :

$$K^\bullet : \wedge^2 Q^* \otimes H^1(F'_\epsilon(-2)) \xrightarrow{\gamma} Q^* \otimes H^1(F'_\epsilon(-1)) \xrightarrow{\nu} \mathcal{O} \otimes H^1(F'_\epsilon).$$

Le morphisme de faisceaux γ est injectif, ν est surjectif, et $F'_\epsilon \simeq \ker(\nu)/\operatorname{im}(\gamma)$. De cette suite exacte on déduit les suivantes sur P_x

$$0 \longrightarrow p^*(\wedge^2 Q^*) \otimes H^1(F'_\epsilon(-2)) \longrightarrow p^*(Q^*) \otimes H^1(F'_\epsilon(-1)) \longrightarrow p^*(\mathrm{coker}(\gamma)) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow p^*(F'_\epsilon) \longrightarrow p^*(\mathrm{coker}(\gamma)) \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H^1(F'_\epsilon) \longrightarrow 0.$$

De la suite exacte $0 \to q^*(A) \to p^*(F'_\epsilon) \to q^*(B) \otimes p^*(\mathcal{O}(-1)) \to 0$ on déduit $q_*(p^*(F'_\epsilon)) \simeq A$, $R^1 q_*(p^*(F'_\epsilon)) = 0$. En prenant l'image directe sur L des suites exactes sur P_x précédentes, on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow q_*(p^*(F'_\epsilon)) \longrightarrow q_*(p^*(\mathrm{coker}(\gamma))) \longrightarrow \mathcal{O}_L \otimes H^1(F'_\epsilon) \longrightarrow 0,$$

et l'isomorphisme $q_*(p^*(\mathrm{coker}(\gamma))) \simeq \mathcal{O}(-1) \otimes H^1(F'_\epsilon(-1))$. On en déduit la première suite exacte du lemme 6.6. La seconde s'obtient de manière analogue. $\square$

On déduit du lemme 6.6 les isomorphismes canoniques

$$(5)\quad H^1(F'_\epsilon(-2)) \simeq H^0(B(-2)),\ H^1(F'_\epsilon) \simeq H^1(A),\ H^1(F'_\epsilon(-1)) \simeq H^1(A(-1)) \simeq H^0(B(-1)).$$

Notons qu'on peut les retrouver directement en partant de la suite exacte
$0 \to q^*(A) \to p^*(F'_\epsilon) \to q^*(B) \otimes p^*(\mathcal{O}(-1)) \to 0.$

6.6 – Lien avec les complexes de Kronecker

Rappelons que $\mathcal{M}$ désigne la variété des complexes de Kronecker semi-stables associée à $M(r, c_1, c_2)$, $\mathcal{M}_s$ l'ouvert de $\mathcal{M}$ des complexes stables. Supposons que les complexes de Kronecker de $\mathcal{M}$ soient du type

$$\wedge^2 Q^* \otimes H_{-1} \longrightarrow Q^* \otimes H_0 \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H_1\ .$$

D'après (5) il existe des isomorphismes

$$H_{-1} \simeq H^0(B_0(-2)),\ H_0 \simeq H^0(B_0(-1)),\ H_1 \simeq H^1(A_0)$$

définissant un morphisme $\Phi : V^s_{\alpha_0\beta_0} \to \mathcal{M}_s$, associant à $\epsilon \in V^s_{\alpha_0,\beta_0}$ le complexe de Kronecker de F'_ϵ, compte tenu des isomorphismes (5). Ce morphisme est compatible avec le morphisme de groupes $G \to G_{\mathcal{M}}$ défini par les isomorphismes (5), induisant

$$\begin{aligned} \psi : \mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}}) &\longrightarrow \mathrm{Char}(G) \\ \lambda_{u.v,w} &\longmapsto \phi_{-w(k+1),-w(k+2).vk'+u(k'-1),v(k'+1)+uk'} \end{aligned}$$

(cf. 2.6.2, ceci si a_0 et b_0 sont non nuls, les autres cas étant analogues).

Lemme 6.7 – *Soit χ le caractère de G défini par un générateur de l'idéal de $H_{\alpha_0\beta_0}$ dans $V_{\alpha_0\beta_0}$. Alors le morphisme déduit de ψ, $\psi_0 : \mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}}) \to \mathrm{Char}(G)/\mathbb{Z}\chi$ est surjectif.*

Démonstration. On supposera que a_0 et b_0 sont non nuls, les autres cas étant analogues. Soit f un générateur de l'idéal de $H_{\alpha_0\beta_0}$. On a alors pour tous $g \in G$ et $x \in V_{\alpha_0\beta_0}$, $f(gx) = \chi(g)f(x)$. On reprend les notations de la démonstration du corollaire 6.3. La fonction $\epsilon \mapsto \det(D_\epsilon)$ est une puissance de f (à une constante multiplicative près). Le caractère qui lui est associé est $\phi_{-k,-k-1,-k',-k'-1}$. Il suffit de montrer que le morphisme déduit de ψ, $\psi' : \mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}}) \to \mathrm{Char}(G)/\mathbb{Z}\phi_{-k,-k-1,-k',-k'-1}$ est surjectif. Avec les identifications déjà vues de $\mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}})$ et $\mathrm{Char}(G)$ à des sous-groupes de $\mathbb{Z}^3$ et $\mathbb{Z}^2$ respectivement, on voit que le morphisme

$$\begin{aligned} \mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}}) \oplus \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathrm{Char}(G) \\ (\lambda, n) &\longmapsto \psi(\lambda) + n\phi_{-k,-k-1,-k',-k'-1} \end{aligned}$$

provient de la matrice

$$\begin{pmatrix} -k-1 & 0 & 0 & -k \\ -k-2 & 0 & 0 & -k-1 \\ 0 & k' & k'-1 & -k' \\ 0 & k'+1 & k' & -k'-1 \end{pmatrix}.$$

La surjectivité de ψ' découle du fait que le déterminant de cette matrice est 1. Ceci démontre le lemme 6.7. □

6.7 – Étude de l'image de $f_{\alpha_0\beta_0}$

Posons $X_0 = \mathrm{im}(f_{\alpha_0\beta_0})$. D'après le lemme 6.1, $f_{\alpha_0\beta_0}$ est une submersion, donc X_0 est un ouvert de $M_s(r, c_1, c_2)$.

