



HAL
open science

La théorie des Würfe de von Staudt Une irruption de l'algèbre dans la géométrie pure

Philippe Nabonnand

► **To cite this version:**

Philippe Nabonnand. La théorie des Würfe de von Staudt Une irruption de l'algèbre dans la géométrie pure. *Archive for History of Exact Sciences*, 2008, 62, pp.201-242. 10.1007/s00407-007-0013-7 . hal-01082945

HAL Id: hal-01082945

<https://hal.science/hal-01082945>

Submitted on 14 Nov 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La théorie des *Würfe* de von Staudt – Une irruption de l’algèbre dans la géométrie pure

Philippe Nabonnand

27 juin 2009

Table des matières

1	Introduction	2
2	Steiner	4
2.1	La théorie des formes projectives de Steiner	4
2.2	La théorie des coniques de Steiner	7
3	La <i>Geometrie der Lage</i>	10
3.1	Les formes fondamentales	11
3.2	La notion de correspondances projectives entre formes de von Staudt	12
3.3	La théorie des coniques de von Staudt	14
4	Les formes élémentaires et les involutions	17
5	Le calcul des jets	20
5.1	Les jets	20
5.2	L’addition des jets	21
5.3	La multiplication des jets	24
6	La valeur numérique des jets et la déduction des coordonnées	27
6.1	La notion de valeur d’un jet	27
6.2	La déduction des coordonnées	29

7	Les éléments imaginaires et le calcul des jets	31
7.1	Les différentes catégories d'éléments imaginaires	31
7.2	La généralisation de la définition des jets et des opérations sur les jets	34
7.3	Puissances de jets et l'introduction des nombres complexes	34
8	La réception de la théorie des jets	36

1 Introduction

La théorie des jets de von Staudt est un peu oubliée en histoire des mathématiques. C'est surprenant dans la mesure où il s'agit d'une des premières tentatives de définir des opérations sur des entités autres que des nombres, des segments ou des angles. En 1847, von Staudt publie un premier traité de géométrie, *Geometrie der Lage* ([Staudt, 1847]) dans lequel il développe une théorie géométrique fondée sur les propriétés d'incidence des points, des droites et de l'espace. A la suite de Steiner, il organise son exposé autour de l'étude des relations projectives entre les diverses formes géométriques fondamentales (ponctuelles, faisceaux de rayons ou de plans, systèmes plans, gerbes). Il obtient ainsi une caractérisation des coniques et des surfaces du II. ordre comme les courbes ou les surfaces doubles de relations projectives particulières, les *polarités*. La théorie des pôles et polaires devient un chapitre de l'étude des relations projectives entre formes géométriques et ne dépend pas comme dans les exposés de ses prédécesseurs, en particulier Poncelet et Steiner, de la notion de conique. De plus, la théorie des coniques de Steiner se révèle n'être qu'une conséquence de celle de von Staudt et donc ne dépendant pas de la notion de mesure ; en montrant ainsi qu'il obtient l'essentiel des théories de Steiner sans faire appel à des considérations de mesure, von Staudt réalise ainsi un des objectifs de son programme.

Une dizaine d'années après *Geometrie der Lage*, von Staudt publie trois exposés supplémentaires sous le titre de *Beiträge zur Geometrie der Lage* ([Staudt, 1856, 1857, 1860]) dans lesquels il introduit entre autres la théorie des jets (*Würfe*) et la géométrie des éléments imaginaires. Certes, l'algèbre des jets est construite en montrant son analogie avec celle des nombres mais en même temps, von Staudt insiste sur le caractère purement géométrique de la notion de jet et de leurs opérations. La mise en correspondance entre les deux algèbres s'effectue par l'intermédiaire de la notion de valeur d'un jet dont von Staudt précise la dépendance par rapport à la notion de mesure. Il retrouve ainsi la notion de birapport qui était au fondement de la définition de relation projective chez Steiner. En subordonnant le concept de birapport à l'algèbre des jets et en reléguant sa présentation dans des paragraphes qui «doivent être considérés comme des annexes puisqu'ils présupposent la notion de grandeur»¹, von Staudt affirme la plus grande cohérence de son point de vue : la théorie est développée en n'utilisant

1. „Die fünf letzten §§. sind, da sie den Begriff der Grösse voraussetzen, als Anhang zu betrachten.“ [Staudt, 1857, IV]

que des propriétés d'incidence; tout emprunt à des considération de mesure est écarté et les notions comme celle de birapport qui en dépendent procèdent de concepts purement géométriques. En même temps, il réalise un autre aspect de son programme : organiser le corpus des énoncés géométriques à partir de considérations générales qui seules peuvent donner «un aperçu d'ensemble de la science sans lequel la compréhension correcte des théorèmes particuliers et de leurs relations avec les autres théorèmes n'est pas complètement possible»². En particulier, Von Staudt déduit de la notion de valeur des jets celle d'abscisse; ainsi, alors que ses prédécesseurs considéraient les points de vue analytique et synthétique comme deux approches différentes et indépendantes de la géométrie³, von Staudt déduit de la subordination de la notion d'abscisse à celle de jet que le point de vue de la géométrie analytique dépend tant systématiquement que pédagogiquement de celui de la géométrie de situation.

L'outil fondamental mis en œuvre par von Staudt pour définir les opérations sur les jets et en montrer les propriétés est la notion d'*involution*; cette notion apparaît comme une classe particulière de relations projectives entre formes : deux formes projectives sont en situation involutive lorsque leurs éléments se correspondent doublement. L'addition et la multiplication des jets sont définies en considérant des involutions particulières; les démonstrations des propriétés de ces opérations dépendent pour la plupart d'un lemme concernant les points doubles des involutions. C'est un trait caractéristique du style de démonstration de von Staudt; la considération des points doubles des relations projectives est à l'origine de la démonstration du théorème fondamental de la géométrie projective; de même, celle des éléments doubles des polarités est le point essentiel de sa théorie des coniques et des surfaces du II. ordre et celle des relations involutives entre formes est le fondement de la théorie des jets mais aussi de la géométrie des éléments imaginaires.

Si Lüroth reprend et développe le point de vue de von Staudt en utilisant les mêmes méthodes, Hessenberg, Veblen et Young fondent leur algèbre des points d'une ponctuelle en reprenant la définition plus classique de l'involution comme un ensemble de six points obtenus en intersectant les six côtés d'un quadrangle complet par une droite. Leurs démonstrations ne s'appuient plus sur la considération de relations projectives entre formes ce qui se comprend historiquement puisque leur recherche est postérieure à la discussion sur le théorème fondamental de la géométrie projective et l'axiome de continuité.

L'ambition de cet article est d'exposer la théorie des jets dans le contexte du programme géométrique de von Staudt et de souligner l'originalité de son style de démonstration : en ramenant tous les problèmes à la considération de relations projectives entre formes, von Staudt n'utilise pas seulement de manière systématique un nouvel outil; il met au centre des préoccupations du géomètre la notion de relation géométrique.

2. „[...] denjenigen Ueberblick über die Wissenschaft gewinnen, ohne welchen das rechte Verständniss der einzelnen Sätze und ihrer Beziehung zum Ganzen nicht wohl möglich ist.“ [Staudt, 1847, IV]

3. Poncelet, Steiner ou Chasles définissent la géométrie synthétique comme celle qui s'interdit d'utiliser la méthode des coordonnées.

2 Steiner

2.1 La théorie des formes projectives de Steiner

Le titre du traité de géométrie de Steiner [1832], *Développement systématique de la dépendance mutuelle des figures géométriques eu égard aux travaux des géomètres anciens et contemporains sur les porismes, les méthodes projectives, la géométrie de position, les transversales, la dualité et la réciprocité, etc.*⁴ annonce l'ambition de l'auteur : exposer et organiser de manière systématique le corpus de la géométrie ancienne et moderne. Dans la préface, Steiner précise que son travail est structuré autour d'un certain nombre de propriétés fondamentales de l'espace qui renferment à ses yeux le «germe de tous les théorèmes, porismes et problèmes de la géométrie»⁵. Il se propose de trouver un fil directeur et une origine commune à toutes ces théories qui sont séparées les unes des autres. Ainsi, on aura un aperçu général de l'organisation des théorèmes et en même temps, «on pourra porter un regard plus libre sur la particularité de chacun d'eux et sa place par rapport aux autres théorèmes»⁶. Pour Steiner, il ne s'agit donc pas simplement de rassembler des énoncés sans les organiser ; bien au contraire, Steiner affirme en préalable la certitude de l'existence d'un certain nombre de propriétés simples autour desquelles se développeraient les théories géométriques et à partir desquelles les théorèmes seraient déduits :

En s'appropriant convenablement les quelques relations fondamentales, on se rend maître de la totalité du sujet ; l'ordre pénètre dans le chaos, et on voit comment toutes les parties sont naturellement liées entre elles, comment elles s'alignent dans le plus bel ordre et comment celles qui ont des affinités se combinent en des groupes bien délimités.⁷

Pour Steiner, le but de la géométrie, qu'on l'aborde synthétiquement ou analytiquement, est de comprendre les dépendances entre les figures et en même temps de découvrir comment les propriétés se conservent lorsqu'on envisage des figures de plus en plus complexes. Pour cela, il faut déterminer quels sont les éléments et leurs relations à partir desquels on pourra appréhender la manière de procéder de la «Nature» pour «conférer aux figures une infinité de propriétés le plus économiquement et le plus simplement possible»⁸. Puis, une fois déterminés les éléments et les relations fondamentales de la géométrie, il convient de circonscrire des théories autour de ces relations.

4. *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit Geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität, und Reciprocität, etc.*

5. „[...] nach solchen räumlichen Fundamenteigenschaften, die den Keim aller Sätze, Porismen und Aufgaben der Geometrie [...], in sich enthalten.“ [Steiner, 1832, I-3]

6. „[...] ein freierer Blick in das Besondere eines jeden und seiner Stellung zu den übrigen geworfen werden kann.“ [Steiner, 1832, I-3]

7. „Durch gehörige Aneignung der wenigen Grundbeziehungen macht man sich zum Herrn des ganzen Gegenstandes; es tritt Ordnung in das Chaos ein, und man sieht, wie alle Theile naturgemäss in einander greifen, in schönster Ordnung sich in Reihen stellen, und verwandte zu wohlbegrenzten Gruppen sich vereinigen.“ [Steiner, 1832, I-4]

8. „[...] um mit möglichster Sparsamkeit und auf die einfachste Weise den Figuren unzählig viele Eigenschaften [zu] verleihen [...]“ [Steiner, 1832, I-4]

Les éléments primitifs nécessaires à la géométrie, que Steiner n'essaie pas de définir, sont l'espace, le plan, la droite et le point. La théorie de Steiner se développe à partir d'une description des relations existant entre ces éléments et de la détermination de certaines combinaisons entre ceux-ci constituant des formes fondamentales. Steiner définit ainsi la *droite* vue comme support d'une infinité de points, le *faisceau plan de rayons*, le *faisceau de plans* et le *faisceau de rayons dans l'espace*. L'objet premier de la géométrie n'est plus l'étude des propriétés des figures mais celle des relations entre ces formes fondamentales. La recherche des propriétés des figures est subordonnée tant dans l'exposé général que dans la formulation des problèmes aux relations entre formes fondamentales. Dans un premier temps, lorsque Steiner parle de formes projectives, il considère une droite et un faisceau plan de rayons. Puis, il étend sa définition au cas de deux ou plusieurs droites projectives et à celui de deux ou plusieurs faisceaux de rayons. Steiner termine la première étape de son analyse de la notion de formes projectives en étendant la définition de celle-ci au cas des faisceaux de plans.⁹ Steiner commence par relier les rayons d'un faisceau et les points d'une droite en associant à chaque rayon le point d'intersection de celui-ci et de la droite.¹⁰ Steiner définit cette situation en disant que les deux formes sont projectives et en *position perspective*. Par contre, si une fois établie la correspondance entre les éléments des deux formes, celles-ci changent de positions relatives (sans que la position de leurs éléments à l'intérieur de celles-ci soit modifiée), on dit que les deux formes sont projectives et en *position oblique*. La notion de *formes projectives* est relative à la correspondance qui s'établit entre les éléments des deux formes lorsqu'elles sont en perspective : une droite et un faisceau plan de rayons sont dits projectifs s'ils peuvent être déplacés et amenés en position perspective c'est-à-dire de telle manière que chaque rayon du faisceau soit en correspondance avec son intersection avec la droite.

Lorsque les formes sont en perspective, des considérations géométriques simples permettent à Steiner de montrer que si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et a, b, c, d sont quatre points de la droite et quatre rayons du faisceau respectivement correspondants, alors :

$$\frac{\alpha\delta}{\beta\delta} : \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} = \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)} : \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}.$$

Bien entendu, cette propriété se conserve lorsque les formes projectives sont en position oblique. Steiner ne considère pas des quantités signées (les quantités associées aux segments sont positives de même que les sinus). Pour pallier cette difficulté, il signale que la donnée de quatre points sur une droite ou celle de quatre droites concourantes donne lieu selon les appariements

$$[(\alpha, \beta), (\gamma, \delta)], [(\alpha, \gamma), (\beta, \delta)], [(\alpha, \delta), (\beta, \gamma)]$$

9. Steiner ne distingue pas explicitement les formes de première espèce, celles de seconde espèce et celles de troisième espèce. Par contre, lorsqu'il met en place la notion de formes projectives, il procède par étape : il définit cette notion d'abord pour les formes de première espèce, puis étend cette définition aux formes de seconde espèce.

10. A cette occasion, Steiner introduit la notion de point à l'infini de manière que le rayon du faisceau parallèle à la droite ait lui aussi un point correspondant.

