



**HAL**  
open science

## Quelques reprises de thématiques leibnitziennes en géométrie au 19e siècle

Philippe Nabonnand

► **To cite this version:**

Philippe Nabonnand. Quelques reprises de thématiques leibnitziennes en géométrie au 19e siècle. VIII. Internationaler Leibniz-Kongress – Einheit in der Vielheit, Jul 2006, Hanover, Allemagne. hal-01083145

**HAL Id: hal-01083145**

**<https://hal.science/hal-01083145>**

Submitted on 15 Nov 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Quelques reprises de thématiques leibniziennes en géométrie au 19<sup>e</sup> siècle

par

PHILIPPE NABONNAND (Nancy)

## Résumé

Leibniz annonce dans sa lettre à Huygens (1679) son intention de développer une géométrie nouvelle qui exprimerait directement les propriétés de situation et qui dépasserait l'approche analytique. Son propos visait en particulier la mise en œuvre de procédures de démonstration globale. Les géomètres français de la première moitié du 19<sup>e</sup> siècle rencontrent les mêmes difficultés vis à vis de la géométrie analytique et en tentant de les résoudre, poursuivent en un certain sens, la discussion initiée par Leibniz. Pour justifier la pertinence et la généralité de leurs méthodes, ils mettent en place une rhétorique de la généralité et de la modernité. Pour autant, le projet leibnizien d'une nouvelle caractéristique géométrique est ignoré par ces géomètres. Une hypothèse pour comprendre les raisons de cette ignorance est proposée en remarquant que les allusions au programme de Leibniz font surtout référence à l'article « Situation » de l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert.

## Introduction

Dans sa célèbre lettre à Huygens du 8 septembre 1679<sup>1</sup>, Leibniz manifeste son insatisfaction par rapport à l'utilisation des méthodes algébriques en géométrie puisqu'elles ne donnent « ny les plus courtes voyes, ny les plus belles constructions de Geometrie ». Il affirme son intention de développer une « autre Analyse proprement géométrique ou linéaire, qui nous exprime directement *situm*, comme l'Algèbre exprime *magnitudinem* ». Il oppose donc les propriétés quantitatives à celles qualitatives qui s'occupent de ce que Leibniz appelle « la considération des lieux »<sup>2</sup>, soit la position relative des éléments d'une figure.

Dans ce qui suit, nous allons essayer de suivre comment cette discussion initiée par Leibniz se poursuit au cours de la première moitié du 19<sup>e</sup> siècle chez les géomètres français. Il ne s'agit pas d'analyser une quelconque réception des questions posées par Leibniz – les mentions explicites au projet de Leibniz sont rares – mais plutôt de comprendre comment ces géomètres rencontrent les mêmes difficultés et tentent de les résoudre.

La première partie de cet exposé sera consacrée aux travaux de Carnot, Gergonne et Poncelet dans le cadre de l'émergence du point de vue projectif durant la première moitié du 19<sup>e</sup> siècle. Ces géomètres développent une rhétorique de la généralité et de la modernité pour tenter à la fois d'affranchir la géométrie pure de la notion de figure et de justifier la pertinence et la généralité de leurs méthodes. Si les géomètres français rencontrent souvent certaines préoccupations géométriques de Leibniz, le projet leibnizien d'une nouvelle caractéristique est ignoré et est en partie déformé. La seconde partie proposera une hypothèse pour comprendre cette ignorance. En effet, Carnot et Poncelet ne font allusion au programme leibnizien que par l'intermédiaire de l'article « Situation » de l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert. Or cette présentation prête à confusion et les idées qui y sont avancées entrent en contradiction avec celles défendues par Poncelet.

La généralité, un argument central pour justifier les points de vue modernes en géométrie

Carnot, Poncelet et Chasles s'accordent pour reconnaître à la géométrie pure d'inspiration euclidienne (la géométrie qui n'utilise les méthodes de l'analyse), souvent qualifiée de géométrie des anciens, un statut de rigueur indépassable. Ils sont aussi d'accord pour constater que cette méthode, en liant les démonstrations à la considération d'une figure particulière, manque de généralité au contraire de celle de la géométrie analytique. Ces trois auteurs

---

<sup>1</sup> G. W. Leibniz, A III, 2, 346, p. 846.