Lemme 6.8 – *Si $M(r, c_1, c_2)$ n'est pas de hauteur nulle, on a $\mathcal{O}^*(X_0) = \mathbb{C}^*$.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathcal{O}^*(X_0)$. Alors $\alpha_0 = \alpha \circ f_{\alpha_0\beta_0}$ une fonction régulière inversible G-invariante sur $V^s_{\alpha_0\beta_0}$. Soit f un générateur de l'idéal de l'hypersurface $H_{\alpha_0\beta_0}$ de $V_{\alpha_0\beta_0}$. D'après les corollaires 6.3 et 6.5, on peut écrire $\alpha_0 = \delta f^n$, avec $\delta \in \mathbb{C}^*$ et n un entier. Soit χ le caractère de G associé à f ($f(gx) = \chi(g)f(x)$). D'après la démonstration du lemme 6.7, χ est non trivial. Le caractère associé à α_0 est χ^n, donc $\chi^n = 1$ puisque α_0 est G-invariante, d'où $n = 0$. Donc α est constante. Ceci démontre le lemme 6.8. □

Proposition 6.9 – *Si $M(r, c_1, c_2)$ n'est pas de hauteur nulle, il existe un isomorphisme canonique $\mathrm{Char}(G)/\mathbb{Z}\chi \to \mathrm{Pic}(X_0)$, χ désignant le caractère de G défini par $H_{\alpha_0\beta_0}$.*

Lemme 6.10 – *Soit U un ouvert de X_0. Alors le morphisme canonique $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(f^{-1}_{\alpha_0\beta_0}(U))^G$ est surjectif.*

Démonstration. Soit $\widetilde{X}_0$ la variété des triplets (x_0, u, v), avec $x_0 \in \pi^{-1}(X_0) \subset \mathcal{M}$, u (resp. v) étant un isomorphisme $q_*(p^*(E)) \simeq A_0$ (resp. $R^1q_*(p^*(E(-1))) \simeq B_0(-1)$), E désignant la cohomologie en degré 0 de x_0. Sur $\widetilde{X}_0$ opèrent les groupes G et $G_{\mathcal{M}}$. La projection $\widetilde{X}_0 \to \pi^{-1}(X_0)$ est localement triviale : cela découle du fait que si V désigne la cohomologie du complexe de Kronecker universel sur $\pi^{-1}(X_0) \times \mathbb{P}_2$, il existe des trivialisations locales des fibrés $p_{0*}(\mathcal{H}om(p_L^*(A_0), X_1))$ et $p_{0*}(\mathcal{H}om(p_L^*(B_0(-1)), X_2))$, p_0 et p_L désignant respectivement les projections $\pi^{-1}(X_0) \times L \to \pi^{-1}(X_0)$ et $\pi^{-1}(X_0) \times L \to L$, et $X_1 = (I \times q)_*\big((I \times p)^*(V)\big)$, $X_2 = R^1(I \times q)_*\big((I \times p)^*(V(-1))\big)$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}_0 & \xrightarrow{p_1} & \pi^{-1}(X_0) \\ {\scriptstyle q_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ V^s_{\alpha_0\beta_0} & \xrightarrow{f_{\alpha_0\beta_0}} & X_0 \end{array}$$

q_1 associant à (x_0, u, v) l'extension

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & q^*(A_0) & \longrightarrow & p^*(E) & \longrightarrow & q^*(B_0) \otimes p^*(\mathcal{O}(-1)) & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \simeq}\downarrow{\scriptstyle u} & & & & {\scriptstyle \simeq}\downarrow{\scriptstyle v} & & \\ & & q^*(q_*(p^*(E))) & & & & q^*(R^1q_*(p^*(E(-1))))(1) \otimes p^*(\mathcal{O}(-1)) & & \end{array}$$

E désignant la cohomologie de x_0 en degré 0. Soit ϕ une fonction régulière G-invariante sur $f^{-1}_{\alpha_0\beta_0}(U)$. On en déduit une application $\overline{\phi} : U \to \mathbb{C}$. Il faut montrer qu'elle est régulière. Pour cela, il suffit de prouver que $\overline{\phi} \circ \pi$ est régulière sur $\pi^{-1}(U)$ (car π est un bon quotient par $G_{\mathcal{M}}$, cf. 2.6). Puisque p_1 est localement triviale, il suffit de montrer que $\overline{\phi} \circ \pi \circ p_1$ est régulière. Mais on a $\overline{\phi} \circ \pi \circ p_1 = \phi \circ f_{\alpha_0\beta_0} \circ q_1 = \phi \circ q_1$, donc $\overline{\phi} \circ \pi \circ p_1$ est bien régulière. Ceci démontre le lemme 6.10. □

Démontrons maintenant la proposition 6.9. On définit d'abord un morphisme de groupes $\theta : \mathrm{Pic}(X_0) \to \mathrm{Char}(G)/\mathbb{Z}\chi$. Soit $L \in \mathrm{Pic}(X_0)$. Le fibré en droites $f^*_{\alpha_0\beta_0}(L)$ est trivial, et muni d'une structure de G-fibré. À tout isomorphisme $f^*_{\alpha_0\beta_0}(L) \simeq \mathcal{O}_{V^s_{\alpha_0\beta_0}}$ on associe donc une structure de G-fibré sur $\mathcal{O}_{V^s_{\alpha_0\beta_0}}$, c'est à dire un caractère de G. Ces structures de G-fibré diffèrent d'un automorphisme de $\mathcal{O}_{V^s_{\alpha_0\beta_0}}$, c'est à dire que les caractères qu'ils définissent forment une classe d'équivalence modulo $\mathbb{Z}\chi$, qui est par définition $\theta(L)$. Il suffit maintenant de montrer que θ est un isomorphisme.

On va voir d'abord que θ est surjectif. Soit $\eta \in \mathrm{Char}(G)/\mathbb{Z}\chi$. On peut d'après le lemme 6.7 écrire $\eta = \psi_0(\lambda)$, avec $\lambda \in \mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}})$. Le caractère λ définit un fibré en droites L sur X_0, et $\theta(L) = \eta$.

Montrons maintenant que θ est injectif. Soit $L \in \ker(\theta)$. Un G-isomorphisme $h : f^*_{\alpha_0\beta_0}(L) \to \mathcal{O}_{V^s_{\alpha_0\beta_0}}$ induit un isomorphisme de fibrés vectoriels "ensembliste" $\overline{h} : L \to \mathcal{O}_{X_0}$. Il faut montrer que c'est un isomorphisme algébrique. Soit U un ouvert de X_0 tel qu'on ait une trivialisation $L_{|U} \simeq \mathcal{O}_U$. Alors $h_{|U}$ est défini par un élément G-invariant de $\mathcal{O}^*(f_{\alpha_0\beta_0}(U))$. D'après le lemme 6.8, $\overline{h}_{|U}$, qu'on peut voir comme une application $U \to \mathbb{C}^*$, est régulière. Ceci montre que $\overline{h}$ est bien un isomorphisme algébrique. La proposition 6.9 est donc démontrée.