à trois manières de calculer les birapports ¹¹ :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} : \frac{\alpha\delta}{\beta\delta} &= \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)} \\ \frac{\alpha\beta}{\gamma\beta} : \frac{\alpha\delta}{\gamma\delta} &= \frac{\sin(ab)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(cd)} \\ \frac{\alpha\beta}{\delta\beta} : \frac{\alpha\gamma}{\delta\gamma} &= \frac{\sin(ab)}{\sin(db)} : \frac{\sin(ac)}{\sin(dc)} \end{aligned} \quad (1)$$

Steiner énonce alors deux théorèmes duaux qui expriment le caractère projectif du birapport et qu'il dispose en vis à vis à la manière de Gergonne ; le premier affirme que les birapports que l'on peut définir avec quatre rayons concourants qui intersectent quatre points alignés fixes sont constants. Le second que Steiner attribue à Brianchon stipule que les birapports définis par les quatre points d'une droite qui intersecte quatre rayons fixes d'un faisceau plan de rayons sont aussi constants. Steiner déduit de la définition du birapport le théorème fondamental de la géométrie projective dans le cas d'une droite et d'un faisceau plan de rayons projectifs ¹² :

Le système complet des paires d'éléments correspondants entre eux de deux formes A, B projectives est déterminé dès que trois paires quelconques sont données, c'est-à-dire si trois paires d'éléments [correspondants] sont données, alors au moyen de celles-ci, on peut trouver pour tout quatrième élément de la première forme, l'élément correspondant de la seconde et, si elles sont en position oblique, les formes se laissent ainsi ramener à leur position originale ou perspective. ¹³

Réciproquement, si les éléments d'une droite et d'un faisceau plan de rayons sont appariés de telle manière qu'ils vérifient les formules (1), les deux formes sont projectives, c'est-à-dire au sens de Steiner, peuvent être ramenées en position perspective. Steiner obtient ainsi, à partir de sa première définition géométrique, une nouvelle caractérisation de la notion de relation projective entre une droite et un faisceau plan de rayons : deux formes sont projectives si et seulement si leurs éléments correspondants vérifient les formules (1).

Steiner généralise alors les notions de formes projectives et de formes en perspective ; deux droites projectives d'un même faisceau plan de rayons sont dites projectives. Si de plus, elles sont toutes les deux en perspective par rapport à ce faisceau, elles sont dites en perspective et le centre du faisceau est appelé le *point*

11. La définition de Steiner du birapport n'est pas signée ; en modifiant l'ordre des points ou des rayons, il ne peut donc obtenir que trois valeurs du birapport. Par contre, il distingue les appariements selon que les éléments d'une des paires sont ou ne sont pas séparés par les éléments des autres paires. Pour cette distinction, il applique implicitement aux points de la droite projective l'ordre cyclique induit par les faisceaux de rayons.

12. Steiner montre que c'est l'ensemble des formules (1) qui permet d'obtenir l'unicité de l'élément défini. En effet, si l'on se contente d'une seule équation, celle-ci déterminera deux points puisque d'après la définition donnée par Steiner, le birapport n'est pas une quantité signée.

13. „Dass das ganze System der einander entsprechenden Elementenpaare zweier projectivischen Gebilde A, B bestimmt sei, sobald irgend drei Paare gegeben sind, d.h., wenn irgend drei Elementenpaare gegeben sind, so kann mittelst derselben zu jedem gegebenen vierten Element des einen Gebildes das entsprechende Element des anderen Gebildes gefunden werden, und die Gebilde lassen sich dadurch, wenn sie sich in schiefer Lage befinden, in die ursprüngliche oder perspectivische Lage zurückbringen.“ [Steiner, 1832, I-18]

de projection. Lorsque deux droites projectives ne sont pas en perspective, elles sont en *position oblique*. De même, deux faisceaux plans de rayons sont dits projectifs lorsqu'ils sont projectifs d'une même droite et en position perspective s'ils sont en perspective par rapport à une même droite. Lorsque deux faisceaux plans de rayons sont projectifs sans être en perspective, ils sont en position oblique. Steiner étend les formules (1) aux droites et aux faisceaux projectifs ; les birapports que l'on peut calculer à partir des éléments de quatre paires d'éléments correspondants de deux formes projectives sont égaux. Il s'ensuit que «le système complet des paires d'éléments correspondants de deux formes projectives est déterminé si trois telles paires quelconques sont données»¹⁴. La propriété de conservation des birapports fournit une caractérisation des relations projectives entre formes :

Si les éléments de deux formes sont appariés de telle manière que les birapports définis par quatre éléments quelconques de la première forme soient égaux aux birapports définis par les quatre éléments correspondants de la seconde forme, [...] alors les formes sont, par rapport à toutes ces paires d'éléments, projectives.¹⁵

Steiner a donc deux définitions équivalentes de la notion de relation projective entre formes ; la première, purement géométrique, fondée sur la manière dont sont appariés les éléments des formes lorsqu'elles sont en perspective ; l'autre, fondée sur la conservation du birapport, permet à Steiner d'obtenir le théorème fondamental de la géométrie projective, à savoir qu'une relation projective est définie lorsque trois paires d'éléments correspondants sont donnés. Dans la théorie de Steiner, la notion d'harmonie apparaît comme secondaire : elle est définie comme un cas particulier de valeur du birapport. Quatre éléments d'une forme sont dits harmoniques si leur birapport est égal à 1. La propriété d'harmonie se conserve de manière évidente par les relations projectives. Par contre, selon Steiner, ce théorème ne peut avoir de réciproque simple car il faut faire intervenir des considérations d'ordre des éléments.

Une fois définie la notion de relation projective entre formes, Steiner démontre de manière essentiellement géométrique¹⁶ une série de théorèmes, certains classiques comme le théorème du quadrilatère complet, d'autres originaux comme celui du quadrangle complet. Il illustre ainsi l'intérêt de sa théorie des relations projectives entre formes en montrant qu'il retrouve facilement par des raisonnements de pure géométrie les théorèmes classiques et que souvent ceux-ci sont des cas particuliers de théorèmes plus généraux concernant les formes projectives.

2.2 La théorie des coniques de Steiner

Dans la seconde partie de son traité, Steiner aborde les chapitres essentiels à ses yeux de sa théorie, à savoir donner un nouveau point de vue sur les coniques

14. „Daher ist das ganze System der entsprechenden Elementenpaare zweier projectivischen Gebilde bestimmt, wenn irgend drei solcher Paare gegeben sind.“ [Steiner, 1832, I-38]

15. „Sind die Elemente zweier Gebilde dergestalt gepaart, dass die durch irgend vier Elemente des einen Gebildes bestimmten Doppelverhältnissen gleich sind den durch die vier entsprechenden Elemente des anderen Gebildes bestimmten Doppelverhältnisse, [...], so sind die Gebilde, in Beziehung auf alle jene Elementenpaare, projectivisch.“ [Steiner, 1832, I-38]

16. Les techniques de démonstration de Steiner relèvent de la géométrie pure mais supposent le théorème fondamental de la géométrie projective.

et étudier l'engendrement de ces courbes par des formes projectives. Lorsque deux droites sont en perspective, les *rayons de projection* c'est-à-dire les droites qui joignent deux points correspondants, sont concourants. De même, lorsque deux faisceaux plans de rayons sont en perspective, les rayons correspondants se coupent le long d'une droite. La notion de relation projective étant dérivée de celle de perspective, il est naturel d'étudier «les lois auxquelles sont soumis, dans le cas de deux droites [projectives en position oblique] A, A_1 , les rayons de projection, dans le cas de deux faisceaux plans de rayons [projectifs en position oblique] B, B_1 , les lignes d'intersection de deux rayons correspondants [...]»¹⁷. Steiner annonce que les propriétés vérifiées par ces ensembles de droites vont permettre de développer d'une manière à la fois facile et générale la théorie des coniques tout en exhibant en même temps un «magnifique double engendrement de celles-ci par des formes projectives»¹⁸.

Steiner commence par rappeler la théorie classique des coniques comme intersection d'un cône et d'un plan. Cet exposé qui ne sert pas directement dans la suite a pour fonction de prouver que les courbes engendrées par les formes projectives sont identiques aux coniques. En outre, l'insistance de Steiner pour prouver que la présentation classique fait appel aux représentations et à l'intuition géométriques lui permet *a contrario* de faire ressortir le caractère intrinsèque de sa théorie; la théorie des coniques devient un chapitre de la théorie des formes projectives. Enfin, cette référence permet de justifier, au moins d'un point de vue heuristique, que pour chercher les propriétés des coniques, «on peut s'en tenir seulement au cercle, la plus connue et la plus simple des coniques»¹⁹. Conformément au principe qu'il vient de poser, Steiner fonde sa théorie de l'engendrement des coniques par les formes projectives sur deux propriétés des cercles provenant de la géométrie élémentaire : soit deux points B, B_1 d'un cercle, si deux angles de sommets B, B_1 intersectent le même arc de cercle, les deux angles sont égaux. Steiner en déduit immédiatement que si les rayons des deux faisceaux B et B_1 sont appariés lorsqu'ils se coupent en un point du cercle, les deux faisceaux sont projectifs. De manière duale, si l'on considère deux tangentes A et A_1 d'un cercle, la relation qui associe deux à deux les points d'intersection α et α_1 de ces tangentes avec une autre tangente du cercle est projective.

Steiner en déduit des théorèmes analogues pour les cônes et les autres sections coniques. Ces théorèmes et leurs réciproques (affirmées sans démonstration) permettent d'induire un lien organique intrinsèque entre la notion de relation projective et les coniques d'une part, de déduire la définition des coniques comme le lieu d'intersection des rayons de deux faisceaux plans de rayons projectifs ou comme enveloppées par les rayons de projection de deux droites projectives. Steiner souligne la nouveauté et l'importance à ses yeux de ces théorèmes. On peut même penser que l'ensemble de la théorie de Steiner a pour objectif cette nouvelle définition des coniques.

Les nouveaux théorèmes établis ci-dessus sur le cône du second degré
et ses sections sont plus importants pour l'étude de ces figures que

17. „[...] der Gesetze, welchen bei zwei Geraden A, A_1 die Projektionsstrahlen, bei zwei ebenen Strahlbüscheln B, B_1 die Durchschnitte der entsprechenden Strahlenpaare [...] unterworfen sind, [...]“ [Steiner, 1832, II-3]

18. „[...] eine sehr merkwürdige doppelte Erzeugung derselben durch projectivische Gebilde.“ [Steiner, 1832, II-3]

19. „Daher kann man, zur Erforschung solcher Eigenschaften, in vielen Fällen sich nur an den Kreis, den bekanntesten und einfachsten Kegelschnitt [...] halten [...]“ [Steiner, 1832, II-8]

tous les théorèmes connus auparavant sur celles-ci car ils sont les théorèmes fondamentaux véritablement authentiques, puisqu'ils sont en effet si universels que presque toutes les autres propriétés de ces figures se déduisent de ceux-ci de la manière la plus simple et la plus claire et aussi parce que la méthode suivant laquelle ils sont dérivés l'emporte en simplicité et en commodité sur les autres points de vue.²⁰

En effet, la présentation de Steiner permet non seulement de pallier les difficultés de la présentation classique mais est aussi adaptée pour comprendre les nouvelles théories comme celles de l'involution ou des polaires réciproques. Steiner retrouve les théorèmes classiques concernant les coniques à partir de sa théorie. Il insiste sur le fait que sa théorie montre que ces théorèmes ne sont pas «les fondements véritables de l'étude des coniques»²¹ puisqu'ils découlent «d'une source plus universelle, à savoir les relations des formes projectives»²². En reprenant la définition des correspondances projectives entre formes par les birapports, Steiner généralise la notion de points ou droites harmoniques aux points et aux tangentes d'une conique : le birapport des points d'intersection de quatre tangentes données d'une conique avec une autre tangente de celle-ci est constant. Lorsque ce birapport est égal à 1, Steiner propose de dire que les quatre points de contact des tangentes sont harmoniques et que celles-ci sont harmoniques. Il considère alors une droite tournant autour d'un point fixe et montre que le lieu des quatrièmes harmoniques du point fixe et des points d'intersection de la droite et de la conique est (situé sur)²³ une droite, ce qui lui permet de définir les notions de *pôle harmonique* d'une droite et de droite harmonique d'un point. Il obtient ainsi le théorème fondamental de la théorie des polaires réciproques²⁴ :

Si deux coniques quelconques K et K_1 se trouvent dans un plan, alors les pôles harmoniques $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ des tangentes a, b, c, \dots de la seconde [conique] K_1 par rapport à la première conique K sont situés sur une troisième conique déterminée K_2 et les [polaires] harmoniques a_1, b_1, c_1, \dots correspondant aux points $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots$ de la seconde [conique] K_1 touchent une troisième et même conique K_2 , à savoir de telle manière qu'un point déterminé α de la troisième conique K_2 et sa tangente associée a_1 correspondent à chaque tangente a de la deuxième conique K_1 et son point de contact α_1 .²⁵

20. „Die so eben aufgestellten neuen Sätze über den Kegel zweiten Grades und dessen Schnitte sind für die Untersuchung dieser Figuren wichtiger, als alle bisher bekannten Sätze über dieselben, denn sie sind die eigentlichen wahren Fundamentalsätze, weil sie nämlich so umfassend sind, dass fast alle übrigen Eigenschaften jener Figuren auf die leichteste und klarste Weise aus ihnen folgen, und weil auch die Methode, nach der sie daraus hergeleitet werden, jede bisherige Betrachtungsweise an Einfachheit und Bequemlichkeit übertrifft.“ [Steiner, 1832, II-12-13]

21. „[...] dieselben [die Sätze] nicht die eigentliche Grundlage für die Untersuchung der Kegelschnitte sind, [...]“ [Steiner, 1832, II-20]

22. „[...] aus einer umfassenderen Quelle, nämlich aus der Beziehung projectivischer Gebilde“ [Steiner, 1832, II-20-21]

23. Steiner affirme que ce lieu est une droite. Comme la théorie de Steiner n'envisage pas les éléments imaginaires, le théorème de Steiner n'est pas complètement correct.

