



HAL
open science

Lie, critique des travaux de Riemann et Helmholtz

Philippe Nabonnand

► **To cite this version:**

| Philippe Nabonnand. Lie, critique des travaux de Riemann et Helmholtz. 1997. hal-01086145

HAL Id: hal-01086145

<https://hal.science/hal-01086145>

Preprint submitted on 22 Nov 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LIE, CRITIQUE DES TRAVAUX DE RIEMANN ET HELMHOLTZ

P. NABONNAND

(Archives Henri Poincaré – Université de Nancy 2)

I. INTRODUCTION

Dans l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, Enriques distingue, concernant l'objet de la géométrie : “ 1) l'espace intuitif habituel, c'est-à-dire la représentation de l'espace telle que notre esprit le conçoit ; 2) l'espace physique dont les propriétés nous sont données par l'expérience ; 3) les espaces abstraits, c'est-à-dire les conceptions plus générales que nous pouvons déduire de l'espace intuitif ordinaire par abstraction ou généralisation ”.

Il précise que “c'est la géométrie non-euclidienne, établie entre 1815 et 1830 par Gauss, Bolyai et Lobachevsky qui conduisit à cette idée nouvelle et remarquable que l'espace physique pourrait être différent de l'image que nous en fournit notre intuition habituelle”. Ainsi, dans une lettre adressée à son ami Schumacher, Gauss admet le caractère expérimental de la géométrie, comprise implicitement au sens (2) de la géométrie de l'espace physique. L'apparition des géométries non-euclidiennes autorise et entraîne la distinction entre les conceptions (1) et (2).

Durant la seconde moitié du 19^e siècle, la question des fondements de la géométrie amène la différenciation des points de vue (2) et (3). L'histoire du problème de Riemann-Helmholtz est un épisode de l'évolution d'une conception des fondements comme faits vers la notion d'axiome.

Dans ce qui suit, nous rappellerons les problématiques de Riemann et Helmholtz qui amenèrent Lie à poser le problème de Riemann-Helmholtz comme celui de caractériser les géométries euclidiennes et non-euclidiennes. Dans la quatrième partie, le point de vue de Lie est analysé.

II. RIEMANN

II. 1 Les intentions de Riemann

Riemann part du constat que “la Géométrie (entendue comme théorie mathématique de l'espace réel) admet comme données préalables non seulement le concept de l'espace, mais encore les premières idées fondamentales des constructions dans l'espace”. Pour élucider les “rapports mutuels de ces données primitives”, il propose d'abord de construire le concept d'une grandeur de dimensions multiples, l'espace n'étant qu'un cas particulier d'une grandeur de trois dimensions, puis de déterminer les conditions de possibilité d'une géométrisation d'une telle grandeur.

Le concept de grandeur de dimensions multiples construit et les déterminations de lieu dans une telle grandeur étant ramenées à des déterminations numériques de coordonnées, Riemann montre qu’*une grandeur de dimensions multiples est*

susceptible de différents rapports métriques”. En conséquence, les propositions de la Géométrie ne peuvent se déduire des concepts généraux de grandeur et donc “*les propriétés, par lesquelles l'espace se distingue de toute autre grandeur comparable de trois dimensions, ne peuvent être empruntées qu'à l'expérience*”.

Il se pose alors le nouveau problème qui n'est plus mathématique, de “*rechercher les faits les plus simples au moyen des quels puissent s'établir les rapports métriques de l'espace*”, problème dont Riemann signale qu'il est par nature indéterminé. Selon Riemann, le plus important de ces systèmes, est certes celui d'Euclide, mais “*ces faits, comme tous les faits possibles ne sont pas nécessaires, [...] ce sont des hypothèses*”, testables et pour lesquelles on doit préciser “*les limites de l'observation*”. Riemann distingue donc bien explicitement les questions de l'espace physique et celle de l'espace théorique. Cela se traduit dans le vocabulaire utilisé par celui-ci qui utilise *Mannigfaltigkeit* pour désigner les espaces abstraits et réserve *Raum* et *Geometrie* à l'espace physique et à sa théorie.

II. 2 Les multiplicités de dimensions quelconques et leurs rapports métriques

Etant donnée une multiplicité de dimensions multiples, Riemann distingue deux problèmes purement mathématiques, “*une branche générale de la théorie des grandeurs indépendante des déterminations métriques*” (topologie) et la question des rapports métriques possibles sur une telle multiplicité (géométrie). Il différencie deux types de grandeurs selon que leur mode de détermination est discret ou continu.

La comparaison des grandeurs se fait quantitativement au moyen du dénombrement pour les grandeurs discrètes et de la mesure pour les grandeurs continues. Pour les grandeurs discrètes dont Riemann a remarqué qu'elles étaient les plus fréquentes “*dans la vie ordinaire*”, les questions topologiques et géométriques sont donc difficilement discernables. Par contre, Riemann s'interroge sur les conditions de possibilité d'effectuer une mesure et souligne la nécessité de pouvoir transporter un étalon de mesure. Sans cette condition, on ne peut pas appréhender le problème de la mesure d'un point de vue quantitatif.

Pour son propos, Riemann limite son étude “*de cette branche générale de la théorie des grandeurs étendues*” à deux points. Dans un premier temps, il s'intéresse à la “*génération du concept d'une multiplicité de plusieurs dimensions*”. Puis, il s'attache à montrer que l'on peut ramener les déterminations de lieu dans une multiplicité donnée à un nombre fini de déterminations numériques. Les coordonnées ainsi définies permettent de se repérer dans la multiplicité mais ne sont susceptibles en elles-mêmes, d'aucune interprétation métrique.

Après avoir construit le concept de multiplicité à n dimensions et ramené la détermination du lieu dans une telle multiplicité à la détermination de n grandeurs, Riemann aborde la question des rapports métriques dans une multiplicité et aux conditions suffisantes pour les définir.

Une condition nécessaire aux déterminations métriques est l'indépendance entre les grandeurs et le lieu. Vuillemin, dans sa *Philosophie de l'algèbre*, souligne l'importance de cette hypothèse pour envisager la possibilité de la mesure et donc de la géométrie.

“Devant une telle multiplicité, il se peut que nous ne disposions pas d'instrument de mesure ; nous ne pourrions alors comparer deux grandeurs que si l'une est une partie de l'autre et en nous contentant alors de juger que celle-ci est plus petite que celle-là, sans pouvoir dire de combien. Dans ce cas, les grandeurs ne sont pas indépendantes de la situation et l'on ne peut les exprimer à l'aide d'unités. C'est au contraire cette indépendance des grandeurs par rapport au lieu qu'impliquent les déterminations métriques. ” [Vuillemin 1962, p. 409]

Helmholtz fonde aussi son approche de la question de la géométrie sur cette distinction.

“De même, nous pouvons considérer le système des sons simples comme une multiplicité à deux dimensions, si nous ne distinguons que la hauteur et l'intensité, en laissant de côté les différences de timbre. Cette généralisation de l'idée est bien faite pour exprimer la distinction entre l'espace à trois dimensions et les autres multiplicités. Nous pouvons, comme nous l'apprend l'expérience quotidienne, comparer la distance verticale de deux points avec la distance horizontale de deux autres, parce que nous pouvons appliquer une mesure d'abord à la première paire et ensuite à la seconde. Mais nous ne pouvons pas comparer la différence entre deux sons de hauteur égale et d'intensité différente avec deux sons d'intensité égale et de hauteur différente.” [Helmholtz, 1868c, p. 122]

Il est donc nécessaire pour obtenir des rapports métriques sur une multiplicité donnée de pouvoir définir une unité de longueur. La donnée seule de la multiplicité n'implique pas de détermination intrinsèque d'une unité de longueur, ni même l'existence d'une telle unité. Pour cela, Riemann pose comme hypothèse que *“la longueur des lignes est indépendante de leur position, et par suite chaque ligne est mesurable au moyen de chaque autre”* et pose comme condition indispensable pour envisager une géométrisation de la multiplicité l'existence d'une unité de longueur qui soit l'étalon de mesure des longueurs des lignes.

Riemann, dans un deuxième temps, montre, que la mesure de l'élément linéaire ds s'exprime comme la racine carrée d'une fonction homogène du second degré des quantités dx . Cette hypothèse signifie qu'infinitésimalement, la géométrie est euclidienne. L'exemple le plus simple dans le cas de l'espace physique est celui de la géométrie euclidienne.

Riemann termine son étude des métriques en étudiant les conséquences d'un changement de variables. Par changement de variables, une métrique est transformée en une métrique vérifiant les mêmes conditions. Par contre, on ne peut pas, à partir d'une métrique donnée, obtenir par changement de variables n'importe quelle autre métrique. Riemann fait apparaître analytiquement qu'une même multiplicité est susceptible de différents rapports métriques, c'est-à-dire de rapports métriques qui ne se ramènent pas les uns aux autres par un changement de variables. Sur une même multiplicité, on peut développer plusieurs types de géométries. Les multiplicités dont l'élément linéaire peut se ramener à la forme simple $\sqrt{\sum(dx)^2}$ comme le plan ou l'espace de la géométrie d'Euclide ne sont donc que des cas particuliers de géométries que Riemann appelle multiciplités planes.

Riemann introduit alors la notion de courbure comme mesure de l'écart entre la géométrie locale et la géométrie des multiplicités planes. Il fonde son analyse sur une généralisation de la théorie des surfaces de Gauss.