<sup>2</sup> G. W. Leibniz, A III, 2, 347, p. 854.

proposent des méthodes de démonstration qui, sans faire appel à l'analyse, permettent de considérer et d'étudier les propriétés communes aux configurations géométriques, indépendamment de la position de leurs éléments et de la réalité de certains d'entre eux ? En première approche, on peut distinguer plusieurs stratégies qui peuvent s'intriquer :

1. Mettre en œuvre un principe de transformation des figures
2. Mettre en œuvre des principes de démonstrations ou des algorithmes qui permettent d'étendre à un ensemble de figures la validité d'une démonstration relative à une figure particulière
3. Déterminer des propriétés indépendantes de certains caractères contingents des figures.

### La *Géométrie de position*<sup>3</sup> de Carnot

Carnot distingue dans une figure les *rappports de grandeur* qui concernent les valeurs absolues des quantités des *rappports de position*, qui concernent les situations relatives de celles-ci. Son objectif est « de rapprocher et de comparer ces deux manières d'envisager les rapports des quantités géométriques »<sup>4</sup>. Étant donné une figure, Carnot distingue les *formules explicites* qui s'appliquent directement à la figure, et celles *implicites* qui s'appliquent à une figure corrélative de celle-ci. L'objectif de la géométrie est de déterminer les figures corrélatives auxquelles les figures implicites s'appliquent directement et réciproquement. Pour cela, il développe une méthode algorithmique – la méthode des tableaux de corrélation – qui permet de passer des propriétés d'une *figure primitive* à celles des *figures corrélatives* :

« Le mode que je me propose de suivre, consiste à rapporter chaque figure dont on recherche les propriétés, à une autre figure dont les propriétés sont connues, et qu'on prend pour terme de comparaison : puis à l'aide des signes ordinaires de l'algèbre, ou de caractéristiques particulières, et de l'arrangement systématique des lettres employées pour désigner les points qui déterminent les diverses parties de ces figures, on exprime les modifications qui les distinguent : c'est ce que j'appelle établir la corrélation des figures. »<sup>5</sup>

Carnot rappelle dans l'introduction de son traité *Géométrie de position*, que l'objet de son ouvrage a certaines analogies avec « l'idée d'une Analyse de situation » proposée par « l'illustre Leibnitz ». Il souligne aussi les différences à son avis entre les deux projets : selon Carnot, « Leibnitz vouloit qu'on fit entrer dans l'expression des conditions d'un problème géométrique, la diversité de position des parties correspondantes des figures comparées, afin qu'en les séparant par un caractère bien distinctif, on pût les isoler plus facilement dans le calcul »<sup>6</sup>. L'ambition de Carnot est moindre ; il n'envisage pas d'étudier de manière générale les propriétés communes d'une classe de figures corrélatives mais plutôt d'analyser les mutations de signes qui apparaissent dans les formules qui expriment les propriétés de la figure primitive lorsque celle-ci évolue vers la figure corrélative :

« Suivant les diverses circonstances où elles se trouvent, on doit conserver le signe qui précède [les quantités] dans les formules où elles entrent, ou le changer ; et c'est la théorie de ces mutations que je nomme géométrie de position, parce qu'en effet, c'est par elles qu'on exprime la diversité de position des parties correspondantes dans les figures de même genre. »<sup>7</sup>

En fait, l'objectif de Carnot est de développer une théorie qui permette d'utiliser les signes algébriques sans pour autant donner un sens à la notion de quantités négatives ou imaginaires. Carnot accepte les techniques de l'algèbre et de l'analyse en soulignant que les « êtres

---

<sup>3</sup> L. N. M. Carnot, *Géométrie de position*, Paris : Duprat, 1803.

<sup>4</sup> *Ibid.*, p. 1.

<sup>5</sup> *Ibid.*, p. 1.

<sup>6</sup> *Ibid.*, p. ii.

<sup>7</sup> *Ibid.*, p. xxiiij.

fictifs »<sup>8</sup> – les quantités négatives, infinitésimales ou imaginaires – introduits par celles-ci « ne peuvent exister ni même être compris ». Ces êtres fictifs peuvent être employés auxiliairement à condition d'être éliminés à la fin du raisonnement.