24. Cette propriété servira de fondements à la théorie des coniques de von Staudt.

25. „Wenn in einer Ebene sich irgend zwei Kegelschnitte K, K_1 befinden, so liegen die den Tangenten a, b, c, \dots des zweiten K_1 , in Beziehung auf den ersten K , entsprechenden harmonischen Pole $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ in irgend einem bestimmten dritten Kegelschnitt K_2 , und es berühren

Steiner propose donc une théorie des coniques qui s'appuie sur une pratique purement géométrique; certes, il fonde une partie de sa définition des relations projectives entre formes et définit celle d'harmonicité sur la notion métrique de birapport, mais une fois celles-ci établies, il ne raisonne pour l'essentiel qu'à partir de considérations sur les dépendances projectives des formes. Avec la théorie des formes de Steiner, la figure géométrique n'est plus au centre des préoccupations du géomètre, elle est remplacée par l'étude des relations projectives entre formes.

3 La Geometrie der Lage

Von Staudt reprend en le radicalisant dans son traité *Geometrie der Lage* le projet de Steiner de fonder la géométrie sur la considération des relations entre formes fondamentales. Un premier signe de cette radicalisation est l'absence totale de figures dans les traités de von Staudt.²⁶ On peut voir dans cette absence une innovation pédagogique : obliger le lecteur à dessiner lui-même les figures au fur et à mesure de l'étude du traité. Néanmoins, les définitions et les démonstrations de von Staudt ne font pas appel à la représentation géométrique et relèvent au contraire pour la plupart d'un style que l'on pourrait qualifier de *linguistique*. Par exemple, lorsque von Staudt reprend la description des formes fondamentales de Steiner, il invente de nouveaux termes pour en décrire certaines : *ponctuelle*²⁷ pour la droite vue comme un ensemble de points et *gerbe*²⁸ pour l'ensemble des droites de l'espace qui passent par un point. De même, l'introduction des éléments à l'infini est justifiée par l'extension que ces éléments donnent aux énoncés.

L'ambition affichée par von Staudt dès la préface de la *Geometrie der Lage* est d'exposer la géométrie sans faire appel à la moindre considération métrique :

J'ai cherché dans ce travail à établir la géométrie de position comme une science autonome dans laquelle il n'y aurait pas besoin de la mesure.²⁹

S'il reconnaît que ses prédécesseurs ont œuvré à bien différencier la géométrie de position et la géométrie métrique, il regrette néanmoins que «des théorèmes, dans lesquels il n'est pas question de grandeur, soient démontrés habituellement par des considérations de rapports».³⁰ La manière adoptée par Steiner de définir la notion de relation projective entre formes à partir de la conservation du birapport est ici implicitement visée; Von Staudt proposera de définir la notion d'harmonicité de manière purement projective à partir de la propriété fonda-

die den Punkten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots$ des zweiten K_1 entsprechenden Harmonischen a_1, b_1, c_1, \dots einen und denselben dritten Kegelschnitt K_2 und zwar solcher Gestalt, dass jeder Tangenten a und ihrem Berührungspunkte α_1 des zweiten Kegelschnitts K_1 , ein bestimmter Punkt α und dessen zugehörige Tangente a_1 im dritten Kegelschnitt K_2 entspricht.“ [Steiner, 1832, II-34]

26. Les traités de ces prédécesseurs y compris Steiner sont tous suivis de planches de figures auxquelles le lecteur est prié de se reporter.

27. „Gerades Gebilde“.

28. „Strahlbündel“.

29. „Ich habe in dieser Schrift versucht, die Geometrie der Lage zu einer selbstständigen Wissenschaft zu machen, welche des Messens nicht bedarf.“ [Staudt, 1847, III]

30. „[...] Sätze, in welchen von keiner Grösse die Rede ist, [werden] gewöhnlich durch Betrachtung von Verhältnissen bewiesen“ [Staudt, 1847, III]

mentale du quadrilatère (quadrangle) complet. La notion de correspondance projective entre formes sera alors définie sans faire intervenir la moindre notion de mesure d'un segment ou d'un angle par la propriété de conserver l'harmonie.

La volonté de développer la géométrie pure sans faire appel aux notions métriques participe d'un projet d'organisation des disciplines géométriques. Il s'agit d'énoncer les principes généraux de la géométrie avant de s'intéresser aux considérations particulières que sont les questions de congruence ou de similitude. De la même manière que chez Steiner, l'étude des propriétés des figures est subordonnée à celle des correspondances des *systemes plans* ou *spatiaux*. Dans la hiérarchie des disciplines géométriques, la géométrie de position de part sa généralité est antérieure à la géométrie métrique. Aux yeux de von Staudt, cette antériorité devrait se traduire aussi dans l'enseignement de la géométrie :

Tout enseignement de géométrie doit procéder de considérations générales qui familiarisent l'élève avec les différents types de formes géométriques et qui exercent sa capacité d'intuition. [...] Peut-être, ce traité incitera quelques enseignants à placer l'essentiel de la géométrie de position avant leur enseignement de la géométrie métrique afin de donner à leurs élèves, dès le début de cet enseignement, un aperçu d'ensemble de la science sans lequel la compréhension correcte des théorèmes particuliers et de leurs relations avec le reste n'est guère possible.³¹

Dans les premiers paragraphes de *Geometrie der Lage*, von Staudt reprend sans discussion le vocabulaire de la géométrie euclidienne : espace, solide, surface, ligne, point. Les relations entre ces objets fondamentaux sont décrites de manière cinématique ; un point qui se déplace décrit une ligne, une ligne qui se déplace engendre une surface. Dès le début de son exposé, von Staudt insiste sur les questions d'ordre en signalant qu'un point peut parcourir une ligne fermée dans deux sens. Von Staudt adopte souvent un style cinématique d'exposition et de démonstration ; ainsi, la droite sera définie comme une ligne particulière «qui lorsqu'elle est attachée à deux points, ne peut changer de position»³².

3.1 Les formes fondamentales

La première forme, la *ponctuelle* est définie comme l'ensemble de tous les points qui composent une droite. Il reprend le point de vue de Steiner en précisant que l'«on peut admettre que la position de chaque point dans la droite reste fixe, même si celle-ci bouge»³³. La *gerbe de rayons* est définie comme

31. „Jeder geometrische Unterricht muss von allgemeinen Betrachtungen ausgehen, welche den Schüler mit den verschiedenen Arten von geometrischen Gebilden bekannt machen und sein Anschauungsvermögen üben. [...] Vielleicht wird diese Schrift einige Lehrer bestimmen, ihrem Unterrichte in der Geometrie des Masses das Wesentliche aus der Geometrie der Lage voranzuschicken, damit ihre Schüler gleich Anfangs denjenigen Ueberblick über die Wissenschaft gewinnen, ohne welchen das rechte Verständniss der einzelnen Sätze und ihrer Beziehung zum Ganzen nicht wohl möglich ist.“ [Staudt, 1847, III-IV]

32. „Eine Linie, welche, wenn sie in zwei Punkten festgehalten ist, ihre Lage nicht ändern kann, heisst Gerade.“ [Staudt, 1847, 3]

33. „[...] Punkten [...] von welchen man annehmen kann, dass jeder seine Stelle in der Geraden, auch wenn diese bewegt wird, unverrückt beibehalte.“ [Staudt, 1847, 3]

l'ensemble de tous les rayons qui passent par un même point appelé *centre*. Un système angulaire complet est une partie d'une gerbe de rayons ; une telle partie est délimitée par une surface angulaire complète. Von Staudt distingue les surfaces angulaires d'ordre pair pour lesquelles un rayon décrivant la surface revient dans sa position initiale, et les surfaces angulaires d'ordre impair pour lesquelles un rayon décrivant la surface revient finalement dans une position inversée par rapport à sa position initiale. Un *plan* sera décrit comme une surface angulaire complète d'ordre impair dans laquelle chaque point peut être considéré comme un centre. Von Staudt définit enfin les *faisceaux de rayons* et les *faisceaux de plans*. Lorsque le plan est considéré comme contenant une infinité de ponctuelles et de faisceaux de rayons, il est appelé un *système plan*. Von Staudt distingue les *formes fondamentales de première espèce ou uniformes* – les ponctuelles, les faisceaux de rayons ou de plans – qui contiennent une seule catégorie d'éléments – point, droite, plan ; les *formes fondamentales de seconde espèce* – les gerbes et les systèmes plans – qui contiennent deux catégories d'éléments – droites et plans pour les premières ; points et droites pour les seconds. La forme de troisième espèce est le système-espace qui contient des points, des droites et des plans. Il est important pour von Staudt de bien distinguer les différentes espèces de formes fondamentales ; en effet, il va non seulement développer une théorie des correspondances projectives entre formes de première espèce, mais il en déduira une notion de correspondance projective entre formes de seconde espèce (et de troisième espèce) à partir de laquelle il proposera sa théorie des coniques (et des surfaces du second ordre).

3.2 La notion de correspondances projectives entre formes de von Staudt

Von Staudt déduit le théorème du quadrilatère complet et celui dual du quadrangle complet à partir des deux théorèmes de Desargues obtenus sans difficulté puisque von Staudt se situe dans l'espace. Une reformulation du théorème du quadrangle complet lui permet de définir de manière purement géométrique (sans avoir recours à une quelconque notion de birapport) la notion de formes harmoniques : étant donné trois points A, B, C alignés sur une droite d , si on construit un quadrilatère tel que deux côtés opposés coupent la droite d en A et C et qu'une diagonale passe par B , alors l'autre diagonale coupe la droite d en un point D qui ne dépend que de A, B, C . Von Staudt propose de dire que les points A, B, C, D constituent une *forme harmonique* et que les points A, C séparent harmoniquement les points B, D . Une ponctuelle harmonique est projetée à partir d'un point S en un *faisceau harmonique de rayons* et toute section d'un faisceau harmonique de rayons est une ponctuelle harmonique. Il définit de même les *faisceaux harmoniques de plans*. Von Staudt montre donc que la notion d'harmonicité concerne toutes les formes fondamentales de première espèce et qu'elle est conservée par projection et section.

Von Staudt propose alors une nouvelle définition des correspondances projectives à partir de la propriété de conservation des formes harmoniques ; il introduit en même temps le signe $\bar{\lambda}$:

Deux formes fondamentales uniformes sont dites projectives ($\bar{\lambda}$) entre elles si elles sont rapportées l'une à l'autre de telle manière qu'à toute

forme harmonique de l'une corresponde une forme harmonique de l'autre.

Si parmi un certain nombre de formes, la seconde est projective de l'autre, chaque suivante de la précédente, alors elles sont toutes projectives entre elles.³⁴

Von Staudt propose alors une démonstration du théorème fondamental de la géométrie projective adaptée à la définition des correspondances projectives qu'il vient de donner :

Si deux formes fondamentales uniformes projectives ont trois éléments correspondants communs³⁵ alors tous leurs éléments sont correspondants communs.³⁶

En toute rigueur, la démonstration de von Staudt est incomplète et provoquera une intense discussion initiée en 1873 par Klein [1873] sur la question de la continuité de la droite. Ce n'est pas l'objet de cet article que de revenir sur cette discussion ; on peut juste signaler que la description cinématique des formes par von Staudt inclut implicitement une propriété de continuité de la droite (ou des formes fondamentales) ; de son point de vue, la démonstration de von Staudt n'est pas réellement lacunaire.³⁷

Von Staudt déduit immédiatement de ce premier théorème que pour rapporter projectivement deux formes fondamentales uniformes, il suffit de déterminer trois paires d'éléments correspondants et qu'une relation projective entre deux ponctuelles n'ayant pas même support peut être considérée comme la composition de deux perspectives. Si les ponctuelles ont même support, la décomposition de la correspondance projective s'effectue à l'aide de trois perspectives. Une fois effectuée cette réduction, von Staudt peut estimer avoir accompli une première étape (essentielle) de son programme : il a non seulement défini la notion de correspondance projective entre formes fondamentales de première espèce sans faire la moindre allusion à la mesure des segments ou des angles, mais il a obtenu le théorème fondamental de la géométrie projective et surtout grâce à la décomposition des correspondances projectives en produit de projections, il convainc le lecteur qu'il retrouve les mêmes correspondances que ses prédécesseurs. De plus, von Staudt souligne que la réduction des correspondances projectives à des projections prouve la continuité de celles-ci³⁸ :

34. „Zwei einförmige Grundgebilde heissen zu einander projektivisch ($\bar{\wedge}$), wenn sie so auf einander bezogen sind, dass jedem harmonischen Gebilde in dem einen ein harmonisches Gebilde im andern entspricht.

Wenn von beliebig vielen Gebilden das zweite dem ersten, jedes folgende einem der vorhergehenden projektivisch ist, so sind alle zu einander projektivisch.“ [Staudt, 1847, 49]

35. Etant donné une correspondance projective d'une forme uniforme sur elle-même, un élément est dit correspondant commun s'il est son propre correspondant. Les géomètres français du 19^e et du début du 20^e siècle utilisaient le terme d'*uni*.

36. „Wenn zwei projektivische einförmige Gebilde drei Elemente entsprechend gemein haben, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein.“ [Staudt, 1847, 50]

37. Pour plus de précisions sur l'histoire de la preuve du théorème fondamental de la géométrie projective, on peut consulter l'article de J.-D. Voelke [2007] dans ce volume et le chapitre 7 de Nabonnand [à paraître]. Pour saisir l'importance de la géométrie projective (synthétique et analytique) dans l'histoire de la géométrie au 19^esiècle, on consultera le livre de J.J. Gray [2007], *Worlds Out of Nothing*.

