



**HAL**  
open science

## Sur la partie nilpotente de la résolution injective minimale du module $F(1)$

Nguyen The Cuong

► **To cite this version:**

Nguyen The Cuong. Sur la partie nilpotente de la résolution injective minimale du module  $F(1)$ . 2014. hal-01082976

**HAL Id: hal-01082976**

**<https://hal.science/hal-01082976>**

Preprint submitted on 14 Nov 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# SUR LA PARTIE NILPOTENTE DE LA RÉOLUTION INJECTIVE MINIMALE DU MODULE INSTABLE $F(1)$

PAR THE CUONG NGUYEN

---

RÉSUMÉ. — Un des phénomènes marquants dans la catégorie  $\mathcal{P}_d$  des foncteurs polynomiaux stricts est l'injectivité des morphismes induits par la torsion de Frobenius entre groupes d'extensions des foncteurs. Dans [Cuo14a], l'auteur démontre que le foncteur de Hai, allant de la catégorie  $\mathcal{P}_d$  vers la catégorie des modules instable  $\mathcal{U}$ , est pleinement fidèle. Cela fait de la catégorie  $\mathcal{P}_d$  une sous-catégorie pleine de la catégorie  $\mathcal{U}$ . La torsion de Frobenius s'étend à toute la catégorie  $\mathcal{U}$ , mais n'y est pas aussi bien comprise. Cet article étudie la torsion de Frobenius, et ses effets sur les groupes d'extension des modules instables. On donne des calculs explicites de nombreux groupes d'extensions des modules instables, et permet de confirmer, dans de nombreux cas, l'injectivité des morphismes entre des groupes d'extensions induits par la torsion de Frobenius dans la catégorie  $\mathcal{U}$ . Ces résultats sont obtenus en construisant la résolution injective minimale du module instable libre  $F(1)$ .

---

0. THE CUONG NGUYEN, Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications - UMR7539  
du CNRS, 99 Avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France  
*E-mail* : [tdntcuong@gmail.com](mailto:tdntcuong@gmail.com) ou [nguyentc@math.univ-paris13.fr](mailto:nguyentc@math.univ-paris13.fr)  
*Url* : <http://math.univ-paris13.fr/~nguyentc/Pageweb.html>

0. Classification mathématique par sujets (2000). — 55S10, 18A40.

0. Mots clefs. — Algèbre de Steenrod, foncteurs polynomiaux stricts, modules instables, torsion de Frobenius.

0.

L'auteur est partiellement soutenu par le programme ARCUS Vietnam MAE, Région IDF et par LIAFV - CNRS - Formath Vietnam.

ABSTRACT (*On the nilpotent component of the minimal injective resolution of the unstable module  $F(1)$* )

It is proved in [FS97, Theorem 3.13] that in the category  $\mathcal{P}_d$  of strict polynomial functors the morphisms between extension groups induced by Frobenius twist, are injective. After [Cuo14a], the category  $\mathcal{P}_d$  is a full sub-category of the category  $\mathcal{U}$  of unstable modules. Frobenius twist is extended to the category  $\mathcal{U}$  but remains mysterious. This article aims to study Frobenius twist and its effects on the extension groups of unstable modules. We compute explicitly several extension groups and show that in these cases, the morphisms induced by Frobenius twist are injective. These results are obtained by constructing the minimal injective resolution of the free unstable module  $F(1)$ .

### Table des matières

1. Introduction.....	2
2. Modules instables injectifs.....	6
3. Sur la partie nilpotente de la résolution.....	14
4. La torsion de Frobenius.....	32
Appendice A. Sur la conjecture.....	38
Appendice B. La vérification des lemmes techniques.....	39
Bibliographie.....	44

### 1. Introduction

La lettre  $p$  désigne un nombre premier. On note  $\mathbb{F}_p$  le corps fini de cardinal  $p$ . Dans cet article, nous nous limiterons au cas  $p = 2$ .

On désigne par  $\mathcal{U}$  la catégorie des modules instables et par  $F(1)$  le module instable libre monogène engendré par un générateur  $u$  de degré 1. En fait,  $F(1)$  est un sous module de la cohomologie  $H^*(B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[u]$  de l'espace classifiant du groupe  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . On note  $J$  la cohomologie réduite de l'espace d'Eilenberg MacLane  $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 2)$ . La suspension du module  $F(1)$  est isomorphe au module des éléments indécomposables  $QH^*(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 2); \mathbb{F}_2) := J/J^2$ .

On note  $\Phi$  l'endofoncteur de  $\mathcal{U}$  qui, à un module instable  $M$  associe le module  $\Phi M$  concentré en degrés pairs et  $(\Phi M)^{2n} = M^n$ . On pose  $\lambda_M : \Phi M \rightarrow M$  le morphisme naturel en  $M$  défini par  $\Phi x \mapsto Sq^{|x|}x$ . La suite  $(\Phi^r F(1), \lambda_{\Phi^{r-1}F(1)})_{r \geq 0}$  induit une suite des groupes d'extensions  $(\text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r F(1), F(1)), \lambda_{\Phi^{r-1}F(1)}^*)_{r \geq 0}$ . Le calcul de ces groupes sera l'objet central de cet article.

On note  $\mathcal{F}$  la catégorie des foncteurs de la catégorie  $\mathcal{V}^f$  des  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels de dimension finie vers la catégorie  $\mathcal{V}$  des  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels. On désigne par  $I$  le foncteur d'inclusion qui est défini par  $I(V) = V$ . La catégorie  $\mathcal{U}$

est relié avec la catégorie  $\mathcal{F}$  par le foncteur  $f$  défini grâce au foncteur de Lannes  $T_V$  qui est l'adjoint à gauche du foncteur  $-\otimes H^*(BV; \mathbb{F}_2)$ . Plus précisément, soient  $M$  un module instable et  $V$  un espace vectoriel,  $f(M)(V) = (T_V M)^0$ . On a :

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(I, I) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } * = 2k, \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

(voir [FLS94, théorème 7.3]).

Voici le premier résultat de cet article.

PROPOSITION 3.5. — *Soit  $s$  un entier. Alors il existe  $N_s$  tel que pour tout  $r \geq N_s$  le morphisme  $\lambda_{\Phi^{r-1}F(1)}^*$  est un isomorphisme et dans ce cas on a :*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^s(\Phi^r F(1), F(1)) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^s(I, I).$$

Pour caculer les groupes  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r F(1), F(1))$ , on considère la construction de la résolution injective minimale du module  $F(1)$ . On désigne cette résolution par  $(I^r, \partial^r)^{r \geq 0}$ . On rappelle que la minimalité de la résolution signifie que  $I^0$  est l'enveloppe injective de  $F(1)$ ,  $I^1$  est celle du quotient  $I^0/F(1)$  et  $I^j$  est l'enveloppe injective du conoyau  $\mathrm{Coker}(\partial^{j-2})$  pour  $j \geq 2$ .

Soit  $V$  un 2-groupe abélien élémentaire alors le module  $H^*(BV; \mathbb{F}_2)$  est injectif dans la catégorie  $\mathcal{U}$ . On rappelle que le module instable de Brown-Gitler  $J(n), n \in \mathbb{N}$ , est un module fini caractérisé par l'isomorphisme naturel en  $M \in \mathcal{U}$  :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, J(n)) \cong (M^i)^*.$$

PROPOSITION 1.1. — *Pour tout  $r \in \mathbb{N}$ , le module  $I^r$  se décompose en somme directe  $R^r \oplus N^r$  dont  $R^r$  est un sous module d'une somme directe  $\bigoplus_{\alpha} H^*(BV_{\alpha}; \mathbb{F}_2)$  et  $N^r$  est une somme directe finie de modules de Brown-Gitler.*

Puisqu'il n'y a pas de morphisme non-trivial d'un module de Brown-Gitler vers d'une cohomologie d'un espace classifiant d'un 2-groupe abélien élémentaire, la suite  $(N^r, \partial^r|_{N^r})^{r \geq 0}$  est un sous-complexe de la résolution injective minimale de  $F(1)$ .

PROPOSITION 1.2. — *Soit  $r$  un entier. On a :*

$$H^r(N^{\bullet}, \partial^{\bullet}|_{N^{\bullet}}) \cong F(1)/\Phi^k F(1) \text{ si } r = 2^k(2l+1).$$

Soient  $k > l \geq 2$ , on note  $e_l^k = 2^k - 2^l$ . On observe que si  $t$  est un entier tel que  $t < 2^l$  alors

$$H^{t+2^l}(N^{\bullet}, \partial^{\bullet}|_{N^{\bullet}}) \cong H^{t+e_l^k}(N^{\bullet}, \partial^{\bullet}|_{N^{\bullet}}).$$

Cette périodicité particulière de la cohomologie  $H^*(N^{\bullet}, \partial^{\bullet}|_{N^{\bullet}})$  se lève au complexe  $(N^{\bullet}, \partial^{\bullet}|_{N^{\bullet}})^{r \geq 0}$ .

THÉORÈME 1.3. — *Sous le même hypothèse sur  $k, l$  et  $t$ , on a :*

$$N^{t+2^l} \cong N^{t+e_i^k}.$$

Afin d'énoncer le résultat sur le sous-complexe  $(N^\bullet, \partial^\bullet|_{N^\bullet})$  de la résolution injective minimale de  $F(1)$ , on note :

$$J(n_1, \dots, n_k)^t = J \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_k \end{pmatrix} := \bigoplus_{i=1}^k J(n_k).$$

THÉORÈME 3.24. — *Le tableau suivant montre les calculs de la partie  $N^\bullet$  de la résolution injective minimale de  $F(1)$  pour  $k \leq 47$ .*

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7
$N^k$	0	0	0	$J(1)$	0	$J(2)$	0	$J(1)$
$k$	8	9	10	11	12	13	14	15
$N^k$	0	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$	0	$J(2)$	0	$J(1)$
$k$	16	17	18	19	20	21	22	23
$N^k$	0	$J(8)$	$J\left(\frac{7}{6}\right)$	$J\left(\frac{6}{4}\right)$	$J(5)$	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$
$k$	24	25	26	27	28	29	30	31
$N^k$	0	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$	0	$J(2)$	0	$J(1)$
$k$	32	33	34	35	36	37	38	39
$N^k$	0	$J(16)$	$J\left(\frac{15}{14}\right)$	$J\left(\frac{14}{12}\right)$	?	?	?	?
$k$	40	41	42	43	44	45	46	47
$N^k$	?	$J(8)$	$J\left(\frac{7}{6}\right)$	$J\left(\frac{6}{4}\right)$	$J(5)$	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$

Plus généralement, pour  $n \geq 6$  on a :

$k$	$2^n - 23$	$2^n - 22$	$2^n - 21$	$2^n - 20$	$2^n - 19$	$2^n - 18$
$N^k$	$J(8)$	$J\left(\frac{7}{6}\right)$	$J\left(\frac{6}{4}\right)$	$J(5)$	$J(4)$	$J(3)$
$k$	$2^n - 17$	$2^n - 16$	$2^n - 15$	$2^n - 14$	$2^n - 13$	$2^n - 12$
$N^k$	$J(2)$	0	$J(8)$	$J\left(\frac{7}{6}\right)$	$J\left(\frac{6}{4}\right)$	$J(5)$
$k$	$2^n - 11$	$2^n - 10$	$2^n - 9$	$2^n - 8$	$2^n - 7$	$2^n - 6$
$N^k$	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$	0	$J(4)$	$J(3)$
$k$	$2^n - 5$	$2^n - 4$	$2^n - 3$	$2^n - 2$	$2^n - 1$	$2^n$
$N^k$	$J(2)$	0	$J(2)$	0	$J(1)$	0
$k$	$2^n + 1$	$2^n + 2$	$2^n + 3$	$2^n + 4$	$2^n + 5$	$2^n + 6$
$N^k$	$J(2^{n-1})$	$J\left(\begin{matrix} 2^{n-1}-1 \\ 2^{n-1}-2 \\ \vdots \\ 2^{n-1}-2^{n-3} \end{matrix}\right)$	$J(2^{n-2}) \oplus A_{2^n+3}$	?	?	?

$A_{2^n+3}$  désignant

$$\bigoplus_{\substack{0 \leq i \leq n-2 \\ 2 \leq j}} J(2^n - 2^i - 2^{i-j}).$$

On observe que dans la zone de  $k$  où on peut expliciter les modules  $N^k$ , les modules de Brown-Gitler du type  $J(2^n)$  sont répartis de la manière suivante : chaque module  $N^{2l+1}$  contient un seul facteur de ce type et les modules  $N^{2l}$  n'en contiennent aucun. Cette particularité permet de calculer :

PROPOSITION 2.21. — *Soit  $l$  un entier. Si il existe un entier  $n_l$  tel que*

$$N^{2l+1} = J(2^{n_l}) \oplus \bigoplus_{\alpha} J(2^{m_{\alpha}}(2t_{\alpha} + 1))$$

*et que les modules  $N^{2l}$  et  $N^{2l+2}$  ne contiennent aucun module de Brown-Gitler de type  $J(2^n)$  alors :*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^{2l}(\Phi^k F(1), F(1)) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq n_l, \\ \mathbb{F}_2 & \text{si } k > n_l. \end{cases}$$

*De plus, le morphisme  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^{2l}(\Phi^k F(1), F(1)) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^{2l}(\Phi^{k+1} F(1), F(1))$  est injectif pour tout  $k > n_l$ .*

On se sert de ce résultat pour étudier l'effet de la torsion de Frobenius sur les groupes d'extensions des modules instables. En observant que

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^k F(1), F(1)) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^k F(1), \Phi^k F(1))$$

pour tout entier  $k$ , on a :

THÉOREME 4.1. — *Soient  $n > k \geq 6$  et  $-22 \leq t \leq 2$ . Si  $l = 2^n - 2^k + t$  ou  $l \leq 47$  alors le morphisme :*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^l(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)) \hookrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^l(\Phi^{r+1} F(1), \Phi^{r+1} F(1))$$

*est injectif pour tout  $r$ .*

**Plan de l'article.** — Dans la section 2 on rappelle des généralités sur les modules instables injectives et considère la partie réduite de la résolution injective minimale du module  $F(1)$ . On étudie la partie nilpotente de cette résolution dans la section 3. On y montre que chaque terme de cette partie est une somme directe finie de modules de Brown-Gitler. On découvre ainsi la périodicité de la partie. La section 4 est consacrée pour calculer les groupes d'extensions des modules instables et étudier les effets de la torsion de Frobenius sur eux. La preuve des lemmes que l'on considère techniques est reportée aux appendices.

**Remerciement.** — Ce travail fait partie de ma thèse de doctorat effectuée à l'Université Paris 13 sous la direction de Lionel Schwartz. Je tiens à remercier Professeur Lionel Schwartz pour sa générosité, ses précieuses conseils, sa patience et ses exigences qui m'ont toujours apporté autant humainement que scientifiquement. J'aimerais profiter de cette occasion pour remercier les membres du VIASM pour leurs hospitalité pendant sa visite à Hanoi où l'article a été baptisé.

## 2. Modules instables injectifs

Carlsson et Miller ont observé que la cohomologie modulo  $p$  d'un  $p$ -groupe abélien élémentaire est injective dans  $\mathcal{U}$ . Lannes et Zarati ont démontré ensuite que le produit tensoriel d'un tel module avec un module de Brown-Gitler reste injectif. Cela a donné la caractérisation des objets injectifs de la catégorie  $\mathcal{U}$ .

THÉORÈME 2.1 ([LS89, théorème 3.1]). — *Chaque module injectif indécomposable de la catégories  $\mathcal{U}$  est un produit tensoriel  $L \otimes J(n)$  entre un facteur direct indécomposable de  $\mathcal{A}_p$ -module  $(\mathbb{H}^* B\mathbb{Z}/p)^{\otimes d}$  et un module de Brown-Gitler. Alors un module instable injectif est la somme directe des modules de ces types.*

On rappelle qu'un module instable  $M$  est dit réduit si le morphisme naturel en  $M$ ,  $\lambda_M : \Phi M \rightarrow M, \Phi x \mapsto Sq^{|x|}x$ , est injectif. Il est dit nilpotent si pour chaque élément  $x \in M$ , il existe un entier  $n_x$  tel que  $Sq^{2^{n_x}|x|}Sq^{2^{n_x-1}|x|} \dots Sq^{2|x|}x = 0$ . Puisqu'un module de Brown-Gitler  $J(n)$ ,  $n \geq 1$ , est nilpotent et que  $(\mathbb{H}^* B\mathbb{Z}/p)^{\otimes d}$  est réduit, le théorème 2.1 signifie qu'un module instable injectif se décompose en somme directe entre un module réduit et un module nilpotent.

On désigne par  $(I^\bullet, \partial^\bullet)$  la résolution injective minimale de  $F(1)$ . Chaque module  $I^j$  se scinde en somme directe  $R^j \oplus N^j$  :  $R^j$  est réduit et  $N^j$  est nilpotent. Puisque  $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(N^i, R^{i+1}) = 0$  pour tout  $i \geq 0$ , les morphismes  $\partial^\bullet|_{N^\bullet}$  font de la suite  $(N^r, \partial^r|_{N^r})_{r \geq 0}$  un sous-complexe de la résolution injective minimale de  $F(1)$ . Désormais on note  $\partial_n^l$  le morphisme restreint  $\partial^l|_{N^l} : N^l \rightarrow N^{l+1}$ . On peut exprimer les différentielles  $\partial^l$  sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \partial_n^l & \omega_l \\ 0 & \partial_r^l \end{pmatrix} : N^l \oplus R^l \rightarrow N^{l+1} \oplus R^{l+1}. \quad (1)$$

On obtient un diagramme commutatif dont chaque colonne est une suite exacte courte.