On démontre de même la

Proposition 6.11 – *Si $M(r, c_1, c_2)$ est de hauteur nulle, il existe un morphisme canonique surjectif* $\mathrm{Char}(G)/\mathbb{Z}\chi \to \mathrm{Pic}(X_0)$, *$\chi$ désignant le caractère de G défini par $H_{\alpha_0\beta_0}$.*

6.8 – Démonstration de la proposition 4.1

6.8.1 – Rappelons que U_x désigne l'ouvert de $M_s(r, c_1, c_2)$ correspondant aux fibrés vectoriels dont la restriction à toute droite passant par x est rigide. Soit M_0 l'ouvert de $M_s(r, c_1, c_2)$ correspondant aux faisceaux localement libres. Puisque $r > 2$, on a d'après la proposition (2.8) de [7], $\mathrm{codim}_{M_s(r,c_1,c_2)}(M_s(r, c_1, c_2)\backslash M_0) \geq 2$. On démontrera dans le chapitre 7 la

Proposition 6.12 – *Si $c_1 = 1 - r$ ou -1, et $r > 2$, $M_s(r, c_1, c_2)\backslash U_x$ contient une unique hypersurface intègre K_0. Le fibré en droite Λ_0 associé à K_0 appartient à l'image de $\pi_{\mathcal{M}}$.*

Si $1 - r < c_1 < -1$, on a d'après [5], $\mathrm{codim}_{M_0}(M_0\backslash U_x) \geq 2$. Examinons maintenant U_x. Rappelons qu'on a

$$A_0 = a\mathcal{O}(k) \oplus a_0\mathcal{O}(k+1), \quad B_0 = b\mathcal{O}(k') \oplus b_0\mathcal{O}(k'+1) \ .$$

avec $a > 0, b > 0$. Si $a_0 > 0$ et $b_0 > 0$, si A n'est pas isomorphe à A_0, ou si B n'est pas isomorphe à B_0, on a $\dim(\mathrm{Ext}^1(A, A)) + \dim(\mathrm{Ext}^1(B, B)) \geq 2$, donc d'après le lemme 6.1, U_x étant la réunion de tous les $\mathrm{im}(f_{\alpha\beta})$, on a $\mathrm{codim}_{U_x}(U_x\backslash X_0) \geq 2$ (avec $X_0 = \mathrm{im}(f_{\alpha_0\beta_0})$ comme dans 6.7).

Si $a_0 = 0$ et $a > 1$, on note α_1 le type de décomposition $(k+1, k, \ldots, k, k-1)$. Alors $K_1 = \overline{\mathrm{im}(f_{\alpha_1\beta_0})}$ est une hypersurface irréductible de U_x. Soit Λ_1 le fibré en droites sur U_x associé à K_1.

Si $b_0 = 0$ et $b > 1$, on définit de même le type de décomposition β_1, l'hypersurface irréductible K_2 de U_x et l'élément Λ_2 de $\mathrm{Pic}(U_x)$ associé.

Si $a_0 = 0$, $a > 1$ et si $b_0 > 0$ ou $b_0 = 0$, $b = 1$, on a $\mathrm{codim}_{U_x}(U_x \backslash (X_0 \cup K_1)) \geq 2$.

Si $b_0 = 0$, $b > 1$ et si $a_0 > 0$, ou $a_0 = 0$, $a = 1$, on a $\mathrm{codim}_{U_x}(U_x \backslash (X_0 \cup K_2)) \geq 2$.

Enfin, si $a_0 = 0$, $a > 1$, $b_0 = 0$ et $b > 1$, on a $\mathrm{codim}_{U_x}(U_x \backslash (X_0 \cup K_1 \cup K_2)) \geq 2$.

6.8.2 – On démontrera plus loin les assertions suivantes : *soit π'_M le morphisme canonique* $\mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}}) \to \mathrm{Pic}(U_x)$. *Alors*

(i) Si $a_0 = 0$, $a > 1$, on a $\Lambda_1 \in \mathrm{im}(\pi'_M)$.

(ii) Si $b_0 = 0$, $b > 1$, on a $\Lambda_2 \in \mathrm{im}(\pi'_M)$.

Démontrons maintenant la proposition 4.1. La surjectivité de $\pi_{\mathcal{M}}$ découle immédiatement de (i), du lemme 6.7 et des propositions 6.9, 6.11, 6.12. Il reste à montrer que si $M(r, c_1, c_2)$ n'est pas de hauteur nulle, $\pi_{\mathcal{M}}$ est un isomorphisme. Cela revient à prouver, $\pi_{\mathcal{M}}$ étant surjectif, que $\mathrm{Pic}(M_0)$ contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^2$.

Supposons que $a_0 > 0$ et $b_0 > 0$. Dans ce cas, $\mathrm{Pic}(X_0)$ est isomorphe à $\mathrm{Char}(G)/\mathbb{Z}\chi$, qui contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^2$, ainsi par conséquent que $\mathrm{Pic}(M_0)$.

Supposons que $a_0 = 0$, $a > 1$ et $b_0 > 0$. Alors $\mathrm{Pic}(X_0) \simeq \mathrm{Char}(G)/\mathbb{Z}\chi$, qui contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$. Il suffit donc de montrer que le sous-groupe de $\mathrm{Pic}(U_x)$ engendré par Λ_1 est sans torsion. Dans le cas contraire, on en déduirait une fonction régulière sur U_x s'annulant précisément sur K_1, et cette fonction induirait une fonction régulière inversible non constante sur X_0. Ceci est impossible d'après le lemme 6.8. Donc $\mathrm{Pic}(M_0)$ contient bien un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^2$.

Le cas $b_0 = 0$, $b > 1$ et $a_0 > 0$ est analogue au précédent.

Si $a_0 = b_0 = 0$, $a > 1$ et $b > 1$, on procède comme dans les cas précédents, en considérant Λ_1, Λ_2 et en utilisant le lemme 6.8.

Les cas où $a = 1$ ou $b = 1$ sont analogues. On utilise en plus Λ_0 et la proposition 6.12.

6.9 – Étude de Λ_1 et Λ_2

On va démontrer les assertions (i) et (ii) de 6.8.2.

On utilise ici les résultats de 2.7. On ne démontrera que (i), (ii) étant analogue. Soit V la cohomologie du complexe de Kronecker universel sur $\pi^{-1}(U_x) \times \mathbb{P}_2$. Comme dans le lemme 6.6 on a une suite exacte sur $\pi^{-1}(U_x) \times L$

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow p_L^*(\mathcal{O}_L(-1)) \otimes H_{-1} \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H_0 \longrightarrow 0 \ ,$$

avec $W = (I \times q)_*\big((I \times p)^*(V)\big)$, p_L désignant la projection $\pi^{-1}(U_x) \times L \to L$. La sous-variété $\pi^{-1}(K_1)$ est précisément l'ensemble des points y tels que W_y ne soit pas rigide. Rappelons que $A_0 = a\mathcal{O}_L(k)$. Par conséquent, W_y n'est pas rigide si et seulement si $h^0(W_y(-k-1)) \neq 0$. Il en découle que $\pi^{-1}(K_1)$ est le support du schéma de saut (cf. 2.7) $Z = Z^1(W \otimes p_L^*(\mathcal{O}_L(-k-1)))$.