« Que c'est cet emploi des quantités négatives et imaginaires dans le calcul, qui constitue proprement ce qu'on nomme analyse, qui la distingue essentiellement de ce que nomme synthèse, et qui donne à la première un si grand avantage sur l'autre. »<sup>9</sup>

La méthode des tableaux pour Carnot est une technique qui donne à la géométrie la même puissance opérationnelle que l'analyse. L'avantage de cette méthode est de dépasser les objectifs de la géométrie élémentaire puisqu'il ne s'agit plus de découvrir de nouvelles propositions particulières « quelques curieuses et subtiles qu'elles puissent être »<sup>10</sup> mais de résoudre des problèmes généraux qui renferment toutes les propositions particulières comme des cas particuliers.

Le point de vue projectif de Poncelet

Poncelet a consacré une grande partie de son œuvre à mettre en place des procédures générales en géométrie pure. Comme Carnot, il commence par constater que la géométrie analytique – celle qui utilise les coordonnées – a acquis sur la géométrie ordinaire « une supériorité et une généralité qu'il est impossible de lui contester »<sup>11</sup>. Selon Poncelet, la supériorité de l'analyse réside dans sa capacité de *raisonner implicitement*, c'est-à-dire, de manipuler des entités indéterminées.

« S'il était possible d'appliquer [dans la géométrie ordinaire] le raisonnement implicite, en faisant abstraction de la figure, si seulement il était permis d'y appliquer les conséquences de ce genre de raisonnement, [...], la Géométrie ordinaire, sans pour cela employer les calculs et les signes de l'Algèbre, se montrerait à bien des égards, la rivale de la Géométrie analytique [...]. »<sup>12</sup>

Si Poncelet reconnaît à la géométrie analytique une grande fécondité, il n'en défend pas moins l'idée que la géométrie pure pratiquée à la suite de Monge par les modernes ne puisse pas conserver un intérêt et même présenter des avantages sur l'approche analytique :

« J'avoue même que j'incline fortement à penser que, traitée à son tour d'une manière convenable, et moins restreinte qu'on ne l'a fait jusqu'ici, elle peut fournir, par la voie d'intuition qui lui est propre, et pour certaines classes de problèmes, des solutions qui l'emportent de beaucoup sur celles qu'on déduit de la géométrie analytique [...]. »<sup>13</sup>

L'ambition de Poncelet est donc la même que celle de Carnot :

« faire passer dans la Géométrie ordinaire la généralité des conceptions de l'Analyse algébrique, généralité qui doit nécessairement appartenir à l'essence même de la grandeur figurée, indépendamment de toute manière de raisonner. »<sup>14</sup>

Poncelet définit de manière classique l'objet de la géométrie comme l'étude « des propriétés des corps sous le rapport de leur étendue ou de leur configuration »<sup>15</sup>. Il distingue parmi ces propriétés celles qui sont susceptibles d'une étude générale :

<sup>8</sup> L. N. M. Carnot, *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* (4<sup>e</sup> éd.), Paris : Mallet-Bachelier, 1860, p. 127.

<sup>9</sup> L. N. M. Carnot, *Essai sur la théorie des transversales*, Paris : Courcier, 1806, p. 110.

<sup>10</sup> L. N. M. Carnot, *Géométrie de position, op. cit.*, p. xxxij.

<sup>11</sup> J. V. Poncelet, Considérations philosophiques et techniques sur le principe de continuité dans les lois géométriques (1818), in *Applications d'analyse et de géométrie qui ont servi de principal fondement au traité des propriétés projectives des figures*, t. 2, Paris : Gauthier-Villars, 1864, p. 296.

<sup>12</sup> J. V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures* (1822), t. 1, (2<sup>e</sup> éd.), Paris : Gauthier-Villars, 1865, p. XIII.

<sup>13</sup> J. V. Poncelet, Réflexions sur l'usage de l'analyse algébrique dans la géométrie, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, t. 8 (1817-1818), p. 143.

<sup>14</sup> J. V. Poncelet, Considérations philosophiques ..., *op. cit.*, p. 297.

<sup>15</sup> *Ibid.*, p. 298.

« Mais, parmi ces propriétés, il en est qui concernent moins la grandeur absolue ou déterminée de telles ou telles parties, que les affections, les relations générales et indéterminées qui leur sont communes ou qui appartiennent à leur combinaison mutuelle. Ces dernières doivent seules faire l'objet des considérations qui suivent ; car, à cause de leur généralité et de l'indétermination même des grandeurs qu'elles concernent, ces propriétés renferment implicitement toutes les autres, et il suffira, pour y parvenir, de descendre du cas général au cas particulier, en attribuant aux grandeurs indéterminées la valeur ou la relation qui les particularisent. »<sup>16</sup>.