38. Cette remarque montre que von Staudt admet implicitement que les formes uniforme sont continues ; si l'on doit parler de lacune dans la démonstration de von Staudt du théorème fondamental de la géométrie projective, elle réside dans le fait qu'il utilise la continuité des correspondances projectives. Il est clair que von Staudt n'a pas vu le problème ; par contre, d'un

on justifie ainsi non seulement le terme de *projectif*, mais on montre en même temps qu'à une suite continue d'éléments de la première forme uniforme correspond une suite continue d'éléments de l'autre.³⁹

Von Staudt déduit de cette remarque que si deux éléments homologues parcourent deux formes projectives en restant homologues, alors lorsque le premier parcourt la première forme, le second décrit la seconde. Si les formes ont même support, il distingue alors les correspondances directement projectives et celles indirectement projectives selon que les mouvements des éléments homologues sont de même sens ou de sens contraire. Il en déduit que deux formes indirectement projectives ont deux éléments correspondants communs qui séparent harmoniquement chaque paire d'éléments correspondants.

3.3 La théorie des coniques de von Staudt

L'extension de la notion de correspondance projective entre formes de seconde espèce et formes de troisième espèce s'effectue en utilisant seulement des relations d'incidence. Par exemple, deux systèmes plans seront *colinéaires* s'il correspond à tout point P et toute droite d du premier système tels que P soit situé sur la droite d , un point P_1 et une droite d_1 du second système tels que P_1 soit situé sur d_1 . Plus généralement, «deux formes fondamentales de deuxième espèce ou encore deux systèmes-espace sont dits colinéaires s'ils sont rapportés l'un à l'autre de telle manière qu'à deux éléments P, q d'espèces différentes du premier système tels que le premier soit situé sur le second correspondent deux éléments P_1, q_1 d'espèces différentes du second système, tels que le premier P_1 soit également situé sur le second».⁴⁰

De manière similaire, deux systèmes plans seront *réciproques* s'il correspond à tout point P et toute droite d du premier système tels que P soit situé sur d , une droite P_1 et un point d_1 du second système tels que la droite P_1 passe par le point d_1 . Plus généralement, «deux formes fondamentales de deuxième espèce ou encore deux systèmes-espace sont dits réciproques s'ils sont rapportés l'un à l'autre de telle manière qu'à deux éléments P, q d'espèces différentes du premier système tels que le premier soit situé sur le second correspondent deux éléments P_1, q_1 d'espèces différentes du second système, tels que le premier P_1 passe par le second».⁴¹

point de vue systématique, celle-ci n'est pas très grave, puisque Lüroth et Zeuthen ont montré que la continuité des correspondances projectives résultait de la continuité des formes et de la conservation des formes harmoniques. [Klein, 1874]

39. „Es is hierdurch nicht nur der Ausdruck *projektivisch* erklärt, sondern zugleich bewiesen, dass jeder stetigen Aufeinanderfolge von Elementen in dem einen von zwei zu einander projektivischen einförmigen Gebilden eine stetige Aufeinanderfolge von Elementen im andern entspricht.“ [Staudt, 1847, 55]

40. „Zwei Grundgebilde der zweiten Stufe oder auch zwei räumliche Systeme heissen colinéär, wenn sie so aufeinander bezogen sind, dass je zwei ungleichartigen Elementen P, q des einen Systems, von welchen das erstere P im letztern liegt, zwei ungleichartige Elemente P_1, q_1 des andern entsprechen, von welchen das erstere P_1 ebenfalls im letztern liegt.“ [Staudt, 1847, 60]

41. „Zwei Grundgebilde der zweiten Stufe oder auch zwei räumliche Systeme heissen reciprok, wenn sie so aufeinander bezogen sind, dass je zwei ungleichartigen Elementen P, q des einen Systems, von welchen das erstere P im letztern liegt, zwei ungleichartige Elemente P_1, q_1 des andern entsprechen, von welchen das erstere P_1 durch das letztere geht.“ [Staudt, 1847, 60]

Comme deux systèmes réciproques d'un même troisième sont colinéaires, la théorie des systèmes colinéaires est contenue dans celle des systèmes réciproques. De plus, pour les formes fondamentales de seconde espèce, il suffit de considérer les systèmes plans puisque pour étudier les gerbes en tant que formes fondamentales, on peut toujours se ramener à des sections de celles-ci.

Von Staudt déduit immédiatement des définitions que «deux systèmes, qui sont soit colinéaires, soit réciproques, sont aussi dits projectifs entre eux, puisque dans les deux cas, à chaque forme harmonique du premier système correspond une forme harmonique de l'autre, et donc deux quelconques formes uniformes homologues sont projectives»⁴². Pour Von Staudt, cette propriété est évidente puisque la notion d'harmonie a été définie par des considérations d'incidence. Dans le cas emblématique des systèmes plans réciproques, la figure correspondant à un quadrilatère complet est la figure duale, c'est-à-dire un quadrangle complet ; il correspond donc à une ponctuelle harmonique un faisceau de rayons harmoniques.⁴³

L'étude des systèmes réciproques va permettre à von Staudt de développer une théorie générale des coniques (et des surfaces du second ordre) fondée sur les propriétés d'une classe particulière de correspondances réciproques : les *polarités*. Pour définir cette classe particulière, von Staudt introduit la notion, centrale dans ce qui va suivre, en particulier pour l'algèbre des jets, d'*involution*. Deux éléments P, P_1 de deux formes projectives ayant même support se correspondent doublement s'il correspond à l'élément P de la première forme l'élément P_1 de la seconde et s'il correspond à l'élément P_1 de la première forme l'élément P de la seconde. Deux formes fondamentales projectives sont dites en *situation involutive* si tous leurs éléments se correspondent doublement. Plus généralement, deux formes projectives de même espèce mais de natures différentes (une gerbe de rayons et un système-plan par exemple) seront dites en situation involutive si l'une des deux est en situation involutive avec une section de l'autre.

Deux formes fondamentales de première espèce projectives dont deux éléments se correspondent doublement sont en situation involutive. Le nombre d'éléments doubles d'une forme fondamentale de première espèce en involution (avec elle-même) est soit zéro, soit deux selon qu'une paire d'éléments correspondants est ou n'est pas séparée par une paire analogue. Une *involution* est la donnée d'au moins trois paires d'éléments correspondants d'une forme fondamentale de première espèce involutive. Von Staudt retrouve ainsi de manière purement géométrique la notion classique de *points en involution*.⁴⁴ En particulier, il retrouve

42. „Zwei Systeme, welche entweder collinear oder reciprok sind, heissen auch zu einander projektivisch, weil in beiden Fällen jedem harmonischen Gebilde in dem einen Systeme ein harmonisches Gebilde im andern entspricht, und also je zwei homologe einförmige Gebilde zu einander projektivisch sind.“ [Staudt, 1847, 61]

43. Von Staudt adopte ici le style pédagogique qu'il affectionne et qu'il utilise très souvent : en effet, il ne donne pas de démonstration explicite de cette propriété ; par contre, les exemples qu'il donne permettent au lecteur de la trouver par lui-même sans difficulté.

44. Par exemple, dans son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Chasles [1837] définit en utilisant des relations métriques la notion d'involution :

Quand six points, situés en ligne droite, et se correspondant deux à deux, tels que A et A' , B et B' , C et C' , font entre eux de tels segments que l'on ait la relation

$$\frac{CA.CA'}{CB.CB'} = \frac{C'A.C'A'}{C'B.C'B'}$$

on dit que les six points sont en *involution*, et les points qui se correspondent sont dits *conjugués*. [Chasles, 1837, 309]

le théorème classique de l'involution des points d'intersection d'une droite avec les côtés d'un quadrangle :

Les côtés d'un quadrangle plan complet sont coupés, par une droite qui est située dans le même plan mais qui ne passe par aucun des sommets du quadrangle, en une involution, à savoir, deux côtés opposés sont coupés en deux points associés.⁴⁵

Von Staudt distingue parmi les formes fondamentales de seconde et de troisième espèce en situation involutive les *systèmes involutifs* et les *systèmes polaires* selon que les formes sont colinéaires ou réciproques. La notion de systèmes polaires permet de retrouver et de généraliser la théorie des polaires réciproques de Poncelet. En particulier, les notions de *pôle* et *polaire* ne dépendent pas de la théorie des coniques ; au contraire, la définition des coniques apparaît comme découlant de la définition des systèmes plans polaires :

Dans un système polaire plan, chaque point est appelé le pôle de la droite qui lui est associée, et chaque droite, la polaire du point qui lui est associé, de telle sorte que les pôles de toutes les droites qui se coupent en un même point, sont situés sur la polaire de ce point et que les polaires de tous les points qui appartiennent à une même droite, se coupent au pôle de cette droite. Si un point est situé sur sa polaire, alors tout autre point de cette droite est situé à l'extérieur de sa polaire.⁴⁶

Deux points situés, chacun, sur la polaire de l'autre sont dits *conjugués entre eux*. Un point situé sur sa polaire est donc dit *conjugué à lui-même*. Une ponctuelle P qui ne passe pas par son pôle P_1 est en situation involutive avec le faisceau de rayons P_1 . De plus, la droite P contient soit aucun, soit deux points situés sur leur polaire selon que la relation projective entre la ponctuelle P et le faisceau de rayons P_1 est indirecte ou directe. Von Staudt en déduit que «si un point P_1 est situé sur sa polaire P , alors, [...] il y a sur une autre droite qui passe par le point P_1 , un autre point qui est situé sur sa polaire, et de même, dans tout faisceau de droites dont le centre est un point de la droite P différent de P_1 , il y a une autre droite qui passe par son pôle».⁴⁷

Cette propriété permet à von Staudt de donner une nouvelle définition des coniques comme le lieu des éléments conjugués à eux-même d'un système polaire. En effet, si un point P_1 est situé sur sa polaire (est conjugué à lui-même), alors tout rayon du faisceau de rayons P_1 contient un autre point conjugué à lui-même. Von Staudt en conclut que dans un système polaire plan, soit il n'y a

45. „Die Seiten eines vollständigen ebenen Vierecks $EFGH$ werden von einer jeden Geraden, welche mit ihm in einerlei Ebene liegt, aber durch keinen seiner Eckpunkte geht, in einer Involution, nämlich je zwei Gegenseiten in zwei einander zugeordneten Punkten geschnitten.“ [Staudt, 1847, 122]

46. „In einem ebenen Polarsysteme heisst jeder Punkt der Pol der ihm zugeordneten Geraden und jede Gerade die Polare des ihr zugeordneten Punktes, so dass also die Pole von allen Geraden, welche in einem und demselben Punkte sich schneiden, in der Polare dieses Punktes liegen und die Polaren von allen Punkten, welche einer und derselben Gerade angehören, in dem Pole dieser Gerade sich schneiden. Liegt ein Punkt in seiner Polare, so liegt jeder andere Punkt dieser Geraden ausserhalb seiner Polare.“ [Staudt, 1847, 131-132]

47. „Liegt ein Punkt P_1 in seiner Polare P , so giebt es [...] in jeder andern Geraden, welche durch den Punkt P_1 geht, noch einen Punkt, welcher in seiner Polare liegt, und eben so in jedem Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt ein von P_1 verschiedener Punkt der Geraden P ist, noch eine Gerade, welche durch ihren Pol geht.“ [Staudt, 1847, 132]

aucun élément conjugué à lui-même, soit il y a une courbe d'ordre pair dont les points sont tous conjugués à eux-même. Les polaires des points de cette courbe double sont les tangentes : chaque point de la courbe a donc pour polaire la tangente à la courbe en ce point et chaque tangente à la courbe a pour pôle le point de contact avec la courbe. Von Staudt obtient donc ainsi la définition des coniques comme courbes doubles d'un système plan polaire ; les surfaces coniques du second ordre sont définies de même comme les surfaces doubles d'un système-espace polaire. Von Staudt étend la définition des faisceaux de rayons à toute suite continue de droites de manière que dans deux systèmes plans réciproques il corresponde à chaque ligne un faisceau de rayons (de la même manière qu'à une droite correspond un faisceau de rayons au sens originel). Il obtient ainsi une définition duale des coniques :

Chaque courbe plane (respectivement surface conique) fermée qui est une courbe (resp. surface) double d'un système polaire, ou, ce qui revient au même, qui est projective du faisceau qui s'applique sur elle, de telle manière qu'il corresponde à chaque point de la courbe (resp. rayon de la surface), l'élément du faisceau qui s'applique en celui-ci, est appelée une courbe (surface conique) du second ordre.⁴⁸

La définition commune des courbes et surfaces conique du II. ordre comme le lieu des éléments conjugués à eux-mêmes d'une polarité permet à von Staudt de déduire la définition traditionnelle des coniques : toute section d'une surface conique du II. ordre par un plan est une courbe du II. ordre et toute projection d'une courbe du II. ordre est une surface conique du II. ordre. Von Staudt obtient alors comme théorème la définition des coniques proposées par Steiner : étant donné une conique (considérée comme courbe double d'une polarité), il montre en utilisant les propriétés de la polarité que deux faisceaux de droites, dont les sommets sont situés sur la conique et dont les rayons projetant le même point de la conique sont associés, sont projectifs et que réciproquement deux faisceaux de rayons projectifs (mais non-perspectifs) définissent une polarité dont la courbe double est le lieu des points d'intersection des rayons correspondants. De même, il déduit à partir de raisonnements fondés sur les propriétés des polarités, les théorèmes de Pascal et de Brianchon. La théorie des coniques de von Staudt apparaît ainsi comme un chapitre de celle des polarités.