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \xrightarrow{\partial_n^{i-2}} & N^{i-1} & \xrightarrow{\partial_n^{i-1}} & N^i & \xrightarrow{\partial_n^i} & N^{i+1} & \xrightarrow{\partial_n^{i+1}} & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \xrightarrow{\partial^{i-2}} & I^{i-1} & \xrightarrow{\partial^{i-1}} & I^i & \xrightarrow{\partial^i} & I^{i+1} & \xrightarrow{\partial^{i+1}} & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \xrightarrow{\partial_r^{i-2}} & R^{i-1} & \xrightarrow{\partial_r^{i-1}} & R^i & \xrightarrow{\partial_r^i} & R^{i+1} & \xrightarrow{\partial_r^{i+1}} & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Par définition, le groupe d'extensions  $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^n F(1), F(1))$  est la cohomologies du complexe

$$\dots \xrightarrow{(\partial^{m-1})^*} \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^n F(1), I^m) \xrightarrow{(\partial^m)^*} \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^n F(1), I^{m+1}) \xrightarrow{(\partial^{m+1})^*} \dots$$

Comme les modules  $R^i$  sont injectifs réduits, ils sont *Nil*-fermé par définition [Sch94]. On a des isomorphismes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^n F(1), I^m) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^n F(1), N^m \oplus R^m) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^n F(1), N^m) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^n F(1), R^m) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(1), \tilde{\Phi}^n N^m) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(1), \tilde{\Phi}^n R^m) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(1), \tilde{\Phi}^n N^m) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(1), R^m) \\
&\cong (\tilde{\Phi}^n N^m)^1 \oplus (R^m)^1.
\end{aligned} \tag{2}$$

Il suffit de considérer la partie  $(N^\bullet, \partial_n^\bullet)$  et seule le degré 1 de la partie  $(R^\bullet, \partial_r^\bullet)$  pour calculer les groupes  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^n F(1), F(1))$ .

**2.1. L'homologie du complexe  $(R^\bullet, \partial_r^\bullet)$ .** — D'après [HLS93] le foncteur  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}_\omega$  admet un adjoint à droite que l'on note  $m$  et de plus le foncteur composé  $f \circ m$  est équivalent au foncteur  $id_{\mathcal{F}_\omega}$ .

NOTATION 1. — On note  $\ell$  le foncteur composé  $m \circ f$ . Il est appelé foncteur de localisation loin de *Nil*.

PROPOSITION 2.2 ([HLS93]). — Le module  $\ell(M)$  est *Nil*-fermé pour tout module instable  $M$ . De plus si  $M$  est *Nil*-fermé,  $M \xrightarrow{\sim} \ell(M)$ .

Puisque les modules injectifs réduits sont *Nil*-fermés, il suit que

COROLLAIRE 2.3. — On a une identification des complexes :

$$\ell(I^\bullet, \partial^\bullet) \cong (R^\bullet, \partial_r^\bullet).$$

L'homologie du complexe  $(R^\bullet, \partial_r^\bullet)$  est donc le dérivé  $\ell^*(F(1))$ .

La description de  $\ell^*(F(1))$  que l'on donne dans la suite est seulement une récolte des travaux présentés dans [FLS94].

THÉORÈME 2.4. — Étant donnés  $M$  dans  $\mathcal{U}$  et  $F$  dans  $\mathcal{F}_\omega$ , il existe une suite spectrale du premier quadrant

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^i(M, \ell^j(m(F))) \Rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^{i+j}(f(M), F). \tag{3}$$

*Démonstration.* — On considère la paire de foncteurs

$$\mathcal{U} \xrightarrow{\ell} \mathcal{U} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, -)} \mathcal{V}_{\mathbb{F}_2}.$$

Le foncteur  $f$  est exact. Compte tenu du fait que le foncteur  $m$  est exact à gauche, le foncteur  $\ell$  l'est aussi. Dans la mesure où  $m$  et  $f$  préservent l'injectivité des objets, il en est de même pour  $\ell$ . On déduit de la suite spectrale de Grothendieck associée à la paire  $\{\ell, \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, -)\}$  qu'il y a une suite spectrale du premier quadrant convergeant vers

$$\mathrm{R}^{i+j}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, \ell(-))) \cong \mathrm{R}^{i+j}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(f(M), f(-))) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^{i+j}(f(M), f(-))$$



dont la deuxième page est

$$R^i(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, -)) (R^j(\ell)) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^i(M, \ell^j(-)).$$

En l'appliquant au module  $m(F)$  on obtient la suite spectrale

$$E_2^{i,j} \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^i(M, \ell^j(m(F))) \Rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^{i+j}(f(M), F)$$

d'où le résultat.  $\square$

Compte tenu du fait que  $F(k)$  est projectif dans  $\mathcal{U}$  la suite spectrale (3) pour  $(F(k), I) \in \mathcal{U} \times \mathcal{F}_\omega$  s'effondre et donne :

COROLLAIRE 2.5. — *On a :*

$$\ell^i(m(I))^k \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(k), \ell^i(F(1))) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Gamma^k, I).$$

Le théorème suivant donne la relation entre les espaces vectoriels  $\ell^i(m(I))^k$ .

THÉORÈME 2.6 ([FLS94]). — *Les groupes  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Gamma^k, I)$  sont triviaux si  $k$  n'est pas une puissance de 2 et :*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Gamma^{2^k}, I) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } 2^{k+1} | i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*De plus les morphismes*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Gamma^{2^{k-1}}, I) \xrightarrow{f^*(Sq^{2^{k-1}} \bullet)} \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Gamma^{2^k}, I)$$

*sont des isomorphismes si  $2^{k+1} | i$ .*

En particulier, le produit de Yoneda fait de  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\Gamma^1, I) = \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(I, I)$  une algèbre commutative.

THÉORÈME 2.7 ([FLS94, théorème 7.3]). — *L'algèbre  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(I, I)$  est une  $\mathbb{F}_2$ -algèbre commutative. Elle est engendrée par les classes  $e_n \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^{2^{n+1}}(I, I)$  et admet la présentation suivante*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(I, I) \cong \frac{\mathbb{F}_2[e_0, e_1, \dots, e_n, \dots]}{\langle e_n^2, n \in \mathbb{N} \rangle},$$

*$\langle e_n^2, n \in \mathbb{N} \rangle$  désignant l'idéal engendré par les puissances 2-ièmes.*

COROLLAIRE 2.8. — *Soit  $i = 2^n(2k+1)$ . Il y a un isomorphisme des modules instable :*

$$\ell^i(F(1)) \cong \frac{F(1)}{\Phi^n F(1)}.$$

*Démonstration.* — Par définition, le module instable libre  $F(n)$  est caractérisé par l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), M) \cong M^n,$$

naturel en  $M \in \mathcal{U}$ . Alors l'action de  $Sq^i$  sur  $M^n$  peut se déterminer par l'action de  $Sq^i : F(n+i) \rightarrow F(n)$  sur  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), M)$ . L'isomorphisme

$$\ell^i(m(I))^k \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(k), \ell^i(F(1))) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Gamma^k, I),$$

combiné avec le théorème 2.6, montre que

$$\ell^i(F(1)) \cong F(1) / \Phi^n F(1) \text{ si } i = 2^n(2k+1)$$

en tant qu'espaces vectoriels gradués. A cause de l'écart de degrés, la seule opération qui peut agir non-trivialement sur  $(\ell^i(F(1)))^{2^k}$  est  $Sq^{2^k}$ . A travers la suite spectrale

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(k), \ell^i(F(1))) \Rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Gamma^k, I),$$

cette opération devient

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Gamma^{2^k}, I) \xrightarrow{f^*(Sq^{2^k} \bullet)} \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Gamma^{2^{k+1}}, I)$$

et est donc non-triviale. Ce morphisme est en fait induit par le Verchiebung  $\Gamma^{2^{k+1}} \rightarrow \Gamma^{2^k}$  qui est le dual du morphisme de Frobenius  $S^{2^k} \rightarrow S^{2^{k+1}}$  (voir [Hai10]). Il s'ensuit que

$$\ell^i(F(1)) \cong F(1) / \Phi^n F(1) \text{ si } i = 2^n(2k+1)$$

en tant que modules instables. □

**2.2. La partie réduite de la résolution.** — Ce paragraphe est consacré pour étudier la partie  $(R^\bullet, \partial_r^\bullet)$  de la résolution injective minimale de  $F(1)$ . En particulier, le degré 1 de chaque module  $R^j$  de cette partie sera calculé.

*2.2.1. A propos d'un résultat de A. Touzé et un lemme de connectivité.* — On va donner une explication rapide d'un résultat de A. Touzé sur l'annulation de groupes d'extensions dans la catégorie  $\mathcal{F}$ . Sauf mention explicite à une autre référence, on renvoie à [Tou13] à travers cette sous-section.

Rappelons que  $\mathcal{P}_d$  désigne la catégorie des foncteurs polynomiaux stricts homogènes de degré  $d$ . La catégorie  $\mathcal{P}$  des foncteurs polynomiaux stricts est la somme directe  $\bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{P}_d$ . On note  $\mathcal{O}$  le foncteur oubli  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}$ .

**THÉORÈME 2.9.** — *Étant donné  $F$  un foncteur de la catégorie  $\mathcal{P}_s$ , alors*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(I, \mathcal{O}(F)) = 0$$

dès que  $s$  n'est pas une puissance de  $p$ .

Ce théorème est une conséquence des études sur la question suivante.

QUESTION 1. — Soit  $F \in \mathcal{P}_s$  (on dit que  $F$  est de degré  $s$ ), quel est le degré du foncteur  $\mathcal{O}(F) \in \mathcal{F}$ ? (par abus de notation, on note dorénavant  $F$  le foncteur  $\mathcal{O}(F)$ ).

NOTATION 2. — Soient  $s$  un entier et  $p$  un nombre premier. On note  $\sum_{i=1}^n \alpha_n p^n$  l'expression  $p$ -adique de  $s$ . On désigne par  $\Sigma_p(s)$  la somme  $\sum_{i=1}^n \alpha_n$  et on pose

$$\mathcal{J}(p, s) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv s(p-1) \text{ et } \Sigma_p(s) \leq n \leq s\}.$$

THÉORÈME 2.10. — Soit  $F \in \mathcal{P}_s$  un foncteur de degré  $s$ . Le degré dans la catégorie  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{O}(F)$  est un élément de  $\mathcal{J}(p, s)$ .

DÉFINITION 2.11 (Ext-paramétré). — Soient  $F, G \in \mathcal{F}$  et  $V \in \mathcal{V}$ . On note :

$$\begin{aligned} F^V(W) &:= F(\text{Hom}_{\mathcal{V}}(V, W)), \\ G_V(W) &:= G(V \otimes W), \end{aligned}$$

pour tout  $W \in \mathcal{V}$ . On définit le foncteur  $\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{F}}^i(F, G) \in \mathcal{F}$  par la formule :

$$\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{F}}^i(F, G)(V) := \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(F^V, G) \cong \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(F, G_V)$$

REMARQUE 2.12. — L'évaluation de  $\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{F}}^i(F, G)$  sur le corps de base  $\mathbb{F}_p$  redonne le groupe d'extension usuelle  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(F, G)$ .

LEMME 2.13. — 1. Si  $F$  est un foncteur polynomial strict de degré  $s$  il en est de même pour le foncteur  $\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{F}}^i(F, G)$ .

2. Si  $G$  est un foncteur polynomial strict de degré  $s$  il en est de même pour le foncteur  $\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{F}}^i(F, G)$ .

Ceci, combiné avec le théorème 2.10, permet d'énoncer :

PROPOSITION 2.14. — Soit  $F \in \mathcal{P}_s$  et  $G \in \mathcal{P}_t$  tels que  $\mathcal{J}(p, s) \cap \mathcal{J}(p, t) = \emptyset$  alors

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, G) = 0.$$

*Démonstration.* — Supposons au contraire que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, G) \neq 0$ . Le foncteur  $\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{F}}^i(F, G)$  est donc non-trivial. Son degré dans la catégorie  $\mathcal{F}$  appartient à  $\mathcal{J}(p, s) \cap \mathcal{J}(p, t)$  d'après le théorème 2.10. Ceci contredit l'hypothèse que l'intersection  $\mathcal{J}(p, s) \cap \mathcal{J}(p, t)$  est vide. Cette contradiction conclut la proposition.  $\square$

Afin de récupérer le théorème 2.9, on a besoin du lemme suivant.

LEMME 2.15. — Un entier positif  $d$  appartient à  $\mathcal{J}(p, s)$  si et seulement si il existe  $d$  entiers  $r_i$  tels que  $\sum_{i=1}^d p^{r_i} = s$ .

*Démonstration du théorème 2.9.* — On constate que  $I \in \mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{J}(p, 1) = \{1\}$ . Si le degré de  $F$  n'est pas une puissance de  $p$  alors  $1 \notin \mathcal{J}(p, s)$ . Le résultat découle de la proposition 2.14.  $\square$

On énonce ci-dessous une proposition classique dont on aura besoin pour la suite.

PROPOSITION 2.16 ([Sch94]). — Soient  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  une 2-partition régulière et  $k + 1 = \sum_{i=1}^m 2^{i-1} \lambda_i$ . Le module  $I_{(\lambda)}$  est  $k$ -connexe. En particulier, tous les modules  $I_{(\lambda)}$  sont triviaux en degrés plus petit que 8 sauf :

$$\{I_{(n)} | n \leq 8\}, \{I_{(n,1)} | n \leq 5\}, \{I_{(n,2)} | n \leq 4\}. \quad (4)$$

On rappelle que les module  $S_\lambda$  sont simples dans la catégorie  $\mathcal{U}$  et  $I_{(\lambda)}$  est leur enveloppe injective (voir [Sch94]). Le lemme suivant est classique.

LEMME 2.17. — Soit  $\{I_j\}_{j \geq 0}$  la résolution injective minimale d'un foncteur  $F \in \mathcal{F}$ . Le nombre de copies de  $f(I_{(\lambda)})$  dans  $I_j$  est la dimension sur  $\mathbb{F}_2$  du groupe d'extensions  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^j(f(S_\lambda), F)$ .

COROLLAIRE 2.18. — Le nombre de copies de  $I_{(\lambda)}$  dans  $R^i$  de la résolution injective minimale de  $F(1)$  est la dimension sur  $\mathbb{F}_2$  du groupe d'extensions  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^j(f(S_\lambda), F)$ .

*Démonstration.* — Cela découle du fait que  $f(R^\bullet, \partial_r^\bullet)$  est la résolution injective minimale de  $f(F(1))$ .  $\square$

Soient  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  une 2-partition régulière et  $k = \sum_{i=1}^m \lambda_i$ . On désigne par  $I_\lambda$  le foncteur  $f(I_{(\lambda)})$ . Il est de degré  $k$ . Alors selon le théorème 2.9, parmi les foncteurs

$$\{I_n | n \leq 8\}, \{I_{n,1} | n \leq 5\}, \{I_{n,2} | n \leq 4\}, \quad (5)$$

seuls les foncteurs  $I_1, I_2, I_4$  et  $I_{3,1}$  peuvent être facteurs directs des termes dans la résolution injective  $(f(R^\bullet, \partial_r^\bullet))$  du foncteur  $I$ . Plus précisément :

LEMME 2.19. — On a :

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(S_{(2^n)}, I) &= \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } i = 2^{n+1}k + 2^n - 1, \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases} \\ \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(S_{(3,1)}, I) &= \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } i = 8k + 2, 8k + 4, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Comme  $I_{2^n}$  est l'enveloppe injective de  $S_{(2^n)}$ , le foncteur  $f(R^k)$  contient une seule copie de  $I_{2^n}$  si  $k = 2^{n+1}l + 2^n - 1$  et n'en contient aucune sinon ; ainsi comme  $I_{3,1}$  est l'enveloppe injective de  $S_{(3,1)}$ , le foncteur  $f(R^k)$  contient une seule copie de  $I_{3,1}$  si  $k = 8l + 2$  ou  $k = 8l + 4$  et n'en contient aucune sinon.