En proposant d'organiser les questions de la géométrie autour de l'étude des propriétés générales, en faisant abstraction de la figure, Poncelet annonce le projet d'une nouvelle géométrie qui aura « l'avantage d'agrandir les idées, de lier par une chaîne continue des vérités en apparence lointaines, et de permettre d'embrasser dans un seul théorème une foule de vérités particulières »<sup>17</sup>. Poncelet conclut son credo universaliste en affirmant que le seul espoir de progrès pour la science de l'étendue est de chercher « sans cesse à généraliser le langage et les conceptions de la Géométrie »<sup>18</sup>. En particulier, un des défauts de la géométrie des anciens corrélat à son défaut de généralité, est son manque de « méthodes directes et uniformes pour procéder à la recherche de la vérité »<sup>19</sup>. Pour pallier cette insuffisance, Poncelet propose de mettre en œuvre un principe de continuité : l'idée de Poncelet est qu'une propriété (obtenue par un raisonnement explicite) d'une configuration particulière, mais dépendant seulement de la position générale et en quelque sorte indéterminée de celle-ci, demeure applicable aux configurations corrélatives – celles résultant d'une variation de la figure primitive « par degrés insensibles » ou d'un « mouvement continu » de certaines parties de cette figure. En usant du principe de continuité, il est donc possible d'étendre certaines propriétés à toute une classe de figures corrélatives, étant entendu que si ce principe se prononce « sur la permanence des relations, il ne se prononce nullement sur la nature et l'existence absolue des objets et des grandeurs que ces relations concernent »<sup>20</sup>. Lorsque les objets ou les grandeurs impliqués dans une relation deviennent idéaux ou imaginaires, la relation n'en devient pas pour autant absurde, ni même insignifiante puisque sa non-applicabilité exprime une certaine position des éléments réels du système.

Dans un deuxième temps, Poncelet distingue les propriétés *métriques* qui ne concernent que « les relations existantes entre les grandeurs mesurées des parties des figures » des propriétés *graphiques* qui « n'ont trait qu'aux affections relatives à leur configuration, à leur manière d'être réciproques »<sup>21</sup>. Les propriétés graphiques qui résultent d'une projection centrale sont dites *projectives*. Elles sont invariantes non seulement par projection mais aussi par corrélation des figures et le principe de continuité est susceptible de leur être appliqué. Comme les propriétés sont les seules qui possèdent le degré de généralité souhaité par Poncelet et qui sont aisées à reconnaître, cette classe de propriétés constitue l'objet central de la géométrie. Certaines propriétés projectives sont métriques mais « rien ne peut indiquer, *a priori*, si elles subsistent dans toutes les projections de la figure »<sup>22</sup>. Poncelet décrit une classe particulière de propriétés métriques projectives qui comprend entre autres la relation harmonique entre les points d'une droite ou les droites d'un faisceau. Il précise que « ces relations particulières qui viennent d'être définies d'une manière purement géométrique sont presque les seules qu'on rencontre dans les recherches où l'on se propose de découvrir les

---

<sup>16</sup> *Ibid.*, p. 298.

<sup>17</sup> J. V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives ...*, *op. cit.*, p. XVI.

<sup>18</sup> *Ibid.*, p. XVI.

<sup>19</sup> *Ibid.*, p. XVII.

<sup>20</sup> J. V. Poncelet, *Considérations philosophiques ...*, *op. cit.*, p. 338.

<sup>21</sup> *Ibid.*, p. 299.

<sup>22</sup> J. V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives ...*, *op. cit.*, p. 5.

propriétés projectives de certaines figures »<sup>23</sup> et en conséquence, il fonde son travail sur l'étude des propriétés projectives graphiques et de cette classe particulière de propriétés métriques.