On va montrer que $\pi^{-1}(K_1)$ est intègre. On sait déjà que $\pi^{-1}(K_1)$ est irréductible, et il suffit de prouver que si $y \in \mathrm{im}(f_{\alpha_1\beta_0})$, Z est lisse en y. Pour cela il suffit de montrer que l'application canonique

$$d_s : T_y\mathcal{M} \longrightarrow L(H^0(W_y(-k-1)), H^1(W_y(-k-1)))$$

est surjective. Mais d_s est la composée du morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer $\omega : T_y\mathcal{M} \to \mathrm{Ext}^1(V_y, V_y)$ et des morphismes canoniques

$$\theta : \mathrm{Ext}^1(V_y, V_y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(W_y, W_y) \ ,$$

$$\eta : \mathrm{Ext}^1(W_y, W_y) \longrightarrow L(H^0(W_y(-k-1)), H^1(W_y(-k-1))) \ .$$

On sait que ω est surjectif, et θ aussi d'après le lemme 6.1. La surjectivité de η découle du type de décomposition de $W_y(-k-1)$. Donc d_s est surjective, et Z est lisse en y. On a donc $Z = \pi^{-1}(K_1)$. On a dans l'anneau de Chow de $\pi^{-1}(U_x)$

$$[\pi^{-1}(K_1)] \ = \ \pi_{0!}(-c_1(W \otimes p_L^*(\mathcal{O}_L(-k-1))))$$

(π_0 désignant la projection $\mathcal{M} \times L \to \mathcal{M}$). On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow W \otimes p_L^*(\mathcal{O}_L(-k-1)) \longrightarrow p_L^*(\mathcal{O}_L(-k-2)) \otimes H_1 \longrightarrow p_L^*(\mathcal{O}_L(-k-1)) \otimes H_0 \longrightarrow 0$$

d'où on déduit immédiatement $c_1(W \otimes p_L^*\mathcal{O}(-k-1)) = 0$ et $[\pi^{-1}(K_1)] = 0$, ce qui entraine la trivialité de $\pi^*(\Lambda_1)$. Ceci démontre (i).

7. Le cas $c_1 = -1$, $r > 2$

On démontre ici la proposition 6.12. On ne traitera que le cas $c_1 = -1$, et on donnera des indications pour résoudre de même le cas $c_1 = 1 - r$.

7.1 – Préliminaires

Soit V la cohomologie du complexe de Kronecker universel sur $\mathcal{M}_s \times \mathbb{P}_2$. Soit M_0 l'ouvert de $M_s(r, -1, c_2)$ correspondant aux faisceaux localement libres. Puisque $r > 2$, on a $\mathrm{codim}_{M_s(r,-1,c_2)}(M_s(r, -1, c_2)\backslash M_0) \geq 2$, et il suffit de démontrer la proposition 6.12 avec M_0 à la place de $M_s(r, -1, c_2)$. Soit $\mathcal{M}'_s$ l'ouvert de $\pi^{-1}(M_0)$ constitué des points y tels que pour toute droite ℓ de $\mathbb{P}_2$ passant par x on ait $h^1(V_{y|\ell}) = 0$.

Lemme 7.1 : *On a* $\mathrm{codim}_{\mathcal{M}_s}(\mathcal{M}_s\backslash\mathcal{M}'_s) \geq 2$.

Démonstration. Il suffit de montrer que pour toute droite ℓ passant par x, la sous-variété fermée Y de $\mathcal{M}_s$ constituée des y tels que $h^1(V_{y|\ell}) > 0$ est de codimension au moins 3. Pour cela, on remarque que pour tout $y \in \mathcal{M}_s$, $V_{|\mathcal{M}_s\times\ell}$ est une déformation complète de $V_{y|\ell}$ (cela découle du fait que V est une déformation complète de V_y et de ce que l'application canonique

$$\mathrm{Ext}^1(V_y, V_y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(V_{y|\ell}, V_{y|\ell})$$

est surjective, parce que $\mathrm{Ext}^2(V_y, V_y(-1)) = \{0\}$). Le lemme 7.1 découle du fait que si $y \in Y$, on a $\dim(\mathrm{Ext}^1(V_{y|\ell}, V_{y|\ell})) \geq 3$. $\square$

Soit $\mathcal{M}''_s$ l'ouvert de $\mathcal{M}'_s$ constitué des points y tels qu'il existe au plus une droite ℓ passant par x lelle que $V_{y|\ell}$ ne soit pas rigide.

Lemme 7.2 : *On a* $\operatorname{codim}_{\mathcal{M}'_s}(\mathcal{M}'_s \backslash \mathcal{M}''_s) \geq 2$.

Démonstration. Soient ℓ, ℓ' des droites distinctes passant par x. Il suffit de montrer que la sous-variété fermée Y de $\mathcal{M}'_s$ constituée des y tels que $V_{y|\ell}$ et $V_{y|\ell'}$ ne soient pas rigides est de codimension au moins 4. Cela découle de la surjectivité de l'application canonique

$$\operatorname{Ext}^1(V_y, V_y) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(V_{y|\ell}, V_{y|\ell}) \oplus \operatorname{Ext}^1(V_{y|\ell'}, V_{y|\ell'})$$

et de ce que si $V_{y|\ell}$ n'est pas rigide, on a $\dim(\operatorname{Ext}^1(V_{y|\ell}, V_{y|\ell})) \geq 2$. La surjectivité de l'application précédente se démontre comme dans le lemme 5.3, en utilisant le fait que $\operatorname{Ext}^2(V_y, V_y(-2)) = \{0\}$. □

Soit $U_0 = \pi(\mathcal{M}''_s)$. C'est un ouvert de M_0, dont le complémentaire est de codimension au moins 2. Il suffit donc de prouver que $K'_0 = U_0 \backslash U_x$ est une hypersurface irréductible de U_0, et que si Λ'_0 désigne le fibré en droites associé à K'_0, Λ'_0 est trivial sur $\pi^{-1}(U_0)$.

