



HAL
open science

La genèse psycho-physiologique de la géométrie selon Poincaré

Philippe Nabonnand

► **To cite this version:**

Philippe Nabonnand. La genèse psycho-physiologique de la géométrie selon Poincaré. 2006. hal-01086147

HAL Id: hal-01086147

<https://hal.science/hal-01086147>

Preprint submitted on 22 Nov 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La genèse psycho-physiologique de la géométrie selon Poincaré¹

Philippe Nabonnand

(Archives H. Poincaré – Université de Nancy 2)

Le conventionalisme géométrique de Poincaré est bien connu : Les axiomes de la géométrie ne sont ni synthétiques a priori, ni empiriques ; ils sont des conventions. Tout le monde a entendu dire et répété que pour Poincaré, l'étude de la géométrie n'est que l'étude d'un groupe (de transformations). Par contre, sa genèse psycho-physiologique de la géométrie et l'utilisation importante dans celle-ci de la théorie des groupes de transformations (au sens de Lie) est moins connue. Pourtant rendant compte de ses travaux philosophiques dans l'analyse de ses travaux scientifiques [1901], il insiste sur les deux moments de sa réflexion sur la théorie de l'espace.

Je me suis demandé quel est le véritable caractère des vérités géométriques et en particulier du postulat d'Euclide. [...] J'ai recherché également à analyser l'origine psychologique de la notion d'espace. [Poincaré 1901, 127]

Dans cette note, nous nous proposons d'exposer quelques points de cette partie du conventionalisme géométrique de Poincaré en soulignant particulièrement l'utilisation par ce dernier de la théorie de Lie des groupes de transformations. Dans une première partie, nous résumerons l'argumentation philosophique de Poincaré en insistant sur le rôle qu'accorde Poincaré à l'expérience. Puis nous analyserons quelques points de la genèse psycho-physiologique de l'espace chez Poincaré. Cette genèse s'effectue en deux moments : Dans un premier moment purement psycho-physiologique, Poincaré montre comment notre expérience suscite notre capacité innée à former des groupes. A partir des données brutes constituées par les sensations, nous arrivons à reconnaître « que les déplacements se composent d'après les mêmes lois que les substitutions d'un certain groupe G » (second paragraphe). Se pose alors la question du choix du groupe. Une combinaison d'expériences et d'utilisation de propriétés mathématiques permet de justifier l'affirmation de Poincaré selon laquelle la géométrie 'la

¹ Cette note est essentiellement constituée de certains paragraphes (légèrement remaniés) d'un article intitulé « La polémique entre Poincaré et Russell au sujet du statut des axiomes de la géométrie » (à paraître dans *La revue d'histoire des mathématiques*).

plus commode' est celle d'Euclide (troisième paragraphe). Enfin, Poincaré explique comment nous pouvons déduire la notion d'espace et ses propriétés de la seule notion de groupe. Cette partie du raisonnement de Poincaré sera exposée dans le quatrième paragraphe.

1. *Le conventionalisme géométrique de Poincaré*

Dans cette partie nous nous proposons de résumer rapidement l'argumentation philosophique de Poincaré sur le statut des axiomes de la géométrie.

1) Les axiomes de la géométrie ne peuvent être des «jugements synthétiques *a priori*, comme disait Kant» [Poincaré 1902a, 74]. Dans l'interprétation de Poincaré, de tels jugements, «inaccessibles à la démonstration analytique et à l'expérience» [Ibid. 41] s'imposent néanmoins à nous avec une irrésistible évidence «au point que nous ne pourrions concevoir la proposition contraire, ni bâtir sur elle un édifice théorique». Poincaré utilise deux types d'arguments pour montrer que les axiomes de la géométrie ne sont pas synthétiques *a priori* :

a) Le premier type d'argument utilise les modèles euclidiens des géométries non-euclidiennes et est assez faible pour appuyer la thèse de Poincaré².

b) Le second type d'argumentation reprend en partie les discussions de Helmholtz [1868] concernant l'intuition de l'espace. Dans son article sur l'origine et la signification des axiomes de la géométrie, Helmholtz envisageait la fiction d'êtres intelligents vivant sur une surface ovoïde et posait la question des conceptions géométriques de tels êtres [Helmholtz 1868, 5]. Helmholtz concluait que ces êtres fictifs adopteraient une géométrie radicalement différente de la nôtre. Le caractère non intuitif de certaines de nos conceptions spatiales était ainsi montré. Poincaré envisage de la même manière, la fiction d'animaux sans épaisseur vivant sur une sphère et ayant l'esprit fait comme nous ; il affirme alors que ces êtres ne pourrait pas adopter la géométrie euclidienne «qui serait contredite par toute leur expérience» [1902a, 75].

2) Les axiomes de la géométrie ne peuvent pas être non plus des vérités expérimentales. En effet, comme on ne peut expérimenter que sur des objets matériels, les expériences fondatrices de la géométrie ne pourraient porter que sur des corps solides naturels et la géométrie ne serait alors que l'étude des propriétés de ces corps. La géométrie ne serait plus une science exacte et serait révisable.