Avant de passer aux applications à l'espace physique, Riemann étudie les propriétés géométriques des multiplicités à courbure constante. Comme les rapports métriques autour d'un point sont déterminés par la mesure de courbure, dans une multiplicité à courbure constante, *“les rapports métriques autour d'un point et dans toutes les directions sont exactement les mêmes qu'autour d'un autre point et par suite on peut, à partir de ce point, exécuter les mêmes constructions, d'où il s'ensuit que, dans les multiplicités où la mesure de courbure est constante, on peut donner aux figures une position arbitraire quelconque”*. Autrement dit, il établit la propriété de libre mobilité des solides dans un espace à courbure constante.

II. 3 Les hypothèses qui sont au fondement de la géométrie

L'espace physique étant un cas particulier de multiplicité à 3 dimensions, se pose alors le problème des *“conditions suffisantes et nécessaires pour la détermination des rapports métriques”*.

Riemann distingue trois types de systèmes d'hypothèses selon que l'on suppose la courbure nulle, constante ou variable. Dans le premier cas, la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits, dans le second on suppose *“une existence indépendante de la position, non seulement pour les lignes, mais encore pour les corps”*, autrement dit l'hypothèse de libre mobilité des corps solides, hypothèse que l'on abandonne dans le cas de la courbure variable.

Se pose alors le problème de déterminer quel est le système qui rend le mieux compte de l'espace physique.

“[...] nous avons d'abord séparé les rapports d'étendue ou de régions des rapports métriques, et nous avons trouvé que, pour les mêmes rapports d'étendue, on pourrait concevoir différents rapports métriques ; nous avons ensuite cherché les systèmes de déterminations métriques simples, au moyen desquels les rapports métriques de l'espace sont complètement déterminés, et dont toutes les propositions concernant ces rapports sont des conséquences nécessaires. Il nous reste maintenant à examiner comment, à quel degré et avec quelle extension ces hypothèses sont confirmées par l'expérience.” [Riemann 1854, p. 294-295]

La description des rapports d'étendue qui sont du ressort de la topologie et la description des rapports métriques qui relève de la géométrie sont chez Riemann des questions purement analytiques. La courbure, déterminée purement analytiquement, permet de décrire et de classer les diverses géométries d'une multiplicité. Elle s'interprète géométriquement et on peut caractériser alors des systèmes de déterminations métriques simples, que l'on peut tester lorsque la question de la géométrie de l'espace physique est posée.

Or, l'imprécision des résultats expérimentaux ne permet pas de décider de manière certaine, "*quelque grande que puisse être la probabilité de son exactitude approchée*", quelle géométrie, parmi le spectre des géométries possibles, décrit le mieux possible l'espace physique. De plus, lorsque l'on extrapole les résultats de l'expérience au-delà des limites de l'observation dans l'immensurablement grand ou dans l'immensurablement petit, les données empiriques peuvent devenir de plus en plus inexactes. En particulier, lorsque l'on s'intéresse aux constructions de l'espace à l'immensurablement grand, se pose la question de la distinction de l'illimité et de l'infini, la première notion relevant des rapports d'étendue, et la seconde des rapports métriques. L'hypothèse selon laquelle l'espace est illimité s'applique à toutes nos conceptions du monde et, selon Riemann, "*possède donc une plus grande certitude empirique qu'aucune autre donnée externe de l'expérience*". Mais en aucun cas, on ne peut en déduire l'infinité de l'espace physique et on ne peut donc même pas exclure le cas de la géométrie à courbure positive pour la description de ce dernier.

Mais, Riemann ne s'attarde sur la question de l'immensurablement grand car il considère que, pour l'explication de la nature, les questions de l'immensurablement grand ne sont pas très importantes contrairement à celles de l'immensurablement petit.

"C'est sur l'exactitude avec laquelle nous suivons les phénomènes dans l'infiniment petit, que repose essentiellement notre connaissance de leur rapport de causalité." [Riemann 1854, p. 296]

Puisque les concepts empiriques, corps solide et rayon lumineux, qui fondent les déterminations métriques, ne sont plus réellement opérationnels dans le domaine de l'infiniment petit, Riemann envisage la possibilité que le domaine de l'infiniment petit dépende d'une autre géométrie.

"Il est très légitime de supposer que les rapports métriques de l'espace dans l'infiniment petit ne sont pas conformes aux hypothèses de la géométrie, et c'est ce qu'il faudrait effectivement admettre, du moment où l'on obtiendrait par-là une explication plus simple des phénomènes." [Riemann 1854, p. 297]

Riemann s'inscrit dans la perspective d'une géométrie appliquée, comprise comme théorie de l'espace physique, qui s'appuie sur l'expérience. En effet, le principe des rapports métriques de l'espace doit être cherché en dehors de celui-ci, les fondements de la géométrie ne sont pas intrinsèques à la donnée de l'espace mais au contraire doivent être déterminés par l'expérience.

"La réponse à ces questions ne peut s'obtenir qu'en partant de la conception des phénomènes, vérifiée jusqu'ici par l'expérience, et que Newton a prise pour base, et en apportant à cette conception les modifications successives, exigées par les faits qu'elle ne peut pas expliquer." [Riemann 1854, p. 297]

III) HELMHOLTZ ET LES FAITS QUI SONT AU FONDEMENT DE LA GEOMETRIE.

Helmholtz est amené à aborder la question des fondements de la géométrie par ses études sur la perception. Dans une lettre adressée à son ami Lipschitz le 18 février 1868, évoque ses travaux mathématiques concernant cette question :

“Les études philosophiques sur la théories des sensations m’ont beaucoup occupé, en particulier une recherche mathématique, analytique sur les possibilités algébriques des systèmes géométriques et l’origine des axiomes géométriques.”
[Lipschitz, Briefwechsel, p. 121]

Il traite la question des fondements de la géométrie dans quatre articles : *Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie* [1868a], *Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen* [1868b], qui reprend les thèses exposées dans l’article précédent en en développant les aspects techniques ; *Ueber den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze* [1870c] et la réponse aux critiques du professeur Land [1878] sont des textes destinés à un public non-mathématicien dans lesquels Helmholtz présente pédagogiquement les travaux les plus récents de géométrie et en analyse certaines conséquences philosophiques.

Helmholtz se réfère explicitement aux travaux de Riemann :

“J’avais entrepris cet examen, et j’étais parvenu aux principaux résultats, lorsqu’a paru La Leçon d’habilitation de Riemann Sur les hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie, dans laquelle le même sujet est étudié à un point de vue qui ne diffère pas essentiellement du mien.” [Helmholtz 1868a, p. 373]

1) Les hypothèses de Helmholtz et la notion de transformation.

Même si sa démarche a son origine dans ses recherches sur la perception, Helmholtz insiste sur le cadre strictement mathématique de son étude. En particulier, il exprimera ses quatre hypothèses dans un espace de dimension n . D’autre part, il distingue clairement la question mathématique des fondements de la géométrie de la recherche *“de l’origine de notre connaissance des propositions qui expriment des faits”* [1868a, p. 108]. Helmholtz se propose *“de distinguer quelles sont, parmi les propositions de la Géométrie, celles qui expriment des vérités de fait, et celles, au contraire, qui sont de simples définitions, ou des conséquences des définitions et des expressions que l’on a choisies pour les énoncer”* [Ibid., p. 108]. De plus, il constate que d’une part, les exposés classiques ou modernes de Géométrie *“supposent tacitement une suite de plusieurs autres faits”* [Ibid. p. 108], c’est-à-dire que la série d’axiomes posés habituellement est insuffisante et que d’autre part, il est difficile à partir de la géométrie synthétique classique de déterminer si l’évidence d’une propriété est intrinsèque ou due simplement à notre représentation de l’espace.

“Comme nous ne pouvons nous représenter clairement que des relations d’étendue telles qu’il est possible d’en figurer dans l’espace réel, cette clarté d’intuition nous jette facilement dans l’illusion de regarder comme une chose évidente par elle-même ce qui est véritablement une propriété particulière, et sans évidence intrinsèque, du monde extérieur en présence duquel nous vivons.” [Ibid., p. 108].

Voulant donc s’abstraire de toute intuition spatiale, Helmholtz adopte donc le cadre de la géométrie analytique, *“dont les calculs reposent sur de pures idées de grandeur et qui*

n'utilise dans ses preuves aucune intuition". Le mémoire de Riemann [1854] paraît de manière posthume fin avril/début mai 1868 et Helmholtz ne peut que constater une certaine similitude entre leurs approches. Entre autre, Helmholtz adopte la définition de multiplicité n -fois étendue de Riemann. Il est d'ailleurs un des premiers à utiliser l'expression "espace de n dimensions" (*Raum von n Dim.*) alors que Riemann n'utilise *Raum* que pour désigner l'espace réel et *Mannigfaltigkeit* pour désigner les grandeurs générales.

Helmholtz reprend cette hypothèse et pose en premier axiome que l'espace à n dimensions est une multiplicité n fois étendue, ce qui signifie explicitement pour lui que la définition d'un point s'effectue par la détermination de n grandeurs indépendantes et variant continûment. Helmholtz donne comme exemple de multiplicité doublement étendue le système des sons et comme exemple de multiplicité triplement étendue le système des couleurs.