4 Les formes élémentaires et les involutions

Von Staudt généralise la notion de formes fondamentales de première espèce en introduisant celle de forme élémentaire. Les formes élémentaires réunissent les formes uniformes, les courbes du II. ordre et les systèmes réglés. De la même manière que les ponctuelles, les faisceaux de droites et de plans sont vus par von Staudt comme des déploiements d'un élément géométrique (un point, une droite ou un plan), les formes élémentaires sont elles-aussi définies comme des ensembles d'éléments de même catégorie. De plus, la notion de perspective entre

48. „Jede geschlossene ebene Curve (bzw. Kegelfläche), welche die Ordnungcurve (bzw. Ordnungfläche) eines Polarsystems oder, was dasselbe ist, dem ihr sich anschmiegenden Büschel projektivisch ist, so dass jedem Punkte der Curve (bzw. Strahle der Fläche) das ihr in demselben sich anschmiegende Element des Büschels entspricht, heisst eine Curve (bzw. Kegelfläche) zweiter Ordnung.“ [Staudt, 1847, 137-138]

formes élémentaires généralise celle entre formes uniformes ; par exemple, une courbe du II. ordre et un faisceau de rayons situés dans le même plan sont mis en perspective lorsque le centre S du faisceau est situé sur la courbe en mettant en correspondance chaque point A de la courbe avec le rayon SA . La généralisation de la notion de perspective est définie de manière que deux formes uniformes perspectives d'une même forme élémentaire soient projectives entre elles ; cette propriété permet de généraliser aux formes élémentaires la notion de forme harmonique et de définir celle de formes élémentaires projectives. Ainsi, quatre éléments d'une forme élémentaire sont situés harmoniquement si leurs éléments correspondants dans une forme uniforme qui est perspective à la forme élémentaire le sont. De même, la notion de correspondance projective entre formes élémentaires est définie comme une généralisation de celle entre formes uniformes :

De la même manière que pour deux formes uniformes, on dira en général que deux formes élémentaires sont projectives entre elles si elles sont reliées entre elles de telle manière que quatre éléments de la première forme situés harmoniquement correspondent toujours à quatre éléments de la seconde forme situés harmoniquement.⁴⁹

Le théorème fondamental de la géométrie projective s'étend immédiatement aux formes élémentaires ; pour définir une correspondance projective entre deux formes élémentaires, il suffit de déterminer trois paires d'éléments correspondants et ainsi il sera assigné à chaque élément de la première forme un élément de la seconde.⁵⁰ Une fois définie les correspondances projectives entre formes élémentaires, von Staudt généralise de la même manière la notion d'involution comme le cas particulier de correspondance projective entre deux formes élémentaires ayant même support pour laquelle les éléments se correspondent doublement (Si le correspondant d'un élément A est l'élément B alors le correspondant de B est A) :

Si dans deux formes élémentaires projectives entre elles qui sont situées l'une sur l'autre, deux quelconques éléments et par conséquent chaque paire d'éléments homologues se correspondent alternativement, on dit que les formes sont en situation involutive [...]. Habituellement, deux telles formes sont considérées comme une seule forme dont les éléments sont appariés involutivement.⁵¹

Pour qu'une correspondance projective entre deux formes élémentaires ayant même support soit une involution, il suffit qu'un couple d'éléments A et A_1 se

49. „Gleichwie zwei einförmige Gebilde, so sollen überhaupt zwei Elementargebilde zu einander projektivisch heissen, wenn sie so auf einander bezogen sind, dass je vier harmonisch liegenden Elementen in dem einen Gebilde vier harmonisch liegende Elemente im andern entsprechen.“ [Staudt, 1856, 5]

50. Von Staudt ne donne aucune démonstration explicite de la généralisation du théorème fondamental. Il suffit de considérer deux formes uniformes respectivement en perspective avec une des formes élémentaires. La donnée de trois paires éléments correspondants sur les formes élémentaires définit trois paires d'éléments correspondants sur les formes uniformes et donc une correspondance projective entre les formes uniformes. Comme deux formes uniformes perspectives d'une même forme élémentaire sont projectives, la correspondance induite sur les formes élémentaires est donc définie de manière unique.

51. „Wenn in zwei zu einander projektivischen Elementargebildern, welche in einander liegen, irgend zwei und mithin je zwei homologe Elemente einander abwechselnd entsprechen, so heissen die Gebilde involutorisch liegend, [...]. Gewöhnlich wird aber von zwei solchen Gebilden nur wie von einem Gebilde gesprochen, dessen Elemente involutorisch gepaart seien.“ [Staudt, 1856, 44]

correspondent doublement. Si les couples d'éléments $(A, A_1), (B, B_1), (C, C_1), \dots$ se correspondent doublement dans une involution, von Staudt note l'involution $AA_1.BB_1.CC_1$. Il énonce une série de propriétés des involutions des formes élémentaires qui généralisent celles des involutions des formes uniformes ; ainsi, les involutions sont conservées par les correspondances projectives :

Si deux formes élémentaires $ABC\dots, abc\dots$ sont projectives entre elles, alors il correspond à chaque involution $AA_1.BB_1.CC_1$ de la première une involution $aa_1.bb_1.cc_1$ de la seconde.⁵²

Le théorème fondamental de la géométrie projective prouve qu'une correspondance projective (autre que la correspondance identique) d'une forme sur elle-même possède au plus deux éléments doubles (qui sont leur propre correspondant). Le nombre d'éléments doubles des involutions dépend de leur comportement global. Von Staudt distingue à partir de la notion de sens d'une forme élémentaire fermée les involutions directes et celles indirectes. Trois éléments A, B, C d'une forme fermée constituée d'une suite continue de points, de droites ou de plans déterminent une partie de celle-ci qui débute en A , contient B et se termine en C . On détermine ainsi le sens ABC de la forme. La notion de sens est implicitement associée par Von Staudt à celle de sens de parcours de la forme. Il précise que lorsque les points A, B, C se déplacent, le sens ABC ne change pas tant que deux des points ne coïncident pas et que le sens ABC est identique aux sens BCA et CAB et contraire aux sens CBA, BAC et ACB . Dans une involution, les sens sont, soit tous conservés, soit au contraire tous inversés. Dans le premier cas, la forme est divisée par deux éléments correspondants dans l'involution en deux parties associées. De plus, chaque paire d'éléments correspondants est séparée par chaque autre paire d'éléments correspondants et aucun élément n'est associé à lui-même. Dans le second cas, aucune paire d'éléments associés ne séparent une autre paire d'éléments associés et la forme contient deux éléments associés à eux-mêmes (éléments doubles) qui séparent harmoniquement chaque paire d'éléments associés. En conclusion, soit une forme involutive ne possède aucun élément double, soit elle en possède deux. Dans le dernier cas, les deux éléments doubles séparent harmoniquement chaque paire de points homologues, autrement dit, en reprenant les notations de von Staudt, $MM.NN.AB$ signifie que M, A, N, B est une forme harmonique.

Une courbe du second ordre (conique) est intersectée par un faisceau de rayons S (dont le sommet S n'est pas situé sur la courbe) en une involution. Le faisceau des tangentes est lui-aussi involutif. De plus chaque paire de tangentes homologues se coupent sur la polaire s de S par rapport à la conique. S'il passe par S deux tangentes à la courbe, l'involution induite par le faisceau S possède deux points doubles (qui sont les points de contact des deux tangentes), sinon l'involution n'a pas de point double.

Von Staudt déduit de l'étude des points doubles des involutions un théorème qui est l'élément technique fondamental de l'algèbre des jets :

Si M, A, B, A_1, B_1 sont cinq éléments d'une même forme [élémentaire]⁵³, alors soit $MM.AB_1.A_1B$ est une involution, soit il existe

52. „Sind zwei Elementargebilde $ABC\dots, abc\dots$ zu einander projektivisch, so entspricht jeder Involution $AA_1.BB_1.CC_1$ in dem einen eine Involution $aa_1.bb_1.cc_1$ im andern.“ [Staudt, 1856, 45]

53. Von Staudt établit d'abord ce théorème pour les formes uniformes, puis le généralise aux formes élémentaires.

un élément N différent de M tel que $MN.AB_1.A_1B$ est une involution. Dans le premier cas, les formes $MAB\dots$, $MA_1B_1\dots$ ont comme élément double le point M tandis que dans le second, [...] le point N est aussi un point double.⁵⁴

En particulier, si M, A, A_1, A_2 sont quatre éléments d'une forme uniforme, alors

1. soit M, A, A_1, A_2 est une forme harmonique, $MM.AA_2.A_1A_1$ est une involution et les formes projectives $MAA_1\dots$, $MA_1A_2\dots$ n'ont qu'un seul élément double.
2. soit il existe un élément N différent de M tel que $MN.A_1A_1$ soit une involution et les formes projectives $MAA_1\dots$, $MA_1A_2\dots$ admettent aussi le point N comme élément double.

5 Le calcul des jets

5.1 Les jets

Von Staudt définit la notion de jet comme la donnée de quatre éléments ordonnés d'une même forme élémentaire. Il précise que cette définition est relative à une forme élémentaire :

L'ensemble de quatre éléments A, B, C, D d'une même forme élémentaire, en tenant compte à la fois de l'ordre dans lequel ils sont situés dans celle-ci et de la forme élémentaire elle-même s'appellera un jet. Il conviendra donc de distinguer non seulement le jet $ABCD$ du jet $ABDC$ mais aussi dans le cas où deux formes élémentaires qui ne sont pas superposées ont en commun les éléments A, B, C, D , le jet $ABCD$ dans la première forme du jet $ABCD$ dans la seconde forme.⁵⁵

Von Staudt définit une notion d'égalité entre jets : deux jets $ABCD$ et $A_1B_1C_1D_1$ situés dans deux formes élémentaires sont dits projectifs si les deux formes élémentaires sont reliées projectivement de telle manière que les éléments A, B, C, D de la première forme correspondent respectivement aux éléments A_1, B_1, C_1, D_1 de la seconde. Deux jets projectifs sont par la suite considérés comme égaux. Von Staudt en déduit que si A, B, C, D sont quatre éléments quelconque d'une forme élémentaire, alors

$$ABCD = BADC$$

54. „Wenn M, A, B, A_1, B_1 fünf Elemente eines und desselben einförmigen Gebildes sind, so ist entweder $MM.AB_1.A_1B$ eine Involution oder es gibt ein von M verschiedenes Element N , so dass $MN.AB_1.A_1B$ eine Involution ist. Im erstern Falle haben die zu einander projektivischen Gebilde $MAB\dots$, $MA_1B_1\dots$ nur das Element M , in letztern aber, [...] auch noch das Element N entsprechend gemein.“ [Staudt, 1857, 145]

55. „Der Inbegriff von vier Elementen A, B, C, D eines und desselben Elementargebildes, mit Rücksicht auf die Ordnung, in der dieselben angeschrieben werden, und mit Rücksicht auf das Elementargebilde selbst, soll ein Wurf heissen. Es ist hiernach nicht nur der Wurf $ABCD$ von dem Wurf $ABDC$ sondern auch, im Falle zwei nicht in einander liegende Elementargebilde die Elemente $ABCD$ mit einander gemein haben, der Wurf $ABCD$ in dem einen von dem Wurf $ABCD$ in dem andern zu unterscheiden.“ [Staudt, 1856, 15]

puisque il existe une correspondance projective de la forme élémentaire avec elle-même telle que les éléments A, B, C, D correspondent aux éléments B, A, D, C . De même,

$$ABCD = CDAB = DCBA.$$

Un jet $ABCD$ est dit harmonique si A, B, C, D est une forme harmonique. Deux jets harmoniques sont donc égaux. Etant donné un jet U et trois éléments A, B, C d'une même forme élémentaire, alors il existe un élément D de cette forme telle que $U = ABCD$.

Von Staudt distingue les jets propres et impropres. Si A, B, C, D sont des éléments différents d'une forme élémentaire, $ABCD$ est un jet propre. Trois éléments différents d'une même forme élémentaire définissent plusieurs espèces de jet impropre : $ABCA$ ou $BAAC$ sont des jets impropres de première espèce. De tels jets seront désignés par le signe 0.⁵⁶ $ABCB$ ou $BABC$ sont des jets impropres de seconde espèce. De tels jets sont désignés par le signe 1. Enfin, les jets impropres $ABCC$ ou $CCAB$ sont dits de troisième espèce et seront désignés par le signe ∞ . Les signes 0, 1, ∞ ne sont que des désignations arbitraires ; ils ne représentent en aucune manière des valeurs numériques. Par contre, von Staudt montrera la pertinence du choix de ces signes lorsque il montrera leur fonction dans le calcul algébrique des jets qu'il va développer et lorsque plus tard, il associera à chaque jet une valeur numérique.

5.2 L'addition des jets

Von Staudt définit alors géométriquement une opération sur les jets qu'il désigne comme une addition. Etant donné deux jets U et U_1 et A, B, C trois éléments d'une même forme élémentaire. Soit D, D_1 les éléments de la forme tels que $ABCD = U$ et $ABCD_1 = U_1$ et S le point défini comme correspondant à A dans l'involution $CC.DD_1$. Par définition, le jet $ABCS$ est défini comme la somme des jets U et U_1 :

$$ABCS = ABCD + ABCD_1 = U + U_1.$$

Comme les involutions sont conservées par les correspondances projectives, la définition de la somme $U + U_1$ ne dépend donc ni du choix des éléments A, B, C , ni de la forme élémentaire.

Von Staudt montre alors que l'opération ainsi définie vérifie les mêmes propriétés que l'addition des nombres. Toutes les démonstrations reposent sur les propriétés des involutions. Ainsi, il déduit immédiatement de la définition de l'addition des jets que

$$U + U_1 = U_1 + U.$$

De même, si l'élément D coïncide avec l'élément A , alors par construction l'élément S coïncide avec l'élément D et «donc, si l'un des deux jets est = 0, alors leur somme est égale à l'autre jet»⁵⁷. La somme de m jets définie comme le résultat de $m - 1$ sommes successives de deux jets :

⁵⁶. Von Staudt précise que les jets $ABCA$ et $BAAC$ bien que non projectifs doivent quand même être considérés comme égaux.