*Démonstration.* — Puisque  $S_{(2^n)} = \Lambda^{2^n}$ , on se ramène à calculer les groupes  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Lambda^{2^n}, I)$ . Il résulte de la suite de Koszul

$$0 \rightarrow \Lambda^{2^n} \rightarrow \Lambda^{2^n-1} \otimes S^1 \rightarrow \Lambda^{2^n-2} \otimes S^2 \rightarrow \cdots \rightarrow \Lambda^1 \otimes S^{2^n-1} \rightarrow S^{2^n} \rightarrow 0$$

et du théorème 2.7, qu'on a des isomorphismes :

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Lambda^{2^n}, I) &\cong \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i\left(I^\sharp, (\Lambda^{2^n})^\sharp\right) \\ &\cong \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(I, \Lambda^{2^n}) \\ &\cong \text{Ext}_{\mathcal{F}}^{i-2^n-1}(I, S^{2^n}) \\ &\cong \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } i = 2^{n+1}k + 2^n - 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

On note  $W_{(3,1)}$  le noyau de la multiplication  $\Lambda^3 \otimes \Lambda^1 \rightarrow \Lambda^4$ . Parce que les groupes  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Lambda^3 \otimes \Lambda^1, I)$  sont triviaux, la suite exacte longue

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Lambda^3 \otimes \Lambda^1, I) & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(W_{(3,1)}, I) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^{i+1}(\Lambda^4, I) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^{i+1}(\Lambda^3 \otimes \Lambda^1, I) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^{i+1}(W_{(3,1)}, I) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

associée à la suite exacte courte  $0 \rightarrow W_{(3,1)} \rightarrow \Lambda^3 \otimes \Lambda^1 \rightarrow \Lambda^4 \rightarrow 0$  donne les isomorphismes

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(W_{(3,1)}, I) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^{i+1}(\Lambda^4, I).$$

Par ailleurs, la suite exacte courte  $0 \rightarrow \Lambda^4 \rightarrow W_{(3,1)} \rightarrow S_{(3,1)} \rightarrow 0$ , induit la suite exacte longue

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^{i-1}(\Lambda^4, I) & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(S_{(3,1)}, I) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(W_{(3,1)}, I) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\Lambda^4, I) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^{i+1}(S_{(3,1)}, I) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Le deuxième calcul en découle.  $\square$

REMARQUE 2.20. — Chaque module  $R^k$  dans la partie réduite de la résolution injective minimale du module  $F(1)$  contient une seule copie du module  $I_{(1)}$ , qui est isomorphe à  $\tilde{H}^*B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{F}_2[u]/\mathbb{F}_2$ , si  $k$  est impair et n'en contient aucune

sinon. A part  $I_{(1)}$ , les autres modules instables injectifs indécomposables sont 1-connexes. Alors, on a

$$(R^{2l})^1 \cong \langle u \rangle \text{ et } (R^{2l+1})^1 \cong 0.$$

Par l'exactitude de la résolution injective de  $F(1)$ , on obtient :

$$\partial_r^{2l}(u) = 0 \text{ et } \omega^{2l}(u) \neq 0. \text{ (voir (1))}$$

Par ailleurs, remarquons qu'un module de Brown-Gitler est non-trivial en degré 1 si et seulement si il est de type  $J(2^n)$ . Il en découle que chaque terme  $N^{2l+1}$  contient un facteur direct  $J(2^{n_l})$  tel que  $\omega^{2l}(u) = x_{n_l}$ .

Dans le reste de l'article, on va montrer que dans plusieurs cas intéressants, le terme  $N^{2l+1}$  contient un seul facteur direct de type  $J(2^{n_l})$  alors que  $N^{2l}$  et  $N^{2l+2}$  n'en contient aucun et cela est suffisant pour calculer le groupe  $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2l}(\Phi^r F(1), F(1))$ . En effet, on va montrer que dans ce cas :

PROPOSITION 2.21. — *On a :*

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2l}(\Phi^k F(1), F(1)) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq n_l, \\ \mathbb{F}_2 & \text{si } k > n_l. \end{cases}$$

*De plus, le morphisme  $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2l}(\Phi^k F(1), F(1)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2l}(\Phi^{k+1} F(1), F(1))$  est injectif pour tout  $k > n_l$ .*

*Démonstration.* — Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \xrightarrow{(\partial_n^{2l-1})_*} & \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^k F(1), N^{2l}) & \xrightarrow{(\partial_n^{2l})_*} & \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^k F(1), N^{2l+1}) & \xrightarrow{(\partial_n^{2l+1})_*} & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \xrightarrow{(\partial_n^{2l-1})_*} & \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^k F(1), I^{2l}) & \xrightarrow{(\partial_n^{2l})_*} & \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^k F(1), I^{2l+1}) & \xrightarrow{(\partial_n^{2l+1})_*} & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \xrightarrow{(\partial_r^{2l-1})_*} & \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^k F(1), R^{2l}) & \xrightarrow{(\partial_r^{2l})_*} & \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^k F(1), R^{2l+1}) & \xrightarrow{(\partial_r^{2l+1})_*} & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

dont chaque colonne est une suite exacte courte, induit la suite exacte longue

$$\begin{array}{ccc}
& 0 & \\
& \parallel & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^k F(1), N^{2l}) & & \\
& \downarrow & \\
\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^{2l}(\Phi^k F(1), F(1)) & \longrightarrow & (\ell^{2l}(F(1)))^1 \\
& & \downarrow \alpha \\
& & \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^k F(1), N^{2l+1}) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^{2l+1}(\Phi^k F(1), F(1)) \\
& & \downarrow \\
& & (\ell^{2l+1}(F(1)))^1 \\
& & \parallel \\
& & 0
\end{array}$$

Si  $k \leq n_l$ , on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^k F(1), N^{2l+1}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^k F(1), J(2^{n_l})) \cong \langle x_{n_l-k}^{2^k} \rangle \cong \mathbb{F}_2.$$

Parce que d'une part  $\ell^{2l}(F(1)) \cong \langle u, u^2, \dots, u^{2^{\lfloor \log_2 l \rfloor - 1}} \mid u \in I_{(1)} \subset I^{2l} \rangle$  et d'autre part  $\partial^{2l}(u^{2^k}) = x_{n_l-k}^{2^k}$  alors la flèche  $\alpha$  est l'isomorphisme  $\mathbb{F}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_2$ . On a donc

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^{2l}(\Phi^k F(1), F(1)) \cong 0.$$

Si  $k \geq n_l + 1$ , il résulte de l'isomorphisme  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^k F(1), N^{2l+1}) \cong 0$  que

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^{2l+1}(\Phi^k F(1), F(1)) \cong 0$$

et que

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^{2l}(\Phi^k F(1), F(1)) \cong (\ell^{2l}(F(1)))^1 \cong \mathbb{F}_2$$

d'où le résultat.  $\square$

### 3. Sur la partie nilpotente de la résolution

Puisque, d'une part, les homologies  $H^k(R^\bullet, \partial_r^\bullet)$  sont finies et d'autre part

$$H^k(R^\bullet, \partial_r^\bullet) \cong H^{k+1}(N^\bullet, \partial_n^\bullet),$$

alors les homologies  $H^{k+1}(N^\bullet, \partial_n^\bullet)$  sont finies. Dans ce paragraphe, on va montrer que les modules  $N^l$  sont aussi finis.

**3.1. La finitude de la partie nilpotente.** — On remarque que si un module instable est nilpotent ou réduit, il en est de même pour son enveloppe injective. Un module instable peut être vu comme l'extension d'un module réduit par son plus grand sous-module nilpotent. Le lemme suivant explique comment on forme l'enveloppe injective de l'extension à partir de la partie nilpotente et celle qui est réduite.

LEMME 3.1. — *Étant donné une suite exacte courte*

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow R \rightarrow 0,$$

$N$  désignant un module nilpotent et  $R$  désignant un module réduit, l'enveloppe injective de  $M$  est la somme directe de l'enveloppe injective de  $R$  et celle de  $N$ .

*Démonstration.* — On considère  $I$  un module instable injectif contenant  $M$ . D'après le théorème 2.1,  $I$  se décompose en somme directe  $I_r \oplus I_n$  où  $I_r \cong \bigoplus_{\alpha} L_{\alpha}$  et  $I_n \cong \bigoplus_{\beta, n_{\beta} \geq 1} L_{\beta} \otimes J(n_{\beta})$ ,  $L_{\alpha}, L_{\beta}$  désignant des modules injectifs réduits indécomposables.

Puisqu'il n'y a aucun morphisme d'un module nilpotent vers un module réduit, le module  $N$  est inclus dans  $I_n$ . On obtient un diagramme dans lequel les lignes sont exactes.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M & \longrightarrow & R \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow i & & \downarrow \omega & & \downarrow \alpha \\
 0 & \longrightarrow & I_n & \longrightarrow & I & \longrightarrow & I_r \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Il en résulte une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Ker}(\alpha) \rightarrow \text{Coker}(i) \rightarrow \text{Coker}(\omega) \rightarrow \text{Coker}(\alpha) \rightarrow 0.$$

Comme  $\text{Coker}(i)$  est nilpotent et  $\text{Ker}(\alpha) \subset R$  est réduit, on a  $\text{Ker}(\alpha) = 0$ . Autrement dit, le morphisme  $\alpha$  est injectif. En prenant pour  $I$  l'enveloppe injective de  $M$ , on conclut le lemme.  $\square$

Alors, pour déterminer les modules  $N^j$ , il faut calculer les sous-modules nilpotents les plus grands des modules  $\text{Coker}(\partial^{j-2})$ . Le lemme suivant réalise ces calculs.

LEMME 3.2. — *Pour chaque  $k \geq 1$  il y a une suite exacte :*

$$0 \rightarrow \ell^k(F(1)) \rightarrow \text{Coker}(\partial_n^k) \rightarrow \text{Coker}(\partial^k) \rightarrow \text{Coker}(\partial_r^k) \rightarrow 0.$$



Pour  $k = 0$ , on a  $\text{Coker}(\partial_n^0) = 0$  et  $\text{Coker}(\partial^0) \cong \text{Coker}(\partial_r^0)$ . De plus, il y existe une injection

$$\varphi_{2k+1} : \ell^{2k+2}(F(1)) \rightarrow \text{Coker}(\partial_r^{2k+1})$$

telle que  $\text{Coker}(\varphi_{2k+1})$  est réduit. Notons  $\psi_{2k+1}$  le composé :

$$\text{Coker}(\partial_n^{2k+1}) \rightarrow \text{Coker}(\partial_r^{2k+1}) \rightarrow \text{Coker}(\varphi_{2k+1}).$$

Son noyau s'insère dans une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow \text{Coker}(\partial_n^{2k+1}) \rightarrow \text{Ker}(\psi_{2k+1}) \rightarrow \ell^{2k+2}(F(1)) \rightarrow 0.$$

Alors le module  $\text{Ker}(\psi_{2k+1})$  est le sous-module nilpotent le plus grand de  $\text{Coker}(\partial_n^{2k+1})$ .

La vérification de ce lemme est renvoyée à l'appendice B, page 39. Le corollaire suivant étend la notation de  $\text{Ker}(\psi_{2k+1})$  à tout indice entier.

**COROLLAIRE 3.3.** — On désigne le morphisme  $\text{Coker}(\partial^{2k}) \rightarrow \text{Coker}(\partial_r^{2k})$  par  $\psi_{2k}$ . Alors pour tout  $k \geq 1$  on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \ell^k(F(1)) \rightarrow \text{Coker}(\partial_n^k) \rightarrow \text{Ker}(\psi_k) \rightarrow \ell^{k+1}(F(1)) \rightarrow 0.$$

Le module  $\text{Ker}(\psi_k)$  est le sous-module nilpotent le plus grand de  $\text{Coker}(\partial_n^k)$ .

Ce résultat permet de faire une récurrence pour déterminer la partie nilpotente de la résolution.

**COROLLAIRE 3.4.** — Dans la résolution injective minimale de  $F(1)$ , les modules  $N^i$  sont finis. Plus précisément  $N^i$  est l'enveloppe injective de  $\text{Ker}(\psi_{i-2})$ .

*Démonstration.* — Afin de construire la résolution minimale de  $F(1)$ , il faut déterminer son enveloppe injective puis l'enveloppe injective de  $\text{Coker}(\partial^k)$  pour tout  $k$ . On raisonne par récurrence sur  $k$ .

1. Comme  $F(1)$  est réduit, il n'y a pas de partie nilpotente dans son enveloppe injective donc  $N^0 = 0$ .
2. Il résulte des lemmes 3.1 et 3.2 que  $N^{2k}$  est l'enveloppe injective de :

$$\text{Coker}(\partial_n^{2k-2}) / \ell^{2k-2}(F(1))$$

et  $N^{2k+1}$  est l'enveloppe injective d'une certaine extension

$$E_{2k-1} \in \text{Ext}_{\mathcal{U}}^1(\ell^{2k}(F(1)), \text{Coker}(\partial_n^{2k-1})).$$

Ces deux modules sont finis par l'hypothèse de récurrence donc il en est de même pour les modules  $N^{2k}, N^{2k+1}$ .

Cela conclut la récurrence.  $\square$

On rappelle qu'un module injectif fini  $N$  est une somme directe finie de modules de Brown-Gitler. Rappelons aussi que le foncteur  $\Phi$  admet un adjoint à droite  $\tilde{\Phi}$  et :

$$\tilde{\Phi}J(k) \cong \begin{cases} J(n) & \text{si } k = 2n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors il existe un entier  $m$  tel que  $\tilde{\Phi}^t N = 0$  pour tout  $t > n$ . On peut maintenant énoncer le premier résultat de l'article :

PROPOSITION 3.5. — *Soit  $s$  un entier. Alors il existe  $N_s$  tel que pour tout  $r \geq N_s$  le morphisme  $\lambda_{\tilde{\Phi}^{r-1}F(1)}^*$  est un isomorphisme et dans ce cas on a :*

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^s(\Phi^r F(1), F(1)) \cong \text{Ext}_{\mathcal{F}}^s(I, I).$$

*Démonstration.* — Par définition on a :

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r F(1), F(1)) \cong H^*(\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi^r F(1), I^\bullet), \partial_*^\bullet).$$

D'après (2), ce dernier est isomorphe à  $H^*((\tilde{\Phi}^r N^\bullet) \oplus (R^\bullet))^1$ . On obtient alors :

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^s(\Phi^r F(1), F(1)) \cong H^s((\tilde{\Phi}^r N^\bullet) \oplus (R^\bullet))^1.$$

Puisqu'il existe un entier  $N_s$  tel que  $\tilde{\Phi}^r N^i = 0$  pour  $r \geq N_s$  et  $s-1 \leq i \leq s+1$  donc

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^s(\Phi^r F(1), F(1)) \cong H^s((R^\bullet))^1.$$

pour tout  $r \geq N_s$ . D'après le corollaire 2.5, ce dernier coïncide avec  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^s(I, I)$ . La proposition est démontrée.  $\square$

**3.2. Calcul de la partie nilpotente.** — On commence cette sous-section par détailler les trois premiers termes de la résolution injective minimale du module  $H_r = F(1)/\Phi^r F(1)$ . Puisque  $H^r$  est fini, chaque terme dans sa résolution injective minimale est une somme directe finie de modules de Brown-Gitler. Comme  $J(n)$  est l'enveloppe injective du module instable simple  $\Sigma^n \mathbb{F}_2$ , il suffit de calculer les groupes d'extensions  $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^i(\Sigma^m \mathbb{F}_2, \Sigma^{2^n} \mathbb{F}_2)$  pour tout  $m$  et pour  $0 \leq i \leq 2$ . En effet, on rappelle que la dimension sur  $\mathbb{F}_2$  du groupe  $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^i(\Sigma^n \mathbb{F}_2, M)$  détermine le nombre de copies du module  $J(n)$  dans le terme  $i$ -ième de la résolution injective minimale de  $M$ .

Les lemmes et corollaires suivants sont essentiels pour calculer les premiers termes des résolutions injectives minimales de  $\Sigma^{2^n} \mathbb{F}_2$  et de  $H_n$ .

LEMME 3.6. — *Soient deux entiers  $m, n$ . On a :*

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^1(\Sigma^m \mathbb{F}_2, \Sigma^{2^n} \mathbb{F}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } m = 2^n - 2^i, 0 \leq i \leq n-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* — Une extension de  $\Sigma^{2^n}\mathbb{F}_2$  par  $\Sigma^m\mathbb{F}_2$  correspond à une opération de Steenrod  $\theta$  de degré  $2^n - m$  :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{2^n}\mathbb{F}_2 & \hookrightarrow & \Sigma^{2^n}\mathbb{F}_2 \\ & & \uparrow \theta \\ & & \Sigma^m\mathbb{F}_2 \twoheadrightarrow \Sigma^m\mathbb{F}_2 \end{array}$$

Cette opération doit être indécomposable donc  $\theta = Sq^{2^i}$ . Il en résulte que  $2^n - m = 2^i$ . D'autre part, par l'instabilité on a  $2^i \leq m$ . Il entraîne que  $2^n = m + 2^i \leq 2m$ . Or  $m \geq 2^{n-1}$ . Autrement dit  $0 \leq i \leq n - 1$ . Le lemme en découle.  $\square$

**COROLLAIRE 3.7.** — *Soient deux entiers  $m, n$ . On a :*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1(\Sigma^m\mathbb{F}_2, \mathbb{H}_{n+1}) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } m = 2^n - 2^i, 0 \leq i \leq n - 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* — On raisonne par récurrence sur  $n$ .