Soit X la sous-variété fermée de $\mathcal{M}''_s \times L$ constituée des couples (y, ℓ) tels que $V_{y|\ell}$ ne soit pas rigide. Le fibré $V_{y|\ell}$ n'est pas rigide si et seulement si $h^0(V_{y|\ell}(-1)) \neq 0$. Donc X est le support du schéma de saut Z du fibré vectoriel $W = (I \times p)^*(V(-1))$ sur $\mathcal{M}''_s \times P_x$, ($P_x$ désignant comme précédemment l'éclatement de $\mathbb{P}_2$ en x, $\mathcal{M}''_s \times P_x$ étant considéré comme un fibré projectif sur $\mathcal{M}''_s \times L$). La projection p_0 sur $\mathcal{M}''_s$ induit une bijection $X \to \pi^{-1}(K_0)$. On verra dans le paragraphe suivant que X est irréductible et de codimension 1. Montrons que Z est lisse. Pour cela, il suffit de prouver que pour tout $(y, \ell) \in X$, le morphisme canonique

$$d_{(y,\ell)} : T_{(y,\ell)}(\mathcal{M}''_s \times L) \longrightarrow L(H^0(V_y(-1)_{|\ell}), H^1(V_y(-1)_{|\ell}))$$

est surjectif. On va montrer que la restriction de $d_{(y,\ell)}$ à $T_y(\mathcal{M}''_s)$ est surjective. Cette restriction est le morphisme d_y défini par la variété de saut du fibré vectoriel $V(-1)_{|\mathcal{M}''_s \times \ell}$. C'est à un signe près la composée du morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer $\omega : T_y(\mathcal{M}''_s) \to \operatorname{Ext}^1(V_y, V_y)$ et des morphismes canoniques

$$\theta : \operatorname{Ext}^1(V_y, V_y) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(V_{y|\ell}, V_{y|\ell}) \ ,$$

$$\eta : \operatorname{Ext}^1(V_{y|\ell}, V_{y|\ell}) \longrightarrow L(H^0(V_y(-1))_{|\ell}, H^1(V_y(-1)_{|\ell})) \ .$$

On sait déjà que ω est surjective, θ l'est car $\operatorname{Ext}^2(V_y, V_y(-1)) = \{0\}$, et η l'est à cause du type de décomposition de $V_y(-1)_{|\ell}$. Donc d_y est surjective et Z est lisse.

On a donc $Z = X$. La classe de X dans l'anneau de Chow de $\mathcal{M}''_s \times L$ se calcule par la formule de Porteous : $[X] = c_2(-\pi_{0!}(W_0))$, π_0 désignant la projection $\mathcal{M}''_s \times P_x \to \mathcal{M}''_s \times L$. Pour calculer $c_2(-\pi_{0!}(W_0))$, on peut utiliser le complexe de Kronecker universel sur $\mathcal{M}''_s \times \mathbb{P}_2$. Son image réciproque sur $\mathcal{M}''_s \times P_x$ a pour cohomologie en degré 0 le faisceau $W_0 \otimes p_2^*(\mathcal{O}(1))$, p_2 désignant la projection $\mathcal{M}''_s \times P_x \to \mathbb{P}_2$. On en déduit immédiatement que les classes de Chern de $\pi_{0!}(W_0)$ proviennent de L (par la projection de $\mathcal{M}''_s \times L$ sur L), et par conséquent $c_2(-\pi_{0!}(W_0)) = 0$. On a donc $[X] = 0$. Puisque p_0 induit un isomorphisme birationnel $X \to \pi^{-1}(K'_0)$, on a $[\pi^{-1}(K'_0) = p_{0*}([X]) = 0$, ce qui prouve que $\pi^*(\Lambda'_0)$ est trivial et démontre la proposition 6.12.

7.2 – Démonstration de l'irréductibilité de X

Il revient au même de prouver que $\pi^{-1}(K_0')$ est irréductible et de codimension 1. Il suffit de montrer que pour toute droite ℓ de $\mathbb{P}_2$, la sous-variété fermée M_ℓ de M_0 correspondant aux fibrés dont la restriction à ℓ n'est pas rigide est irréductible et de codimension 2. D'après Brun-Hirschowitz ([5]), M_ℓ est équidimensionnelle et de codimension 2. Il reste à prouver que M_ℓ est irréductible. On utilisera les notations du chapitre précédent, avec les modifications suivantes : on notera $f^x_{\alpha\beta}$ au lieu de $f_{\alpha\beta}$, $V^x_{\alpha\beta}$ au lieu de $V_{\alpha\beta}$, etc., pour spécifier le point x, qui pourra varier.

Lemme 7.3 : *Soit M'_ℓ l'ouvert de M_ℓ correspondant aux fibrés n'ayant qu'un nombre fini de droites de saut. Alors M'_ℓ est dense dans M_ℓ.*

Démonstration. Soit ℓ' une droite de $\mathbb{P}_2$ distincte de ℓ. Alors, si E est un fibré vectoriel de $M_\ell \cap M_{\ell'}$, le morphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^1(E,E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(E_{|\ell}, E_{|\ell}) \oplus \mathrm{Ext}^1(E_{|\ell'}, E_{|\ell'})$$

est surjectif, comme on l'a déjà vu. Il en découle que $M_\ell \cap M_{\ell'}$ est équidimensionnel de codimension 4 dans M_0. Soit T la sous-variété de $M_0 \times (\mathbb{P}_2^*\backslash\{\ell\})$ constituée des couples (E,ℓ') tels que $E \in M_\ell \cap M_{\ell'}$. D'après ce qui précède, on a $\dim(T) = \dim(M_\ell)$. Soit $p : T \to M_\ell$ la projection. Le fermé $M_\ell\backslash M'_\ell$ est l'ensemble des $E \in M_0$ tels que $p_M^{-1}(E)$ soit de dimension au moins 1. Ce fermé est de codimension au moins 3 dans M_0, puisque $\dim(p_M^{-1}(M_\ell\backslash M'_\ell) \leq \dim(T) = \dim(M_\ell)$. Puisque M_ℓ est équidimensionnel, M'_ℓ est dense dans M_ℓ. Ceci démontre le lemme 7.3. □

Lemme 7.4 : *Soit Y le complémentaire dans M_0 de la réunion des ouverts* $\mathrm{im}(f^y_{\alpha_0\beta_0})$*, y parcourant $\mathbb{P}_2$. Soit $M''_\ell = M'_\ell \cap (M_0\backslash Y)$. Alors M''_ℓ est dense dans M'_ℓ.*

Démonstration. Il suffit de montrer que Y ne contient aucune composante connexe de M'_ℓ, autrement dit que $Y \cap M'_\ell$ n'est pas de codimension 2 dans M_0. La dimension de $Y \cap M'_{\ell'}$ est la même pour toutes les droites ℓ' de $\mathbb{P}_2$. Notons-la d. Soit Z la sous-variété de $M_0 \times \mathbb{P}_2^*$ constituée des (E,ℓ') tels que $E \in M'_{\ell'} \cap Y$. Alors on a $\dim(Z) = d+2$. Les fibres de la projection $Z \to M_0$ sont finies et son image est contenue dans Y, donc $d+2 \leq \dim(Y) \leq \dim(M_0) - 1$, d'où $\mathrm{codim}_{M_0}(Y \cap M'_\ell) \geq 3$, ce qui démontre le lemme 7.4. □

Il reste à montrer que M''_ℓ est irréductible. Il suffit de montrer qu'il en est de même de toutes les intersections de M''_ℓ avec les ouverts $\mathrm{im}(f^y_{\alpha_0\beta_0})$, y parcourant $\mathbb{P}_2\backslash\ell$. En effet, supposons cela démontré, et que M''_ℓ possède au moins deux composantes irréductibles Y_1, Y_2. Soit y_1 (resp. y_2) un point de $Y_1\backslash Y_2$ (resp. $Y_2\backslash Y_1$). Il existe un point y de $\mathbb{P}_2$ tel que $y_1, y_2 \in \mathrm{im}(f^y_{\alpha_0\beta_0})$, car les $z \in \mathbb{P}_2$ tels que y_1 (resp. y_2) soit dans $\mathrm{im}(f^z_{\alpha_0\beta_0})$ constituent un ouvert de $\mathbb{P}_2$. Alors $M''_\ell \cap \mathrm{im}(f^y_{\alpha_0\beta_0})$ n'est pas irréductible, contrairement à notre supposition.