Il présente l'exigence (*Forderung*) de Riemann concernant l'indépendance de la longueur d'une ligne par rapport au lieu et à la direction et qualifie de théorème de Pythagore généralisé, l'hypothèse de Riemann selon laquelle une métrique est une fonction homogène du second degré des différentielles des coordonnées. Il souligne que celui-ci l'admet comme hypothèse.

Helmholtz termine l'exposé des travaux de Riemann en indiquant ses résultats concernant la courbure. Il indique en particulier les résultats concernant les surfaces à courbure constante. Dans la version originale de sa conférence *Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie*, il commet l'erreur de penser que les seules surfaces infinies à courbure constante sont les plans ou les surfaces développables sur un plan.

"Si l'étendue d'une telle surface [à courbure constante] est infinie, alors elle doit être un plan ou être obtenue à partir d'un plan par torsion sans élongation."
[1868a, p 109].

Cette erreur est évoquée par Beltrami dans sa correspondance avec Houël alors que ce dernier était en train de traduire l'article de Helmholtz. Beltrami est d'autant plus surpris de l'affirmation de Helmholtz que celle-ci contredit ses propres résultats sur les surfaces pseudosphériques [Beltrami 1868a].

"Je viens de recevoir les épreuves de la note de Helmholtz. [...] L'insistance avec laquelle y est niée la possibilité d'une surface à courbure constante et d'étendue infinie, si ce n'est le plan, augmente ma surprise, et il faudra bien que je prenne mon courage à deux mains et que j'en écrive à Helmholtz¹, pour en avoir le cœur net." [Lettre de Beltrami à Houël datée du 9 avril 1869]

Peu après, Beltrami communique à Houël la réponse de Helmholtz dans laquelle ce dernier reconnaît son erreur et suggère à son traducteur français des corrections qui sont

¹ Beltrami écrit à Helmholtz le 24 avril 1869. L'original de cette lettre se trouve dans les Archives de l'Académie des Sciences de Berlin. Elle est publiée en partie dans la monumentale biographie de Helmholtz rédigée par Königsberger [1902, II, 153-156]. La correspondance Houël-Beltrami est conservée dans les Archives de l'Académie des Sciences de Paris [Dossier Beltrami] et a été récemment publiée par L. Boi, L. Giacarda et R. Tazzioli [1998].

reprises dans l'édition française de ce texte. Helmholtz fera par ailleurs paraître une correction à ce sujet [1868a, p. 112].

Ce point n'est pas qu'anecdotique. En effet, Helmholtz considérait qu'une des caractérisations de l'espace réel est la possibilité de mouvements sans déformation de systèmes rigides de points. Il pose donc comme exigence au début de son travail, la libre mobilité absolue des solides sans déformation dans toutes les parties de l'espace et signale que, sous cette condition, l'hypothèse initiale de Riemann, à savoir l'existence de métrique homogène du second degré se déduit à partir de très peu de demandes (*Annahme*). En reprenant les conclusions de Riemann et en ajoutant l'infinité de l'espace, il aurait ainsi obtenu la géométrie euclidienne comme seule géométrie possible de l'espace "réel" en supposant "*aux corps de la nature une solidité d'un caractère déterminé et un degré particulier de mobilité, pour qu'un système de mesures, tel que celui de la Géométrie, puisse présenter une signification réelle*".

Helmholtz justifie son exigence par le fait que "*toute mesure spatiale originelle repose sur l'observation de congruence*" [1868b, p. 621]. Transposée dans le cadre purement mathématique, "*on ne peut pas parler en général de congruence quand les solides et les systèmes solides de points ne peuvent être mus dans une forme invariable ou quand la congruence de deux grandeurs spatiales n'est pas un fait indépendant des mouvements*" [1868b, p. 621].

Puisque Helmholtz veut fonder les déterminations métriques sur la notion de congruence, et que celle-ci exige l'existence de solides, son deuxième axiome consiste donc à affirmer l'existence de ceux-ci. Helmholtz est conscient de la difficulté qui se présente. En effet, comment définir la notion de solide sans faire appel à aucune "*mesure spécifique de grandeurs spatiales*"? Helmholtz propose une définition qu'il qualifie lui-même d'apparemment vague.

"Entre les $2n$ coordonnées de chaque paire de points, qui appartiennent à un corps solides, il existe une équation indépendante du mouvement du corps, qui est la même pour chaque paire congruente de points" [1868b, p. 622].

Helmholtz ramène donc la définition de la notion de solide à l'existence d'un invariant entre les paires congruentes de points ; implicitement, Helmholtz réintroduit la notion de métrique, qu'il prétendait déduire de ses hypothèses. Dans son article "*Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome*", il précise un peu les ambiguïtés de son point de vue.

" Comme on ne peut pas à ce moment présupposer une méthode spéciale de mesure des grandeurs spatiales, la définition d'un corps solide peut maintenant seulement être donnée par les caractéristiques suivantes : Il doit exister entre les coordonnées de deux points quelconques appartenant à un corps solide, une équation qui exprime une relation spatiale entre les deux points inchangée par un mouvement du corps, (qui finalement, se révélera leur distance) et qui est la même pour les paires congruentes de points" [1868c, p. 124]².

² L'argumentation de Helmholtz concernant l'exigence de la congruence des systèmes de points solides ne convainc manifestement pas Beltrami comme le montre la lettre qu'il envoie à Houël le 8 janvier 1869.

Comme le souligne Poincaré, la réduction, de la possibilité de la mesure à la notion de congruence des solides est, d'un point de vue strictement analytique, fautive. Bien qu'il adopte dans un certain sens le point de vue de Helmholtz en affirmant que "faire de la géométrie, c'est étudier les propriétés de nos instruments, c'est-à-dire du corps solide", Poincaré réfute l'argument liant la possibilité de mesure avec celle de la congruence de corps solides en soulignant que la géométrie métrique de Riemann ne requiert que la congruence de règles à une dimension.

Par contre, dans le cadre de la discussion de l'application à l'espace réel, l'identification de l'existence d'une mesure et de la congruence des solides devient naturelle si, avec Helmholtz, on admet que "*nous mesurons les distances en déplaçant un compas ou une règle graduée*". La question de la géométrie revient alors à celle des solides réels. Si une seule géométrie admet la libre mobilité des solides et l'infinité de l'espace, comme Helmholtz le pensait avant la lettre de Beltrami, le problème de déterminer les solides réels n'est qu'une question d'adéquation et il n'y a pas d'ambiguïté : on peut "*employer les propositions géométriques elles-mêmes, dont il s'agit d'établir une sorte de démonstration expérimentale*". On est conduit naturellement et expérimentalement à la géométrie euclidienne. Par contre, si on a le choix entre deux géométries, celle d'Euclide et celle de Lobachevski, il faut encore "*se poser la question de l'origine de ces spécifications particulières qui caractérise notre espace comme un espace plat, puisqu'il ressort qu'elles ne sont pas dans le concept général de grandeur*".

"Pour ce qui est de l'invariabilité des figures, la méthode de Helmholtz ne m'a pas paru, à moi aussi bien satisfaisante. Cependant le point de vue de l'article que j'ai eu sous les yeux me paraît différent et plus acceptable, que celui qui semblerait ressortir de vos indications, car il y est dit : "La possibilité de la mensuration de l'espace par la vérification de la congruence a été admise par moi dès le commencement ...". Alors voici comment je comprendrai la chose : on peut concevoir que les différents points l'espace soient définis de position par trois variables, sans attribuer à ces variables aucune signification numérique déterminée, mais les regardant seulement comme des fonctions du lieu (de la même manière, par ex. , que les degrés d'un thermomètre marquent la température, quoique on ne puisse établir aucun rapport simple entre ces degrés et la quantité absolue de chaleur). Alors le procédé de Helmholtz consiste à admettre que ces fonctions du lieu puissent être choisies de telle sorte que les coordonnées d'un couple de points appelés par nous invariablement unis satisfassent à une équation indépendante de leur position absolue. C'est bien sûrement un ensemble de choses assez nébuleux. La méthode puisée dans les recherches de Gauss sur les surfaces me paraît bien préférable et c'est celle que j'ai suivie, comme vous le verrez. Je crois que, si elle ne donne pas le dernier mot, elle est du moins utile pour éclaircir la discussion, et surtout pour donner en quelque sorte un substratum aux raisonnements et aux considérations."

Schlick, dans ses notes et commentaires à l'article de Helmholtz "*sur l'origine et la signification des axiomes de la géométrie*" [Hertz-Schlick 1921], explicite la circularité de la définition de Helmholtz.

"Cette définition réduit la congruence (l'égalité de deux extensions) à la coïncidence des paires de points des corps solides. [...] L'invariabilité et la solidité (de nos jours, on dirait plutôt rigidité), ne peuvent pas de leur côté, être définies à l'aide de cette définition de la congruence, sous peine de circularité. Pour cette raison, la définition ne semble pas être logiquement satisfaisante.

On sort seulement du cercle en stipulant par convention que certains corps sont regardés comme rigides, et on choisit ces corps de telle manière que le choix conduise à un système de description de la nature le plus simple possible [Poincaré, La valeur de la Science, p. 56]. Il est facile de trouver des corps qui (si l'on fait abstraction de la température et d'autres effets) satisfassent cet idéal suffisamment étroitement en pratique. Alors la congruence peut être définie sans objection" [Hertz-Schlick 1921, p. 31].