² Même en acceptant l'interprétation grossière de Poincaré de la notion de «synthétique *a priori*», prouver que les géométries non-euclidiennes et euclidiennes ont la même consistance logique n'a aucune conséquence sur le caractère d'évidence des fondements de l'une par rapport à ceux de l'autre. Si on interprète la notion de «synthétique *a priori*» comme condition nécessaire à l'expérience, l'argument est encore plus faible.

3) N'étant ni des jugements synthétiques *a priori*, ni des vérités expérimentales, les axiomes de la géométrie sont des conventions, c'est-à-dire des définitions déguisées. En même temps, Poincaré assigne à l'expérience un rôle fondamental de guide pour le choix des conventions les plus commodes. Il n'y a pas de géométries imposées par notre esprit comme condition nécessaire de nos expériences, il n'y a pas, non plus, de géométrie imposée par l'expérience ; par contre, parmi toutes les conventions possibles, autrement toutes les géométries possibles, l'expérience nous guide dans le choix d'un cadre commode pour rendre compte de celle-ci. Poincaré conclut que la géométrie euclidienne «est et restera la plus commode» parce que celle-ci est la plus simple d'un point de vue mathématique et «parce qu'elle s'accorde assez bien avec les propriétés des solides naturels, ces corps dont se rapprochent nos membres et notre œil et avec lesquels nous faisons nos instruments de mesure» [Poincaré 1902a, 76].

Dire que la géométrie euclidienne est la plus commode signifie que parmi les groupes possibles, celui constitué par les transformations de la géométrie euclidienne correspond le mieux à notre expérience et en particulier au mouvement des corps solides naturels.

Comme Lie, je crois que la notion plus ou moins inconsciente du groupe continu est la seule base logique de notre géométrie. Comme Helmholtz, je crois que l'observation des mouvements des corps solides en est l'origine psychologique. Mais je ne fais pas pour cela dériver la géométrie de l'expérience; loin de là. Les expériences sur les solides n'ont été que l'occasion qui, parmi tous les groupes continus dont nous aurions pu faire une géométrie, nous a fait choisir le groupe euclidien, non comme le seul vrai, mais comme le plus commode. [Poincaré 1901, 127]

Poincaré n'exclut pas que d'autres expériences pourraient nous amener à adopter une autre géométrie. Ainsi, il imagine un monde dont les habitants seraient guidés vers la géométrie non euclidienne [Poincaré 1902a, 88-91]. Poincaré insiste très clairement sur le fait qu'il ne s'agit pas de différences qualitatives des sensations (les sensations n'ont aucun caractère spatial chez Poincaré). Il décrit un processus d'acquisition de la spatialité à partir d'association et de succession de sensations et montre que c'est le choix de ces associations et successions qui conduit à concevoir des géométries différentes et non pas une quelconque différence qualitative des sensations.

La notion de l'espace ne peut donc faire partie intégrante d'aucune de nos sensations prise isolément. C'est seulement quand nous observons l'ordre dans lequel ces sensations se succèdent que cette notion peut prendre naissance. Or s'il est absurde de

supposer que nous puissions imaginer des sensations différentes de nos sensations normales, nous pouvons au contraire avec quelque effort imaginer une succession de sensations, pareilles individuellement à nos sensations normales, mais se succédant dans un ordre anormal. Nous pouvons imaginer que ces sensations suivent d'autres lois et par exemple qu'elles s'ordonnent, non conformément à la structure du groupe euclidien, mais conformément à la structure d'un autre groupe. Des êtres qui éprouveraient nos sensations normales dans un ordre anormal, créeraient une géométrie différente de la nôtre. [Ibid, 127-128]

2) La genèse physio-psychologique du groupe des déplacements

Dans deux articles consacrés à la question de l'espace [1895 et 1898], Poincaré tente de justifier son conventionalisme géométrique en fondant la genèse de nos conceptions géométriques sur l'analyse de nos sensations. Poincaré s'inscrit ainsi dans la lignée des travaux de Helmholtz et plus généralement des débats autour des conceptions innéistes ou empiristes de la psychologie. Sans obligatoirement prétendre que Poincaré a lu l'*Optique physiologique* [1867] de Helmholtz, la publication de l'ouvrage de Théodule Ribot³ [1885] sur *la Psychologie allemande contemporaine* illustre la réception dans les milieux scientifiques et philosophiques de la psychologie expérimentale. Ribot résume de manière particulièrement lumineuse les thèses de Helmholtz :

Le principe fondamental de Helmholtz est, comme nous l'avons dit plus haut, que les sensations sont des signes que nous avons à interpréter. Nos représentations ne peuvent être que des symboles des objets : nous apprenons à nous en servir pour régler nos mouvements et nos actions. [...] le mécanisme psychologique en vertu duquel nous nous formons une représentation de l'espace, ou, pour parler un langage plus correct, en vertu duquel nous considérons un objet comme étendu, c'est-à-dire ayant telle forme, telle position, telle direction dans le champ visuel, etc., ne peut résulter que d'un «raisonnement inconscient». Si cette expression, dit Helmholtz, a choqué quelques esprits, c'est qu'on s'est habitués à considérer le raisonnement comme la forme la plus haute de l'activité intellectuelle. Mais les raisonnements dont il s'agit ici, quoiqu'ils ne puissent jamais s'exprimer sous la forme logique, sont identiques, comme opération mentale et comme résultat, aux raisonnements ordinaires. «La différence entre les