Soit $y \in \mathbb{P}_2\backslash\ell$. Montrons que $M''_\ell \cap \mathrm{im}(f^y_{\alpha_0\beta_0})$ est irréductible. On note F_ℓ la restriction à $V^y_{\alpha_0\beta_0} \times \ell$ du fibré extension universelle F_y sur $V^y_{\alpha_0\beta_0} \times P_y$. On va voir que pour tout $\epsilon \in V^y_{\alpha_0\beta_0}$, F_ℓ est une déformation complète de $F_{\ell\epsilon}$. Il en découle que la sous-variété fermée Y' de $V^y_{\alpha_0\beta_0}$ des ϵ tels que $F_{\ell\epsilon}$ ne soit pas rigide est équidimensionnel et de codimension 2. Il faut montrer que Y' est irréductible. Pour cela, on remarque que puisque Y' est une sous-variété homogène, des

composantes irréductibles éventuelles se coupent en une sous-variété de codimension au plus 4. Il suffit donc de trouver un ouvert Y'_0 de Y' tel que $\operatorname{codim}_{Y'}(Y'\backslash Y'_0) \geq 5$, et qu'en chaque point de Y'_0 ne passe qu'une seule composante irréductible de Y'. L'ouvert Y'_0 est constitué des points ϵ tels que $F_{\ell\epsilon}$ soit de type de décomposition $(1, 0, \ldots, 0, -1, -1)$ ou $(1, 0, \ldots, 0, -2)$. En effet, si $\epsilon \in Y'\backslash Y'_0$, on a $\dim(\operatorname{Ext}^1(F_{\ell\epsilon}, F_{\ell\epsilon})) \geq 5$, donc $\operatorname{codim}_{Y'}(Y'\backslash Y'_0) \geq 5$. D'autre part, Y'_0 est lisse en les points ϵ tels que $F_{\ell\epsilon}$ soit de type $(1, 0, \ldots, 0, -1, -1)$, et il reste à montrer que Y'_0 est irréductible au voisinage des points ϵ tels que $F_{\ell\epsilon}$ soit de type $(1, 0, \cdots, 0, -2)$. Pour cela, il suffit de trouver une déformation complète E de $\mathcal{O}_\ell(1) \oplus (r-2)\mathcal{O}_\ell \oplus \mathcal{O}_\ell(-2)$, paramétrée par une variété lisse S, telle que la sous-variété fermée S' des points $s \in S$ tels que E_s ne soit pas rigide soit irréductible. C'est simplement la famille des extensions

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_\ell(-2) \longrightarrow E_0 \longrightarrow (r-2)\mathcal{O}_\ell \oplus \mathcal{O}_\ell(1) \longrightarrow 0 \ .$$

Dans ce cas, on a $S = H^1(\mathcal{O}_\ell(-3)) \oplus \mathbb{C}^{r-2}$, et $S' = \mathbb{C}^{r-2}$. Ceci prouve l'irréductibilité de Y'.

Montrons maintenant que pour tout $\epsilon \in V^y_{\alpha_0\beta_0}$, F_ℓ est une déformation complète de $F_{\ell\epsilon}$. Il suffit de montrer que le morphisme canonique $\operatorname{Ext}^1(F^y, F^y) \to \operatorname{Ext}^1(F_{\ell\epsilon}, F_{\ell\epsilon})$ est surjectif. Cela découle de l'égalité $\operatorname{Ext}^2(F^y, F^y \otimes p^*(\mathcal{O}(-1))) = \{0\}$: par dualité de Serre, on a

$$\operatorname{Ext}^2(F^y, F^y \otimes p^*(\mathcal{O}(-1))) \ \simeq \ \operatorname{Hom}(F^y, F^y \otimes p^*(\mathcal{O}(1)) \otimes \omega)^* \ ,$$

ω désignant le faisceau canonique sur P_y. On a $\omega \simeq p^*(\mathcal{O}(-2)) \otimes q^*(\mathcal{O}(-1))$, donc $\operatorname{Hom}(F^y, F^y \otimes p^*(\mathcal{O}(1)) \otimes \omega) = \operatorname{Hom}(F^y, F^y \otimes p^*(\mathcal{O}(-1)) \otimes q^*(\mathcal{O}(-1))) = \{0\}$, à cause du type de décomposition générique de F^y.

7.3 – Le cas $c_1 = 1 - r$

On procède de la même façon, mais cette fois, on s'intéresse aux fibrés E sur $\mathbb{P}_2$ pour lesquels il existe une droite ℓ passant par x telle que $h^0(E_{|\ell})$ "saute".

8. Le cas $r = 2$

On démontre ici la proposition 4.1 dans le cas où $r = 2$.

8.1 – Le cas des variétés de hauteur nulle

Si $M(2, c_1, c_2)$ est de hauteur nulle, on a $c_1 = 0$ et $c_2 = 2$. La variété $\mathcal{M}$ est un ouvert d'un espace affine, donc $\operatorname{Pic}(\mathcal{M}) = 0$, et par conséquent $\pi_{\mathcal{M}} : \operatorname{Char}(G_{\mathcal{M}}) \to \operatorname{Pic}(M)$ est surjective. Ceci démontre la proposition 4.1. Dans toute la suite, on supposera que $M(2, c_1, c_2)$ n'est pas de hauteur nulle.