étendue à trois dimensions, ni de la libre mobilité des structures bornées contenues dans celle-ci” [1870, p. 17]. En effet, dans ce cas, Helmholtz n'a pas beaucoup progressé dans son projet de comprendre comment la géométrie de l'espace réel, qu'il qualifie de physique, est celle d'Euclide (ce que Helmholtz ne remet jamais en cause) sans que pour autant “*les axiomes de la géométrie soient au sens de Kant des conséquences nécessaires d'une forme transcendantale, donnée a priori, de notre intuition*” [1870, p. 18].

La définition purement mathématique de la notion de solide, ne pose guère de problèmes quoiqu'en dise Schlick. On suppose l'existence d'une distance et le projet d'Helmholtz est de montrer qu'avec les deux axiomes suivants, cette distance est nécessairement de la forme décrite par Riemann. Freudenthal reformule quant à lui ce second axiome en levant toute ambiguïté sur le statut de cette équation invariable.

“Le second axiome se lirait dans une formulation moderne : Il existe une métrique, et les mouvements sont les transformations isométriques appartenant à la composante de l'identité.” [Freudenthal 1964, p. 148-149]

Helmholtz restreint donc son propos à déterminer la forme analytique des métriques pour lesquelles la notion de mouvement des solides est possible. Ce n'est plus le même problème que celui qui était posé initialement. On peut penser que Helmholtz a réellement perçu cette évolution puisque dans sa conférence “*Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome*”, postérieure aux deux articles sur les fondements de la géométrie, Helmholtz ne parle que de l'expression algébrique utilisée par Riemann.

“L'hypothèse de base de départ de Riemann est l'expression algébrique mentionnée ci-dessus, qui exprime de la manière la plus générale la distance entre deux points infiniment proches et il déduit de celle-ci le théorème de mobilité des structures spatiales solides ; alors que je suis parti du fait d'observation que dans notre espace, le mouvement des corps solides est possible avec le degré de liberté que nous connaissons, et je dérive de ce fait la nécessité de l'expression algébrique que Riemann avait posé en axiome” [1868c, p. 124].

La libre mobilité totale des corps solides est posée dans le troisième axiome, “*ce qui signifie qu'il est supposé que chaque point de celui-ci peut être transporté continûment sur la position d'un autre, tant qu'il n'est pas lié par les équations qui existent entre lui et les points restants du corps solide auquel il appartient*” [1868b, p. 623]. Helmholtz déduit alors de ses hypothèses que la notion de congruence entre deux corps solides ou plus généralement entre deux domaines de l'espace est indépendante de la position.

Enfin, Helmholtz pose en guise de quatrième axiome, une hypothèse “*concernant l'indépendance entre la forme des corps solides et leur rotation*”. Il appelle cette propriété, par référence à celle bien connue des fonctions analytiques, la monodromie. Elle exprime que dans un espace de dimension n , un solide dont $n - 1$ points affinement indépendants est susceptible d'un mouvement de rotation qui ramènera le solide dans sa position initiale sans retour en arrière.

“Si un corps se meut de façon que $n - 1$ de ses points restent immobiles, et que ceux-ci soient choisis de telle manière que tout autre point du corps ne puisse plus parcourir qu'une ligne, la rotation, étant prolongée, ramène sans retournement le corps à sa position initiale.” [1868a, p. 111]

Helmholtz signale que cet axiome est implicitement sous-entendu par les traités classiques de géométrie lorsqu'il affirme que le cercle est une courbe fermée. De plus, il insiste sur le fait que cet axiome est indépendant des deux précédents. Lie montrera que cet axiome est en fait inutile dans le cas général.

2. Les conclusions de Helmholtz

Nous avons vu que les axiomes de Helmholtz ne suffisent pas, contrairement à son projet initial, à distinguer la géométrie euclidienne et la géométrie de Lobachevski. Nos conceptions usuelles de l'espace ne sont donc pas des *“nécessités de la pensée”*. Si l'origine de ces conceptions est empirique, *“nous devrions être capables à imaginer des séries de faits d'expérience observables”* correspondant à des espaces non-euclidiens. En particulier, il affirme que si de tels espaces sont envisageables de ce point de vue, l'affirmation selon laquelle *“les axiomes de la géométrie sont des conséquences nécessaires, au sens de Kant, d'une forme transcendantale donnée a priori de nos intuitions”* est réfutée.

Dans sa conférence sur l'origine des axiomes de la géométrie, il s'attache à décrire la perception des rapports métriques qu'aurait dans un espace non-euclidien, un observateur, *“dont l'estimation visuelle et les expériences spatiales auraient été, comme les nôtres, développées dans un espace plat”* et en conclut que *“nous ne pouvons admettre que les axiomes de notre géométrie sont fondés sur la forme donnée de notre faculté d'intuition ou sont liés d'une quelconque manière avec une telle forme”*.

D'autre part, les axiomes de la géométrie traduisent mathématiquement la possibilité de la mesure dans notre espace réel. Cette possibilité repose sur la congruence des corps solides. En géométrie, on ne retient qu'une caractéristique de ces corps, leur rigidité. Lorsque en retour, on applique ces axiomes à l'espace réel, les axiomes de la géométrie n'exprime pas seulement des relations spatiales, mais aussi les propriétés mécaniques du mouvement des corps solides. Pour Helmholtz, *“les axiomes de la géométrie ne sont certainement pas des propositions appartenant à la seule théorie pure de l'espace”*.

Finalement, Helmholtz conclut que ce que nous appelons notre intuition de l'espace trouve son origine dans notre expérience quotidienne et en particulier dans la notion de similitude, qui n'est possible géométriquement que dans un espace plat.

IV) LIE

Comme le fait remarquer Poincaré dans son rapport de présentation des travaux de Lie lors de la candidature de ce dernier à un poste de correspondant à l'Académie des

Sciences³ [Poincaré 1892], les travaux de Lie les plus importants concernent les transformations géométriques et surtout les groupes que celles-ci forment.

“Mais M. Sophus Lie ne se cantonna pas longtemps dans l'étude des transformations isolées et ses recherches sur les groupes qu'elles peuvent former, devaient être singulièrement plus fécondes. On appelle groupe l'ensemble de deux ou plusieurs transformations et de toutes les combinaisons qu'on peut en faire.”
[Poincaré 1892]

Poincaré affirme que la notion de groupe est centrale dans tous les domaines des mathématiques et que la structure de groupe des transformations liées à un problème mathématique s'obtient en désincarnant en quelque sorte ce problème et en analysant les propriétés des transformations indépendamment des particularités du problème.

“Bien que le mot soit nouveau et date de soixante ans à peine, il est permis de dire que chacune des branches de la science mathématique n'est autre chose que l'étude d'un groupe. Si dans les objets de cette science, on élimine par abstraction les éléments qualitatifs sur lesquels le raisonnement géométrique ne peut avoir de prise, et si l'on pousse cette analyse jusqu'au bout, l'élément purement formel qui subsistera se réduira à quelques combinaisons soumises à certaines lois c'est à dire à un groupe.” [Poincaré 1892]

Aux yeux de Poincaré, le mérite principal de Lie est d'avoir étudié les groupes continus de transformations et d'avoir fait ressortir que paradoxalement, malgré l'apparente généralité de ces structures, seules un nombre fini d'entre elles était possible⁴.

“On pourrait croire au premier abord qu'en s'attaquant à un concept aussi général, on perde le droit d'en rien affirmer. Toutes les barrières étaient enlevées qui s'opposaient à l'invention de combinaisons nouvelles, il semble que tout

³ A la séance du 7 juin 1892, Sophus Lie est élu membre correspondant de l'Académie des sciences en remplacement de Kronecker décédé le 29 décembre 1891. [*Comptes rendus*, 114 (1892), p. 1329]. Poincaré avait proposé la candidature de Lie et en fut le rapporteur.

⁴ Vuillemin analyse plus profondément l'aspect novateur du point de vue de Lie en soulignant que Lie travaille constamment du général au particulier et ainsi fait apparaître les propriétés générales qui découlent de la structure de groupe. Lie analyse les structures pour elles-mêmes, les classe et seulement dans un deuxième temps applique ses classifications à des problèmes particuliers.

“Mais surtout Lie introduisait en Mathématiques une façon nouvelle d'étudier les problèmes. Le plan général de son Traité [Lie 1888, 1890c, 1893] le fait voir : il commence par analyser systématiquement les propriétés générales des groupes continus finis ; il donne ensuite une théorie générale des groupes finis de transformations par contact ; il revient enfin à l'examen général des groupes finis continus à une, deux et trois variables, dont il obtient une classification exhaustive. Constamment, il est guidé par le souci de procéder non pas du particulier au général, mais du général au particulier. Autrement dit, ayant défini axiomatiquement les conditions générales auxquelles doit répondre un groupe fini continu, on examinera ensuite systématiquement les cas qui se présentent pour un choix déterminé du nombre des paramètres et de la valeur ou du type des valeurs qu'on assignera aux quantités arbitraires qui entrent dans la définition des conditions générales. Ainsi, comme le remarque Poincaré, tous les groupes que l'on peut imaginer possèdent des propriétés communes énumérées dans les conditions générales, et ce sont ces propriétés communes qui limitent le “caprice” des inventaires. Ce sont elles que Lie a étudiées toutes sa vie et qui confèrent aux structures leur caractère objectif, indépendant de notre arbitraire.”
[Vuillemin 1962, p. 398]

devienne également possible. On est donc étonné de voir M. Lie arriver à des résultats d'une simplicité imprévue. Pour les groupes d'ordre fini, c'est à dire pour ceux qui ne contiennent qu'un nombre fini de transformations infinitésimales, le savant norvégien trouve un théorème aussi élégant que surprenant. Si le nombre des variables indépendantes est donné, ces groupes sont en nombre limité. Pour les groupes d'ordre infini, les résultats sont analogues, quoique moins nets. Il est inutile de m'étendre sur la portée philosophique de ce théorème qui peut nous aider à comprendre pourquoi il existe une science mathématique pure, indépendante de toute expérience." [Poincaré 1892]

Poincaré, dans la suite de son rapport souligne l'intérêt des méthodes de Lie appliquées à la théorie des équations aux dérivées partielles et à celle des équations différentielles ordinaires. Puis il insiste sur l'apport essentiel de la théorie des groupes continus à la question des fondements de la géométrie.