³ Ribot est à la fois en tant qu'universitaire (professeur au Collège de France, membre de l'Institut, fondateur et directeur de la *Revue philosophique*) et vulgarisateur, le grand initiateur en France de la psychologie expérimentale. Son œuvre s'inscrit dans le programme de fondation d'une nouvelle psychologie, expérimentale, dégagée de toute métaphysique et appuyée sur la physiologie.

raisonnements des logiciens et les raisonnements inconscients sur lesquels repose notre connaissance du monde extérieur, me paraît purement apparente et me semble consister en ce que les premiers peuvent s'énoncer et que les seconds ne le peuvent, parce que, au lieu de mots, ils ne sont constitués que par des sensations et des souvenirs de sensations». [Ribot 1885, 131-132]

Poincaré adopte ce schéma de description pour la perception spatiale et va essayer de reconstruire le processus des raisonnements inconscients qui la fondent en mettant en évidence les éléments conventionnels de chaque étape.

Une des thèses essentielles de Poincaré est la différence qu'il fait entre l'espace représentatif ou sensible, entendu comme «le cadre de nos représentations et de nos sensations» [1902a, 78] et l'espace géométrique. Poincaré précise que ces deux types d'espace sont des formes de notre entendement. Si elles ne sont pas indispensables à la formation de nos sensations, ces deux catégories philosophiques le deviennent pour comparer ou raisonner sur celles-ci [Poincaré 1898, 7 et 11-12]. Il ne faut pas, cependant, confondre ces deux catégories sous prétexte que nous raisonnons sur les corps extérieurs, «comme s'ils étaient situés dans l'espace géométrique» [Poincaré 1902a, 82].

L'espace géométrique est continu, infini, homogène, isotrope et de dimension trois. Aucun des espaces visuel, tactile ou moteur ne vérifie l'ensemble de ces propriétés. Aucune sensation n'a par elle-même un caractère spatial et n'est accompagnée d'un sentiment de direction. L'espace représentatif est un cadre dans lequel nous rangeons et classons qualitativement nos sensations.

Voilà donc la première catégorie [l'espace représentatif] à laquelle nos sensations sont rapportées. On peut se la représenter comme composée d'un grand nombre de systèmes absolument indépendants les uns des autres. De plus, elle nous permet seulement de comparer entre elles des sensations de même espèce et non de les mesurer, de percevoir qu'une sensation est plus grande qu'une autre sensation, mais non qu'elle est deux fois plus grande ou trois fois plus grande. [Poincaré 1898, 8]

Poincaré souligne que nos représentations, qui ne peuvent être que des reproductions de sensations, se rangent dans l'espace représentatif. «Nous ne nous représentons pas les corps extérieurs dans l'espace géométrique, mais nous raisonnons sur ces corps, comme s'ils étaient situés dans l'espace géométrique» [Poincaré 1902a, 82]. Localiser un objet dans l'espace, c'est se représenter les mouvements qu'il faut faire pour atteindre cet objet, autrement dit, se

représenter «les sensations musculaires qui les accompagnent et qui n'ont aucun caractère géométrique, qui par conséquent n'impliquent nullement la préexistence de la notion d'espace» [Poincaré 1902a, 82].

La question reste alors entière de l'origine de l'idée d'espace géométrique. Si aucune sensation ne peut par elle-même nous y mener, l'étude des variations des sensations et des «lois suivant lesquelles ces successions se succèdent» nous conduit à l'idée d'espace géométrique. Poincaré distingue parmi les phénomènes externes (non-accompagnés de sensations musculaires) ceux qui sont susceptibles d'être corrigés par un changement interne (accompagné de sensations musculaires). Nous sommes amenés à nous intéresser à cette classe particulière de phénomènes grâce aux mouvements des corps solides matériels. Poincaré appelle ces phénomènes des déplacements et considère que l'étude des lois de ces phénomènes constitue l'objet de la géométrie.

Poincaré commence par classer les déplacements en considérant comme identiques deux déplacements corrigés par un même changement interne, puis montre que «les déplacements forment un groupe».

Ce qui est l'objet de la géométrie, c'est l'étude d'un groupe particulier ; mais le concept général de groupe préexiste dans notre esprit au moins en puissance. Il s'impose à nous, non comme forme de notre sensibilité, mais comme forme de notre entendement.

Seulement, parmi tous les groupes possibles, il faut choisir celui qui sera pour ainsi dire l'étalon auquel nous rapporterons les phénomènes naturels.

L'expérience nous guide dans ce choix qu'elle ne nous impose pas ; elle nous fait reconnaître non quelle est la géométrie la plus vraie, mais quelle est la plus commode.
[1902a, 93-94]

Mais le caractère conventionnel de la géométrie ne s'arrête pas au choix du groupe. Dans *On the Foundations of the Geometry* [1898], son article le plus achevé sur la question, Poincaré n'évite pas la question de l'approximation des compensations ou plus généralement celle des expériences par rapport aux lois ; l'opération active de l'esprit par laquelle nous imposons à la nature ces compensations ou ces lois aux résultats bruts de l'expérience nécessite en permanence des éléments conventionnels.