⁵⁷. „Wenn also der eine von zwei Würfeln = 0 ist, so ist ihre Summe dem andern gleich.“ [Staudt, 1857, 167]

Si on remplace deux quelconques jets parmi les m jets $U, U_1, U_2, \dots, U_{m-1}$ par leur somme, on a un jet de moins qu'auparavant. Si on poursuit jusqu'à ce que l'on ait plus qu'un jet, alors celui-ci est la somme des m jets.⁵⁸

Bien entendu, cette définition amène von Staudt à montrer que la notion de somme de jets ne dépend pas de l'ordre de sommation ou des permutations entre les jets ; le cas général des sommes de m jets se déduit immédiatement à partir l'égalité :

$$(U + U_1) + U_2 = (U + U_2) + U_1.$$

Von Staudt montre que si un des trois jets est impropre de première espèce ($= 0$) ou si $U_1 = U_2$, l'égalité précédente est évidente. Le cas général (lorsque les trois jets ne sont pas impropres de première espèce et sont tous différents les uns des autres) en considérant les éléments A, B, C, D_1, D_2, P, Q d'une forme élémentaire tels que :

$$ABCD = U, ABCD_1 = U_1, ABCD_2 = U_2$$

$$ABCP = U + U_1, ABCQ = U + U_2.$$

La relation projective entre $CD_1P \dots$ et $CD_2Q \dots$ est la composée des deux involutions $CC.D_1D.PA$ et $CC.DD_2.AQ$ et n'a donc qu'un seul point double C . En effet, si elle admettait un autre point double F , les deux involutions s'écriraient $CC.DD_1.FG$ et $CC.DD_2.FG$ et donc D_1 et D_2 seraient confondus. Or si la relation projective entre $CD_1P \dots$ et $CD_2Q \dots$ n'a qu'un seul point double, alors d'après la propriété générale des involutions⁵⁹, $CC.D_1Q.D_2P$ est une involution, d'où :

$$ABCQ + ABCD_1 = ABCP + ABCD_2$$

soit

$$(U + U_2) + U_1 = (U + U_1) + U_2.$$

Von Staudt poursuit l'étude de l'addition des nombres en montrant qu'elle admet une opération inverse : deux jets U et U_1 définissent un troisième jet U_2 tel que $U = U_1 + U_2$. De même, l'addition possède une propriété de régularité, à savoir que si $U_1 + U_2 = V_1 + V_2$ et $U_1 = V_1$, alors $U_2 = V_2$.

Lorsque l'on considère l'involution $CC.AB.DE$, il est clair que $ABCE = BACD$ et que d'après la définition de l'addition des jets, $ABCD + ABCE = ABCB = 1$; la somme $ABCD + BACD$ est donc égale à un jet de seconde espèce.

La démonstration des propriétés des jets opposés et des jets harmoniques repose sur un lemme général : soit une involution $CC.BD.AE$ et soit P un élément quelconque de la même forme élémentaire, alors

$$ABCP + EDCP = ABCE = EDCA$$

$$ABCP = DECP + ABCD = DECP + EDCB.$$

La seconde égalité s'obtient en utilisant le fait que la relation projective entre $CAB \dots$ et $CDE \dots$ n'a qu'un seul point double (puisque $CC.BD.AE$ est une

58. „Setzt man für irgend zwei von m Würfeln $U, U_1, U_2, \dots, U_{m-1}$ ihre Summe, so hat man einen Wurf weniger als vorher. Fährt man so fort, bis man nur noch einen Wurf hat, so ist dieser die Summe der m Würfe.“ [Staudt, 1857, 168]

59. Voir p. 19

involution). Si l'on désigne par P l'homologue de N dans cette correspondance projective, il est évident que la correspondance projective entre $ACN\dots$ et $DCP\dots$ n'a aussi qu'un seul point double et donc que $CC.AP.ND$ est une involution.⁶⁰ Il s'ensuit d'après la définition de l'addition des jets que

$$ABCD + ABCN = ABCP = ABCD + DECP.$$

Deux éléments dont la somme est égale à un jet de première espèce sont dits opposés. Cette dénomination est consistante avec le choix du signe 0 pour désigner les jets de première espèce. Lorsque l'on considère une involution $CC.BD.AE$ sur une forme élémentaire, il vient en appliquant le lemme précédent dans le cas $P = A$

$$ABCA = 0 = DECA + EDCB.$$

En particulier si les jets U, V sont respectivement opposés aux jets U_1, V_1 et si $U + V = W$, alors $U = W + V_1$ et $V = W + U_1$.

Lorsque $ABCD$ est un jet harmonique (c'est-à-dire en termes d'involution $CC.BD.AA$) et P un élément quelconque de la forme élémentaire, une application immédiate du lemme général précédent donne :

$$ABCA = 0 = ABCP + ADCP.$$

Cette dernière égalité dans le cas où l'élément P coïncide avec D montre que $ABCD + ADCA = 0$ et donc qu'un jet harmonique est opposé au jet impropre de seconde espèce.

Von Staudt déduit des propriétés de l'addition des jets la notion de multiplication d'un jet par un nombre entier naturel : la somme de m jets égaux au jet U sera notée mU . Cette nouvelle opération vérifie immédiatement les propriétés de distributivité que l'on attend :

$$m(U + U_1) = mU + mU_1, \quad (m + n)U = mU + nU.$$

De plus, si $U = U_1$, alors $mU = mU_1$, si $U = 0$, alors $mU = 0$ et si U et U_1 sont opposés, alors mU et mU_1 le sont aussi.

La donnée de trois éléments d'une même forme élémentaire définit sur celle-ci une suite d'éléments qui représente la suite des entiers⁶¹ ; étant donné trois éléments (réels) C, A, A_1 d'une forme élémentaire (réelle), on définit la suite d'éléments $C, A, A_1, A_2, A_3, A_4 \dots$ en posant que $CAA_1A_2, CA_1A_2A_3, CA_2A_3A_4$, etc. sont des jets harmoniques. Par construction, la relation projective entre $CAA_1 \dots$ et $CA_1A_2 \dots$ associe à l'élément A_k l'élément A_{k+1} . La suite $CAA_1A_2A_3 \dots A_{r-1}A_r$ correspond donc à la suite $CA_1A_2A_3A_4 \dots A_rA_{r+1}$; comme C, A, A_1, A_2 est une forme harmonique, la relation projective $CAA_1 \dots, CA_1A_2 \dots$ qui est identique à la relation $CAA_r \dots, CA_1A_{r+1} \dots$ n'a qu'un seul point double et $CC.A_{r+1}A.A_1A_r$ est une involution. On en déduit donc, B étant un élément différent de A ,

$$ABCA_{r+1} = ABCA_1 + ABCA_r$$

60. Tous ces arguments reposent encore sur la propriété fondamentale des involutions (p. 19).

61. Comme on le verra dans ce qui suit, la plupart des propriétés de l'addition des jets s'étendent aux éléments imaginaires d'une forme réelle et même aux éléments d'une forme élémentaire imaginaire. Von Staudt n'établit cette propriété que dans le cas des éléments réels d'une forme élémentaire réelle.

et plus généralement,

$$ABCA_m = m(ABCA_1).$$

En particulier, le jet AA_1CA_m est égal à m fois le jet impropre 1, et réciproquement le jet impropre 1 est égal à m fois le jet AA_mCA_1 .

L'addition des jets est définie à partir d'un cas particulier de relations projectives, les involutions; von Staudt montre que la notion d'addition des jets permet de définir des relations projectives: étant donné trois éléments E, D, C d'une forme élémentaire g et trois éléments A_1, B_1, C_1 d'une forme élémentaire g_1 . Soit U un jet, von Staudt définit une relation entre g et g_1 en posant que l'élément P de g correspond à l'élément P_1 de g_1 si

$$EDCP + A_1B_1C_1P_1 = U.$$

Pour montrer que cette relation est projective, on définit l'élément A tel que $EDCA = U$; l'élément A correspond donc à l'élément A_1 . Si B est l'élément correspondant de D dans l'involution $CC.AE \dots$, on obtient d'après la première égalité du lemme général, P étant un élément quelconque de g :

$$ABCP + EDCP = ABCE = EDCA = U.$$

On en déduit que $ABCP = A_1B_1C_1P_1$ ce qui montre que la relation est projective.⁶²

5.3 La multiplication des jets

Von Staudt définit une seconde opération sur les jets qu'il va appeler la multiplication des jets. La première définition de cette nouvelle opération que donne von Staudt peut être qualifiée d'algorithmique: soit M, A, N, A_1, A_2 des éléments d'une forme élémentaire, deux jets U, U_1 (dont aucun n'est un jet de première ou de troisième espèce) tels que $MANA_1 = U$ et $MA_1NA_2 = U_1$. «Le jet $MANA_2$ ainsi défini par les jets U, U_1 s'appellera le produit de ceux-ci et sera désigné par UU_1 »⁶³. Une seconde définition géométrique suivra: si $MN.AD.BC$ est une involution alors

$$(MANB)(MANC) = MAND.$$

Les deux définitions sont équivalentes; en effet, $MANC = NDMB = MBND$, d'où $(MANB)(MANC) = (MANB)(MBND) = MAND$ par définition.

Von Staudt utilisera alternativement ces deux définitions pour prouver les propriétés de cette nouvelle opération.

La multiplication des jets est indépendante des représentants choisis et ne dépend pas de l'ordre des jets; en effet, $MANA_1 = U = NA_1MA$ et $MA_1NA_2 = U_1 = NA_2MA_1$ et donc,

$$U_1U = (NA_2MA_1)(NA_1MA) = NA_2MA = MANA_2 = UU_1.$$

62. Von Staudt suppose implicitement que la relation qu'il définit associe les éléments C et C_1 .

63. „Der Wurf $MANA_2$, welcher auf diese Weise durch die Würfe U, U_1 bestimmt, soll das Produkt aus denselben heißen und durch UU_1 bezeichnet werden.“ [Staudt, 1857, 171-172]

La définition de la multiplication des jets entraîne que si un des deux jets est de seconde espèce (=1), alors le produit est égal au second jet, ce qui justifie implicitement le choix du signe 1 pour désigner les jets de seconde espèce.

La notion de produit peut s'étendre à m jets : en effet, la donnée de trois éléments M, A, N d'une forme élémentaire et celle de m jets $U, U_1, U_2, \dots, U_{m-1}$ ($\neq 0, \infty$) définissent sur la forme m éléments A_1, A_2, \dots, A_m tels que

$$MANA_1 = U \quad \text{et pour tout } k, \quad MA_kNA_{k+1} = U_k.$$

«Le jet $MANA_m$ ainsi défini par la donnée des jets s'appellera le produit de ceux-ci.»⁶⁴ Von Staudt résoud alors la question de l'ordre dans lequel on effectue les produits deux à deux lorsque l'on considère un tel produit généralisé :

Si on remplace deux quelconques des m jets par leur produit, on a un jet de moins qu'auparavant. Si on poursuit jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'un jet, alors celui-ci est le produit de l'ensemble des jets. [...] le produit des jets donnés reste le même si on remplace deux facteurs successifs quelconques par leur produit.⁶⁵

Pour cela, il suffit de se convaincre que pour tout k ,

$$MANA_{r+2} = (MANA_r)(MA_rNA_{r+2}).$$

Une fois les premières propriétés du produit établies, von Staudt s'intéresse au comportement des jets impropres par rapport à la nouvelle opération. Il continue à exclure de son étude les jets de troisième espèce ($= \infty$) ; par contre, si un des facteurs d'un produit de jets est un jet impropre de première espèce ($= 0$), alors le produit doit être lui aussi considéré comme égal à un tel jet. En effet, si $U = MANA_1$ et $U_1 = MA_1NM = 0$, alors $UU_1 = MANM = 0$. Enfin si le produit de deux jets est égal à un jet impropre de seconde espèce ($= 1$), ceux-ci seront dits inverses. En particulier, si $U = MANA_1$, alors son inverse est égal à $MA_1NA = NAMA_1$. De plus si un jet est égal à son inverse, soit il est impropre de seconde espèce, soit il est harmonique. En effet, si $MANA_1 = MA_1NA$ soit $A = A_1$ et le jet est de seconde espèce, soit M, A, N, A_1 est une forme harmonique. Cette remarque justifiera plus tard, lorsque von Staudt associera aux jets une valeur numérique, la valeur -1 attribuée aux jets harmoniques.

La notion d'inverse permet d'énoncer une série de propriétés de la multiplication des jets ; ainsi si V_1 est l'inverse de U_1 , V_2 celui de U_2 et si on désigne par U le produit U_1U_2 , on a $UV_1 = U_2$ et $UV_2 = U_1$. Von Staudt précise que l'on doit ici supposer que aucun des deux jets U_1 et U_2 n'est impropre de première espèce ($= 0$) puisque «l'inverse d'un tel élément ne pourrait être qu'un jet de troisième espèce»⁶⁶ qui sont exclus de l'analyse. De même, deux jets U, U_1 dont le second n'est pas un jet impropre de première espèce définissent un troisième jet U_2 tel que $U = U_1U_2$. Le produit d'un jet U par un jet harmonique est égal au jet

64. „Der Wurf $MANA_m$, welcher auf diese Weise durch die gegebenen Würfe bestimmt ist, soll das Produkt aus denselben heissen.“ [Staudt, 1857, 172]

65. „Setzt man für irgend zwei der m Würfe ihr Produkt, so hat man einen Wurf weniger als vorher. Fährt man so fort, bis man nur noch einen Wurf hat, so ist dieser das Produkt aus den sämtlichen Würfeln. [...] das Produkt aus den gegebenen Würfeln [bleibt] dasselbe [...], wenn man für irgend zwei auf einander folgende Faktoren ihr Produkt setzt.“ [Staudt, 1857, 172]

66. „[...] weil das Umgekehrte von einem solchen Wurf nur ein uneigentlicher Wurf III. Art sein könnte.“ [Staudt, 1857, 173]

opposé à U . La multiplication des jets est aussi régulière ; si le jet U_1 qui n'est pas impropre de première espèce est égal au jet W_1 et si le jet U_1U_2 est égal au jet W_1W_2 alors $U_2 = W_2$.