"Je passe sur bien d'autres applications des mêmes principes pour arriver tout de suite à une question dont ils nous donnent la meilleure solution et qui préoccupe depuis longtemps à la fois les mathématiciens et les philosophes. Je veux parler des hypothèses fondamentales de la Géométrie. C'est surtout depuis l'invention des géométries non-euclidiennes qu'on a cherché à se rendre compte du nombre de ces hypothèses et de leur véritable nature. Si l'on examine avec attention les procédés de raisonnement d'Euclide, on verra qu'ils consistent presque toujours à transporter deux figures l'une sur l'autre pour les superposer. La science qu'il a créée est donc la théorie des déplacements des figures ; mais ces déplacements sont des transformations d'une nature particulière et ils forment un groupe. La géométrie n'est donc autre chose que l'étude d'un certain groupe et les géométries non-euclidiennes ont de même pour objet d'autres groupes analogues. Aussi, les méthodes de M. Lie nous fournissent la clef de cet intéressant problème et le théorème qu'il a découvert nous explique-t-il pourquoi l'on ne peut imaginer qu'un nombre fini de géométries. Cette solution avait été entrevue par Helmholtz mais avec moins de netteté." [Poincaré 1892]

1) La critique du point de vue de Riemann.

Dans son article "*Theorie der Transformationsgruppen*" [1880], Lie évoque rapidement les rapports qui existent entre les recherches de Riemann et Helmholtz et sa théorie des groupes continus. D'autre part, il signale que c'est Klein qui a attiré son attention sur les travaux de Helmholtz.

"Les recherches de Riemann-Helmholtz sur les faits qui sont au fondement de la géométrie sont en relation directe avec la théorie des groupes de transformations. La célèbre note de Helmholtz s'occupe dans ma terminologie avec la détermination de certains groupes d'ordre 6⁵ de l'espace trois fois étendu." [Lie 1880, p. 92]

⁵ Lie définit l'ordre d'un groupe continu comme le nombre de paramètres indépendants dont dépendent les expressions analytiques des transformations du groupe.

Dans l'introduction au chapitre 5 du troisième tome de son traité sur les groupes de transformations, Lie résume l'histoire de la question des fondements de la géométrie et affirme qu'en 1893, les mathématiciens ne devraient plus s'égarer sur la question de la nécessité de l'axiome des parallèles [1893, p. 394]. Il n'aborde, ici, la question que sous l'angle logique de l'indépendance des axiomes⁶.

Lie rappelle alors qu'au contraire de Lobatchevski et de Bolyai qui ont développé leur géométrie "*à la manière d'Euclide*", Riemann est le premier à utiliser des moyens analytiques pour fonder la géométrie. Lie distingue les deux étapes fondamentales de la démarche de Riemann. Il n'est pas convaincu par l'argumentation de Riemann concernant le premier point et pense même que "*la vraie signification du théorème que l'espace est une multiplicité numérique, n'est pas mise en évidence par Riemann*". L'objection principale que fait Lie sur ce point est que pour prouver ce théorème, on doit poser un nombre "*non négligeable*" d'axiomes et que Riemann ne semble pas du tout conscient de cette nécessité⁷ [Lie 1893, p. 394]. De toute manière, pour Lie, l'introduction de la notion de multiplicité numérique n'est pas arbitraire mais "*dans la nature des choses*" ; c'est-à-dire, semble-t-il, motivée par la volonté d'obtenir un traitement purement analytique de la question des fondements de la géométrie. Si l'on veut construire la géométrie à un niveau plus élevé que celui de la géométrie synthétique pour lequel les axiomes sont indépendants des notions d'aire et de nombres irrationnels, on ne peut pas éviter la notion de nombre irrationnel, ni d'introduire sous forme d'axiome que la droite est une multiplicité numérique⁸.

Lie considère que l'approche de Riemann, par l'analyse de l'élément de ligne des diverses géométries dont est susceptible une multiplicité, est d'un grand intérêt pour l'analyse et a vraisemblablement initié les recherches de Lipschitz et Christoffel sur la théorie des formes différentielles du second degré. Par contre, il pense que cette approche rate son objet, à savoir les fondements de la géométrie. Avec une indéniable mauvaise foi et oubliant, par exemple, les travaux de Beltrami, Lie affirme que le mémoire de Riemann n'a eu que très peu d'influence sur la question des fondements de la géométrie. Il justifie son point de vue en invoquant la difficulté conceptuelle et technique des axiomes de Riemann. En effet, les axiomes concernant l'élément de ligne mettent en œuvre des propriétés spatiales infinitésimales, ce qui est conceptuellement délicat, et comme d'autre part, on veut obtenir à partir de ceux-ci des conclusions concernant des propriétés de l'espace dans un domaine fini, on doit entreprendre une intégration, ce qui est techniquement difficile.

“Comme les axiomes qui doivent servir à une construction purement géométrique de la géométrie, doivent être élémentaire, et que ni l'élément de ligne, ni l'intégration ne sont des concepts élémentaires, il est clair que les axiomes riemanniens sont inutilisables dans un tel but.” [Lie 1893, p. 395-396]

⁶ Lie considère d'ailleurs qu'il est, à ses yeux, beaucoup plus important d'établir un système complètement suffisant de concepts fondamentaux et d'axiomes, que de poser la question de la nécessité de certains axiomes [1893, p. 393].

⁷ Lie relativise ici sa critique en indiquant que le texte de Riemann n'était pas destiné à être publié, et que d'autre part, cette question n'est pas, peut-être, primordiale dans l'esprit de Riemann.

⁸ Lie signale que c'est Cantor qui "*le premier a mis en évidence la nécessité d'introduire un axiome de cette sorte*" [1893, p. 395].

La critique de Lie des travaux de Riemann ne repose pas sur la question soulevée par Helmholtz et Poincaré de la nécessité de la congruence de corps solides, ce qui exclut les géométries à courbure non-constante comme susceptibles d'y rapporter les phénomènes physiques. Au contraire, Lie affirme la nécessaire simplicité des axiomes de la géométrie et met en cause radicalement l'approche de Riemann en appuyant sa critique sur la difficulté de compréhension de ses axiomes. L'argumentation de Lie à ce sujet est un peu légère et peut assez aisément se retourner contre son propre travail ; en effet, on ne peut pas dire que les axiomes qu'il invoquera sont conceptuellement élémentaires. D'autre part, on verra que la rigueur et la force de son travail résultent d'une compréhension profonde de la notion de transformation infinitésimale et des rapports entre les transformations infinitésimales et les transformations "finies".

Selon Lie, Helmholtz évite les insuffisances des axiomes riemanniens⁹, en posant des axiomes qui concernent les distances finies (et non infinitésimales) entre les points et cherchant "à dériver de ceux-ci l'axiome riemannien de l'élément de longueur" [Lie 1893, p. 396]. En posant directement en axiome que l'espace est une multiplicité numérique, Helmholtz effectue un progrès. Lie ne justifie pas ce point mais on peut penser qu'il considère qu'en ne cherchant pas à justifier cette demande, comme Riemann s'y efforce, Helmholtz affirme que cette demande est "dans la nature des choses" si on veut construire la géométrie d'un point de vue supérieur à celui de la géométrie synthétique, ce qui est, comme on vient de le voir, soutenu par Lie. D'ailleurs, Lie reproche à Helmholtz de sous-estimer la portée de cet axiome quand ce dernier "affirme à la fin de son travail que les axiomes posés par lui supposent moins que ceux posés habituellement dans les preuves géométriques" [Lie 1893, p. 396]. De plus, Lie affirme que le principal progrès effectué par Helmholtz par rapport à Riemann réside dans le fait qu'il considère les mouvements de l'espace, les conçoit comme une famille de mouvements de la multiplicité numérique et envisage la composition de ceux-ci.

"Il fait ainsi, pour ainsi dire, une utilisation des propriétés de groupes, sans pourtant connaître le concept général de groupe." [Lie 1893, p. 396]

Il ne faut pas pour autant penser que "les recherches novatrices de Helmholtz doivent être considérées comme le dernier mot sur cette question" [Lie 1886, p. 374]. En effet, pour Lie, si le résultat final n'est pas à remettre en cause, par contre, les moyens analytiques utilisés par Helmholtz sont insuffisants ; en outre, il utilise une série de suppositions injustifiées et d'autre part, l'axiome de monodromie est superflu "si on interprète son axiome de libre mobilité d'une manière conforme à la nature" [Lie 1886, p. 374].

Lie conclut de son analyse des travaux de Riemann et Helmholtz que ceux-ci ont implicitement posé un nouveau problème mathématique, qu'il baptise problème de Riemann-Helmholtz.