8.2 – La cas $c_1 = -1$

Il existe sur $M(2, -1, c_2) \times \mathbb{P}_2$ un faisceau universel F, c'est à dire que pour tout $y \in M(2, -1, c_2)$, F_y est un faisceau semi-stable de rang 2, de classes de Chern $-1, c_2$, dont le

point de $M(2,-1,c_2)$ associé est y. D'après Strømme [25], $\mathrm{Pic}(M(2,-1,c_2))$ est engendré par les fibrés en droites $L_i = \det(R^1 p_{1*}(F \otimes p_2^*(\mathcal{O}(-i))))$, $i = 0,1,2$ (p_1, p_2 désignant les projections $M(2,-1,c_2) \times \mathbb{P}_2 \to M(2,-1,c_2)$ et $M(2,-1,c_2) \times \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$). Pour démontrer la proposition 4.1 on va prouver que les $\pi^*(L_i)$ sont triviaux, pour un choix convenable de F. Comme précédemment, V désigne la cohomologie en degré 0 du complexe de Kronecker universel sur $\mathcal{M} \times \mathbb{P}_2$. Elle est munie de l'action évidente du groupe $G_1 = \mathrm{GL}(H_1) \times \mathrm{GL}(H_0) \times \mathrm{GL}(H_1)$. Soient $m \in \mathcal{M}$ et $t \in \mathbb{C}^*$. Alors l'action de $t(I_{H_{-1}}, I_{H_0}, I_{H_1})$ sur V_m est l'homothétie de rapport t. Il existe un caractère λ de G_1 tel que pour tout $t \in \mathbb{C}^*$ on ait $\lambda(t(I_{H_{-1}}, I_{H_0}, I_{H_1})) = 1/t$ (parce que $\dim(H_0) - \dim(H_{-1}) = 1$). Soit L_λ le G_1-fibré en droites sur $\mathcal{M}$ déduit de λ. Soit $p_1' : \mathcal{M} \times \mathbb{P}_2 \to \mathcal{M}$ la projection. Alors le sous-groupe $\mathbb{C}^*$ de G_1 agit trivialement sur $V' = V \otimes {p_1'}^*(L_\lambda)$, qui' est donc muni d'une action de $G_{\mathcal{M}}$. Puisque π est un quotient géométrique et que l'action de $G_{\mathcal{M}}$ est libre, on peut "descendre" V' à $M(2,-1,c_2) \times \mathbb{P}_2$, et on obtient ainsi un faisceau universel F. On a des isomorphismes canoniques $\pi^*(L_i) = \det(H_{i+1}) \otimes L_\lambda$, $i = 0,1,2$, ce qui démontre que les $\pi^*(L_i)$ sont triviaux.

8.3 – Le cas $c_1 = 0$

Soient p_1', p_2' les projections $\mathcal{M}_s \times \mathbb{P}_2 \to \mathcal{M}_s$ et $\mathcal{M}_s \times \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$. Strømme [25] a montré que si c_2 est impair, on a $\mathrm{Pic}(M_s(2,0,c_2)) \simeq \mathbb{Z}^2$. On va voir que c'est encore vrai si c_2 est pair. Soit M_0 l'ouvert de $M_s(2,0,c_2)$ correspondant aux faisceaux localement libres. Le Potier [17] a montré que $\mathrm{Pic}(M_0) \simeq \mathbb{Z}$, et $\mathcal{O}^*(M_0) = \mathbb{C}^*$. D'autre part, la démonstration de Strømme de l'irréductibilité de $M_s(2,0,c_2)\backslash M_0$ (première partie de la proposition (4.6) de [25]) est valable même si c_2 est pair, donc $M_s(2,0,c_2)\backslash M_0$ est une hypersurface irréductible. On a une suite exacte

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathrm{Pic}(M_s(2,0,c_2)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(M_0) \longrightarrow 0,$$

le morphisme i associant à 1 le fibré en droites associé à $M_s(2,0,c_2)\backslash M_0$. Puisque $\mathcal{O}^*(M_0) = \mathbb{C}^*$, i est injectif, donc on a $\mathrm{Pic}(M_s(2,0,c_2)) \simeq \mathbb{Z}^2$. Il faut maintenant montrer que $\pi_{\mathcal{M}} : \mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}}) \to \mathrm{Pic}(M_s(2,0,c_2))$ est surjectif. Pour cela, on prouvera que le faisceau d'idéaux de $\pi^{-1}(M_s(2,0,c_2)\backslash M_0)$ est trivial et que le morphisme canonique $\pi''_{\mathcal{M}} : \mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}}) \to \mathrm{Pic}(M_0)$ est surjectif.

La première assertion se démontre comme la seconde partie de la proposition (4.6) de [25] : on trouve une résolution de l'idéal $\mathcal{I}$ de $M_s(2,0,c_2)\backslash M_0$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H_0 \otimes \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{O} H_{-1}^* \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow 0,$$

où $\mathcal{L}$ est le G_1-fibré en droites $\det(H_1)^{-c_2-1} \otimes \det(H_0)^{2c_2-1} \otimes \det(H_1)^{c_2}$, avec $G_1 = \mathrm{GL}(H_{-1}) \times \mathrm{GL}(H_0) \times \mathrm{GL}(H_1)$. On en déduit que $\mathcal{I}$ est trivial, d'où l'assertion. La suite précédente est en fait une suite exacte de G_1-fibrés vectoriels, $\mathcal{I}$ étant muni de l'action naturelle de G_1. On en déduit que le fibré en droites associé à $M_s(2,0,c_2)\backslash M_0$ provient du caractère $\lambda_{c_2+1,1-2c_2,c_2}$ de $G_{\mathcal{M}}$.

Démontrons la seconde assertion. Rappelons certains résultats de [17]. On prend pour H_0 l'espace vectoriel H_{-1}^* dual de H_{-1}. Soit $\mathcal{N}$ la sous-variété fermée de $\pi^{-1}(M_0)$ des complexes (u,v) tels que l'application linéaire $H^0(\mathcal{O}(1)) \to L(H_{-1}, H_{-1}^*)$ déduite de u soit à valeurs dans l'espace $S^2 H_{-1}^*$ des applications linéaires symétriques. On a alors $\pi(\mathcal{N}) = M_0$. Le groupe réductif $G' = (\mathrm{GL}(H_{-1}) \times \mathrm{GL}(H_1))/\{-1,+1\}$ agit librement sur $\mathcal{N}$ de la façon suivante :

$$\big((g_1,g_2),(u,v)\big) \mapsto \big((I_{Q^*} \otimes^t g_1^{-1}) \circ u \circ (I_{\wedge^2 Q^*} \otimes g_1^{-1}), g_2 \circ v \circ (I_{Q^*} \otimes^t g_1)\big) .$$