En focalisant son entreprise sur l'étude des propriétés projectives des figures, Poncelet développe une géométrie fondée sur les principes de projection et celui de continuité. Ce point de vue permet à Poncelet de s'abstraire de la considération de figure particulière et d'unifier les méthodes de la géométrie pure traditionnelle, en particulier celles de la théorie des coniques. La géométrie de Poncelet a en ce sens un indéniable caractère de généralité. Enfin, la plupart des théorèmes de la géométrie des anciens sont des cas particuliers ou des corollaires des théorèmes obtenus par Poncelet. La géométrie développée par Poncelet permet de réunir par des énoncés généraux le corpus des propositions de la géométrie traditionnelle et donc de l'organiser et de l'étendre en n'utilisant que des considérations de pure géométrie et sans faire appel à des calculs auxiliaires. Pour autant, Poncelet, même s'il rencontre certaines préoccupations évoquées par Leibniz, ne s'inscrit pas dans le projet de développer une « caractéristique » qui « pousse l'analyse jusqu'au bout »<sup>24</sup>. Au contraire, les méthodes proposées par Poncelet constitue une extension du champs de la synthèse.

### Gergonne et la dualité

Dans ses *considérations philosophiques sur les éléments de la science de l'étendue*<sup>25</sup>, qualifié de philosophie mathématique, c'est-à-dire, en utilisant une dénomination anachronique, dont l'objet est d'aborder un point de fondement, Gergonne reprend la distinction entre *relations métriques*, « qui ne sauraient être établies qu'à l'aide des principes du calcul » et celle qui « résultent uniquement de la situation que se trouvent avoir les uns par rapport aux autres, les êtres géométriques sur lesquels on raisonne »<sup>26</sup>. La preuve de ces dernières peut être établie sans faire appel au calcul. Gergonne désigne par *géométrie de situation* l'étude de « cette partie de la géométrie qui ne dépend aucunement des relations métriques entre les parties des figures »<sup>27</sup>. Il commence, en exposant les préliminaires de cette géométrie, par le développement axiomatique d'une théorie de l'incidence. Comme son objectif est d'étudier la propriété de dualité des propositions de cette géométrie, il en présente les axiomes et les propositions dans deux colonnes, les énoncés duaux en regard l'un de l'autre.

Gergonne définit de manière purement linguistique la notions de dualité :

« [...] tous les théorèmes y sont doubles ; c'est-à-dire que, dans la géométrie plane, à chaque théorème il en répond toujours nécessairement un autre qui s'en déduit en y échangeant simplement entre eux les deux mots *points* et *droites* ; tandis que, dans la géométrie de l'espace, ce sont les mots *points* et *plans* qu'il faut échanger entre eux pour passer d'un théorème à son corrélatif. »<sup>28</sup>

S'il reconnaît que la dualité des énoncés résulte de la théorie des pôles et polaires, il préfère envisager un autre type d'exposition et de preuves ; après « avoir rendu manifeste le fait philosophique dont il s'agit, dans l'exposé même des premières notions »<sup>29</sup>, Gergonne propose de démontrer simultanément les théorèmes duaux. L'intérêt de cette exposition est de souligner que non seulement les théorèmes se correspondent deux à deux mais qu'il existe entre les démonstrations de deux théorèmes d'un même couple la même correspondance

---

<sup>23</sup> *Ibid.*, p. 12.

<sup>24</sup> G. W. Leibniz, A III, 2, 347, p. 852.

<sup>25</sup> J. D. Gergonne, *Considérations philosophiques sur les éléments de la science de l'étendue*, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, t. 16 (1826), pp. 209-231.

<sup>26</sup> *Ibid.*, p. 209.

<sup>27</sup> *Ibid.*, p. 210.

<sup>28</sup> *Ibid.*, p. 210.

<sup>29</sup> *Ibid.*, p. 211.

qu'entre leurs énoncés »<sup>30</sup>. Gergonne insiste que son développement ne comporte pas de figures puisque elles sont souvent plus souvent « plus embarrassantes qu'utiles » et qu'en fait, « il ne s'agit ici, en effet, que de déductions logiques, toujours faciles à suivre, lorsque les notations sont choisies d'une manière convenable »<sup>31</sup>. Gergonne remarque que certaines notions élémentaires comme celle de diagonale n'admettent pas de dénominations duales. Il en tire argument pour affirmer que la relation de dualité n'était pas avant lui réellement décelée et que cela « prouve [...] que ce n'est seulement que lorsqu'une science est déjà parvenue en un assez haut degré de maturité qu'on peut espérer d'en bien faire la langue »<sup>32</sup>.