Quand l'expérience nous apprend qu'un certain phénomène ne correspond pas du tout aux lois indiquées, nous l'effaçons de la liste des déplacements. Quand elle nous apprend qu'un certain changement ne leur obéit qu'approximativement, nous considérons ce changement, par une convention artificielle, comme la résultante de deux autres changements. Le premier composant est regardé comme un déplacement satisfaisant rigoureusement aux lois dont je viens de parler, tandis que le second composant, qui est petit, est regardé comme une altération qualitative. [1898, 20]

3) Le choix du groupe

Le choix du groupe est purement conventionnel et guidé par l'expérience.

Mais il [l'esprit] commence à étudier expérimentalement les lois suivant lesquelles se composent les déplacements. L'expérience lui apprend qu'ils se comportent comme les substitutions d'un groupe d'ordre 6. [...] Mais il faut bien s'entendre. L'expérience nous apprend seulement que les déplacements se comportent à peu près comme les substitutions d'un groupe d'ordre 6. Ce n'est donc pas l'expérience qui nous fournit la notion de groupe. Cette notion préexiste ou plutôt ce qui préexiste dans l'esprit c'est la puissance de former cette notion. L'expérience n'est pour nous qu'une occasion d'exercer cette puissance. Elle nous apprend que parmi tous les groupes simples que nous pouvons former, c'est un certain groupe qui s'écarte le moins de l'observation. [Poincaré, 1897, 64-65]

De même, notre expérience nous amènent à « distinguer parmi les déplacements ceux qui conservent certaines sensations ». Ces déplacements constituent un sous-groupe et les sous-groupes qui apparaissent le plus immédiatement sont les sous-groupes de rotations.

L'ensemble des déplacements qui conservent ainsi un système donné de sensations forme évidemment un sous-groupe que nous pourrions appeler sous-groupe rotatif. Telle est la conclusion que nous tirons de l'expérience. Il est inutile de faire ressortir combien l'expérience est grossière et combien d'autre part la conclusion est précise. L'expérience ne peut donc pas nous imposer la conclusion, mais elle suffit à nous la suggérer. [Poincaré 1898, 32]

Nous sommes amenés par l'expérience à ne retenir que les groupes qui contiennent des groupes de rotations. Poincaré poursuit en affirmant que « par de nouvelles expériences, toujours très grossières », nous sommes amenés à la notion de faisceau rotatif (rotations

autour d'un axe fixe) et que toute rotation « peut être décomposée en trois autres, appartenant respectivement à trois faisceaux rotatifs donnés ». Il conclut alors qu'« avec ces propositions, nous sommes en mesure [...] de limiter notre choix à un choix entre la géométrie d'Euclide et celles de Lobatchewsky ou de Riemann ».

Pour arriver à cette conclusion, Poincaré se sert en fait (sans la citer) d'une connaissance très précise de la classification de Lie des groupes de transformations à 6 paramètres de \mathbf{R}^3 qui admettent un unique invariant significatif entre deux points [Lie 1893] :

1. $p, q, r, xq - yp, yr - zq, zp - xr$
2. $p, q, r, xq - yp, yr - zq, zp + xr$
3. $p + xU, q + yU, r + zU, xq - yp, yr - zq, zp - xr$
4. $p - xU, q - yU, r - zU, xq - yp, yr - zq, zp - xr$
5. $p - xU, q - yU, r + zU, xq - yp, yr + zq, zp + xr$
6. $p, q, xp + yq + cr, yp - xq + r, (x^2 - y^2)p + 2xyq + 2(cx - y)r, 2xyp + (y^2 - x^2)q + 2(x + cy)r$
7. $p, q, xp + yq + r, yp - xq, (x^2 - y^2)p + 2xyq + 2xr, 2xyp + (y^2 - x^2)q + 2yr$
8. $p, q, xq + r, yq + cr, x^2p + 2xr, y^2p + 2cxr \quad (c \neq 0)$
9. $p, q, xq + r, x^2q + 2xr, xp + yq + cr, x^2p + 2xyq + 2(y + cx)r$
10. $p - yr, q + xr, r, xq, xp - yq, yp$
11. $p, q, r, xp + yr, 2xp + yq, x^2p + xyq + \frac{1}{2}y^2r \quad (U = xp + yq + zr)$

[Lie 1893, 433-434]

Les seuls groupes possédant trois sous-groupes de rotations autour d'un axe sont les groupes 1), 3) et 4) qui correspondent aux géométries d'Euclide, hyperbolique et elliptique.

Nous avons donc besoin que l'expérience nous suggère une propriété du groupe de manière à être guidé vers le groupe euclidien.

Pour aller plus loin, nous avons besoin d'une nouvelle proposition qui prennent la place du postulatum des parallèles. La proposition qui en tiendra lieu sera l'affirmation de l'existence d'un sous-groupe invariant dont tous les déplacements sont échangeables et qui est formé de toutes les translations. C'est là ce qui détermine notre choix en faveur de la géométrie d'Euclide, parce que le groupe qui correspond à la géométrie de Lobatchewsky ne contient pas un tel sous groupe invariant. [Poincaré 1898, 34]

Parmi les trois sous-groupes retenus, le seul qui possède un sous-groupe commutatif conjugué de translations est le premier, celui qui correspond à la géométrie euclidienne. Il était clair que Poincaré connaissait la théorie des groupes de transformations de Lie, mais la lecture de son article publié dans *the Monist*, montre que sa connaissance des travaux de Lie est en fait très précise.