L'inclusion $\mathcal{N} \to \mathcal{M}$ est compatible avec le morphisme de groupes

$$\phi : G' \longrightarrow G_{\mathcal{M}}$$

$$(g_1, g_2) \longmapsto (g_1, {}^t g_1^{-1}, g_2).$$

La restriction de π à $\mathcal{N}$ est un bon quotient de $\mathcal{N}$ par G' , et le morphisme canonique $\mathrm{Char}(G') \to \mathrm{Pic}(M_0)$ est surjectif. Le groupe $\mathrm{Char}(G')$ est constitué des morphismes

$$h_{a,b} : G' \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

$$(g_1, g_2) \longmapsto \det(g_1)^a \det(g_2)^b$$

a et b étant des entiers tels que $a + b$ soit pair si c_2 est impair. En fait, Le Potier montre que ϕ induit un isomorphisme du sous-groupe G_2 de $\mathrm{Char}(G')$ des $h_{a,b}$ avec $b = 0$ sur $\mathrm{Pic}(M_0)$. Le morphisme de groupes ϕ induit

$$\Phi : \mathrm{Char}(G_{\mathcal{M}}) \longrightarrow \mathrm{Char}(G')$$

$$\lambda_{a,b,c} \longmapsto h_{a-b,c}.$$

Le caractère de $G_{\mathcal{M}}$ correspondant à $\pi^{-1}(M_s(2, 0, c_2)\backslash M_0)$ est $\lambda_{c_2+1,1-2c_2,c_2}$, dont l'image dans $\mathrm{Char}(G')$ est h_{3c_2,c_2}. Ce caractère définit le fibré trivial sur M_0, ainsi par conséquent que $h_{3,1}$. Il suffit donc de montrer que $\mathrm{im}(\Phi)$ et $h_{3,1}$ engendrent un sous-groupe de $\mathrm{Char}(G')$ contenant G_2. Si c_2 est impair, tout élément de G_2 se met sous la forme $h_{2a,0}$, a étant un entier. On a $h_{2a,0} = \Phi(\lambda_{a,-a,0})$. Si c_2 est pair, tout élément de G_2 se met sous la forme $h_{a,0}$, a étant un entier. Si a est pair, $h_{a,0} \in \mathrm{im}(\Phi)$, comme précédemment. Si a est impair on a

$$h_{a,0} \;=\; (h_{3,1})^{\frac{c_2}{2}} \Phi(\lambda_{\frac{a-1-c_2}{2}, c_2 - \frac{a+1}{2}, -\frac{c_2}{2}}) \ .$$

Ceci achève la démonstration de la proposition 4.1.

Références

[1] Barth, W. *Moduli of vector bundles on the projective plane.* Invent. Math. 42 (1977), 63-91.

[2] Beilinson, A.A. *Coherent sheaves on $\mathbb{P}_n$ and problems of linear algebra.* Funkts. Anal. Prilozh. 12 (1978), 68-69.

[3] Borel, A., Serre, J.-P. *Le théorème de Riemann-Roch.* Bull. Soc. Math. de France 86 (1978), 97-136.

[4] Brieskorn, E. *Über holomorphe $\mathbb{P}_n$-Bündel über $\mathbb{P}_1$.* Math. Ann. 157 (1967), 343-357.

[5] Brun, J., Hirschowitz, A. *Droites de saut des fibrés de rang élevé sur $\mathbb{P}_2$.* Math. Zeits. 181 (1982), 171-178.

[6] Drézet, J.-M. *Fibrés exceptionnels et variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.* Journ. Reine angew. Math. 380 (1987), 14-58.

[7] Drézet, J.-M., Le Potier, J. *Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur $\mathbb{P}_2$.* Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 18 (1985), 193-244.

[8] Ellingsrud, G. *Sur l'irréductibilité du module des fibrés stables sur $\mathbb{P}_2$.* Math. Zeits. 182 (1983), 189-192.

[9] Ellingsrud, G., Strømme, S.A. *The Picard group of the moduli for stable rank 2 vector bundles on $\mathbb{P}_2$ with odd Chern class.* Preprint Series. Univ. of Oslo Institute of Math., Vol 12.

[10] Fulton, W. *Intersection theory.* Second edition. Ergeb. der Math. und ihrer Grenzg. Springer-Verlag (1998).

[11] Gieseker, D. *On the moduli of vector bundles on an algebraic surface.* Ann. of Math. 106 (1977), 45-60.

[12] Grothendieck, A. *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann.* Amer. Journ. of Math. 79 (1957), 121-138.

[13] Hartshorne, R. *Algebraic geometry.* Grad. Texts in Math. 52, Springer-Verlag (1977).

[14] Hirschowitz, A. *Rank techniques and jump stratifications.* Vector bundles on algebraic varieties (Bombay, 1984), Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., 11 (1987), 159-205.

[15] Horrocks, G. *Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring.* Proc. London Math. Soc., 14 (1964), 689-713.

[16] Hulek, K. *On the classification of stable rank-r vector bundles over the projective plane.* Vector bundles and differential equations (A. Hirschowitz ed.). Proceedings (Nice 1979), Progress in Math. 7, Birkhäuser (1980), 113-144.

[17] Le Potier, J. *Sur le groupe de Picard de l'espace de modules de fibrés stables sur* $\mathbb{P}_2$. Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 14 (1981), 141-155.

[18] Le Potier, J. *Fibrés stables de rang 2 sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Math. Ann. 241 (1979), 217-256.

[19] Maruyama, M. *Moduli of stable sheaves II.* J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978), 557-614.

[20] Matsumura, H. *Commutative algebra.* W.A. Benjamin Co., New York (1980).

[21] Mumford, D., Fogarty, J. *Geometric Invariant Theory.* Erg. der Math. Wiss. 34, Springer Berlin-Heidelberg-New York (1982).

[22] Newstead, P. E. *Introduction to moduli problems and orbit spaces.* TIFR Lect. Notes 51, Berlin-Heidelberg-New York (1978).

[23] Newstead, P. E. *Rationality or moduli spaces of vector bundles.* Math. Ann. 215 (1975), 251-268.

[24] Seshadri, C.S. *Mumford's conjecture for* GL(2) *and applications.* 1969 Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968) Oxford Univ. Press, London Alg. Geom., Bombay Coll., (1968-l969), 347-371.

[25] Strømme, S.A. *Ample divisors on fine moduli spaces on the projective plane.* Math. Zeits. 187 (1984), 405-423.

[26] Drézet, J.-M., Narasimhan, M.S. *Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques.* Invent. Math. 97 (1989), 53-94.

Note : Ce texte reproduit l'article

Groupe de Picard des variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Annales de l'Institut Fourier 38 (1988), 105-168.

avec les modifications suivantes :

- Le *lemme de descente* de [26] est utilisé. La version originale utilisait une version moins forte de ce lemme, avec plus de vérifications à effectuer. Les démonstrations sont de ce fait simplifiées.
- Des lemmes préliminaires sur les matrices ont été rajoutés dans 5.2 (4.2 dans la version originale) pour clarifier les démonstrations.

Il y a de plus quelques corrections d'erreurs mineures et des améliorations dans la rédaction et la bibliographie.

Il existe une démonstration un peu différente des résultats de cet article dans

Le Potier, J. *Lectures on vector bundles.* Translated by A. Maciocia. Cambridge Studies in Adv. Math. 54, Cambridge Univ. Press (1997).

Institut de Mathématiques de Jussieu, Case 247, 4 place Jussieu, F-75252 Paris, France

E-mail address: drezet@math.jussieu.fr