Gergonne retrouve ici certaines conclusions de son *Essai sur la théorie des définitions*<sup>33</sup> dans lequel il encourageait entre autres les géomètres à créer des mots nouveaux. En effet, si ces derniers usaient plus de cette possibilité, « il y a apparence qu'alors beaucoup de parties des sciences deviendraient d'une étude plus facile ; précisément parce que les propositions dont ces parties se composent deviendraient d'un énoncé plus brief »<sup>34</sup>. Gergonne évoque la pratique des algébristes qui lorsque leurs résultats se compliquent, remplacent une formule trop longue par un caractère unique. De même, la création de mots permettrait de « désigner les combinaisons de lettres, rapports ou vues de l'esprit dont on prévoit que la considération pourra s'offrir fréquemment » et ainsi, d'éviter des phrases trop longues ou trop compliquées.

« Il est donc vrai de dire qu'en créant ou en perfectionnant une science on se trouve inévitablement conduits à créer ou à perfectionner une langue ; et il est encore vrai de dire que, de même qu'en algèbre, un choix heureux de notations rend les calculs beaucoup plus faciles à suivre et à exécuter, la bonne composition de la langue d'une science, quoiqu'elle ne constitue pas seule la science, est singulièrement propre à en faciliter l'étude et à en hâter les progrès. »<sup>35</sup>

#### Une hypothèse sur l'incompréhension du projet leibnizien par les géomètres français

Dans la dissertation préliminaire de sa *Géométrie de position*<sup>36</sup>, Carnot fait, comme on l'a vu plus haut, une allusion à l'idée de Leibniz d'une *analyse de situation*. Cependant, il ne fait référence qu'à l'article « Situation » de l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert :

« Il est certain [...] que l'analyse de situation est une chose qui manque à l'algèbre ordinaire : c'est le défaut de cette analyse qui fait qu'un problème paroît souvent avoir plus de solutions qu'il n'en doit avoir dans les circonstances limitées où on le considère. Il est vrai que cette abondance de l'algèbre, qui donne ce qu'on ne lui demande pas, est admirable à plusieurs égards ; mais aussi elle fait souvent qu'un problème qui n'a réellement qu'une solution, en prenant son énoncé à la rigueur, se trouve renfermé dans une équation de plusieurs dimensions, et par là, ne peut, en quelque manière être résolu. Il seroit à souhaiter que l'on trouvât moyen de faire entrer la situation dans le calcul des problèmes ; cela les simplifieroit extrêmement pour la plupart ; mais l'état et la nature de l'analyse algébrique ne paroissent pas le permettre ».<sup>37</sup>

On voit que l'on est loin du programme défini par Leibniz dans sa lettre à Huygens<sup>38</sup>. En effet, Leibniz considère dans celle-ci que l'utilisation de calculs algébriques n'est pas une manière naturelle d'aborder les questions géométriques – le commentaire de d'Alembert peut

---

<sup>30</sup> *Ibid.*, p. 211.

<sup>31</sup> *Ibid.*, p. 212.

<sup>32</sup> *Ibid.*, p. 216.

<sup>33</sup> J. D. Gergonne, *Essai sur la théorie des définitions*, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, t. 9 (1818), pp. 1-35.

<sup>34</sup> *Ibid.*, p. 9.

<sup>35</sup> *Ibid.*, p. 11.

<sup>36</sup> L. N. M. Carnot, *Géométrie de position*, *op. cit.*

<sup>37</sup> *Ibid.*, p. i.

<sup>38</sup> G. W. Leibniz, A III, 2, 347.

éventuellement ressortir de cette appréciation de Leibniz – mais il ne se contente pas d'exprimer des réticences concernant la géométrie analytique. Sa nouvelle caractéristique géométrique avait pour ambition d'exprimer directement « la situation, les angles, et le mouvement » et de donner en même temps la solution et la construction et la démonstration Géométrique »<sup>39</sup>.