1. Puisque  $\mathbb{H}_1 \cong \Sigma^{2^0}\mathbb{F}_2$ , le lemme est vérifié pour  $n = 0$ . Supposons que le lemme reste vrai pour tout  $n < k$ . On passe au cas  $n = k$ .
2. La suite exacte courte

$$0 \rightarrow \Sigma^{2^n}\mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{H}_{n+1} \rightarrow \mathbb{H}_n \rightarrow 0$$

induit la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^m\mathbb{F}_2, \Sigma^{2^n}\mathbb{F}_2) & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^m\mathbb{F}_2, \mathbb{H}_{n+1}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma^m\mathbb{F}_2, \mathbb{H}_n) & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1(\Sigma^m\mathbb{F}_2, \Sigma^{2^n}\mathbb{F}_2) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1(\Sigma^m\mathbb{F}_2, \mathbb{H}_{n+1}) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1(\Sigma^m\mathbb{F}_2, \mathbb{H}_n) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \vdots \end{array}$$

On en déduit que

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1(\Sigma^m\mathbb{F}_2, \mathbb{H}_{n+1}) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } m = 2^n - 2^i, 0 \leq i \leq n - 2, \\ 0 & \text{si } m \neq 2^n - 2^i, 0 \leq i \leq n - 1. \end{cases}$$

La suite exacte courte

$$0 \rightarrow \Phi H_n \rightarrow H_{n+1} \rightarrow \Sigma \mathbb{F}_2 \rightarrow 0$$

entraîne l'isomorphisme

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left( \Sigma^{2^{n-1}} \mathbb{F}_2, \Phi H_n \right) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left( \Sigma^{2^{n-1}} \mathbb{F}_2, H_{n+1} \right).$$

De manière analogue on a

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left( \Sigma^{2^{n-1}} \mathbb{F}_2, \Phi^{n-1} H_2 \right) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left( \Sigma^{2^{n-1}} \mathbb{F}_2, H_{n+1} \right).$$

Il résulte de la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \Phi^n H_1 \rightarrow \Phi^{n-1} H_2 \rightarrow \Sigma \mathbb{F}_2 \rightarrow 0$$

qu'on a l'injection

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left( \Sigma^{2^{n-1}} \mathbb{F}_2, \Phi^{n-1} H_2 \right) \hookrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left( \Sigma^{2^{n-1}} \mathbb{F}_2, \Sigma^{2^{n-1}} \mathbb{F}_2 \right) \cong 0.$$

Il en résulte que  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left( \Sigma^{2^{n-1}} \mathbb{F}_2, \Phi^{n-1} H_2 \right) = 0$  et on obtient donc  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left( \Sigma^{2^{n-1}} \mathbb{F}_2, H_{n+1} \right) = 0$ .

Le lemme en résulte.  $\square$

De même manière, en utilisant [Cuo14b, proposition 3.2.1.12] on obtient :

LEMME 3.8. — *Pour tout entier  $n$  on a :*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^2 \left( \Sigma^{2^n - j} \mathbb{F}_2, H_{n+1} \right) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } j = 2^k + 2^{k-t}, 0 \leq k \leq n-2, 2 \leq t, \\ \mathbb{F}_2 & \text{si } j = 2^{n-1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

COROLLAIRE 3.9. — *L'enveloppe injective de  $H_{n+1}$  est  $J(2^n)$ , celle de  $J(2^n)/H_{n+1}$  est*

$$\bigoplus_{i=0}^{n-2} J(2^n - 2^i)$$

*et le module  $I^2$  dans la résolution injective minimale  $\{I^j\}$  de  $H_{n+1}$  est*

$$J(2^{n-1}) \oplus \bigoplus_{\substack{0 \leq i \leq n-2 \\ 2 \leq j}} J(2^n - 2^i - 2^{i-j}).$$

*Démonstration.* — On note  $I^0 \rightarrow I^1$  les deux premiers termes de la résolution injective minimale de  $H_{n+1}$ . L'enveloppe injective de  $H_{n+1}$  est  $J(2^n)$  et celle de  $J(2^n)/H_{n+1}$  est  $I^1$ . Puisque  $H_{n+1}$  est fini,  $I^1$  est une somme directe finie de modules de Brown-Gitler. D'après le corollaire 3.7, chaque module  $J(2^n - 2^i)$  apparaît une seule fois dans  $I^1$ . De manière analogue on obtient  $I^2$  et le résultat suit.  $\square$

Le lemme suivant donne un premier contrôle sur les modules  $N^i$  de la partie nilpotente de la résolution injective minimale de  $F(1)$ .

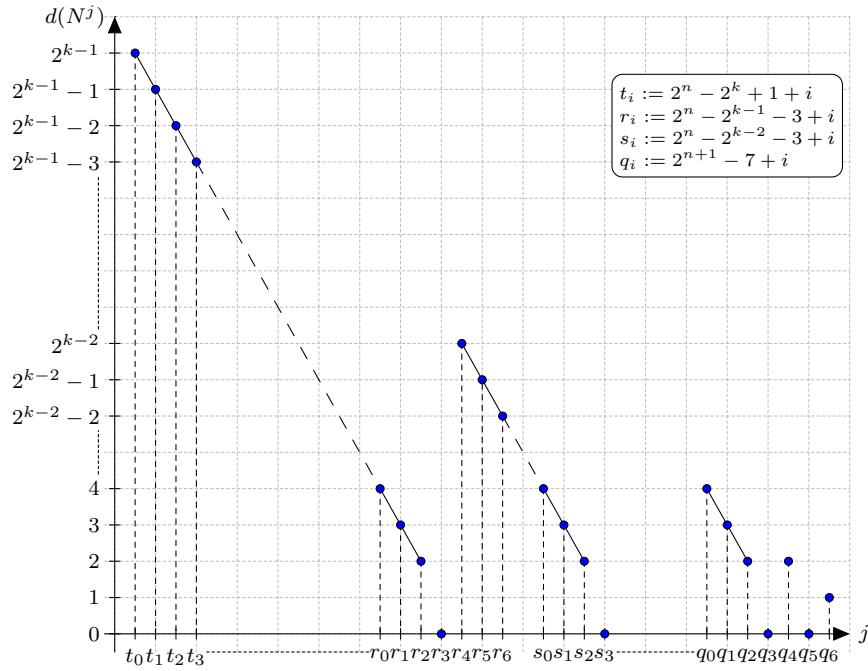
LEMME 3.10. — *Soient deux entiers  $n > k \geq 1$ . Alors les égalités suivantes ont lieu*

$$N^{2^n - 2^k - 1} = J(1), \quad N^{2^n - 2^k} = 0, \quad N^{2^n - 2^k + 1} = J(2^{k-1}).$$

*Supposons de plus que  $k \geq 3$ ; soit  $m$  un entier tel que  $2^{k-1} - 1 \geq m \geq 2$ , alors on a*

$$d(N^{2^n - 2^k + m}) = 2^{k-1} - m + 1 \text{ et } (N^{2^n - 2^k + m})^{2^{k-1} - m + 1} = \mathbb{F}_2.$$

*En particulier, pour  $n > 2$  :  $d(N^{2^n - 4 + 1}) = 2$  et  $(N^{2^n - 4 + 1})^2 = \mathbb{F}_2$ .*



La preuve du lemme sera renvoyée à l'appendice B. Cette preuve donne en particulier :

COROLLAIRE 3.11. — *Soient deux entiers  $n > k \geq 1$ . On a :*

$$N^{2^n - 2^k - 2} = 0 \text{ et } N^{2^n - 2^k - 3} = J(2).$$

Le théorème suivant résume les travaux qu'on vient d'effectuer.

THÉORÈME 3.12. — *Étant donnés  $n > k \geq 2$ . Les modules  $N^{2^n - 2^k}$  sont triviaux. De plus on a :*

$$N^{2^n - 2^k + j} = \begin{cases} J(2^{k-1}) & \text{si } j = 1, \\ \bigoplus_{i=0}^{k-2} J(2^{k-1} - 2^i) & \text{si } j = 2. \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$N^{2^n - 2^k - j} = \begin{cases} J(1) & \text{si } j = 1, \\ 0 & \text{si } j = 2, \\ J(2) & \text{si } j = 3. \end{cases}$$

*Démonstration.* — D'après le lemme 3.10, il ne reste qu'à vérifier que

$$N^{2^n - 2^k + 2} = \bigoplus_{i=0}^{k-2} J(2^{k-1} - 2^i).$$

Il découle du corollaire 3.4 que le module  $N^{2^n - 2^k + 2}$  est l'enveloppe injective de  $\text{Ker}(\psi_{2^n - 2^k})$ . Ce module est déterminée par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ell^{2^n - 2^k}(F(1)) \longrightarrow \text{Coker}\left(\partial_n^{2^n - 2^k}\right) \longrightarrow \text{Ker}(\psi_{2^n - 2^k}) \longrightarrow 0.$$

Le module  $N^{2^n - 2^k + 2}$  est donc l'enveloppe injective du quotient  $J(2^{k-1})/\mathbf{H}_k$ . Il résulte du corollaire 3.9 que

$$N^{2^n - 2^k + 2} = \bigoplus_{i=0}^{k-2} J(2^{k-1} - 2^i).$$

Cela conclut le théorème.  $\square$

### 3.3. La périodicité de la partie nilpotente. —

NOTATION 3. — *Soient deux entiers  $n > k \geq 2$ . On note :*

$$e(n, k) = e_{n-2}e_{n-3} \dots e_k.$$

(Voir le théorème 2.7, page 8 pour la définition des éléments  $e_i$ ). Le cup-produit avec  $e(n, k)$  est un isomorphisme [FLS94]

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^0(I, I) \xrightarrow{\simeq e(n, k)} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^{2^n - 2^{k+1}}(I, I). \quad (6)$$

On note  $\gamma : I \hookrightarrow f(R^0)$  le morphisme qui représente  $e_0 \in \text{Ext}_{\mathcal{F}}^0(I, I)$  et  $\delta : I \rightarrow f(R^{2^n - 2^{k+1}})$  celui qui représente  $e(n, k) \in \text{Ext}_{\mathcal{F}}^{2^n - 2^{k+1}}(I, I)$ . Puisque  $(f(R^*), f(\partial^*))$  est une résolution injective dans  $\mathcal{F}$  du foncteur  $I$ , l'isomorphisme 6 signifie qu'il existe un morphisme  $\gamma_0 : f(R^0) \rightarrow f(R^{2^n - 2^{k+1}})$  tel que  $\delta = \gamma_0 \circ \gamma$ . Grâce à l'exactitude de la suite

$$I \hookrightarrow f(R^0) \rightarrow f(R^1) \rightarrow \dots \rightarrow f(R^n) \rightarrow \dots$$

et à l'injectivité des foncteurs  $f(R^i)$ , on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc}
I & \hookrightarrow & f(R^0) & \longrightarrow & f(R^1) & \longrightarrow & f(R^2) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & f(R^{2^k+1}) & \longrightarrow & f(R^{2^k+2}) \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 1 & & & & e_0 & & & & e_0 e_{k-1} & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
& & \gamma_0 & & \gamma_1 & & \gamma_2 & & & & \gamma_{2^k+1} & & \gamma_{2^k+2} \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & e(n, k) & & e(n, k)e_0 & & e(n, k)e_0 e_{k-1} & & & & e(n, k)e_0 e_{k-1} & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & f(R^{t_1}) & \longrightarrow & f(R^{t_1+1}) & \longrightarrow & f(R^{t_1+2}) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & f(R^{t+1}) & \longrightarrow & f(R^{t+2})
\end{array} \quad (7)$$

où  $t_1 = 2^n - 2^{k+1}$  et  $t = 2^n - 2^k$ . En appliquant le foncteur  $m$  à ce diagramme, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc}
F(1) & \hookrightarrow & R^0 & \longrightarrow & R^1 & \longrightarrow & R^2 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & R^{2^k+1} & \longrightarrow & R^{2^k+2} \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \alpha_0 & & \alpha_1 & & \alpha_2 & & & & \alpha_{2^k+1} & & \alpha_{2^k+2} \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & R^{t_1} & \longrightarrow & R^{t_1+1} & \longrightarrow & R^{t_1+2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & R^{t+1} & \longrightarrow & R^{t+2}
\end{array} \quad (8)$$

On remarque que pour  $0 \leq t \leq 2^{k-1} - 1$ , on a

$$H^{2^k+t}(R^\bullet, \partial_r^\bullet) = \ell^{2^k+t}(F(1)) = \ell^{2^n-2^k+t}(F(1)) = H^{2^n-2^k+t}(R^\bullet, \partial_r^\bullet).$$

Parce que, d'une part

$$\begin{aligned}
\left\langle [u^{2^i} \in R^{2^k+t}], 0 \leq i \leq r-1 \right\rangle &\cong \ell^{2^k+t}(F(1)) \\
&\cong \mathbf{H}_r \\
&\cong \ell^{2^n-2^k+t}(F(1)) \\
&\cong \left\langle [u^{2^i} \in R^{2^n-2^k+t}], 0 \leq i \leq r-1 \right\rangle
\end{aligned}$$

si  $t = 2^r(2l+1)$ , d'autre part si tel est le cas  $\alpha_{2^k+t}(u) = u$ , donc le morphisme  $\alpha_{2^k+t}$  induit l'isomorphisme

$$\ell^{2^k+t}(F(1)) \xrightarrow{\sim} \ell^{2^n-2^k+t}(F(1)).$$

**THÉOREME 3.13 (Périodicité).** — *Étant donné  $n > k \geq 2$  on a :*

$$N^{2^n-2^k+t} = N^{2^k+t}$$

pour tout  $0 \leq t \leq 2^{k-1} - 1$ .

*Démonstration.* — Comme les modules  $N^{2^n-2^k}$  et  $N^{2^k}$  sont triviaux<sup>(1)</sup>, on a

$$\begin{aligned} \text{Coker} \left( \partial_r^{2^k} \right) &\cong \text{Coker} \left( \partial^{2^k} \right) \\ \text{Coker} \left( \partial_r^{2^n-2^k} \right) &\cong \text{Coker} \left( \partial^{2^n-2^k} \right). \end{aligned}$$

Comme le module  $I^{2^n-2^k+1}$  est injectif, il existe  $\beta_{2^k+1} : I^{2^k+1} \rightarrow I^{2^n-2^k+1}$  qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} I^{2^k} & \xrightarrow{\partial^{2^k}} & \text{Coker} \left( \partial^{2^k} \right) & \hookrightarrow & I^{2^k+1} & \longrightarrow & R^{2^k+1} \\ \downarrow \alpha_{2^k} & & \downarrow \alpha_{2^k} & & \downarrow \exists \beta_{2^k+1} & & \downarrow \alpha_{2^k+1} \\ I^{2^n-2^k} & \xrightarrow{\partial^{2^n-2^k}} & \text{Coker} \left( \partial^{2^n-2^k} \right) & \hookrightarrow & I^{2^n-2^k+1} & \longrightarrow & R^{2^n-2^k+1} \end{array} \quad (9)$$

Parce que, d'une part

$$N^{2^k+1} = J(2^{k-1}) = N^{2^n-2^k+1}$$

et d'autre part

$$\partial^{2^k}(u) = x_{k-1} = \partial^{2^n-2^k}(u)$$

on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} N^{2^k+1} & \hookrightarrow & I^{2^k+1} & \longrightarrow & R^{2^k+1} \\ \parallel & & \downarrow \beta_{2^k+1} & & \downarrow \alpha_{2^k+1} \\ N^{2^n-2^k+1} & \hookrightarrow & I^{2^n-2^k+1} & \longrightarrow & R^{2^n-2^k+1} \end{array}$$

On démontrera qu'il existe des morphismes  $\beta_{2^k+t} : I^{2^k+t} \rightarrow I^{2^n-2^k+t}$  induisant les isomorphismes  $N^{2^n-2^k+t} = N^{2^k+t}$  par récurrence sur  $t$ .

1. Le cas  $t = 1$  a été vérifié précédemment.
2. Supposons qu'on a montré l'existence des morphismes  $\beta_{2^k+t}$  pour tout  $1 \leq t < m < 2^{k-1} - 1$ , on passe au cas  $t = m$ . Par hypothèse de récurrence on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} I^{2^k+m-2} & \xrightarrow{\partial^{2^k+m-2}} & I^{2^k+m-1} & \xrightarrow{\partial^{2^k+m-1}} & I^{2^k+m} \\ \downarrow \beta_{2^k+m-2} & & \downarrow \beta_{2^k+m-1} & & \downarrow \exists \beta_{2^k+m} \\ I^{2^n-2^k+m-2} & \xrightarrow{\partial^{2^n-2^k+m-2}} & I^{2^n-2^k+m-1} & \xrightarrow{\partial^{2^n-2^k+m-1}} & I^{2^n-2^k+m} \end{array}$$

1. Voir le lemme 3.10, page 20.



Parce que, d'une part, le module  $I^{2^n - 2^k + m}$  est injectif et que, d'autre part, les lignes du diagramme sont exactes, il existe un morphisme  $\beta_{2^k + m}$  faisant commuter le diagramme. Ce morphisme induit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \ell^{2^k + m - 2}(F(1)) & \hookrightarrow & \text{Coker} \left( \partial_n^{2^k + m - 2} \right) & \longrightarrow & \text{Ker} (\psi_{2^k + m - 2}) & \twoheadrightarrow & \ell^{2^k + m - 1}(F(1)) \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ \ell^{t-2}(F(1)) & \hookrightarrow & \text{Coker} \left( \partial_n^{t-2} \right) & \longrightarrow & \text{Ker} (\psi_{t-2}) & \twoheadrightarrow & \ell^{t-1}(F(1)) \end{array}$$

où  $t = 2^n - 2^k + m$ .