"Trouver des propriétés qui sont vérifiées aussi bien par la famille des mouvements euclidiens que par les deux familles de mouvements non-euclidiens et qui distingue ces trois familles de toutes les autres possibilités." [Lie 1893, p. 397]

⁹ Lie suppose que cet aspect positif du travail de Helmholtz est inconscient.

2) *La traduction des axiomes de Helmholtz en termes de groupes.*

Dans le troisième tome de son traité "*Theorie der Transformationsgruppen*", Lie commente et interprète les axiomes de Helmholtz extrêmement soigneusement pour les reformuler en termes de théorie des groupes.

Lie analyse le premier axiome de Helmholtz comme affirmant la possibilité des mouvements continus et définissant "*ce que l'on comprendra en général par mouvement continu*" [Lie 1893, p. 440]. Lie considère un mouvement dans une multiplicité n -fois étendue comme le mouvement d'un espace mobile de dimension n dans un espace fixe de même dimension. Le mouvement sera alors décrit par la manière dont les points de l'espace mobile change de position par rapport à l'espace fixe. Selon Lie, cet axiome permet alors d'affirmer que "*chaque mouvement est accompagné d'un changement continu des coordonnées du point mobile*" [Lie 1893, p. 440]. Chaque coordonnée s'exprime par une équation dépendant du temps et des coordonnées du point de départ.

"Nous déduisons que chaque mouvement continu d'une multiplicité n -fois étendue consiste en une famille continue d'une ∞^1 de transformations ponctuelles de cet espace et pour préciser une famille qui contient la transformation identique." [Lie 1893, p. 440]

Lie étudie alors les conséquences du second axiome. Il précise tout d'abord que les conclusions ne peuvent être valables qu'à la condition que les points considérés ne quittent pas le domaine d'étude lors du mouvement. Lie interprète l'axiome de Helmholtz en terme de couple de points de l'espace et sans poser la question des solides. En effet, Helmholtz ne dispose pas de la notion de groupe. Il est donc amené pour justifier la composition des mouvements, à introduire la question du mouvement exclusivement par le biais des solides. Lie aborde la question des fondements de la géométrie que d'un point de vue mathématique, et sous l'angle des groupes de transformations ponctuelles ; il n'a absolument pas besoin de la notion de solides.

Soient $x_1^0 \cdots x_n^0, y_1^0 \cdots y_n^0$ les coordonnées dans l'espace fixe de deux points quelconques dans l'espace mobile et soient $x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n$ les coordonnées de ces points après transformations. Pour Lie, le second axiome de Helmholtz demande qu'il y ait entre les coordonnées $x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n$ une équation indépendante du mouvement, qui reste la même pour toutes les paires de points congruents. Cette équation dépend donc non seulement de $x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n$ mais aussi de $x_1^0 \cdots x_n^0, y_1^0 \cdots y_n^0$ et peut donc être mise sous la forme suivante :

$$\phi(x_1^0 \cdots x_n^0, y_1^0 \cdots y_n^0, x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n) = 0 \quad (2)$$

Cette équation est une identité lorsqu'elle est évaluée à l'origine, c'est-à-dire pour $x_v = x_v^0, y_v = y_v^0$ ($v=1 \dots n$) et donc (2) ne peut être indépendante de toutes les coordonnées à l'origine $x_1^0 \dots x_n^0, y_1^0 \dots y_n^0$.¹⁰

Lie montre alors que cette équation entraîne l'existence d'un invariant, c'est à dire une fonction $\Omega(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n)$ des coordonnées d'une paire de points qui “*conserve sa valeur par tous les mouvements dont la paire de points est susceptible*” [1893, P. 443] :

“Soit

$$\zeta_v = F_v(x_1 \dots x_n, t) \quad (v=1 \dots n)$$

la famille de ∞^1 transformations, qui est définie par un certain mouvement continu, alors deux points de l'espace n -fois étendu possèdent toujours un invariant par rapport à cette famille :

$$\Omega(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n)$$

et à vrai dire, les deux points ont cet invariant par rapport à chaque famille de ∞^1 transformations qui sera définie par un des mouvements continus admissibles.” [Lie 1893, p. 444]

Cependant, le second axiome de Helmholtz n'est pas réductible à l'existence d'un tel invariant. En effet, le second axiome demande explicitement qu'entre deux points il y ait une véritable équation, “qui ne soit pas sans signification pour une paire de points particulière”. Une fois encore, Lie reprend à son compte les demandes de Helmholtz sans pour autant argumenter en terme de solides comme le faisait ce dernier. L'existence d'un invariant n'entraîne pas l'existence d'une équation entre les $2n$ coordonnées, indépendante du mouvement. Lie exige donc de l'invariant Ω que l'équation soit toujours une véritable équation.

Lie, enfin, insiste que la propriété d'invariance est conservée même lorsque la transformation est obtenue par composition de mouvements admissibles. D'autre part, il reste la question de l'unicité de l'invariant.

Le troisième axiome de Helmholtz précise donc les propriétés des mouvements admissibles. Lie distingue deux parties dans cet axiome.

La première partie est constituée de la demande de libre mobilité des corps solides, ou (on a vu plus haut qu'Helmholtz considérait ces deux demandes comme équivalentes) à la possibilité pour un point de se déplacer en un lieu quelconque tant qu'il n'est pas lié par des équations imposées par la rigidité des corps solides. Lie reformule cette partie de l'axiome en terme d'invariants de paires de points.

¹⁰ En effet, si l'équation évaluée à l'origine n'est pas une identité, alors reportée dans l'équation, il peut se produire l'élimination des $x_1^0 \dots x_n^0, y_1^0 \dots y_n^0$.

“Chaque point de l'espace mobile doit pouvoir se déplacer continûment sur le lieu d'un autre point de l'espace, tant qu'il n'est pas lié de telle manière que les invariants de toutes les paires de points de l'espace mobile auxquelles il appartient, doivent conserver leur valeur lors du déplacement” [Lie 1893, 446]

Lie en conclut que les invariants qui lient un certain système P_1, P_2, P_3, \dots par rapport à tous les mouvements doivent pouvoir s'exprimer en terme d'invariants des paires de points $P_1, P_2 ; P_1, P_3 ; P_2, P_3 ; \dots$. Autrement, les mouvements des systèmes de points de l'espace mobile ne seraient pas seulement limités de manière à conserver les invariants de paires de points. Alors que Helmholtz fondait son analyse sur les mouvements des solides définis à partir d'équations liant des paires de points, Lie ne considère que les mouvements admissibles des paires de points et montre que les mouvements des systèmes de plus de deux points se ramènent à l'étude des mouvements des paires de points du système. Cette propriété est fondamentale dans la théorie de Lie. Il désigne comme *significatif*, un invariant d'un système de s points si celui-ci ne se laisse pas exprimer au moyen d'invariants de $s-1$ ou de moins de points [Lie 1893, 399].

“Un point seul n'a en général pas d'invariant, deux points ont toujours un invariant par rapport à tous les mouvements possibles, trois points ou plus n'ont au contraire aucun invariant significatif.” [Lie 1893, p. 446]

Lie au contraire de Helmholtz, considère que la deuxième partie de cet axiome (celle dans laquelle Helmholtz déduit que $n(n+1)/2$ déterminations de grandeurs sont nécessaires pour déterminer la position d'un corps fixe), ne résulte pas des hypothèses précédentes et de la première du troisième axiome. Lie admet comme conséquences du deuxième axiome qu'étant donné un certain système de points P_1, \dots, P_m , les coordonnées des autres points de l'espace mobile vérifient certaines équations qui expriment que les invariants des paires de points $P, P_1 ; \dots ; P, P_n$ conservent leur valeur numérique pendant tous les mouvements encore possibles. Par contre, les suppositions précédentes ne fournissent aucun renseignement concernant le nombre et la nature de ces équations. Or Helmholtz, en supposant qu'une fois, P_1, \dots, P_m fixés, il y a m équations (en général) indépendantes (si les points sont en situation générale¹¹) entre les coordonnées de tout autre point P , admet implicitement *“que deux points ont un et un seul invariant”* [Lie 1893, p. 447].

Enfin, Lie montre que l'axiome ainsi compris de Helmholtz entraîne que les transformations de l'espace dépendent de $n(n+1)/2$ paramètres.

¹¹ Il ne faut confondre chez Lie la notion de "situation générale" pour un ensemble de points (*Punkte von allgemeiner gegenseitiger Lage*) qui signifie "affinement indépendants" et celle de situation générale pour un point (*Punkt von allgemeiner Lage*). Pour définir cette dernière notion, Lie considère r transformations infinitésimales indépendantes

$$X_k f = \sum_{i=1}^n \xi_i(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k=1 \dots n)$$

d'un groupe d'ordre r de l'espace à n dimensions. Il définit q comme la valeur pour laquelle tous les déterminants d'ordre $q+1$ de la matrice de terme général $\xi_{ki}(x)$ sont identiquement nuls et au moins un déterminant d'ordre q de cette matrice ne l'est pas. Un point en situation générale est un point où au moins un déterminant d'ordre q n'est pas identiquement nul.