Selon Carnot, l'intention de Leibniz était de faire « entrer dans l'expression des conditions d'un problème géométrique, la diversité de position des parties correspondantes des figures comparées, afin qu'en les séparant par un caractère bien distinctif, on pût les isoler plus facilement dans le calcul »<sup>40</sup>. Il lui oppose sa méthode de corrélation des figures puisque la diversité des positions s'exprime par des mutations de signes dans les formules. Dans son article *Sur la loi des signes de position en géométrie*<sup>41</sup> dans lequel il critique le point de vue de Carnot, Poncelet fait référence en reprenant les termes de Carnot à « l'idée attribuée primitivement à l'illustre Leibniz, et depuis reproduite par d'Alembert, d'une *Analyse* qui donnerait le moyen de faire entrer la situation dans le calcul des problèmes, de sorte que l'on pût séparer par un caractère bien distinctif et par conséquent isoler facilement le système particulier que l'on a dessein de considérer dans l'énoncé de chaque question »<sup>42</sup>. Poncelet voit dans cette idée « une conception entièrement chimérique et dénuée de fondement » si elle consiste à affirmer que l'on peut séparer les solutions des équations « dans les cas mêmes où ces solutions seraient considérées en Géométrie comme de leur nature, tout à fait inséparables »<sup>43</sup> ce qui supposerait que l'on puisse réduire toutes les équations algébriques à des équations du premier degré. Lorsque les solutions sont géométriquement séparables et que l'analyse les donne de manière simultanée, cela est dû à une mise en équation trop générale « ou, si l'on veut, de ce que la mise en équation enveloppe à la fois plusieurs questions analogues à celles de l'énoncé ». Un exemple simple analysé par Poncelet permet de mieux comprendre son argument : « Soit un triangle rectangle en A dans lequel on connaît l'hypoténuse BC et la somme AB+AC+AD des deux petits côtés et de la perpendiculaire AD : on demande la valeur de cette perpendiculaire. »<sup>44</sup> En posant  $BC = a$ , la somme donnée  $= b$ ,  $AC = z$ ,  $AB = y$  et  $AD = x$ , les équations du problème sont :

$$x + y + z = b, \quad y^2 + z^2 = a^2, \quad yz = ax.$$

La résolution du système d'équations donne deux solutions :

$$x = a + b \pm \sqrt{2a^2 + 2ab}.$$

La première de ces solutions est plus grande que  $a + b$ , ce qui peut paraître absurde. Poncelet refuse de considérer comme Carnot aurait pu le faire que l'on est en présence d'un cas où les manipulations algébriques conduisent à une solution fautive. Au contraire, Poncelet insiste sur le fait que la donnée de AD est insuffisante pour construire le triangle (en grandeur et en position). En poursuivant l'analyse et en calculant  $y$  et  $z$ , il apparaît que la valeur absurde correspond à un cas où ces valeurs sont imaginaires et donc à un cas où le triangle n'est pas constructible. Toutes les solutions du problème sont dotées de sens, certaines qui correspondent à des cas où toutes les valeurs envisagées sont réelles et donc à des figures constructibles, d'autres correspondent à des cas où certaines valeurs envisagées sont imaginaires et donc à des figures non-constructibles. Ces dernières valeurs ne sont pour autant dénuées de sens puisqu'elles expriment des situations qui n'ont pas d'existence géométrique.

<sup>39</sup> G. W. Leibniz, A III, 2, 347, p. 852.

<sup>40</sup> L. N. M. Carnot, *Géométrie de position*, op. cit., p. ii.

<sup>41</sup> J. V. Poncelet, *Sur la loi des signes de position en géométrie* (1816), in *Applications d'analyse et de géométrie qui ont servi de principal fondement au traité des propriétés projectives des figures*, t. 2, Paris : Gauthier-Villars, 1864, pp. 167-295.

<sup>42</sup> *Ibid.*, p. 290.

<sup>43</sup> *Ibid.*, pp. 290-291.

<sup>44</sup> *Ibid.*, p. 282.

Poncelet considérait dans la capacité de l'analyse d'envisager toutes les situations réelles ou non dans un même raisonnement implicite les raisons de sa généralité et de sa supériorité sur la géométrie pure.

Poncelet ne pouvait donc accepter le programme exprimé dans l'article de d'Alembert ; est-ce que son opinion sur le projet leibnizien de fonder une géométrie nouvelle « qui visait à une méthode efficace de démonstration globale »<sup>45</sup> aurait été autre ? Sans vouloir faire de l'histoire-fiction, on peut raisonnablement penser qu'un programme dont les préliminaires commencent par l'idée de remplacer les équations de l'algèbre par la considération des « congruïtés » telles que Leibniz les définit dans sa lettre à Huygens l'aurait autrement intéressé.

---

<sup>45</sup> E. Knobloch, Algèbre et géométrie, in M. Blay & R. Halleux (éds.), *La Science classique*, Paris : Flammarion, 1998, p. 688.