Il s'ensuit que  $N^{2^n - 2^k + m} = N^{2^k + m}$  et le théorème en découle.  $\square$

On remarque que la difficulté dans le calcul des modules  $N^i$  vient de la détermination des extensions  $\text{Ker} (\psi_{2^k + 1}) \in \text{Ext}_{\mathcal{U}}^1(\ell^{2^k + 2}(F(1)), \text{Coker}(\partial_n^{2^k + 1}))$ . Dans ce qui suit, on traitera deux cas dans lesquels ces extensions sont non-triviales.

**3.4. Le cas de  $N^{2^k + 3}$ ,  $k \geq 2$ .** — D'après le théorème 3.12, les modules  $N^{2^k}$ ,  $N^{2^k + 1}$  et  $N^{2^k + 2}$  sont déterminés. Cependant, la détermination de  $N^{2^k + 3}$  provoque plus de difficulté que ces derniers. Cela provient de la détermination de l'extension

$$0 \longrightarrow \text{Coker} \left( \partial_n^{2^k + 1} \right) \longrightarrow \text{Ker} (\psi_{2^k + 1}) \longrightarrow \ell^{2^k + 2}(F(1)) \longrightarrow 0.$$

Comme  $\ell^{2^k + 2}(F(1)) \cong H_1 = \Sigma\mathbb{F}_2$ , on a

$$\text{Ker} (\psi_{2^k + 1}) \in \text{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left( \Sigma\mathbb{F}_2, \text{Coker} \left( \partial_n^{2^k + 1} \right) \right).$$

En s'appuyant sur la résolution projectif minimale de  $\Sigma\mathbb{F}_2$ , on peut calculer le groupe  $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left( \Sigma\mathbb{F}_2, \text{Coker} \left( \partial_n^{2^k + 1} \right) \right)$  et en déduire que l'extension  $\text{Ker} (\psi_{2^k + 1})$  est non-triviale. Cela donne la première approche à la détermination des modules  $N^{2^k + 3}$ .

*3.4.1. Première approche.* —

LEMME 3.14. — *On a*

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left( H_1, \text{Coker} \left( \partial_n^{2^k + 1} \right) \right) = \mathbb{F}_2.$$

*Démonstration.* — Comme  $N^{2^k + 2}$  est injectif, la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \text{Im} \left( \partial_n^{2^k + 1} \right) \rightarrow N^{2^k + 2} \rightarrow \text{Coker} \left( \partial_n^{2^k + 1} \right) \rightarrow 0$$

implique l'isomorphisme

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left( \mathbf{H}_1, \mathrm{Coker} \left( \partial_n^{2^k+1} \right) \right) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^2 \left( \mathbf{H}_1, \mathrm{Im} \left( \partial_n^{2^k+1} \right) \right).$$

Il résulte de la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathbf{H}_k \hookrightarrow J(2^{k-1}) \rightarrow \mathrm{Im} \left( \partial_n^{2^k+1} \right) \rightarrow 0$$

qu'on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^2 \left( \mathbf{H}_1, \mathrm{Im} \left( \partial_n^{2^k+1} \right) \right) &\cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^3 \left( \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_k \right) \\ &\cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^3 \left( \Sigma \mathbb{F}_2, \mathbf{H}_k \right). \end{aligned}$$

Le lemme découle de la résolution projective de  $\mathbf{H}_1$  en remarquant que  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^3 \left( \Sigma \mathbb{F}_2, \mathbf{H}_k \right) \cong \mathbb{F}_2$ .  $\square$

PROPOSITION 3.15. — *Pour  $k \geq 2$  l'extension*

$$\mathrm{Ker} \left( \psi_{2^k+1} \right) \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left( \mathbf{H}_1, \mathrm{Coker} \left( \partial_n^{2^k+1} \right) \right)$$

*est non-triviale et l'enveloppe injective de  $\mathrm{Coker} \left( \partial_n^{2^k+1} \right)$  est celle de  $\mathrm{Ker} \left( \psi_{2^k+1} \right)$ .*

*Démonstration.* — On suppose par absurde que l'extension

$$\mathrm{Ker} \left( \psi_{2^k+1} \right) \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left( \mathbf{H}_1, \mathrm{Coker} \left( \partial_n^{2^k+1} \right) \right)$$

est triviale. Le module  $N^{2^k+3}$  contient donc  $J(1)$  comme un facteur direct. Il s'ensuit que

$$\mathbb{F}_2 \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}} \left( \Sigma \mathbb{F}_2, J(1) \right) \subset \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^k+3} \left( \Sigma \mathbb{F}_2, F(1) \right)$$

ce qui contredit la trivialité du groupe  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^k+3} \left( \Sigma \mathbb{F}_2, F(1) \right)$ . On note  $I_0$  l'enveloppe injective de  $\mathrm{Coker} \left( \partial_n^{2^k+1} \right)$  et  $I_1$  celle de  $\mathrm{Ker} \left( \psi_{2^k+1} \right)$ . On constate que  $I_0 \subset I_1$ . La suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathrm{Coker} \left( \partial_n^{2^k+1} \right) \rightarrow \mathrm{Ker} \left( \psi_{2^k+1} \right) \rightarrow \mathbf{H}_1 \rightarrow 0$$

montre que  $I_1 \subset I_0 \oplus \mathbf{H}_1$ . Compte tenu du fait que l'extension est non-triviale, cette inclusion n'est pas stricte. On en déduit que  $I_0 \cong I_1$ .  $\square$

COROLLAIRE 3.16. — *La suite*

$$N^{2^n-2^k+1} \xrightarrow{\partial_n^{2^n-2^k+1}} N^{2^n-2^k+2} \xrightarrow{\partial_n^{2^n-2^k+2}} N^{2^n-2^k+3}$$

*fournit trois premiers termes de la résolution injective minimale de  $\mathbf{H}_k$ .*

D'après le corollaire 3.9 on obtient donc :

COROLLAIRE 3.17. — *On a :*

$$N^{2^n - 2^k + 3} \cong J(2^{k-2}) \oplus \bigoplus_{\substack{0 \leq i \leq k-3 \\ 2 \leq j}} J(2^{k-1} - 2^i - 2^{i-j}).$$

3.4.2. *Deuxième approche.* — Puisqu'on ne connaît pas de résolution projective de  $\Sigma^n \mathbb{F}_2$  en général, la méthode précédente ne peut être généralisée. La méthode que l'on donne dans cette sous-section est basée sur la connaissance de la partie réduite  $(R^\bullet, \partial_r^\bullet)$  de la résolution injective minimale de  $F(1)$ , ce qui nécessite une traduction de la trivialité ou non-trivialité des extensions  $\text{Ker}(\psi_{2n+1})$ . Pour le confort du lecteur on énonce ci-dessous, *ab initio*, la traduction correspondante.

Soit  $k = 2^r(2d+1) - 1$ . Alors  $\text{Ker}(\psi_k) \in \text{Ext}_{\mathcal{U}}^1(F(1)/\Phi^r F(1), \text{Coker}(\partial_n^k))$  s'insère dans la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \text{Coker}(\partial_n^k) \xrightarrow{i} \text{Ker}(\psi_k) \xrightarrow{p} F(1)/\Phi^r F(1) \rightarrow 0.$$

Le module cyclique  $F(1)/\Phi^r F(1) = \langle u, u^2, \dots, u^{2^{r-1}} \rangle$  est engendré par l'image de  $u \in I_{(1)} \subset R^{k+1}$  via la flèche restreinte<sup>(2)</sup>  $R^{k+1} \xrightarrow{\omega^{k+1}} N^{k+2}$ . Comme le morphisme  $R^{k+1} \xrightarrow{\omega^{k+1}} N^{k+2}$  a pour l'image  $\text{Ker}(\psi_k) \hookrightarrow N^{k+2}$ , on peut noter  $[u] \in \text{Ker}(\psi_k)$  le pré-image  $\omega^{k+1}(u)$  de  $[u] \in F(1)/\Phi^r F(1)$  par abus de notation. Alors, l'extension  $\text{Ker}(\psi_k)$  est non-triviale si et seulement si il existe une opération de Steenrod  $\theta$  telle que  $i(v) = \theta[u]$  pour certaine classe  $v \in \text{Coker}(\partial_n^k)$ . Pour que  $\theta[u] = [\theta u]$  soit non-trivial,  $\theta$  doit être de la forme  $Sq^t \dots Sq^{2^{i+1}} Sq^{2^i}$  où  $t \geq r-1$ . Si tel est le cas,  $\theta[u] = [\theta u] = [u^{2^{t+1}}]$  est non-trivial, ce qui nécessite la non-trivialité de  $[u^{2^r}]$ . Alors :

PROPOSITION 3.18. — *Soit  $k = 2^r(2d+1) - 1$ . L'extension*

$$\text{Ker}(\psi_k) \in \text{Ext}_{\mathcal{U}}^1(F(1)/\Phi^r F(1), \text{Coker}(\partial_n^k))$$

*est non-triviale si et seulement si  $\omega^{k+1}(u^{2^r})$  est non-trivial.*

Dans ce qui suit, on montrera que  $\text{Ker}(\psi_{2^k+1})$  est non-triviale. On commence par le cas  $k = 3$ .

PROPOSITION 3.19. — *L'extension  $\text{Ker}(\psi_9)$  est non-triviale et alors on a l'identification  $N^{11} = J(2)$ .*

*Démonstration.* — Le module  $N^{12}$  est l'enveloppe injective de  $\text{Ker}(\psi_9)$ . Le dernier est une extension

$$0 \longrightarrow \text{Coker}(\partial_n^9) \longrightarrow \text{Ker}(\psi_9) \longrightarrow \ell^{10}(F(1)) \longrightarrow 0$$

2. Voir 1, page 6 pour la notation de  $\omega^{k+1}$ .

Le morphisme  $\partial_n^9$  est  $\bullet Sq^1 : J(4) \rightarrow J(3)$  donc  $\text{Coker}(\partial_n^9) \cong \Sigma^2 \mathbb{F}_2$ . Alors

$$\text{Ker}(\psi_9) \in \text{Ext}_{\mathcal{U}}^1(\Sigma \mathbb{F}_2, \Sigma^2 \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2.$$

Le module  $\text{Coker}(\partial_n^9) \cong \Sigma \mathbb{F}_2$  est engendré par image de  $x_0 x_1 \in J(3)$  et le module  $H_1$  est engendré par image de la classe  $u \in I_{(1)} \subset R^{10}$ . On constate que la suite

$$R^8 \xrightarrow{\partial_r^8} R^9 \xrightarrow{\partial_r^9} R^{10} \xrightarrow{\partial_r^{10}} R^{11}$$

coïncide<sup>(3)</sup> à la suite

$$I_{(1)} \xrightarrow{\partial_r^8} I_{(2)} \xrightarrow{\partial_r^9} I_{(1)} \oplus I_{(3,1)} \xrightarrow{\partial_r^{10}} I_{(4)}$$

en degrés majorés par 4. Par connectivité, on a  $\partial_r^{10}(u) = 0$  donc  $\partial_r^{10}(u^2)$  est trivial. En s'appuyant sur le fait que  $H_{10}^2(R^\bullet, \partial_r^\bullet) = 0$  on obtient  $r_9 \in R^9$  tel que  $\partial_r^9(r_9) = u^2$ . Parce que

$$\partial_r^9(Sq^1 r_9) = Sq^1 u^2 = 0,$$

il existe  $r_8 \in R^8$  tel que  $\partial_r^8(r_8) = Sq^1 r_9$ . Puisque  $Sq^1 r_9 \neq 0$ , alors  $r_8 \neq 0$  et donc  $r_8 = u^3 \in I_{(1)}$ . De plus, parce que  $\partial^8(u) = x_2 \in J(4)$ , on a  $\partial^8(u^4) = x_0^4$  et donc

$$\partial^8(r_8) = \partial^8(u^3) = x_1 x_0^2 + Sq^1 r_9.$$

Par conséquent

$$\partial^9(r_9) = u^2 + x_0 x_1.$$

Il en découle que dans  $\text{Ker}(\psi_9)$  on a  $Sq^1 u = u^2 = x_0 x_1$ . Il s'ensuit que l'extension  $\text{Ker}(\psi_9)$  est non-triviale et donc  $\text{Ker}(\psi_9) \cong J(2)$ .  $\square$

COROLLAIRE 3.20. — *L'extension*

$$0 \longrightarrow \text{Coker}(\partial_n^{2^k+1}) \longrightarrow \text{Ker}(\psi_{2^k+1}) \longrightarrow \ell^{2^k+2}(F(1)) \longrightarrow 0$$

est non-triviale.

*Démonstration.* — On remarque que la suite

$$N^{2^k+1} \xrightarrow{\partial_n^{2^k+1}} N^{2^k+2}$$

fournit les deux premiers termes de la résolution injective minimale de  $H_k$ . Pour  $k \geq 4$  le morphisme non-trivial  $H_k \rightarrow H_3$  donne le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_k & \longrightarrow & N^{2^k+1} & \xrightarrow{\partial_n^{2^k+1}} & N^{2^k+2} & \xrightarrow{\partial_n^{2^k+2}} & N^{2^k+3} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H_3 & \longrightarrow & N^9 & \xrightarrow{\partial_n^9} & N^{10} & \xrightarrow{\partial_n^{10}} & N^{11} \end{array}$$

3. Voir le lemme 2.19, page 11.

Il en résulte qu'il existe  $0 \neq m_{2^k+1} \in N^{2^k+2}$  et  $r_{2^k+1} \in R^{2^k+1}$  tel que

$$\partial^{2^k+1}(r_{2^k+1}) = u^2 + m_{2^k+1}.$$

L'extension  $\text{Ker}(\psi_{2^k+1})$  est donc non-triviale.  $\square$

**3.5. Le cas de  $N^{2^k+5}$ ,  $k \geq 3$ .** — Dans ce qui suit on va déterminer l'extension de  $\ell^{2^k+4}F(1)$  par  $\text{Coker}(\partial_n^{2^k+3})$  pour  $k \geq 3$ . La démonstration du lemme technique suivant est renvoyée à l'appendice B, page 39.

LEMME 3.21. — *Pour tous  $l < k$  on a*

$$\text{Ext}_u^1(\mathbb{H}_1, \text{Coker}(\partial_n^{2^k+1})) \cong \mathbb{F}_2 \cong \text{Ext}_u^1(\mathbb{H}_1, \text{Coker}(\partial_n^{2^l+1})).$$

LEMME 3.22. — *On note  $u$  le seule élément de degré 1 dans  $I_{(1)}$ . Il existe un élément non-trivial  $n_4 \in N^{2^k+4}$  tel que  $u^4 + n_4 \in \text{Im}(\partial^{2^k+3})$ .*

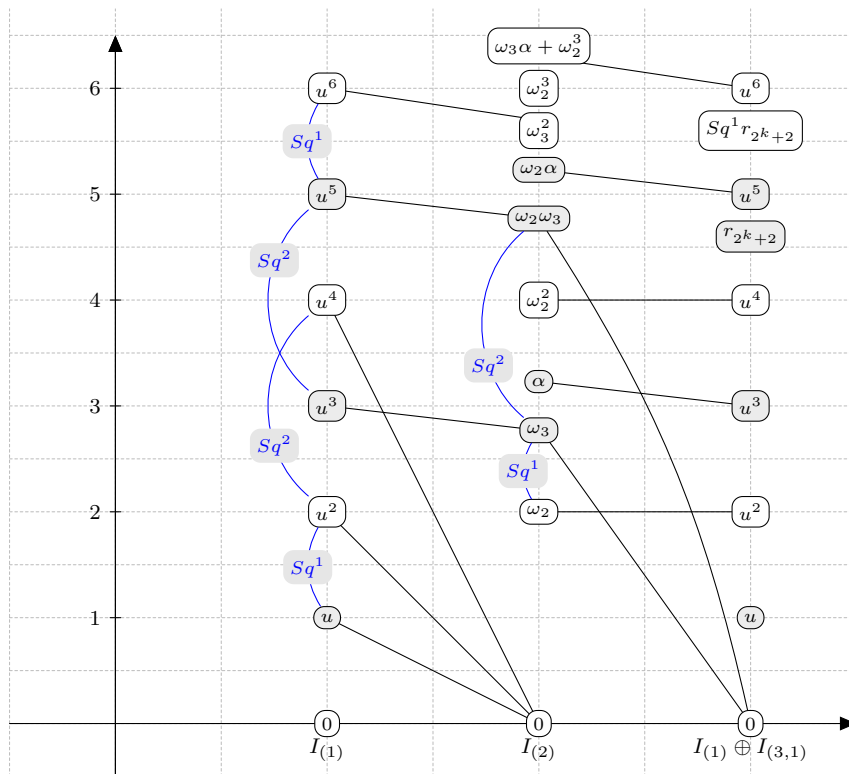
*Démonstration.* — On constate que  $H_{2^k+4}(R_\bullet) = \mathbb{H}_2$  donc  $H_{2^k+4}^4(R^\bullet) = 0$ . Compte tenu du fait que tous les modules injectifs réduits indécomposables sont 2-connexes sauf  $I_{(1)}$  et que  $I_{(1)}$  n'apparaît pas dans les modules  $R^{2^m+1}$ , on a  $\partial_r^{2^k+4}(u) = 0$  donc  $u^4 \in \text{Im}(\partial_r^{2^k+3})$ . Il existe alors  $r_{2^k+3} \in R^{2^k+3}$  tel que  $u^4 = \partial_r^{2^k+3}(r_{2^k+3})$ . Comme  $Sq^1 u^4 = 0$ , on déduit de  $H_{\bullet}^{2^k+1}(R^\bullet) = 0$  qu'il existe  $r_{2^k+2} \in R^{2^k+2}$  tel que  $Sq^1 r_{2^k+3} = \partial_r^{2^k+2}(r_{2^k+2})$ . De manière analogue, il existe  $r_{2^k+1} \in R^{2^k+1}$  et  $r_{2^k} \in R^{2^k}$  tel que

$$\begin{aligned} \partial_r^{2^k+1}(r_{2^k+1}) &= Sq^1 r_{2^k+2}, \\ \partial_r^{2^k}(r_{2^k}) &= Sq^1 r_{2^k+1}. \end{aligned}$$