4) *L'espace chez Poincaré*

Si l'objet de la géométrie est l'étude d'un groupe, la question reste de savoir ce qu'est l'espace. La position de Poincaré à cet égard est très originale. Tous ses prédécesseurs (Riemann, Helmholtz, Klein, Lie) posent en préalable que l'espace est une 'multiplicité' numérique (*Zahlenmannigfaltigkeit*) :

*[...] l'espace n'est [...] qu'un cas particulier d'une grandeur de trois dimensions.
[Riemann 1854, 281]*

L'espace à n dimensions est une multiplicité n-fois étendue. [Helmholtz 1868, 41]

*On donne une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité ;
développer la théorie des invariants relatifs à ce groupe. [Klein, 1872, 7]*

L'espace à trois dimensions est une multiplicité numérique. [Lie 1893, 461]

Au contraire, Poincaré s'attache à prouver l'inutilité de cet axiome. En particulier, alors que les autres théoriciens de l'espace (prédécesseurs ou contemporains de Poincaré) considèrent que la dimension 3 de notre espace est soit une vérité d'expérience, soit une vérité *a priori*, il affirme le caractère conventionnel de cette propriété.

Lie était conscient de ce problème et ne considérait pas avoir résolu la question de l'espace avec sa théorie des groupes de transformation. Ainsi, il écrit en 1892 à Poincaré :

A mon avis, on est loin d'avoir bien assis les fondements de la géométrie. Ma théorie des groupes maîtrise bien les fondements de la géométrie d'une multiplicité numérique mais pas du tout ceux de la géométrie de l'espace !! [Lie 1892]

Poincaré rappelle cette correspondance dans sa recension publiée en 1902 de l'ouvrage de Hilbert, *Les fondements de la géométrie* [Hilbert 1899] :

Il [Lie] n'était pourtant pas entièrement satisfait de son œuvre. Il avait, disait-il, toujours envisagé l'espace comme une Zahlenmannigfaltigkeit. [Poincaré 1902b, 111]

Dans son article *L'espace et la géométrie* [1895], Poincaré montre que les propriétés de l'espace trouvent leur origine dans les propriétés du groupe. Mais il ne dit pas explicitement ce qu'est l'espace. Il se contente, dans un paragraphe intitulé *Nombre de dimensions*⁴, d'exprimer ses «difficultés à expliquer sa pensée en ce qui concerne l'origine de la notion de point et le nombre de dimensions» [1895, 640] et d'affirmer qu'«elle s'écarte assez sensiblement des opinions habituellement admises» [1895, 640].

Je me contente de remarquer que l'on est amené à distinguer certains déplacements particuliers ; c'est de ces déplacements qu'on dit qu'ils laissent fixe un des points de l'espace. C'est là l'origine de la notion de point. L'ensemble de tous les déplacements constitue ce qu'on appelle un groupe ; l'ensemble des déplacements qui laissent fixe un point de l'espace constituera un groupe partiel ou sous-groupe.

C'est dans les rapports de ce groupe et de ce sous-groupe qu'il faut chercher l'explication de ce fait que l'espace a trois dimensions. Le groupe total est d'ordre 6, c'est-à-dire que tout déplacement peut être regardé comme une combinaison de six mouvements élémentaires indépendants. Le sous-groupe est d'ordre 3, c'est-à-dire que tout déplacement appartenant à ce sous-groupe, ou, en d'autres termes, tout déplacement qui laisse fixe un point de l'espace, peut être regardé comme une combinaison de trois mouvements élémentaires indépendants. La différence $6 - 3$ représente le nombre des dimensions⁵. [Poincaré 1895, 641]

Poincaré n'est donc pas très explicite dans ce paragraphe, même s'il revendique avec force que la notion spatiale de base, à savoir le point, et le nombre de dimension de l'espace trouvent leur origine dans l'étude mathématique du groupe.

Le philosophe Louis Couturat, qui défendait des positions kantienne concernant la géométrie et la théorie de l'espace, publie en 1896 un article très critique sur ce point. Il pense avoir prouvé la circularité de la construction de Poincaré. En effet, selon lui, l'affirmation que le groupe est d'ordre 6, autrement dit que «la position d'un corps dans l'espace est déterminée par six variables indépendantes» est une propriété qui repose sur le fait que l'espace est de dimension 3.

⁴ Ce paragraphe, non repris dans *La Science et l'Hypothèse* est situé entre les paragraphes *Loi d'homogénéité* [1902a, 87] et *Le monde non-euclidien* [1902a, 88].

⁵ Dans sa réponse aux objections de Couturat, Poincaré reconnaît que cet argument est techniquement un peu rapide et n'a sûrement pas le caractère de généralité qu'il sous-entend ici, ce qui explique peut-être que ce paragraphe ait disparu dans *la Science et l'Hypothèse*.