“le passage du système de points P_1, \dots, P_n de la position de départ P_1, \dots, P_n en une nouvelle position P'_1, \dots, P'_n définit une transformation ponctuelle complètement déterminée” [Lie 1893, p. 449]

Le choix du système ponctuel P'_1, \dots, P'_n détermine les $n(n+1)/2$ paramètres et il s'ensuit que l'ensemble des transformations ponctuelles obtenues à partir d'une position de départ définie (pour laquelle les n points sont en situation générale) forme une famille à $n(n+1)/2$ paramètres significatifs. D'autre part, comme cette famille est indépendante de la position de départ choisie, on peut en déduire que cette famille est un groupe (au sens de Lie) qui de plus, contient l'identité et dont chaque transformation admet un inverse. La propriété précédente n'exprime alors que la transitivité du groupe¹².

Ensuite, Lie montre que le groupe obtenu ne peut qu'être continu. Si ce n'était pas le cas, la théorie générale montre que le groupe se décomposerait en un ensemble de familles continues à $n(n+1)/2$ paramètres. Parmi celles-ci, celle qui contient l'identité¹³ formerait un groupe G continu à $n(n+1)/2$ paramètres dont les éléments sont groupés par paires d'inverses. Mais chaque famille à un paramètre qui est induite par un mouvement quelconque contient l'identité et donc contenue dans G , ce qui montre que toute transformation du groupe est contenue dans G ¹⁴.

Lie termine l'analyse des axiomes de Helmholtz en situant G par rapport G' le groupe de toutes les transformations qui ont l'invariant $\Omega(x, y)$ par rapport aux paires de points. Lie remarque que les deux groupes ont même ordre et donc que G est le plus grand groupe continu (au sens de Lie, c'est-à-dire connexe par arcs) contenu dans G' .

L'axiome de monodromie de Helmholtz n'est pas commenté dans ce cadre par Lie. En effet, comme Lie montre que cet axiome est superflu, l'interprétation de cet axiome en terme de groupe n'intervient que plus tard, lors de la critique des développements de Helmholtz¹⁵.

¹² Lie définit la transitivité en étendant aux groupes continus d'ordre fini la notion de transitivité “*qui joue un rôle si important dans la théorie des substitutions*”.

“Un groupe continu d'ordre fini de variables $x_1 \dots x_n$ est dit transitif, si il existe dans l'espace un domaine n -fois étendu à l'intérieur duquel chaque point peut être transporté en chaque autre quelconque par au moins une transformation du groupe.” [Lie 1888, p. 212]

¹³ En langage moderne, on dirait la composante connexe de l'identité.

¹⁴ Lie montre qu'il existe un chemin continu entre chaque transformation du groupe et l'identité ce qui montre que le groupe est restreint à sa composante connexe de l'identité.

¹⁵ Lie donne une formulation en terme de théorie des groupes :

“Si on fixe $n-1$ points en situation générale [...], $n-1$ points choisis de telle manière qu'il ne puisse rester au repos en même temps que par un groupe d'ordre 1 de transformations, soit Xf la transformation infinitésimale de ce groupe d'ordre 1, alors les équations [Zugehörigen endlichen]

$$x'_v = x_v + \frac{t}{1} Xx_v + \frac{t^2}{1 \cdot 2} XXx_v + \dots \quad (v=1 \dots n)$$

doivent être telles que lorsque t croît constamment à partir de 0, tous les autres points $x_1 \dots x_n$ du domaine reviennent finalement à leur position de départ dans le même temps. En résumé, il est

Lie traduit dans le langage de la théorie des groupes les axiomes de Helmholtz. Il est important de noter que si Lie interprète les axiomes de Helmholtz dans le cadre de la théorie des groupes, il ne reprend pas pour autant, la stratégie de Helmholtz de se ramener aux métriques de Riemann et de montrer par-là, que les seules géométries possibles sont celles à courbure constante ; au contraire, Lie pose le problème de Riemann-Helmholtz comme un problème de classification de groupes, c'est-à-dire comme un problème particulier du problème plus général de Lie, la détermination de tous les groupes de transformations d'ordre r d'une multiplicité de dimension n .

Lie traduit les trois premiers axiomes de Helmholtz en termes de la théorie des groupes :

"A) Chaque point de l'espace n -fois étendu est définissable par n coordonnées $x_1 \cdots x_n$.

B) Les mouvements possibles dans l'espace définissent un groupe continu d'ordre fini

$$x_v = f_v(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (v=1 \cdots n)$$

qui est réel et transitif et que nous désignerons comme le groupe des mouvements.

L'ordre du groupe est égal à $n(n+1)/2$ et les transformations du groupe sont par paire inverse l'une de l'autre. Les fonctions $f_1 \cdots f_n$ sont différentiables en x comme en a et les quotients différentiels en x sont à leur tour différentiables en a .

C) Deux points ont un et un seul invariant par rapport au groupe et $s > 2$ points n'ont pas d'invariants significatifs. Soit $J(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n)$ l'invariant des deux points x_v et y_v , alors on doit pouvoir délimiter à l'intérieur de l'espace n -fois étendu un certain domaine fini n -fois étendu tel que la relation

$$J(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n) = J(x_1^0 \cdots x_n^0, y_1^0 \cdots y_n^0)$$

fournisse toujours une véritable équation entre $x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n$ quel que soit le point $x_1^0 \cdots x_n^0, y_1^0 \cdots y_n^0$ du domaine.

D) A l'intérieur du domaine défini ci-dessus, tous les points sont parfaitement librement mobiles par le groupe, tant qu'ils ne sont pas liés par les invariants qu'ils ont par rapport à des paires de points particulières. Si par exemple, $x_1^0 \cdots x_n^0, y_1^0 \cdots y_n^0$ sont deux points différents quelconques de ce domaine, dès que le premier d'entre eux est fixé, le second peut encore prendre toutes les positions $y_1 \cdots y_n$ qui vérifie l'équation :

$$J(x_1^0 \cdots x_n^0, y_1 \cdots y_n) = J(x_1^0 \cdots x_n^0, y_1^0 \cdots y_n^0) \quad (1)$$

demandé que les équations décrivent un mouvement périodique de période réelle." [Lie 1893, p. 453]

en supposant quand même que l'on peut passer continûment de $y_1^0 \cdots y_n^0$ à $y_1 \cdots y_n$ par uniquement des systèmes de valeurs réelles qui vérifie l'équation (1).” [Lie 1893, p. 452]

En formulant le problème de Riemann-Helmholtz comme un problème de classification de groupes, Lie pourra alors utiliser la théorie générale des groupes de transformations, et ainsi mettre en évidence certaines erreurs techniques et conceptuelles de Helmholtz, puis de proposer des solutions plus rigoureuses de ce problème.

3) Les fautes irréparables de Helmholtz

Les groupes que l'on étudie sont à 6 paramètres. Si on ne considère que les transformations qui laissent fixes un point, on obtient un groupe à trois paramètres que l'on peut écrire :

$$(1) \begin{cases} x' = \lambda_1 dx + \lambda_2 dy + \lambda_3 dz + \cdots \\ y' = \mu_1 dx + \mu_2 dy + \mu_3 dz + \cdots \\ z' = \nu_1 dx + \nu_2 dy + \nu_3 dz + \cdots \end{cases}$$

Lie indique que Helmholtz ne décrit pas en fait ce groupe mais qu'il recherche seulement comment des points infiniment proches du point fixe sont transformés par ce groupe :

“Il se limite à la description des transformations

$$(2) \begin{cases} dx' = \lambda_1 dx + \lambda_2 dy + \lambda_3 dz + \cdots \\ dy' = \mu_1 dx + \mu_2 dy + \mu_3 dz + \cdots \\ dz' = \nu_1 dx + \nu_2 dy + \nu_3 dz + \cdots \end{cases}$$

que l'on obtient en différentiant l'équation ci-dessus et si l'on pose $x = y = z = 0$.” [Lie 1893, p. 454]

Ces nouvelles transformations forment un nouveau groupe que l'on peut interpréter comme la description des transformations des éléments de ligne à l'origine¹⁶. Pour Lie, les développements mathématiques de Helmholtz sont “sans reproche”. Mais, c'est à partir de ce moment, que la démonstration de Helmholtz n'est plus valable. En effet, celui-ci admet implicitement et sans un mot de justification, que le groupe (2) vérifie les mêmes axiomes que le groupe (1).

Or, Lie exhibe un exemple de groupe transitif d'ordre 6 qui vérifie les axiomes de Helmholtz sans que le groupe (2) associé les vérifie ainsi qu'un exemple de groupe transitif d'ordre 6 qui ne vérifie pas certains axiomes de Helmholtz alors que le groupe (2) associé les satisfait.

¹⁶ Lorsque un groupe de Lie opère sur une variété, l'algèbre de Lie opère sur les espaces tangents.

Il en conclut que puisque le développement mathématique de Helmholtz n'est pas valable, deux voies s'ouvrent : la première consiste à trouver un système d'axiomes qui permette de sauvegarder les calculs de Helmholtz, la seconde consiste à conserver les axiomes de Helmholtz et d'en tirer les conséquences.

Il propose alors un système d'axiomes qui concernent les points infiniment proches de manière à conserver l'essentiel des calculs de Helmholtz. Lie montre que les axiomes ainsi exprimés permettent de caractériser les mouvements euclidiens et non-euclidiens.