La multiplication des jets vérifie une propriété de distributivité par rapport à l'addition des jets : ainsi, si U, V, V_1 sont des jets quelconques (différents d'un jet impropre de troisième espèce),

$$U(V + V_1) = UV + UV_1.$$

En effet, si $U = ABCD$, $V = ADCE$ et $V_1 = ADCE_1$, alors par définition, $UV = ABCE$ et $UV_1 = ABCE_1$. Si P est l'élément correspondant de A dans l'involution $CC.EE_1$, alors par définition de l'addition, $V + V_1 = ADCP$ et $UV + UV_1 = ABCP$; or $ABCP = (ABCD)(ADCP) = U(V + V_1)$. Plus généralement, si U, V, U_1, V_1 sont des jets quelconques,

$$(U + U_1)(V + V_1) = UV + UV_1 + U_1V + U_1V_1.$$

La multiplication est aussi cohérente avec la multiplication des jets par des entiers : si $ABCA_m = mABCA_1$, alors $(ABCA_1)(AA_1CA_m) = ABCA_m$ où $AA_1CA_m = mAA_1CA_1 = m1$.

De même, que la notion d'addition des jets permettait de définir des relations projectives, von Staudt montre que l'on peut aussi utiliser la multiplication des jets pour définir des relations projectives : soit C, D, A des éléments d'une forme élémentaire g , A_1, B_1, C_1 des éléments d'une forme élémentaire g_1 et soit $U = ABCD$ un jet différent d'un jet impropre de première espèce, alors la relation qui associe l'élément P de g et l'élément P_1 de g_1 tels que $(CDAP)(A_1B_1C_1P_1) = U$ est projective. L'égalité qui définit la relation peut s'écrire de manière équivalente $(A_1B_1C_1P_1) = U(ADCP)$; on a donc

$$A_1B_1C_1P_1 = (ABCP)(ADCP) = ABCP.$$

Von Staudt conclut de cette égalité que la relation est projective.⁶⁷

Von Staudt termine son étude des rapports entre les deux opérations d'addition et de multiplication de jets en montrant que l'on peut résoudre géométriquement des équations du second degré lorsqu'elles sont données sous forme d'un système d'équation :

Deux jets U, V déterminent deux jets $ABCP, ABCQ$ dont la somme est égale au premier des jets donnés et dont le produit est égal au second.⁶⁸

67. Les démonstrations proposées par von Staudt sont toujours très elliptiques mais en général facilement reconstituables. Dans ce cas, comme dans celui de la définition d'une relation projective grâce à l'addition, von Staudt utilise implicitement le fait qu'une relation qui conserve les jets est projective. Von Staudt n'aborde pas cette question et semble considérer que la définition de l'égalité des jets à partir de la notion de relation projective suffit.

Cette propriété s'obtient assez facilement comme un corollaire du théorème fondamental de la géométrie projective. Soit une relation telle que $ABCP = A_1B_1C_1P_1$; il est clair que A et A_1 , B et B_1 ainsi que C et C_1 sont associés par cette relation, ce qui prouve qu'elle est identique à la relation projective qui associe A et A_1 , B et B_1 , C et C_1 puisque les jets $ABCP$ et $A_1B_1C_1P_1$ sont égaux.

68. „Durch zwei Würfe U, V sind zwei Würfe $ABCP, ABCQ$ bestimmt, deren Summe dem erstern und deren Produkt dem letztern der gegebenen Würfe gleich ist.“ [Staudt, 1857, 174-175]

On suppose que la forme élémentaire est une courbe du second ordre et soit $U = ABCD$, $V = ABCE$; on désigne par F l'intersection de la tangente en C et de AD , et par G celle de AC et BE . La droite FG coupe la courbe en deux points P et Q . Par construction, P et Q sont associés dans l'involution $CC.AD$ et donc

$$ABCP + ABCQ = ABCD = U.$$

De même, P et Q sont associés dans l'involution $AC.BE$ et donc

$$(ABCP)(ABCQ) = ABCE = V.$$

6 La valeur numérique des jets et la déduction des coordonnées

6.1 La notion de valeur d'un jet

De la même manière que dans *Geometrie der Lage* [Staudt, 1847], l'analyse des propriétés métriques et focales des coniques était reportée en fin de livre comme une annexe puisque cette partie de la théorie supposait la notion de grandeur, von Staudt précise dans une note en dessous de la table des matières du tome II des *Beiträge zur Geometrie der Lage* [Staudt, 1857] que les paragraphes concernant la valeur des jets et la notion d'abscisse doivent être aussi considérés comme des annexes pour la même raison. En effet, la notion de valeur associée à un jet dépend de la grandeur AB , A et B étant deux points d'une droite et des opérations que l'on peut effectuer sur celle-ci. Etant donné un jet U , deux points propres réels A et B d'une droite, C le point à l'infini de la droite AB et D , le point de cette droite tel que $U = ABCD$, von Staudt définit comme positif ou négatif le quotient AD/AB selon que les segments finis AB et AD sont de même sens ou de sens contraire⁶⁹. La valeur ainsi signée du quotient AD/AB est définie comme la valeur du jet $ABCD = U$. Si $ABCD$ est un jet propre (neutre), sa valeur est donc négative lorsque AC est séparé par BD (en effet dans ce cas puisque C est le point à l'infini, les segments finis AB et AD sont de sens opposés), comprise entre 0 et 1 lorsque AB est séparé par DC et supérieure à 1 lorsque AD est séparé par BC . Von Staudt précise de plus que si le jet $ABCD$ est impropre de première espèce, c'est-à-dire si A et D sont confondus, alors sa valeur sera égale à 0. De même, si le jet $ABCD$ est impropre de seconde espèce, c'est-à-dire si B et D sont confondus, sa valeur est alors égale à 1 et si le jet $ABCD$ est impropre de troisième espèce ou si C et D sont confondus, sa valeur est égale ∞ . Von Staudt n'utilise certes pas de dessin mais use ici d'une interprétation géométrique des valeurs des jets : si C est le point à l'infini et si les points A et B sont fixes, la valeur du jet $ABCD$ parcourt l'ensemble des nombres réels au fur et à mesure que D parcourt la droite (dans le sens ABC).

Le premier point important pour von Staudt est de montrer que la définition de la valeur d'un jet ne dépend pas du représentant choisi. Soit A_1, B_1, C_1, D_1

⁶⁹. Les segments finis AB et AD sont de même sens ou de sens contraire selon que ABC et ADC définissent un même sens ou des sens contraires.

quatre points d'une droite tels que A_1, B_1 sont des points propres réels, C_1 est le point à l'infini de la droite; si $A_1B_1C_1D_1 = ABCD$, la relation projective entre les deux droites qui associe A et A_1 , B et B_1 , C et C_1 , D et D_1 est une similitude puisqu'elle associe les points à l'infini des deux droites.⁷⁰ Il en déduit donc que le rapport de deux segments d'une des droites est égal au rapport des segments correspondants de l'autre droite et ainsi :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{A_1D_1}{A_1B_1}.$$

Von Staudt montre ensuite que la notion de valeur d'un jet est cohérente avec celle de notion d'égalité entre jets et avec les opérations d'addition et de multiplication des jets :

Deux jets propres neutres⁷¹ ont des valeurs égales ou différentes selon qu'ils sont ou ne sont pas projectifs entre eux. Si un jet est la somme de deux jets neutres, alors on obtient aussi sa valeur en additionnant les valeurs des termes de la somme. Si un jet est le produit de jets neutres, alors on obtient sa valeur en multipliant les valeurs des facteurs.⁷²

Étant donné deux jets U et U_1 , on considère sur une droite deux points (propres) A et B , le point à l'infini C et les points D et D_1 tels que :

$$U = ABCD \quad U_1 = ABCD_1.$$

Si S est le point correspondant à A dans l'involution $CC.DD_1$, par définition de la somme, on a $ABCS = U + U_1$ et pour montrer la propriété de cohérence entre les opérations de somme des jets et de somme de valeurs de jets, il faut donc se convaincre que $AD + AD_1 = AS$. Puisque l'involution $CC.DD_1$ admet le point à l'infini comme point double, cette correspondance est donc une congruence et $AD = D_1S$. Von Staudt en déduit donc en utilisant implicitement une relation analogue à celle de Chasles :⁷³

$$AS = AD_1 + D_1S = AD + AD_1.$$

De la même manière, la valeur d'un jet harmonique est égale à -1 . Enfin, si la valeur d'un jet U est égale à u , alors celle du jet opposé $-U$ (qui est aussi égal au produit du jet U par un jet harmonique) est égale à $-u$.

70. Cette définition est posée dans l'annexe de *Geometrie der Lage* :

De la même manière qu'une affinité est un cas particulier de transformation colinéaire, la similitude est un cas particulier d'affinité, et la congruence, un cas particulier de similitude.

„Gleichwie Affinität ein besonderer Fall von collineärer Verwandtschaft ist, so ist Aehnlichkeit ein besonderer Fall von Affinität und Congruenz ein besonderer Fall von Aehnlichkeit.“ [Staudt, 1847, 203]

71. Un jet neutre est un jet qui admet une représentation avec des éléments réels d'une forme élémentaire (voir le paragraphe suivant).

72. „Zwei neutrale eigentliche Würfe haben gleiche oder ungleiche Werthe, je nachdem sie projektivisch oder nicht projektivisch zu einander sind. Ist ein Wurf die Summe von neutralen Würfen, so erhält man auch seinen Werth, wenn man die Werthe der Summanden zu einander addirt. Ist ein Wurf das Produkt aus neutralen Würfen, so erhält man seinen Werth, wenn man die Werthe der Faktoren mit einander multiplicirt.“ [Staudt, 1857, 257]

73. Von Staudt n'évoque jamais lorsqu'il étudie la notion de sens, la question de l'addition des quantités signées.

Von Staudt généralise alors la définition de la valeur d'un jet en retrouvant la définition du birapport.⁷⁴ Le point de départ de Steiner est ainsi réduit à la notion de valeur d'un jet et donc subordonné à la théorie purement géométrique des jets :

Soit A, B, C, D quatre points propres réels situés sur une même droite, alors

$$\frac{AD}{AB} \cdot \frac{CB}{CD}$$

est la valeur du jet $ABCD$.⁷⁵

Si E désigne le point à l'infini de la droite considérée, les jets $ABED$ et $CDEB$ auront respectivement comme valeur AD/AB et CB/CD . Il suffit alors pour obtenir une définition plus générale de la valeur d'un jet de remarquer que $ABCD = BADC = (BADE)(BEDC)$.⁷⁶ Von Staudt identifie sa notion de valeur d'un jet avec celle de birapport utilisée par les autres géomètres. Si les points A, C séparent les points B, D , les conventions adoptées sur le signe des quotients entraînent que l'un des quotients est positif alors que l'autre est négatif et donc la valeur du jet $ABCD$ est négative. La notion de birapport apparaît donc dans une annexe destinée à montrer que la notion de coordonnée projective peut se déduire à partir de la pure géométrie. La notion de birapport est accessoire pour von Staudt et ne saurait en aucun cas être un fondement de la géométrie projective.

La notion de valeur d'un jet se généralise aux jets définis par les droites d'un faisceau de droites. Si l'on considère quatre droites réelles a, b, c, d concourantes en un point réel S , alors la valeur du jet $abcd$ est égale à

$$\pm \frac{\sin(ad) \cdot \sin(cb)}{\sin(ab) \cdot \sin(cd)}$$

selon que les droites a, c sont ou ne sont pas séparées par les droites b, d . Pour justifier cette formule, il suffit de considérer une sécante aux quatre droites qui coupe la droite c au point à l'infini.

6.2 La déduction des coordonnées

Von Staudt déduit à partir de la notion de valeur numérique des jets celle d'abscisse d'un élément dans une forme élémentaire : étant donné A, B, C trois éléments d'une forme élémentaire défini comme un système d'abscisses⁷⁷, l'abscisse d'un élément quelconque P de la forme sera définie comme la valeur du jet $ABCP$. Les abscisses respectives de A, B, C sont respectivement $0, 1, \infty$.

Von Staudt déduit immédiatement de cette définition que si x est l'abscisse d'un élément P par rapport au système d'abscisses (A, B, C) , alors l'abscisse de cet élément par rapport au système d'abscisses (B, A, C) est $1 - x$ et que celle par

74. Von Staudt n'utilise pas le terme de birapport.

75. „Wenn A, B, C, D vier reelle eigentliche Punkte sind, welche in einer und derselben Geraden liegen, so ist $\frac{AD}{AB} \cdot \frac{CB}{CD}$ der Werth des Wurfes $ABCD$.“ [Staudt, 1857, 257]

76. Si un des points est situé à l'infini, le théorème reste valable. Par exemple, si B est à l'infini, $\frac{AD}{CD}$ est la valeur du jet $DCBA = ABCD$.

77. „Abcissensystem“.

rapport au système d'abscisses (C, B, A) est $1/x$. En effet, comme

$$BACP + ABCP = 1,$$

la valeur de $BACP$ est égale à $1 - x$. De même, comme il a été montré que le jet $CBAP$ est l'inverse du jet $ABCP$, la valeur de $CBAP$ est égale à $1/x$.

Inversement, la connaissance des abscisses x, x_1, x_2, x_3 par rapport à un même système d'abscisses de quatre éléments P, P_1, P_2, P_3 permet de calculer la valeur du jet $PP_1P_2P_3$ est égale à :

$$\frac{x - x_3}{x - x_1} \cdot \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_3}.$$

La démonstration de cette formule repose sur la cohérence parfaite⁷⁸ entre les opérations définies sur les jets et les opérations numériques. En effet, comme $ABCP.APCP_3 = ABCP_3$, il s'ensuit que la valeur de $APCP_3$ est x_3/x et donc celle de $PACP_3$ est égale à

$$1 - \frac{x_3}{x}, \quad \text{soit} \quad \frac{x - x_3}{x}.$$

De même, la valeur de $PACP_1$ est égale à $(x - x_1)/x$ et comme $PACP_3 = PACP_1.PP_1CP_3$, on déduit que la valeur de PP_1CP_3 est égale à

$$\frac{x - x_3}{x - x_1}.$$

De la même manière, $P_2P_3CP_1 = CP_1P_2P_3$ a pour valeur

$$\frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_3};$$

la formule se déduit immédiatement de l'égalité $PP_1P_2P_3 = PP_1CP_3.CP_1P_2P_3$.