Je dois donner une explication afin d'éviter une confusion. Le groupe G est d'ordre 6, le sous-groupe est d'ordre 3 ; le nombre de dimension est égal à la différence $6 - 3$; cela ne serait pas vrai avec un groupe et un sous-groupe quelconques. [1897, 67]

La raison profonde de l'objection de Couturat réside dans sa conception de la notion de groupe. En effet, si celle-ci apparaît comme centrale pour les géomètres de la fin du 19^e siècle, les groupes ne sont pas étudiés en eux-mêmes, mais, comme des groupes de transformations opérant sur un espace. En particulier, ici, Couturat ne distingue pas les propriétés formelles du groupe de celles liées à son action⁶.

Poincaré décrira l'étude d'un groupe comme l'étude de ses propriétés formelles et expliquera que deux groupes isomorphes, c'est-à-dire ayant mêmes propriétés formelles⁷, ont même ordre et peuvent opérer sur des espaces de dimensions différentes. Ainsi, le groupe des déplacements opère sur l'espace sensible qui est de dimension très grande et son étude est difficile. Mais heureusement, le problème se simplifie «en remplaçant le groupe qui nous est donné, avec sa forme et sa matière, par un autre groupe isomorphe⁸ dont la matière est plus simple» [1898, 36]⁹. Le passage à ce groupe opérant sur un espace de dimension moindre s'effectue en reconnaissant les sous-groupes qui conservent certains éléments, c'est-à-dire en définissant les points de l'espace.

Cette définition est le second point critiqué par Couturat. Il demande à Poincaré ce que signifie l'expression, «Certains déplacements ont un caractère commun : on dit qu'ils laissent fixe un point de l'espace» et y voit deux interprétations possibles :

En résumé, ou bien ce caractère commun à tous les déplacements du sous-groupe consiste à avoir un point fixe, et alors la définition implique le défini ; ou bien c'est un caractère purement analytique, et alors c'est arbitrairement qu'on lui attribue un sens géométrique, en postulant précisément que l'espace a trois dimensions. [Couturat 1896, 660]

Pour répondre à cette objection, Poincaré est obligé d'«employer le langage mathématique». Il ne dispose que de la notion de groupes de transformations au sens de Lie. Mais, nous avons vu que, contrairement à Couturat, il fait la différence entre les propriétés formelles, c'est-à-dire les «propriétés communes à tous les groupes isomorphes» [1898, 23] et celles plus contingentes liées à l'ensemble sur lequel opère le groupe¹⁰. Donc, nous connaissons un

⁶ Poincaré définit comme 'formelles' les propriétés intrinsèques du groupe.

Elles sont indépendantes de toute qualité et en particulier de la nature qualitative des phénomènes qui constituent le changement auquel nous avons donné le nom de déplacements. [Poincaré 1898, 22]

⁷ Poincaré définit la notion d'isomorphie de deux groupes par l'identité de leurs propriétés formelles :

Il arrive parfois que deux groupes contiennent des opérations qui sont entièrement différentes quant à leur nature, et que néanmoins ces opérations se combinent suivant les mêmes lois. Nous disons alors que les deux groupes sont isomorphes. [Poincaré 1898, 22]

⁸ On voit ici que Poincaré, qui distinguait pourtant explicitement les propriétés formelles d'un groupe de celles liées à son action, concevait, lui aussi, la notion de groupe uniquement comme 'groupe de transformations'.

⁹ Poincaré désigne par 'matière' d'un groupe, l'ensemble sur lequel il opère.

¹⁰ Poincaré illustre son propos par l'exemple du groupe du cube :

groupe G auquel nous rapportons les déplacements, mais «nous pouvons prendre comme ‘groupe normal’ au lieu de G , un groupe quelconque isomorphe à G » [1897, 66].

Il reste à poser la question de savoir quel groupe choisir parmi tous les groupes isomorphes à G . De par la capacité de notre entendement à former des groupes, nous connaissons les propriétés formelles du groupe G . «La plus importante des propriétés formelles d’un groupe est l’existence des sous-groupes». Poincaré distingue trois catégories de sous-groupes d’ordre 3, 2 ou 1 ; il faut entendre ici les sous-groupes g_1 (d’ordre 3) constitués de rotations autour d’un point, les sous-groupes g_2 (d’ordre 2) constitués de vissages autour d’un axe et les sous-groupes de rotations g_3 (d’ordre 1) constitués par les rotations autour d’un axe. Il considère l’action des transformations qui sont dans la terminologie moderne appelées ‘automorphismes intérieurs’ de G sur ces trois ensembles. Il conclut sans démonstration que dans le premier cas, la dimension de l’espace obtenu est 3, dans le second 4 et dans le dernier 5. Ce résultat est certes assez intuitif mais on peut tenter d’en donner une démonstration en langage moderne :

Le groupe affine euclidien G peut être défini comme le produit semi-direct $\mathbf{R}^3 \times_{\alpha} O(3)$ où α est l’action canonique de $O(3)$ sur \mathbf{R}^3 . Un élément de G est donc décrit comme un couple (v, f) $v \in \mathbf{R}^3, f \in O(3)$, la loi du groupe s’écrivant :

$$(v, f)(w, g) = (fw + v, fg).$$

Soit g_1 un sous-groupe de rotations autour d’un point w . Nous pouvons définir g_1 :

$$\varphi \in g_1 \Leftrightarrow \{\varphi = (v, f) / f \in O(3), v = w - fw\}.$$

Un élément de g_1 est défini par la donnée de f . Chaque sous-groupe g_1 de rotations autour d’un point est isomorphe à $O(3)$. g_1 est donc défini par la donnée de w et l’ensemble des g_1 est donc de dimension 3.