Comme  $r_{2^k+3}$  est la seule classe non nul dans  $I_{(4)}^4$  alors  $Sq^1 r_{2^k+3} \neq 0$  et donc  $r_{2^k+2} \neq 0$ . Les deux seules éléments de degré 5 dans  $I_{(1)} \oplus I_{(3,1)} \subset R^{2^k+2}$  ne sont pas annihilés par  $Sq^1$  donc  $Sq^1 r_{2^k+2} \neq 0$  d'où  $r_{2^k+1} \neq 0$ . Afin de calculer  $Sq^1 r_{2^k+1}$ , on doit avoir la description de  $I_{(2)}$  dans les bas degrés. Celle-ci provient du fait que  $\mathbb{F}_2 \oplus I_{(2)} \subset H^*B((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus 2}) \cong \mathbb{F}_2[u, v]$  est un module libre de rang 2 sur l'algèbre de Dickson  $D(2) \cong \mathbb{F}_2[\omega_2, \omega_3] \subset \mathbb{F}_2[u, v]$ , où  $|\omega_2| = 2, |\omega_3| = 3$  tels que  $\omega_2 = u^2 + uv + v^2$ ,  $Sq^1 \omega_2 = \omega_3$  et  $Sq^2 \omega_3 = \omega_2 \cdot \omega_3$ . Ses deux générateurs sont 1 de degré 0 et  $\alpha = u^3 + u^2v + v^3$  de degré 3.

$$\begin{aligned} I_{(2)}^1 &= 0, & I_{(2)}^2 &= \langle \omega_2 \rangle, & I_{(2)}^3 &= \langle \omega_3, \alpha \rangle, \\ I_{(2)}^4 &= \langle \omega_2^2 \rangle, & I_{(2)}^5 &= \langle \omega_2 \omega_3, \omega_2 \alpha \rangle, & I_{(2)}^6 &= \langle \omega_3^2, \omega_3^3, \omega_3 \alpha \rangle. \end{aligned}$$

Puisque  $H_{2^n-2^k}(R_\bullet) = \mathbb{H}_k$ , le morphisme  $I_{(1)} \rightarrow I_{(2)} \rightarrow I_{(1)} \oplus I_{(3,1)}$  est explicité en bas degrés :



On en déduit que  $r_{2^k+1} \in \langle \omega_2^3, \omega_3\alpha \rangle$ . Comme  $Sq^1$  agit librement sur  $\langle \omega_2^3, \omega_3\alpha \rangle$  alors  $Sq^1 r_{2^k+1} \neq 0$ . Il s'ensuit que  $r_{2^k} = u^7$ . On a des suite exactes

$$0 \rightarrow H_k \rightarrow N^{2^k+1} \xrightarrow{\partial_n^{2^k+1}} N^{2^k+2} \xrightarrow{\partial_n^{2^k+2}} N^{2^k+3}$$

Si  $l < k$  la surjection  $H_k \rightarrow H_l, u \mapsto u$  entraîne le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H_k & \longrightarrow & N^{2^k+1} & \xrightarrow{\partial_n^{2^k+1}} & N^{2^k+2} & \xrightarrow{\partial_n^{2^k+2}} & N^{2^k+3} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \gamma_{2^k+1} & & \downarrow \gamma_{2^k+2} & & \downarrow \gamma_{2^k+3} \\
 0 & \longrightarrow & H_l & \longrightarrow & N^{2^l+1} & \xrightarrow{\partial_n^{2^l+1}} & N^{2^l+2} & \xrightarrow{\partial_n^{2^l+2}} & N^{2^l+3}
 \end{array} \tag{10}$$

Le morphisme  $\text{Ext}_U^1(H_1, \text{Coker}(\partial_n^{2^k+1})) \rightarrow \text{Ext}_U^1(H_1, \text{Coker}(\partial_n^{2^l+1}))$  est isomorphe d'après le lemme 3.21. Il s'ensuit qu'il existe le morphisme  $\gamma_{2^k+4}$

qui fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{Coker}(\partial_n^{2^k+1}) & \hookrightarrow & \text{Ker}(\psi_{2^k+1}) & \hookrightarrow & N^{2^k+3} & \xrightarrow{\frac{N^{2^k+3}}{\text{Ker}(\psi_{2^k+1})}} & N^{2^k+4} \\
\downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\text{Coker}(\partial_n^{2^l+1}) & \hookrightarrow & \text{Ker}(\psi_{2^l+1}) & \hookrightarrow & N^{2^l+3} & \xrightarrow{\frac{N^{2^l+3}}{\text{Ker}(\psi_{2^l+1})}} & N^{2^l+4} \\
& & & & & & \exists \gamma_{2^k+4}
\end{array}$$

Le diagramme ci-dessous est donc commutatif.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbf{H}_k & \longrightarrow & N^{2^k+1} & \xrightarrow{\partial_n^{2^k+1}} & N^{2^k+2} & \xrightarrow{\partial_n^{2^k+2}} & N^{2^k+3} & \xrightarrow{\partial_n^{2^k+3}} & N^{2^k+4} \\
& & \downarrow & & \downarrow \gamma_{2^k+1} & & \downarrow \gamma_{2^k+2} & & \downarrow \gamma_{2^k+3} & & \downarrow \gamma_{2^k+4} \\
0 & \longrightarrow & \mathbf{H}_l & \longrightarrow & N^{2^l+1} & \xrightarrow{\partial_n^{2^l+1}} & N^{2^l+2} & \xrightarrow{\partial_n^{2^l+2}} & N^{2^l+3} & \xrightarrow{\partial_n^{2^l+3}} & N^{2^l+4}
\end{array} \tag{11}$$

On montre d'abord qu'il existe  $0 \neq n_{20} \in N^{20}$  tel que  $u^4 + n_{20} \in \text{Im}(\partial^{19})$ . Il résulte du diagramme 11 qu'il existe  $0 \neq n_{2^k+4} \in N^{2^k+4}$  tel que  $u^4 + n_{2^k+4} \in \text{Im}(\partial^{2^k+4})$ .

On constate que  $\partial^{16}(u^7) = Sq^1 r_{17} + x_0^6 x_1$  donc

$$\partial^{17}(Sq^1 r_{17}) = \partial_n^{17}(x_0^6 x_1) = x_0^7 = Sq^1(x_0^5 x_1).$$

Il s'ensuit que  $\partial^{17}(r_{17}) = Sq^1 r_{18} + x_0^5 x_1$ . De manière similaire, on a

$$\begin{aligned}
\partial^{18}(r_{18}) &= Sq^1 r_{19} + x_0^4 x_1 \\
\partial^{19}(r_{18}) &= u^4 + x_0^3 x_1.
\end{aligned}$$

On en déduit que l'extension de  $\ell^{20}(F(1))$  par  $\text{Coker}(\partial_n^{19})$  est non trivial et donc l'extension de  $\ell^{2^k+4}(F(1))$  par  $\text{Coker}(\partial_n^{2^k+3})$  l'est aussi.  $\square$

On donne ci-dessous les description de  $N^i$  pour  $20 \leq i \leq 24$ .

PROPOSITION 3.23. — *On a*

$$\begin{aligned} N^{20} &= J(5), & \partial_n^{20} &= \bullet Sq^1 \\ N^{21} &= J(4), & \partial_n^{21} &= \bullet Sq^1 \\ N^{22} &= J(3), & \partial_n^{22} &= \bullet Sq^1 \\ N^{23} &= J(2), & \partial_n^{23} &= 0 \\ N^{24} &= 0. \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Il résulte du corollaire 3.4 que  $N^{20}$  est l'enveloppe injective de  $\text{Ker}(\psi_{18})$ . Puisque  $\text{Ker}(\psi_{18}) \cong \text{Coker}(\delta)$  où

$$\delta := \ell^{18}(F(1)) \hookrightarrow \text{Coker} \left( J(7) \oplus J(6) \xrightarrow{\begin{pmatrix} \bullet Sq^1 & 0 \\ \bullet(Sq^2 Sq^1) & \bullet Sq^2 \end{pmatrix}} J(6) \oplus J(4) \right)$$

donc  $\text{Ker}(\psi_{18}) \cong \Sigma^5 \mathbb{F}_2$  alors on a bien  $N^{20} \cong J(5)$ .

Le morphisme  $\partial_n^{19} : N^{19} \rightarrow N^{20}$  est  $(\bullet Sq^1, 0)^t$  donc  $\text{Coker}(\partial_n^{19}) \cong \Sigma^4 \mathbb{F}_2$ . Comme  $\text{Ker}(\psi_{19})$  est une extension non-triviale dans

$$\text{Ext}_{\mathbb{U}}^1(\ell^{20}(F(1)), \text{Coker}(\partial_n^{19})) \cong \text{Ext}_{\mathbb{U}}^1(\mathbb{H}_2, \Sigma^4 \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2$$

. on obtient  $\text{Ker}(\psi_{19}) \cong \mathbb{H}_3$ . En tant que l'enveloppe injective de  $\text{Ker}(\psi_{19})$ , le module  $N^{21}$  est isomorphe à  $J(4)$ .

De manière similaire on obtient  $N^{22} = J(3)$ ,  $N^{23} = J(2)$  et  $N^{24} = 0$ .  $\square$

Cette proposition, combiné avec la proposition 2.21 permet de conclure le théorème suivant :

THÉORÈME 3.24. — *Le tableau suivant montre les calculs de la partie  $N^\bullet$  de la résolution injective minimale de  $F(1)$  pour  $k \leq 47$ .*

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7
$N^k$	0	0	0	$J(1)$	0	$J(2)$	0	$J(1)$
$k$	8	9	10	11	12	13	14	15
$N^k$	0	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$	0	$J(2)$	0	$J(1)$
$k$	16	17	18	19	20	21	22	23
$N^k$	0	$J(8)$	$J\left(\frac{7}{6}\right)$	$J\left(\frac{6}{4}\right)$	$J(5)$	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$
$k$	24	25	26	27	28	29	30	31
$N^k$	0	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$	0	$J(2)$	0	$J(1)$
$k$	32	33	34	35	36	37	38	39
$N^k$	0	$J(16)$	$J\left(\frac{15}{14}\right)$	$J\left(\frac{14}{12}\right)$	?	?	?	?
$k$	40	41	42	43	44	45	46	47
$N^k$	?	$J(8)$	$J\left(\frac{7}{6}\right)$	$J\left(\frac{6}{4}\right)$	$J(5)$	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$



Plus généralement, pour  $n \geq 6$  on a :

$k$	$2^n - 23$	$2^n - 22$	$2^n - 21$	$2^n - 20$	$2^n - 19$	$2^n - 18$
$N^k$	$J(8)$	$J\left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$	$J\left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$	$J(5)$	$J(4)$	$J(3)$
$k$	$2^n - 17$	$2^n - 16$	$2^n - 15$	$2^n - 14$	$2^n - 13$	$2^n - 12$
$N^k$	$J(2)$	0	$J(8)$	$J\left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$	$J\left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$	$J(5)$
$k$	$2^n - 11$	$2^n - 10$	$2^n - 9$	$2^n - 8$	$2^n - 7$	$2^n - 6$
$N^k$	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$	0	$J(4)$	$J(3)$
$k$	$2^n - 5$	$2^n - 4$	$2^n - 3$	$2^n - 2$	$2^n - 1$	$2^n$
$N^k$	$J(2)$	0	$J(2)$	0	$J(1)$	0
$k$	$2^n + 1$	$2^n + 2$	$2^n + 3$	$2^n + 4$	$2^n + 5$	$2^n + 6$
$N^k$	$J(2^{n-1})$	$J\left(\begin{smallmatrix} 2^{n-1}-1 \\ 2^{n-1}-2 \\ \vdots \\ 2^{n-1}-2^{n-3} \end{smallmatrix}\right)$	$J(2^{n-2}) \oplus A_{2^n+3}$	?	?	?

$A_{2^n+3}$  désignant

$$\bigoplus_{\substack{0 \leq i \leq n-2 \\ 2 \leq j}} J(2^n - 2^i - 2^{i-j}).$$

La proposition 2.21 donne :

THÉOREME 3.25. — Soient  $n > k \geq 6$  et  $-22 \leq t \leq 2$ . Si  $l = 2^n - 2^k + t$  ou  $l \leq 47$  alors le morphisme :

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^l(\Phi^r F(1), F(1)) \hookrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^l(\Phi^{r+1} F(1), F(1))$$

est injectif pour tout  $r$ .

#### 4. La torsion de Frobenius

Rappelons que  $\mathcal{P}_d$  désigne la catégorie des foncteurs polynomiaux stricts homogènes de degré  $d$ . La catégorie  $\mathcal{P}$  des foncteurs polynomiaux stricts est la somme directe  $\bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{P}_d$ . Soient  $F_1, F_2$  deux objets de  $\mathcal{P}_d$ . Selon [FS97, théorème 3.13] le morphisme  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_d}^*(F_1, F_2) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{2d}}^*(F_1^{(1)}, F_2^{(1)})$ , induit par la torsion de Frobenius, est injectif. On désigne par  $\mathcal{F}$  la catégorie des foncteurs de la catégorie des  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels de dimension finie dans la catégorie des  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels. Parce que  $F \cong F^{(1)}$  pour tout  $F \in \mathcal{F}$ , le morphisme  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F_1, F_2) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F_1^{(1)}, F_2^{(1)})$  est aussi injectif. Puisque le foncteur oubli  $\mathcal{O} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}$  se factorise à travers  $\mathcal{U}$  via le foncteur  $\bar{m}$ , chaque morphisme naturel

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^*(F_1, F_2) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\mathcal{O}(F_1), \mathcal{O}(F_2))$$

se factorise à travers  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\bar{m}(F_1), \bar{m}(F_2))$  :

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^*(F_1, F_2) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\bar{m}(F_1), \bar{m}(F_2)) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\mathcal{O}(F_1), \mathcal{O}(F_2)).$$

D'après [FFPS03, proposition 1.4], le morphisme

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^*(F_1, F_2) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\mathcal{O}(F_1), \mathcal{O}(F_2))$$

est injectif. Il en résulte que  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^*(F_1, F_2) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\bar{m}(F_1), \bar{m}(F_2))$  est un monomorphisme.

On peut alors établir le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^*(F_1^{(r-1)}, F_2^{(r-1)}) & \xleftarrow{\mathrm{Ext}^*(\bar{m}, \bar{m})} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\bar{m}(F_1^{(r-1)}), \bar{m}(F_2^{(r-1)})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^*(F_1^{(r)}, F_2^{(r)}) & \xleftarrow{\mathrm{Ext}^*(\bar{m}, \bar{m})} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\bar{m}(F_1^{(r)}), \bar{m}(F_2^{(r)})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}^*(F_1^{(r+1)}, F_2^{(r+1)}) & \xleftarrow{\mathrm{Ext}^*(\bar{m}, \bar{m})} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\bar{m}(F_1^{(r+1)}), \bar{m}(F_2^{(r+1)})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \vdots & & \vdots \end{array} \quad (12)$$

Ceci amène à poser :

QUESTION 2. — *Les morphismes que l'on appelle morphismes à la Frobenius*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\bar{m}(F_1^{(r-1)}), \bar{m}(F_2^{(r-1)})) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\bar{m}(F_1^{(r)}), \bar{m}(F_2^{(r)})), \quad (\mathrm{Frob}\text{-}\mathcal{U})$$

*sont-ils injectifs ?*

QUESTION 3. — *Est-il vrai que, pour tous modules instables  $M$  et  $N$ , les morphismes*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r M, \Phi^r N) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^{r+1} M, \Phi^{r+1} N) \quad (\mathrm{Frob}\text{-general}\text{-}\mathcal{U})$$

*sont injectifs ?*

Ces questions n'admettent pas de réponses positives à priori. Cela sera justifié dans le paragraphe suivant. Toutefois :

THÉORÈME 4.1. — *Soient  $n > k \geq 6$  et  $-22 \leq t \leq 2$ . Si  $l = 2^n - 2^k + t$  ou  $l \leq 47$  alors le morphisme :*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^l(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)) \hookrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^l(\Phi^{r+1} F(1), \Phi^{r+1} F(1))$$

*est injectif pour tout  $r$ .*

**4.1. La preuve du théorème.** — Faute d'espace pour les grands diagrammes, dans la suite on utilisera parfois la notation

$$\mathrm{Ex}_{s,m}^i := \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^i(\Phi^r M, \Phi^s F(1)).$$

On note ainsi

$$\mathrm{H}_r = F(1)/\Phi^r F(1).$$

Rappelons que le module  $\Phi M$  se concentre en degrés pairs et  $(\Phi M)^{2n} \cong M^n$ . Le morphisme canonique  $\lambda_M : \Phi M \rightarrow M$  est défini par la formule  $\lambda_M(x) = Sq^{|x|}x$  et récursivement on définit  $\lambda_M^k := \lambda_M \circ \Phi(\lambda_M^{k-1}) : \Phi^k M \rightarrow M$  pour  $k \geq 2$ . On rappelle ainsi qu'un module instable  $M$  est connexe si il est nul en degré 0.