Puis, Lie pose la question des "conclusions que l'on peut tirer des axiomes de Helmholtz". Il montre alors que ceux-ci caractérisent effectivement les mouvements euclidiens et non-euclidiens si on comprend qu'ils s'appliquent à tous les points d'un certain domaine ; dans ce cas l'axiome de monodromie est superflu. Par contre, si les axiomes de Helmholtz ne s'appliquent qu'à l'ensemble de points en situation générale, ils ne parviennent plus à caractériser les géométries euclidiennes et non-euclidiennes (même si on leur adjoint l'axiome de monodromie)¹⁷.

V. CONCLUSION

Lie obtient une caractérisation rigoureuse des géométries euclidiennes et non-euclidiennes en terme de théorie des groupes de transformations. Son traitement est purement mathématique et complètement indépendant des considérations concernant l'espace physique. Lie envisage l'espace comme une multiplicité numérique et se borne, comme le dit Poincaré, "à l'étude des groupes continus proprement dits auxquels s'appliquent les règles de l'Analyse infinitésimale ordinaire". Lie n'était pourtant pas entièrement satisfait comme il l'exprime dans une lettre adressée à Poincaré durant l'automne 1892 :

A mon avis, on est loin d'avoir bien assis les fondements de la géométrie. Ma théorie des groupes maîtrise bien les fondements de la géométrie d'une multiplicité numérique mais pas du tout ceux de la géométrie dans l'espace !!

Lie était conscient que sa théorie ne permettait pas d'aborder la question de l'espace physique. On peut même interpréter radicalement l'exigence de fondement de la géométrie de l'espace de Lie comme posant la question des fondements des axiomes eux-mêmes. Rien n'indique que Lie exprime cette exigence dans sa lettre, on peut par contre penser que ses préoccupations rencontrent les réflexions naissantes de Poincaré sur la question des fondements physiologiques et psychologiques des axiomes de la géométrie. Cette question sera abordée dans un article ultérieur (en préparation) ainsi que dans un article (à paraître) sur la genèse de la géométrie chez Poincaré écrit en collaboration avec G. Heinzmann.

Bibliographie :

¹⁷ Les aspects techniques du développement de Lie seront exposés dans un article plus général en préparation.

- Beltrami Eugenio
 [1868a] Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidia, *Giornale di Matematiche*, 6 (1868) ; [Œuvres], 1, p. 374-406 ; trad. fr. J. Hoüel, *Annales de l'école normale supérieure*, (1869), p. 251-288.
- [1868b] Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante, *Annali di Matematica pura ed applicata*, 2ème série, 2 (1868) ; trad. fr. J. Hoüel, *Annales de l'école normale supérieure*, (1869), p. 347-375.
- Beltrami-Hoüel
 [Correspondance] *La correspondance de Beltrami et Houël*, éditée par R. Tazzioli et L. Boi, à paraître.
- Boi, Luciano
 [1995] *Le problème mathématique de l'espace*, Springer Verlag (1995), Berlin - Heidelberg - New York.
- Boi/Giacarda/Tazzioli
 [1998] *La découverte de la géométrie non euclidienne sur la pseudosphère, les lettres d'Eugenio Beltrami à Jules Hoüel (1868-1881)*, Blanchard (1998), Paris.
- Bouveresse, Jacques
 [1995] *Langage, perception et réalité, t. 1, La perception et le jugement*, Editions Jacqueline Chambon (1995), Nîmes.
- Eckart-Volkert
 [1996] *Hermann von Helmholtz, Vorträge eines Heidelberger Symposiums anlässlich des einhundertsten Todestages*, Centaurus-Verlagsgesellschaft — Pfaffenweiler 1996.
- Freudenthal, Hans
 [1956] Neuere Fassungen des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems, *Mathematische Zeitschrift*, 63 (1956), p. 374-405.
- [1964] Lie Groups in the Foundations of Geometry, *Advances in Mathematics*, 1 (1964), p. 145-190.
- Greffé-Heinzmann-Lorenz
 [1996] *Henri Poincaré, Science et philosophie*, Publications des Archives Henri Poincaré, Akademie Verlag, Berlin — Albert Blanchard, Paris, 1996.
- Heinzmann-Nabonnand
 [1998] *On the Genesis of the Geometry, à paraître*.
- Helmholtz, Hermann von
 [Œuvres] *Wissenschaftliche Abhandlungen von Hermann Helmholtz*, I-III, Barth (1883), Leipzig.
- [Gehlhaar] *Abhandlungen zur Philosophie und Geometrie*, herausgegeben und eingeleitet von S. Gehlhaar, Junghans-Verlag (1987), Cuxhaven.
- [1868a] Über die Thatsächlichen Grundlagen der Geometrie, *Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg*, 4 (1868), p. 197-202 ; Œuvres II, p. 610-617 ; Gehlhaar, p. 108-112; trad. fr. Sur les faits qui servent de base à la géométrie (J. Hoüel), *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 5 (1867-1868), p. 372-378.
- [1868b] Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen, *Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, (1868), p. 193-221 ; Œuvres II, p. 618-639.
- [1868c] Ueber den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze, *Populären wissenschaftlichen Vorträgen*, 3, p. 21-54 ; [Gehlhaar], p. 113-132 ; trad. angl. M. Lowe, in éd. angl. de [Hertz-Schlick], p. 1-38.

- [1878a] Ueber den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze ; Antwort gegen Herrn Professor Land, *Œuvres* II, p. 640-660 ; [Gehlhaar], p. 172-185 ; trad. angl. On the origin and the sense of the geometric theorems, *Mind*, 10 (1878), p. 212-224.
- [1878b] Die Tatsachen in der Wahrnehmung, Gehlhaar, p. 172-185.
- Hermann, Robert
[1975] *Sophus Lie's 1880 Transformation Group Paper*, Math. Sci. Press, Brookline (1975).
- Hertz-Schlick
[1921] *Hermann von Helmholtz, Schriften zur Erkenntnistheorie*, P. Hertz et M. Schlick (ed.), Springer, Berlin (1921) ; éd. angl. *Hermann von Helmholtz, Epistemological Writings*, Boston studies in the Philosophy of Sciences, 32, Reidel, Dordrecht-Boston (1977).
- Kœnigsberger, Leo
[1896] *Hermann von Helmholtz's Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik und Mechanik*, Teubner, Leipzig (1896).
- [1902] *Hermann von Helmholtz, I & II*, Braunschweig (1902-1903).
- Lie, Sophus
[Œuvres] *Sophus Lie Gesammelte Abhandlungen*, Teubner (Leipzig)-Aschehoug & Co (Oslo), 1935, I-VII.
- [1880] Theorie der Transformationsgruppen, *Mathematische Annalen*, 16 (1880), 441-528 ; *Œuvres* (VI) 2, p. 1-94 ; trad. angl. (M. Ackerman) in Hermann 1975.
- [1886] Bemerkungen zu v. Helmholtz's Arbeit : Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen, *Leipz. Ber.* (1886), p. 337-342 ; *Œuvres* (II) 1, p. 374-379.
- [1888] *Theorie der Transformationsgruppen* I, Teubner (1888), Leipzig.
- [1890a] Über die Grundlagen der Geometrie (I), *Leipz. Ber.* (1890), p. 284-321 ; *Œuvres* (II) 1, p. 380-413.
- [1890b] Über die Grundlagen der Geometrie (II), *Leipz. Ber.* (1890), p. 355-418 ; *Œuvres* (II) 1, p. 414-468.
- [1890c] *Theorie der Transformationsgruppen* II, Teubner (1890), Leipzig.
- [1892a] Bemerkungen zu neueren Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie, *Leipz. Ber.* (1892), p. 106-114 ; *Œuvres* (II) 1, p. 469-476.
- [1892b] Sur les fondements de la Géométrie, *Comptes Rendus*, 114 (1892), p. 461-463.
- [1892c] Lettres de Lie à Poincaré, *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 10 (1989), p. 151-163 ; trad. fr. de J. Peiffer, p. 165-177.
- [1893] *Theorie der Transformationsgruppen* III, Teubner (1893), Leipzig.
- Lipschitz, Rudolf
[Briefwechsel] *Briefwechsel*, bearbeitet von W. Scherlau, Braunschweig, Wiesbaden (1986).
- Nabonnand, Philippe
[1999] Helmholtz et la géométrie, à paraître dans *Les Annales d'Histoire et de Philosophie du Vivant*.
- Poincaré, Henri
[1892] Rapport sur les travaux de M. Lie, Acerhp.
- Riemann, Bernhard
[Werke] *Gesammelte mathematische Werke, Wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge*, Springer Verlag (Berlin)-Teubner (Leipzig), 1990.
- [1854] Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, *Abhandlungen der Königlischen Gesellschaft der Wissenschaft zu Göttingen*, 13 (1867) ; Werke p. 304-319 ; trad. fr. in *Œuvres mathématiques de Riemann*, Paris : Gauthier-Villars (1898).

- Rowe, David
[1989] The Early Geometrical Works of Sophus Lie and Felix Klein, in : *The History of modern Mathematics*, édité par D. Rowe et J. McCleary, Academic Press (1989), I, p. 209-273.
- Volkert, Klaus
[1993] On Helmholtz' Paper "Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie", *Historia Mathematica*, 20 (1993), p. 307-309.
[1996] Hermann von Helmholtz und die Grundlagen der Geometrie, in [Eckart-Volkert, 1996], p. 177-207.
- Vuillemin, Jules
[1962] *La philosophie de l'algèbre*, Presses universitaires de France, Paris 1962.
[1994] L'espace représentatif selon Poincaré, in [Grefe-Heinzmann-Lorenz, 1996, p. 279-298.