Soit $\psi = (u, g)$. On a :

$$\psi\varphi\psi^{-1} = (u + gw, gfg^{-1}).$$

Ainsi considérons les différentes manières dont un cube peut être superposé à lui-même. Les sommets peuvent être échangés l’un avec l’autre comme peuvent l’être aussi les faces et les arêtes ; d’où résultent trois groupes de permutations qui sont évidemment isomorphes entre eux ; mais leur degré peut être huit, six ou douze, puisqu’il y a huit sommets, six faces et douze arêtes. [Poincaré 1898, 34-35]

L'action de G sur les sous-groupes de rotations autour d'un point est analogue à l'action canonique de G sur \mathbf{R}^3 .

Soit g_2 un sous-groupe de vissages autour d'un axe de vecteur directeur w et passant par v . Nous pouvons définir g_2 :

$$\varphi \in g_2 \Leftrightarrow \{\varphi = (v - fv + \lambda w, f) / f \in O(3), w = fw, \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

Un élément de g_2 est défini par la donnée de f et de λ . Comme les éléments de $O(3)$ qui vérifie la condition $w = f(w)$ constitue un groupe isomorphe à $O(2)$, g_2 est un groupe d'ordre 2. L'ensemble des g_2 peut être décrit comme l'ensemble quotient $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 / \mathfrak{R}$ où \mathfrak{R} est la relation d'équivalence :

$$(v, w) \mathfrak{R} (v', w') \text{ si et seulement } v - v' = \mu w \text{ et } w' = \rho w, \quad \mu \in \mathbf{R}, \rho \in \mathbf{R}.$$

L'ensemble des sous-groupes de vissages est de dimension 4. Soit $\psi = (u, g)$. On a :

$$\psi \varphi \psi^{-1} = (u + gv - gfg^{-1}(u + gv) + \lambda gw, gfg^{-1}).$$

Cette action est évidemment compatible avec la relation d'équivalence \mathfrak{R} et on obtient l'action de G sur l'ensemble des droites affines de \mathbf{R}^3 .

Soit g_3 un sous-groupe de rotations autour d'un axe de direction w et passant par v . Nous pouvons définir g_3 :

$$\varphi \in g_3 \Leftrightarrow \{\varphi = (v - fv, f) / f \in O(3), w = fw\}.$$

Un élément de g_3 est défini par la donnée de f . Pour les mêmes raisons que dans le cas précédent, g_3 est un groupe d'ordre 1 isomorphe à $O(2)$. L'ensemble des g_3 peut être décrit comme $P^2(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^3$ et est de dimension 5. Soit $\psi = (u, g)$. On a :

$$\psi \varphi \psi^{-1} = (u + gv - gfg^{-1}(u + gv), gfg^{-1}).$$

Sur la composante $P^2(\mathbf{R})$, l'action de G est identique à celle de $O(3)$ vu comme un sous-groupe du groupe projectif et sur la composante en \mathbf{R}^3 , l'action de G est l'action canonique.

Il termine en affirmant que l'on choisit le premier cas car c'est celui qui donne le moins grand nombre de dimensions (critère de simplicité) et pour des raisons d'ordre expérimental.

Ce sont là trois solutions dont chacune est possible logiquement. Nous préférons la première parce qu'elle est la plus simple et elle est la plus simple parce qu'elle est celle qui donne à l'espace le nombre le plus petit de dimensions. Mais il y a une autre raison qui recommande ce choix ; le sous-groupe rotatif attire d'abord notre attention parce qu'il conserve certaines sensations. Le sous-groupe hélicoïdal ne nous est connu que plus tard et plus indirectement. Le faisceau rotatif d'autre part n'est lui-même qu'un sous-groupe du sous-groupe rotatif. [Poincaré 1898, 38]

L'important dans cette argumentation de Poincaré est donc que l'espace est obtenu à partir de la connaissance de groupe de transformation. On peut ainsi obtenir plusieurs espaces de différentes dimensions et donc la propriété du nombre de dimension est donc conventionnelle. On pourrait rapporter nos représentations spatiales à un espace de dimension 4 ou 5 sans changer de groupe de déplacements.

Le conventionalisme géométrique de Poincaré ne se limite donc pas au choix du groupe. En fait, chaque étape de la genèse psycho-physiologique de l'espace est scandée par des décisions de caractère conventionnel : pour définir les déplacements et leurs lois, les compensations entre mouvements, nous sommes obligés de choisir ce qui, dans un changement de sensations, « est regardé comme un déplacement satisfaisant rigoureusement aux lois » et ce qui « regardé comme une altération qualitative » sera négligé. Le choix du groupe sera aussi le résultat d'un choix conventionnel, guidé par des considérations de simplicité qui peuvent se traduire mathématiquement. De même, l'espace qui résulte de cette genèse est encore l'occasion de conventions pour la définition de la notion de point ou du nombre de dimensions de l'espace.