**PROPOSITION 4.2.** — *Soient  $M$  un module instable connexe et  $r$  un nombre entier. Alors le morphisme  $\lambda_{F(1)}^r$  induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r M, \Phi^r F(1)) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r M, F(1)).$$

De plus, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r M, \Phi^r F(1)) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r M, F(1)) \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi, \Phi) \downarrow & & \downarrow (\lambda_{\Phi^r M})^* \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^{r+1} M, \Phi^{r+1} F(1)) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^{r+1} M, F(1)) \end{array} \quad (13)$$

*Démonstration.* — La suite exacte courte

$$0 \rightarrow \Phi^r F(1) \rightarrow F(1) \rightarrow \mathrm{H}_r \rightarrow 0$$

induit la suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow \mathrm{Ex}_{r,r}^i(M) \rightarrow \mathrm{Ex}_{r,1}^i(M) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^i(\Phi^r M, \mathrm{H}_r) \rightarrow \mathrm{Ex}_{r,r}^{i+1}(M) \rightarrow \cdots$$

Puisque  $M$  est connexe, la connectivité de  $\Phi^r M$  est supérieur à  $2^r - 1$ . D'autre part,  $(\mathrm{H}_r)^t = 0$  pour  $t > 2^r - 1$  donc d'après [Cuo14b, lemme 1.1.4.30] il existe une résolution injective  $(I^n, \partial^n)_{0 \leq n \leq 2^r - 1}$  de  $\mathrm{H}_r$  telle que  $(I^n)^t = 0$  pour tout  $n$  et tout  $t > 2^r - 1$ . Il s'ensuit que  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r M, \mathrm{H}_r) = 0$ . On en déduit que

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r M, \Phi^r F(1)) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r M, F(1)).$$

Pour démontrer la commutativité du diagramme (13), il suffit de démontrer que le morphisme  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r M, \Phi^r F(1)) \xrightarrow{\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi, \Phi)} \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^{r+1} M, \Phi^{r+1} F(1))$  fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r M, \Phi^r F(1)) & & \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi, \Phi) \downarrow & \searrow (\lambda_{\Phi^r M})^* & \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^{r+1} M, \Phi^{r+1} F(1)) & \xrightarrow{(\lambda_{\Phi^r F(1)})_*} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^{r+1} M, \Phi^r F(1)) \end{array} \quad (14)$$

En effet, supposons que le diagramme (14) commute alors celui de (13) se décompose en trois diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r M, \Phi^r F(1)) & \xrightarrow{(\lambda_{F(1)}^r)_*} & & \xrightarrow{} & \text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r M, F(1)) \\
\downarrow \text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi, \Phi) & \searrow (\lambda_{\Phi^r M})^* & & & \downarrow (\lambda_{\Phi^r M})^* \\
& & \text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^{r+1} M, \Phi^r F(1)) & & \\
& \nearrow (\lambda_{\Phi^r F(1)})_* & \searrow (\lambda_{F(1)}^r)_* & & \\
\text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^{r+1} M, \Phi^{r+1} F(1)) & \xrightarrow{(\lambda_{F(1)}^{r+1})_*} & & \xrightarrow{} & \text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^{r+1} M, F(1))
\end{array}$$

Par conséquent le lemme est démontré. Il ne reste alors qu'à démontrer la commutativité du diagramme (14).

On note  $(P_j^r, \partial_j^r)$  une résolution projective de  $\Phi^r M$  et  $(P_j^{r+1}, \partial_j^{r+1})$  celle de  $\Phi^{r+1} M$ . Puisque le morphisme  $\lambda_N : \Phi N \rightarrow N$  est naturel en  $N$ , le morphisme  $\lambda_{\Phi^r M} : \Phi^{r+1} M \rightarrow \Phi^r M$  induit un morphisme  $f_{\bullet} : \Phi P_{\bullet}^r \rightarrow P_{\bullet}^r$  des complexes. D'autre part, puisque les modules  $P^j$  sont projectifs, l'identité  $id_{\Phi^{r+1} M}$  induit aussi un morphisme des complexes  $g_{\bullet} : P_{\bullet}^{r+1} \rightarrow \Phi P_{\bullet}^r$ . Il suit que le morphisme  $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r M, \Phi^r F(1)) \xrightarrow{(\lambda_{\Phi^{r+1} M})^*} \text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r M, \Phi^r F(1))$  est induit par le composé  $f_{\bullet} \circ g_{\bullet}$ .

Puisque le morphisme  $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi, \Phi)$  est induit par le morphisme composé  $(g_{\bullet})^* \circ \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi, \Phi)$ , le composé  $(\lambda_{\Phi^r F(1)})_* \circ \text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi, \Phi)$  est induit par  $(\lambda_{\Phi^r F(1)})_* \circ (g_{\bullet})^* \circ \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi, \Phi)$ . Il suffit de démontrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\text{Hom}_{\mathcal{U}}(P_{\bullet}^r, \Phi^r F(1)) & \xrightarrow{(f_{\bullet} \circ g_{\bullet})^*} & \text{Hom}_{\mathcal{U}}(P_{\bullet}^{r+1}, \Phi^r F(1)) \\
\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi, \Phi) \downarrow & & \uparrow (\lambda_{\Phi^r F(1)})_* \\
\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi P_{\bullet}^r, \Phi^{r+1} F(1)) & \xrightarrow{(g_{\bullet})^*} & \text{Hom}_{\mathcal{U}}(P_{\bullet}^{r+1}, \Phi^{r+1} F(1))
\end{array}$$

Cela résulte de ce que pour chaque morphisme  $h_{\bullet} : P_{\bullet}^r \rightarrow \Phi^r F(1)$  le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc}
P_{\bullet}^{r+1} & \xrightarrow{g_{\bullet}} & \Phi P_{\bullet}^r & \xrightarrow{\Phi h_{\bullet}} & \Phi^{r+1} F(1) \\
& \searrow f_{\bullet} \circ g_{\bullet} & \downarrow \lambda_{P_{\bullet}^r} & & \downarrow \lambda_{\Phi^r F(1)} \\
& & P_{\bullet}^r & \xrightarrow{h_{\bullet}} & \Phi^r F(1)
\end{array}$$

La commutativité du digramme (14) suit.  $\square$

A l'aide de la proposition 4.2, on se ramène à étudier  $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r M, F(1))$  ou encore la résolution injective minimale du module  $F(1)$  au lieu des groupes

$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r M, \Phi^r F(1))$  dès que  $M$  est connexe. Ainsi, l'étude sur l'injectivité des morphismes  $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi, \Phi)$  sera remplacée par celle des morphismes  $(\lambda_{\Phi^{n-1}M})^*$ . Le théorème 4.1 est donc une conséquence directe du théorème 3.25.

**COROLLAIRE 4.3.** — *Soit  $M$  un module instable connexe. Il existe un isomorphisme entre les co-limites*

$$\text{colim}_n \text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^n M, F(1)) \cong \text{colim}_n \text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^n M, \Phi^n F(1)),$$

la première provient de la suite  $(\text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^n M, F(1)), (\lambda_{\Phi^{n-1}M})^*)$  et la deuxième provient de la suite  $(\text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^{n-1}M, \Phi^{n-1}F(1)), \text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi, \Phi))$ . De plus les morphismes  $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi, \Phi)$  sont des monomorphismes si et seulement si  $(\lambda_{\Phi^{n-1}M})^*$  les sont.

**4.2. Contre-exemple.** — On aimerait que le morphisme  $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi, \Phi)$  soit injectif en général. Cependant, ce n'est pas le cas :

**CONTRE-EXEMPLE 1.** — *Il existe un entier  $i$  tel que le morphisme  $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^5(\Phi, \Phi) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{U}}^5(\Phi^i(F(1) \otimes F(1)), \Phi^i(F(1))) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{U}}^5(\Phi^{i+1}(F(1) \otimes F(1)), \Phi^{i+1}(F(1)))$  n'est pas injectif.*

On va maintenant justifier ce contre-exemple. Dans un premier temps, on montre que  $\text{colim}_n \text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^n(F(1) \otimes F(1)), F(1)) = 0$ . Par contre, dans un deuxième temps on va vérifier que  $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^5(F(1) \otimes F(1), F(1)) \cong \mathbb{F}_2$ . Alors il existe  $i$  tel que  $(\lambda_{\Phi^i(F(1) \otimes F(1))})^*$  n'est pas injectif. Au cas contraire :

$$\mathbb{F}_2 \subset \text{colim}_n \text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^n(F(1) \otimes F(1)), F(1)),$$

ce qui contredit la trivialité de  $\text{colim}_n \text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^n(F(1) \otimes F(1)), F(1))$ .

Selon [HLS93, NS14], on sait calculer  $\text{colim}_n \text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^n M, F(1))$  :

**THÉORÈME 4.4.** — *Soit  $n$  un entier. Le morphisme*

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^n M, F(1)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(f(M), I),$$

naturel en  $M$ , induit l'isomorphisme

$$\text{colim}_n \text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^n M, F(1)) \cong \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(f(M), I)$$

naturel en  $M$ .

De plus, d'après [FLS94] on a

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(f(F(1) \otimes F(1)), I) = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(I \otimes I, I) = 0,$$

donc :

$$\text{colim}_n \text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^n(F(1) \otimes F(1)), F(1)) = 0.$$

Les groupes  $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^n(F(1) \otimes F(1)), F(1))$  doivent être nuls si on suppose que  $(\lambda_{\Phi^{n-1}(F(1) \otimes F(1))})^*$  est injectif. Cependant :

LEMME 4.5. — *On a un isomorphisme*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^5(F(1) \otimes F(1), F(1)) \cong \mathbb{F}_2.$$

*Démonstration.* — La suite exacte courte

$$0 \rightarrow F(2) \rightarrow F(1) \otimes F(1) \rightarrow \Lambda^2(F(1)) \rightarrow 0,$$

et la projectivité de  $F(2)$  donnent les isomorphismes

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^i(\Lambda^2(F(1)), F(1)) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^i(F(1) \otimes F(1), F(1))$$

pour  $i \geq 2$ . Il résulte de la résolution injective minimale de  $\Lambda^2(F(1))$  [Cuo14b, corollaire 1.1.4.17] qu'on a

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^5(\Lambda^2(F(1)), F(1)) \cong \mathbb{F}_2.$$

Il en découle que  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^5(F(1) \otimes F(1), F(1)) \cong \mathbb{F}_2$ . □

### 4.3. Conjecture. —

NOTATION 4. — *Soient  $d$  un entier pair et  $2^{n_1} + \dots + 2^{n_k}$  son expression 2-adique. On note :*

$$v(d) = 1 + n_k - k.$$

THÉORÈME 4.6. — *Pour  $d = 2^n - t$ , où  $n \geq 5$  et  $-16 \leq t \leq 2$ , on a :*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^d(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2 \nmid d, \\ 0 & \text{si } 2 \mid d \text{ et } r < v(d), \\ \mathbb{F}_2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*De plus, il y a des monomorphismes*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^d(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)) \hookrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^d(\Phi^{r+1} F(1), \Phi^{r+1} F(1)).$$

On peut donc conjecturer :

CONJECTURE 4.7. — *Soit  $d$  un entier, on a :*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^d(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2 \nmid d, \\ 0 & \text{si } 2 \mid d \text{ et } r < v(d), \\ \mathbb{F}_2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*De plus, il y a des monomorphismes*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^d(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)) \hookrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^d(\Phi^{r+1} F(1), \Phi^{r+1} F(1))$$

*pour tout  $r$ .*

**Appendice A**  
**Sur la conjecture**

On montre dans ce paragraphe le résultat suivant, ce qui soutient la conjecture 4.7 :

THÉORÈME A.1. — *Soit  $d$  un entier pair, on a :*

$$\mathbb{F}_2 \subset \text{Ext}_{\mathcal{U}}^d(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)) \text{ si } r \geq v(d).$$

*De plus si  $r \geq v(d)$  le morphisme*

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^d(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^d(I, I)$$

*est non-trivial.*

LEMME A.2. — *Soient  $k \geq 0$  et  $n \geq 1$  deux entiers. Il y a des isomorphismes naturels :*

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^n}(\Phi^{n+k} F(1), \Phi^{n+k+1} F(1)) \xrightarrow{(\lambda_{\Phi^{n+k} F(1)})_*} \text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^n}(\Phi^{n+k} F(1), \Phi^{n+k} F(1)).$$

*Démonstration.* — La suite exacte courte

$$0 \rightarrow \Phi^{n+k+1} F(1) \rightarrow \Phi^{n+k} F(1) \rightarrow \Sigma^{2^{n+k}} \mathbb{F}_2 \rightarrow 0$$

induit la suite exacte :

$$\begin{array}{ccc} 0 = \text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^n-1}(\Phi^{n+k} F(1), \Sigma^{2^{n+k}} \mathbb{F}_2) & & \\ \downarrow & & \\ \text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^n}(\Phi^{n+k} F(1), \Phi^{n+k+1} F(1)) & \xrightarrow{\sim} & \text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^n}(\Phi^{n+k} F(1), \Phi^{n+k} F(1)) \\ & & \downarrow \\ & & \text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^n}(\Phi^{n+k} F(1), \Sigma^{2^{n+k}} \mathbb{F}_2) = 0 \end{array}$$

Le lemme en découle. □

*Démonstration du théorème A.1.* — Le cas de  $d = 2^n$  a été calculé à l'aide du lemme 2.21. En effet  $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^n}(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)) \cong \mathbb{F}_2$  pour tout  $r$  tel que  $r \geq n$ . On raisonne par récurrence sur la longueur 2-adique de  $d$ . On suppose que le théorème est vérifié pour  $d$  dont  $\alpha(d) < k$ . On passe au cas de  $\alpha(d) = k$ . On note  $d = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_k}$  où  $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k$ . On désigne par  $d_1$  la somme  $2^{n_2} + \dots + 2^{n_k}$ . Pour  $r \geq v(d)$  le diagramme suivant est donc

commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{\mathcal{U}}^{d_1}(\Phi^r F(1), F(1)) & \xrightarrow{\sim \delta_{n_1}} & \text{Ext}_{\mathcal{U}}^d(\Phi^{r-1} F(1), F(1)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Ext}_{\mathcal{F}}^{d_1}(I, I) & \xrightarrow{\sim e_{n_1}} & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^d(I, I) \end{array}$$

$\delta_{n_1}$  désignant le générateur du groupe  $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^{n_1}}(\Phi^{r-1} F(1), \Phi^r F(1))$ . Par hypothèse de récurrence, le composé

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^{d_1}(\Phi^r F(1), F(1)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^{d_1}(I, I) \xrightarrow{\sim e_{n_1}} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^d(I, I)$$

est non-trivial. On en déduit que  $\mathbb{F}_2 \subset \text{Ext}_{\mathcal{U}}^d(\Phi^{r-1} F(1), F(1))$  et que le morphisme

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^d(\Phi^r F(1), F(1)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^{d_1}(I, I)$$

est non-trivial.  $\square$

## Appendice B

### La vérification des lemmes techniques

*Démonstration du lemme 3.2.* — Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \xrightarrow{\partial_n^{k-2}} & N^{k-1} & \xrightarrow{\partial_n^{k-1}} & N^k & \xrightarrow{\partial_n^k} & N^{k+1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \xrightarrow{\partial^{k-2}} & I^{k-1} & \xrightarrow{\partial^{k-1}} & I^k & \xrightarrow{\partial^k} & I^{k+1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \xrightarrow{\partial_r^{k-2}} & R^{k-1} & \xrightarrow{\partial_r^{k-1}} & R^k & \xrightarrow{\partial_r^k} & R^{k+1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

entraîne la suite exacte

$$0 = H^k(I^\bullet, \partial^\bullet) \rightarrow H^k(R^\bullet, \partial_r^\bullet) \rightarrow \text{Coker}(\partial_n^k) \rightarrow \text{Coker}(\partial^k) \rightarrow \text{Coker}(\partial_r^k) \rightarrow 0$$

D'après le corollaire 2.3, on a  $H^k(R^\bullet, \partial_r^\bullet) \cong \ell^k(F(1))$ . Le morphisme  $\varphi_{2k+1}$  est défini comme la flèche

$$\text{Ker}(\partial_r^{2k+2}) / \text{Im}(\partial_r^{2k+1}) \hookrightarrow R^{2k+2} / \text{Im}(\partial_r^{2k+1}).$$



Le module

$$\text{Coker}(\varphi_{2k+1}) \cong R^{2k+2} / \text{Ker}(\partial_r^{2k+2}),$$

est un sous module de  $R^{2k+3}$ , et est donc réduct. Dans la mesure où le composé

$$\text{Coker}(\partial_n^{2k+1}) \rightarrow \text{Coker}(\partial_r^{2k+1}) \xrightarrow{\psi_{2k+1}} \text{Coker}(\varphi_{2k+1})$$

est nul, on a l'inclusion  $\alpha : \text{Coker}(\partial_n^{2k+1}) \hookrightarrow \text{Ker}(\psi_{2k+1})$ . Par ailleurs, le composé

$$\text{Ker}(\psi_{2k+1}) \rightarrow \text{Coker}(\partial_r^{2k+1}) \rightarrow \text{Coker}(\partial_n^{2k+1}) \rightarrow \text{Coker}(\varphi_{2k+1})$$

est aussi trivial donc on obtient un morphisme  $\text{Ker}(\psi_{2k+1}) \xrightarrow{\beta} \ell^{2k+2}(F(1))$  qui rend commutatif le diagramme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \text{Coker}(\partial_n^{2k+1}) \\
 & & & & \swarrow \alpha \\
 & & & \text{Ker}(\psi_{2k+1}) & \swarrow i \\
 & & \beta & \downarrow i_1 & \\
 \ell^{2k+2}(F(1)) & \xleftarrow{\beta} & & \text{Coker}(\partial_r^{2k+1}) & \\
 & \searrow \varphi_{2k+1} & & \downarrow \psi_{2k+1} & \\
 & & \text{Coker}(\partial_r^{2k+1}) & & \text{Coker}(\varphi_{2k+1}) \\
 & & \swarrow p & & \\
 & & & \downarrow p_1 & \\
 & & & \text{Coker}(\varphi_{2k+1}) & 
 \end{array}$$

Il nous reste à démontrer que la suite

$$0 \rightarrow \text{Coker}(\partial_n^{2k+1}) \xrightarrow{\alpha} \text{Ker}(\psi_{2k+1}) \xrightarrow{\beta} \ell^{2k+2}(F(1)) \rightarrow 0 \quad (15)$$

est exacte.