Bibliographie

Couturat, Louis

- [1896] Etudes sur l'espace et le temps, revue critique de *Etude sur l'espace et le temps* de G. Lechalas, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 4 (1896), 646-669.

Helmholtz, Hermann von

- [Œuvres] *Wissenschaftliche Abhandlungen von Hermann Helmholtz*, I-III, Leipzig : Barth, 1883.
- [Gehlhaar] *Abhandlungen zur Philosophie und Geometrie*, herausgegeben und eingeleitet von S. Gehlhaar, Cuxhaven : Junghans-Verlag, 1987.
- [1867] *Handbuch der Physiologischen Optik*, Leipzig : Leopold Voss, 1867 ; 2^e ed., 1886-1896 ; 3^e éd., 1909-1911 ; trad. fr. E. Javal et N. Th. Klein, Paris : Masson, 1867.
- [1868] Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen, *Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, (1868), 193-221 ; Œuvres II, 618-639 ; cité d'après la trad. angl. M. Lowe, in éd. angl. de [Hertz-Schlick], 39-58.

- [1869] Über den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze, *Populären wissenschaftlichen Vorträgen*, 3, 21-54 ; [Gehlhaar], 113-132 ; trad. angl. M. Lowe, in éd. angl. de [Hertz-Schlick], 1-38 ; cité d'après la trad. fr., *La revue scientifique de la France et de l'Etranger*, 51 (1877), 1196-1206.

Klein, Felix

- [Werke] *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Berlin : Springer (1921-1923), I-III.
- [1872] *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Erlangen: A. Deichert, 1872; trad. fr. H. Padé, *Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes*, *Annales de l'école normale supérieure* (3) 8 (1891); cité d'après l'édition de 1974, Paris: Gauthier-Villars.

Lie, Sophus

- [Œuvres] *Gesammelte Abhandlungen*, Leipzig / Oslo : Teubner/Aschehoug & Co (1935), I-VII.
- [1892] Lettres de Lie à Poincaré, *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 10 (1989), 151-163 ; trad. fr. de J. Peiffer, 165-177.
- [1893] *Theorie der Transformationsgruppen* III, Leipzig : Teubner (1893).

Poincaré, Henri

- [Œuvres] *Œuvres de Henri Poincaré*, 1-11, Paris : Gauthier-Villars, 1916-1956.
- [1887] Sur les Hypothèses fondamentales de la Géométrie, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 15 (1886-1887), 203-216 ; [Œuvres 11], 79-90.
- [1891] Les Géométries non-euclidiennes, *Revue générale des Sciences pures et appliquées*, (1891), 769-774.
- [1892] Lettre de H. Poincaré à M. Mouret, *Revue générale des Sciences pures et appliquées*, (1892), 74-75.
- [1893] Sur le Continu Mathématique, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1 (1893), 26-34.
- [1894] Sur la Nature du Raisonnement mathématique, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 2 (1894), 371-384.
- [1895] L'espace et la Géométrie, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 3 (1895), 630-646.
- [1897] Réponse à quelques critiques, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 5 (1897), 59-70.
- [1898] On the Foundations of Geometry, *The Monist*, (9) 1 (1899), 1-43 ; cité d'après la trad. fr. L. Rougier, *Des Fondements de la Géométrie*, Paris : Chiron, 1922.
- [1899] Des Fondements de la Géométrie, à propos d'un livre de M. Russell, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 7 (1899), 251-279.
- [1900] Sur les Principes de la Géométrie, réponse à M. Russell, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 8 (1900), 73-86.
- [1901] *Analyse des travaux scientifiques de Poincaré faite par lui-même*, Uppsala : Almqvist & Wiksells Boktryckeria, 1913 ; *Acta mathematica*, 38 (1921), 3-135.
- [1902a] *La Science et l'Hypothèse*, Paris : Flammarion, 1902 ; cité d'après la rééd. Paris : Flammarion, 1968.
- [1902b] Les Fondements de la Géométrie, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 26 (1902), 249-272 ; Œuvres 11, 92-113.
- [1905] *La Valeur de la Science*, Paris : Flammarion, 1905, Paris ; cité d'après la rééd. Paris : Flammarion, 1970.
- [1908] *Sciences et Méthodes*, Paris : Flammarion, 1908 ; rééd. *Philosophia Scientiae*, cahier spécial n°3, Paris : Kimé, 1999.
- [1913] *Dernières Pensées*, Paris: Flammarion, 1913.

Ribot, Théodule

- [1879] *La Psychologie allemande contemporaine (Ecole expérimentale)*, Paris : Alcan, 1879 ; cité d'après la 7^e éd., 1909.

Riemann, Bernhard

- [Werke] *Gesammelte Mathematische Werke, Wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge*, herausgegeben unter Mitwirkung von R. Dedekind und H. Weber, Leipzig : Teubner, 1876 ; 2^e éd. 1892 ; Berlin :Springer, 1990 ; trad.fr. Paris : Gauthier-Villars, 1898.
- [1854] Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, *Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 13 (1867), 133-150 ; [Werke] 254-269.