**La surjectivité de  $\beta$  :** Compte tenu du fait que  $p \circ i = 0$  et que  $\varphi_{2k+1}$  est injectif, on a  $\beta \circ \alpha = 0$ . Soit  $x \in \ell^{2k+2}(F(1))$ , il existe  $y \in \text{Coker}(\partial_r^{2k+1})$  tel que  $p(y) = \varphi_{2k+1}(x)$ . Puisque

$$\psi(y) = p_1 \circ p(y) = p_1 \circ \varphi_{2k+1}(x) = 0,$$

il existe  $z \in \text{Ker}(\psi_{2k+1})$  tel que  $i_1(z) = y$ . Il s'ensuit que  $x - \beta(z) \in \text{Ker}(\varphi_{2k+1}) = 0$ . On en déduit que  $\beta$  est surjectif.

**L'exactitude de la suite 15 :** Soit  $u \in \text{Ker}(\beta)$ . Comme  $p \circ i_1(u) = 0$ , il y a  $v \in \text{Coker}(\partial_n^{2k+1})$  tel que  $i(v) = i_1(u)$ . La différence  $u - \alpha(v)$  appartient alors au noyau de  $i_1$ . Il en résulte que  $\alpha(v) = u$ . On conclut l'exactitude de la suite.

Le lemme en découle.  $\square$

*Démonstration du lemme 3.10.* — Rappelons que pour chaque  $k \geq 1$ , la suite suivante

$$0 \rightarrow \ell^k(F(1)) \rightarrow \text{Coker}(\partial_n^k) \rightarrow \text{Ker}(\psi_k) \rightarrow \ell^{k+1}(F(1)) \rightarrow 0$$

est exacte. De plus, le module  $N^{k+2}$  est l'enveloppe injective<sup>(4)</sup> de  $\text{Ker}(\psi_k)$ .

1. On calcule d'abord les  $N^i$  pour  $i \leq 5$  :

(a) Puisque  $F(1) \cong \ell(F(1))$ ,  $F(1)$  est *Nil*-fermé. Alors on a  $N^0 = N^1 = 0$ .

(b) Puisque  $\text{Ker}(\psi_0) = 0$ , en tant que son enveloppe injective,  $N^2 = 0$ .

(c) Selon les calculs précédents, on a

$$\text{Ker}(\psi_1) \cong \ell^2(F(1)) \cong J(1).$$

Le module  $J(1)$  est lui-même injectif donc  $N^3 = J(1)$ .

(d) Comme  $\ell^2(F(1)) \cong J(1)$ , alors  $\text{Ker}(\psi_2) = 0$ . Il en résulte que  $N^4 = 0$ .

(e) Puisque  $\text{Ker}(\psi_3) = \ell^4(F(1)) \cong J(2)$ , on a  $N^5 = J(2)$ .

2. Afin de démontrer le lemme, on utilise un raisonnement de récurrence triple. On initialise le lemme sur  $n$ , ensuite sur  $k$  et éventuellement sur  $m$ . Les calculs précédents justifient les premiers cas de  $n$ . Supposons que le lemme est vrai pour  $n > \alpha$ . On montre qu'il est encore vrai pour  $n = \alpha$ . On raisonne de nouveau par récurrence sur  $k$ .

(a) Pour  $k = \alpha - 1$ , on a  $2^\alpha - 2^{\alpha-1} = 2^{\alpha-1}$ . Pour démontrer ce premier cas de  $k$ , on raisonne par récurrence sur  $m$ .

(i) Par l'hypothèse de récurrence sur  $n$ , on a  $N^{2^{\alpha-1}-1} = J(1)$ .

Bien plus,  $N^{2^{\alpha-1}-2} = 0$  donc  $\text{Coker}(\partial_n^{2^{\alpha-1}-2}) = J(1)$ .

Puisque  $\ell^{2^{\alpha-1}-2}(F(1)) = J(1)$ , alors le module  $\text{Ker}(\psi_{2^{\alpha-1}-2})$  est trivial. En tant que son enveloppe injective,  $N^{2^{\alpha-1}}$  est aussi trivial. Le module  $N^{2^{\alpha-1}+1}$  est l'enveloppe injective de  $\text{Ker}(\psi_{2^{\alpha-1}-1})$ . Ce dernier est isomorphe à  $H_{\alpha-1}$  alors on a  $N^{2^{\alpha-1}+1} \cong J(2^{\alpha-2})$ . Comme le module  $\text{Ker}(\psi_{2^{\alpha-1}})$  s'insère dans la suite exacte courte

$$0 \rightarrow H_{\alpha-1} \rightarrow J(2^{\alpha-2}) \rightarrow \text{Ker}(\psi_{2^{\alpha-1}}) \rightarrow 0$$

on a  $d(\text{Ker}(\psi_{2^{\alpha-1}})) = 2^{\alpha-2} - 1$  et  $(\text{Ker}(\psi_{2^{\alpha-1}}))^{2^{\alpha-2}-1} = \mathbb{F}_2$ .

Pour cette raison, on obtient

$$N^{2^{\alpha-1}+2} = J(2^{\alpha-1} - 1) \oplus \left( \bigoplus_{m_\beta < 2^{\alpha-1}-1} J(m_\beta) \right).$$

4. Voir le corollaire 3.4, page 16.

Il en découle que

$$\begin{aligned} d\left(\text{Coker}\left(\partial_n^{2^{\alpha-1}+1}\right)\right) &= 2^{\alpha-2} - 2 \\ \left(\text{Coker}\left(\partial_n^{2^{\alpha-1}+1}\right)\right)^{2^{\alpha-2}-2} &= \mathbb{F}_2. \end{aligned}$$

(ii) On suppose que :

$$\begin{aligned} d\left(N^{2^\alpha-2^{\alpha-1}+m}\right) &= 2^{\alpha-2} - m + 1, \\ \left(N^{2^\alpha-2^{\alpha-1}+m}\right)^{2^{\alpha-2}-m+1} &= \mathbb{F}_2, \\ d\left(\text{Coker}\left(\partial_n^{2^{\alpha-1}+m-1}\right)\right) &= 2^{\alpha-2} - m, \\ \left(\text{Coker}\left(\partial_n^{2^{\alpha-1}+m-1}\right)\right)^{2^{\alpha-2}-m} &= \mathbb{F}_2. \end{aligned}$$

pour  $2 \leq m < t \leq 2^{\alpha-2}$ . On passe à  $t$ .

Le module  $\text{Ker}(\psi_{2^{\alpha-1}+t-2})$  est déterminé par la suite exacte  $\ell^{2^{\alpha-1}+t-2}(F(1)) \hookrightarrow \text{Coker}\left(\partial_n^{2^{\alpha-1}+t-2}\right) \rightarrow \text{Ker}(\psi_{2^{\alpha-1}+t-2}) \rightarrow \ell^{2^{\alpha-1}+t-1}(F(1))$ .

Par l'hypothèse de récurrence sur  $m$ , on a

$$\begin{aligned} d\left(\text{Coker}\left(\partial_n^{2^{\alpha-1}+t-2}\right)\right) &= 2^{\alpha-2} - t + 1, \\ \left(\text{Coker}\left(\partial_n^{2^{\alpha-1}+t-2}\right)\right)^{2^{\alpha-2}-t+1} &= \mathbb{F}_2. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$d(\text{Ker}(\psi_{2^{\alpha-1}+t-2})) = 2^{\alpha-2} - t + 1 \text{ et } (\text{Ker}(\psi_{2^{\alpha-1}+t-2}))^{2^{\alpha-2}-t+1} = \mathbb{F}_2.$$

Il s'ensuit que

$$N^{2^{\alpha-1}+t} = J(2^{\alpha-1} - t + 1) \oplus \left( \bigoplus_{m_\beta < 2^{\alpha-1}-t+1} J(m_\beta) \right)$$

et donc

$$d\left(\text{Coker}\left(\partial_n^{2^{\alpha-1}+t-1}\right)\right) = 2^{\alpha-2} - t, \text{ et } \left(\text{Coker}\left(\partial_n^{2^{\alpha-1}+t-1}\right)\right)^{2^{\alpha-2}-t} = \mathbb{F}_2.$$

Cela conclut la récurrence sur  $m$  et donc vérifie le cas  $k = \alpha - 1$ .

(b) Supposons qu'on a montré le lemme pour  $k > \alpha - i \geq 1$ , on passe à  $k = \alpha - i$ . On constate que  $2^\alpha - 2^{\alpha-i+1} + 2^{\alpha-i} - 1 = 2^\alpha - 2^{\alpha-i} - 1$ . Par l'hypothèse de récurrence sur  $k$ , on a

$$d\left(N^{2^\alpha-2^{\alpha-i}-1}\right) = 2 \text{ et } \left(N^{2^\alpha-2^{\alpha-i}-1}\right)^2 = \mathbb{F}_2.$$

Il s'ensuit que  $N^{2^\alpha - 2^{\alpha-i} - 1} = J(2) \oplus \left( \bigoplus_{\gamma} J(1) \right)$ . Puisque  $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^\alpha - 2^{\alpha-i} - 1}(\Sigma\mathbb{F}_2, F(1)) = 0$ , le module  $N^{2^\alpha - 2^{\alpha-i} - 1}$  contient aucune copie de  $J(1)$ . Or  $N^{2^\alpha - 2^{\alpha-i} - 1} = J(2)$  et il en découle que

$$\text{Coker} \left( \partial_n^{2^\alpha - 2^{\alpha-i} - 2} \right) = \Sigma\mathbb{F}_2.$$

Comme  $\ell^{2^\alpha - 2^{\alpha-i} - 2}(F(1)) = \Sigma\mathbb{F}_2$ , alors on a  $\text{Ker}(\psi_{2^\alpha - 2^{\alpha-i} - 2}) = 0$ . Il en découle que  $N^{2^\alpha - 2^{\alpha-i}} = 0$ . Par ailleurs, on a

$$\text{Coker} \left( \partial_n^{2^\alpha - 2^{\alpha-i} - 1} \right) \cong H_{2^\alpha - 2^{\alpha-i}}(N^\bullet, \partial_n^\bullet) = 0.$$

Il s'ensuit que

$$\text{Ker}(\psi_{2^\alpha - 2^{\alpha-i} - 1}) \cong \ell^{2^\alpha - 2^{\alpha-i}}(F(1)) \cong H_{\alpha-i}.$$

Or  $N^{2^\alpha - 2^{\alpha-i} + 1} = J(2^{\alpha-i-1})$  d'où

$$d \left( N^{2^\alpha - 2^{\alpha-i} + 1} \right) = 2^{\alpha-i-1} \text{ et } \left( N^{2^\alpha - 2^{\alpha-i} + 1} \right)^{2^{\alpha-i-1}} = \mathbb{F}_2.$$

De manière analogue que celle du cas  $k = \alpha - 1$  on a

$$d \left( N^{2^\alpha - 2^{\alpha-i} + m} \right) = 2^{\alpha-i-1} - m + 1 \text{ et } \left( N^{2^\alpha - 2^{\alpha-i} + m} \right)^{2^{\alpha-i-1} - m + 1} = \mathbb{F}_2,$$

pour  $2 \leq m \leq 2^{\alpha-i-1}$ . Cela conclut la récurrence sur  $k$ .

Le lemme en résulte.  $\square$

*Démonstration du lemme 3.21.* — La suite exacte courte

$$0 \rightarrow N^{2^k+1} / \mathbb{H}_k \rightarrow N^{2^k+2} \rightarrow \text{Coker} \left( \partial_n^{2^k+1} \right) \rightarrow 0$$

induit l'isomorphisme

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^1 \left( \mathbb{H}_1, \text{Coker} \left( \partial_n^{2^k+1} \right) \right) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{U}}^2 \left( \mathbb{H}_1, N^{2^k+1} / \mathbb{H}_k \right).$$

On constate que

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}}^2 \left( \mathbb{H}_1, N^{2^k+1} / \mathbb{H}_k \right) \cong \text{Ext}_{\mathcal{U}}^3 \left( \mathbb{H}_1, \mathbb{H}_k \right) \cong \mathbb{F}_2$$

dans la mesure où  $N^{2^k+1}$  est injectif. On remarque ainsi que si  $l < k$ , la surjection  $\mathbb{H}_k \rightarrow \mathbb{H}_l, u \mapsto u$  entraîne le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{H}_k & \longrightarrow & N^{2^k+1} & \xrightarrow{\partial_n^{2^k+1}} & N^{2^k+2} & \xrightarrow{\partial_n^{2^k+2}} & N^{2^k+3} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{H}_l & \longrightarrow & N^{2^l+1} & \xrightarrow{\partial_n^{2^l+1}} & N^{2^l+2} & \xrightarrow{\partial_n^{2^l+2}} & N^{2^l+3} \end{array}$$

puisque la première ligne du diagramme fournit les termes de la résolution injective minimale de  $H_k$  et la deuxième ligne fournit ceux de la résolution injective minimale de  $H_l$ . On obtient donc le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1\left(H_1, \mathrm{Coker}\left(\partial_n^{2^k+1}\right)\right) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^2\left(H_1, N^{2^k+1}/H_k\right) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^3\left(H_1, H_k\right) \\ \downarrow & & \downarrow \sim & & \parallel \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1\left(H_1, \mathrm{Coker}\left(\partial_n^{2^l+1}\right)\right) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^2\left(H_1, N^{2^l+1}/H_l\right) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^3\left(H_1, H_l\right) \end{array}$$

Il en résulte que le morphisme

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1\left(H_1, \mathrm{Coker}\left(\partial_n^{2^k+1}\right)\right) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^1\left(H_1, \mathrm{Coker}\left(\partial_n^{2^l+1}\right)\right)$$

est un isomorphisme.  $\square$

#### BIBLIOGRAPHIE

- [Cuo14a] N. T. CUONG – « On Hai’s functor  $\bar{m}_d : \mathcal{P}_d \rightarrow \mathcal{U}$  », *ArXiv e-prints* (2014).
- [Cuo14b] N. T. CUONG – « Algèbre homologique dans la catégorie des modules instables », Thèse, Université Paris 13, 2014.
- [FFPS03] V. FRANJOU, E. M. FRIEDLANDER, T. PIRASHVILI & L. SCHWARTZ – *Rational representations, the Steenrod algebra and functor homology*, Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses], vol. 16, Société Mathématique de France, Paris, 2003.
- [FLS94] V. FRANJOU, J. LANNES & L. SCHWARTZ – « Autour de la cohomologie de Mac Lane des corps finis », *Invent. Math.* **115** (1994), no. 3, p. 513–538.
- [FS97] E. M. FRIEDLANDER & A. SUSLIN – « Cohomology of finite group schemes over a field », *Invent. Math.* **127** (1997), no. 2, p. 209–270.
- [Hai10] N. D. H. HAI – « Foncteurs polynomiaux stricts et modules instables sur l’algèbre de Steenrod », *J. Algebra* **324** (2010), no. 4, p. 860–874.
- [HLS93] H.-W. HENN, J. LANNES & L. SCHWARTZ – « The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects », *Amer. J. Math.* **115** (1993), no. 5, p. 1053–1106.
- [LS89] J. LANNES & L. SCHWARTZ – « Sur la structure des  $A$ -modules instables injectifs », *Topology* **28** (1989), no. 2, p. 153–169.
- [NS14] T. C. NGUYEN & L. SCHWARTZ – « Some finiteness results in the category  $\mathcal{U}$  », *ArXiv e-prints* (2014).

- [Sch94] L. SCHWARTZ – *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1994.
- [Tou13] A. TOUZÉ – « A functorial control of integral torsion in homology », *ArXiv e-prints* (2013).