Von Staudt termine son analyse de la notion d'abscisse en étudiant les effets d'un changement de système d'abscisses et en déduisant une expression analytique des correspondances projectives entre formes élémentaires.

Soit deux systèmes d'abscisses (A, B, C) et (E, F, G) d'une même forme élémentaire. On désigne par x l'abscisse d'un élément P par rapport au système A, B, C , par y l'abscisse du même point P par rapport à (E, F, G) , par e, f, g les abscisses respectives de E, F, G par rapport au système (A, B, C) et par a, b, c celles de A, B, C par rapport au système (E, F, G) . Von Staudt obtient alors les formules suivantes comme corollaire immédiat de la formule générale précédente :

$$y = \frac{f - g}{f - e} \cdot \frac{x - e}{x - g} \quad x = \frac{b - c}{b - a} \cdot \frac{y - a}{y - c}.$$

En particulier, puisque $x = ABCA = 0$, la valeur a de $EFGA$ est égale à :

$$\frac{f - g}{f - e} \cdot \frac{e}{f};$$

De même, les valeurs b de $EFGB$ et c de $EFGC$ sont respectivement égales à :

$$\frac{f - g}{f - e} \cdot \frac{1 - e}{1 - f} \quad \text{et} \quad \frac{f - g}{f - e}.$$

78. Si l'on ne craignait pas l'anachronisme, il faudrait dire l'*isomorphisme*.

Plus généralement, trois éléments E, F, G d'une forme élémentaire et trois nombres e, f, g définissent un système d'abscisses par rapport auquel les abscisses respectives de E, F, G sont e, f, g . L'abscisse x par rapport à ce système d'abscisses d'un élément quelconque P de la forme élémentaire et la valeur y de $EFGP$ vérifient les formules :

$$y = \frac{f-g}{f-e} \cdot \frac{x-e}{x-g} \quad \text{et} \quad x = \frac{gy(f-e) - e(f-g)}{(f-e)y - (f-g)}.$$

Von Staudt déduit de ces formules une équation définissant les relations projectives entre formes élémentaires; soit A, B, C un système d'abscisses d'une forme élémentaire g et E_1, F_1, G_1 un système d'abscisses d'une seconde forme élémentaire g . Soit x l'abscisse d'un élément P de la première forme g et x_1 celle d'un élément P_1 de la forme g_1 . Si l'on considère comme correspondants deux éléments P et P_1 dont les abscisses x et x_1 de ces deux éléments vérifient l'équation

$$\alpha x x_1 - \beta x - \gamma x_1 - \delta = 0,$$

alors, lorsque $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, la relation entre les éléments des deux formes est projective. Il suffit de considérer les éléments A_1, B_1, C_1 de la seconde forme dont les abscisses respectives sont respectivement égales à

$$\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\beta - \delta}{\alpha - \gamma}, \frac{\beta}{\alpha}.$$

On déduit immédiatement des formules précédentes que la valeur du jet $A_1 B_1 C_1 P_1$ est égale à

$$\frac{\gamma x_1 - \delta}{\alpha x_1 - \beta} = x$$

et la correspondance qui associe P à P_1 est donc projective. Réciproquement, toute correspondance projective entre deux formes peut être décrite par une équation du type précédent.

7 Les éléments imaginaires et le calcul des jets

7.1 Les différentes catégories d'éléments imaginaires

Avant même l'exposé de la théorie des jets, l'objectif principal des *Beiträge zur Geometrie der Lage* est indéniablement de produire une théorie des éléments imaginaires fondée sur le même principe que celui adopté dans *Geometrie der Lage*, à savoir tout déduire de la notion de correspondance projective entre formes. Dans *Geometrie der Lage*, von Staudt avait déjà évoqué très brièvement l'intérêt d'introduire la notion de points doubles imaginaires pour les formes involutives n'ayant pas de points doubles réels :

Si dans un théorème, deux éléments apparaissent comme des éléments doubles d'une forme en involution, alors en règle générale, le théorème peut être interprété plus généralement en faisant abstraction de l'hypothèse selon laquelle le système a deux éléments

doubles. Pour s'en souvenir, on dit d'une forme uniforme en involution dans laquelle aucun élément (réel) n'est associé à lui-même, que ses éléments doubles sont imaginaires.⁷⁹

Dans les *Beiträge*, von Staudt présente une théorie systématique des éléments imaginaires en proposant une manière de désigner les éléments doubles d'une forme involutive : la donnée d'une forme uniforme involutive, $AA_1.BB_1\dots$ qui n'a pas d'élément double (réel) et à laquelle on associe le sens ABA_1 définit un élément imaginaire de première espèce noté ABA_1B_1 ⁸⁰ S'il est question d'un élément imaginaire ABA_1B_1 d'une forme, on doit donc simplement comprendre que l'on considère quatre éléments réels A, B, A_1, B_1 de la forme tels que A, A_1 soient séparés par B, B_1 puisque l'involution $AA_1.BB_1\dots$ n'admet pas de point double réel. L'élément imaginaire ABA_1B_1 est un point imaginaire si la forme involutive est une ponctuelle, une droite imaginaire de I. espèce si la forme est un faisceau de rayons et un plan imaginaire si la forme est un faisceau de plans. Si la forme involutive $EE_1.FF_1$ coïncide avec la forme involutive $AA_1.BB_1$ et si les sens ABA_1 et EFE_1 sont identiques, alors ABA_1B_1 et EFE_1F_1 désignent le même élément imaginaire. Puisque les formes involutives $AA_1.BB_1\dots$ et $A_1A.B_1B\dots$ coïncident de même que les sens ABA_1 et A_1B_1A ⁸¹, ABA_1B_1 et A_1B_1AB désignent le même élément imaginaire. On comprend alors pourquoi malgré le risque de confusion avec celle des jets, la notation adoptée par von Staudt pour désigner les éléments imaginaires est pertinente ; en effet, d'une part, la donnée de deux paires d'éléments correspondants est une donnée minimale qui d'une part spécifie l'involution et le sens, et qui d'autre part, est invariante par l'involution. Von Staudt obtient donc ainsi une définition des éléments imaginaires en évitant toute considération métaphysique et en n'introduisant qu'une notation héritée de sa théorie des involutions.

ABA_1B_1 désigne aussi le même élément que BA_1B_1A et B_1ABA_1 . Les notations qui correspondent à la même forme involutive mais au sens opposé désignent l'élément imaginaire conjugué ; $A_1BAB_1, BAB_1A_1, AB_1A_1B$ ou B_1A_1BA désignent l'élément conjugué à ABA_1B_1 .

La considération des systèmes réglés en involution (hyperboloïdes à une nappe) permet à von Staudt d'étendre sa définition des éléments imaginaires : un système réglé en involution $aa_1.bb_1$ et le sens aba_1 définissent une droite imaginaire de seconde espèce que l'on désignera par aba_1b_1 . De même que pour les éléments de I. espèce, $aba_1b_1, a_1b_1ab, ba_1b_1a$ et b_1aba_1 désignent la même droite imaginaire de II. espèce et $a_1bab_1, bab_1a_1, ab_1a_1b$ et b_1a_1ba désignent la droite imaginaire conjuguée.

Une fois définis les éléments imaginaires, von Staudt étend à ceux-ci les propriétés d'incidence. On ne peut pourtant pas qualifier cette géométrie de complexe puisque les éléments imaginaires sont définis par paire d'éléments conjugués. Un élément imaginaire ABA_1B_1 est situé sur un élément réel u si les éléments réels A, B, A_1, B_1 sont situés sur u . De manière duale, un élément imaginaire

79. Wenn in einem Satze zwei Elemente als Ordnungselemente eines involutorischen Gebildes erscheinen, so kann derselbe in der Regel dadurch allgemeiner aufgefasst werden, dass man von der Voraussetzung, das involutorische Gebilde habe zwei Ordnungselemente, abstrahirt. Um hieran zu erinnern, sagt man von einem involutorischen einförmigen Gebilde, in welchem kein (reelles) Element sich selbst zugeordnet ist, dass seine Ordnungselemente imaginär seien. [Staudt, 1847, 186]

80. Il ne s'agit pas ici d'un jet mais d'une simple notation désignant un élément imaginaire.

81. Les sens coïncident car la paire A, A_1 sépare la paire B, B_1 .

ABA_1B_1 passe par l'élément réel s si les éléments réels A, B, A_1, B_1 passent par s . Un point imaginaire est donc situé sur la droite réelle qui est le support de l'involution qui le définit, il est aussi situé dans chaque plan qui contient cette droite. De même, une droite imaginaire de I. espèce est située dans un plan réel, celui qui contient le faisceau involutif qui définit la droite; elle passe aussi par un point réel, le centre de ce même faisceau. Par contre, une droite imaginaire de II. espèce n'est pas située dans un plan réel et ne passe par aucun point réel. En particulier, un élément réel qui passe par un élément imaginaire passe aussi par l'élément imaginaire conjugué et de manière duale, un élément réel situé dans un élément imaginaire est aussi contenu dans l'élément imaginaire conjugué. Une fois établies les règles d'incidence entre un élément réel et un élément imaginaire, von Staudt énonce les règles d'incidence entre éléments imaginaires ce qui lui permet d'étendre aux éléments imaginaires les notions de projection (à partir d'un élément réel) ou de section (par un élément réel); par exemple, un point imaginaire ABA_1B_1 sera dit situé dans un plan imaginaire EFE_1F_1 si

1. le support réel u du point imaginaire coïncide avec l'axe réel s du plan (c'est-à-dire l'axe du faisceau involutif de plans qui définit le plan imaginaire) ou
2. la ponctuelle involutive $AA_1.BB_1\dots$ et le faisceau de plans $EE_1.FF_1\dots$ sont en perspective et si de plus les sens ABA_1 et EFE_1 coïncident.

À partir de ces relations, on peut définir la projection d'un point imaginaire à partir d'une droite réelle : le point imaginaire ABA_1B_1 est projeté à partir d'une droite réelle s (qui n'est pas située dans un même plan réel que le point imaginaire) par le plan imaginaire $s(A)s(B)s(A_1)s(B_1)$ où $s(A)$ désigne le plan qui projette le point réel A à partir de la droite réelle s . De manière duale, un plan imaginaire EFE_1F_1 sera intersecté par une droite réelle u qui n'a pas de point réel commun avec le plan au point imaginaire $u(E)u(F)u(E_1)u(F_1)$ où $u(E)$ désigne le point d'intersection du plan E et de la droite u ⁸². Von Staudt définit de manière analogue les relations d'incidence entre points imaginaires et droites imaginaires de I. espèce, ainsi que les notions de projection d'un point (ou d'une droite de I. espèce) imaginaire à partir d'un point réel et d'intersection d'un plan (ou d'une droite de I. espèce) avec un plan réel.

De même, une droite imaginaire ghg_1h_1 de II. espèce passe par le point imaginaire ABA_1B_1 si la ponctuelle involutive $AA_1.BB_1\dots$ est contenue dans le système involutif $gg_1.hh_1\dots$ et si les sens ABA_1 et ghg_1 coïncident.⁸³ De même, la droite imaginaire ghg_1h_1 de II. espèce sera située dans le plan imaginaire EFE_1F_1 si le faisceau involutif de plans $EE_1.FF_1\dots$ est contenu dans le système involutif $gg_1.hh_1\dots$ ⁸⁴

82. Von Staudt note le plan imaginaire qui projette le point ABA_1B_1 à partir de la droite s , $s(ABA_1B_1)$ et le point d'intersection de EFE_1F_1 et de la droite u , $u(EFE_1F_1)$.

83. Un hyperboloïde à une nappe (un système réglé) est engendré par deux systèmes de droites. Chaque droite d'un système coupe chaque droite de l'autre. Le système involutif $gg_1.hh_1\dots$ est constitué par un de ces deux systèmes. La droite qui supporte la ponctuelle involutive $AA_1.BB_1\dots$ appartient donc à l'autre. Si l'on désigne respectivement par a, b, a_1, b_1 les quatre droites du premier système qui passent par les points A, B, A_1, B_1 , dire que la droite ghg_1h_1 passe par le point ABA_1B_1 signifie donc que $gg_1.hh_1\dots$ et $aa_1.bb_1\dots$ désignent la même involution.

84. Etant donné un hyperboloïde à une nappe, chaque plan qui passe par une droite d'un des systèmes de droites qui engendrent l'hyperboloïde passe aussi par une droite de l'autre système et est tangent à l'hyperboloïde au point d'intersection de ces deux droites. L'axe du faisceau involutif $EE_1.FF_1$ est une droite de l'autre système que celui qui constitue le

Von Staudt termine l'exposé de la géométrie des éléments imaginaires en étendant à ceux-ci les considérations d'incidence. Ainsi, deux points imaginaires définissent une droite imaginaire de I. espèce ou de II. espèce selon qu'ils appartiennent à un même plan réel ou non. Comme la définition des formes élémentaires et la théorie de l'involution sont des conséquences des propriétés d'incidence des éléments, celles-ci s'étendent aux éléments imaginaires.

7.2 La généralisation de la définition des jets et des opérations sur les jets

La définition des jets s'étend aux éléments imaginaires. Von Staudt qualifie de *neutres* les jets qui admettent une représentation réelle (par des éléments réels).⁸⁵ En particulier, étant donné trois éléments réels A, B, C d'une forme élémentaire, le jet $ABCD$ est neutre si et seulement si D est réel. Si D_1 est l'élément imaginaire conjugué de D , les jets $ABCD$ et $ABCD_1$ sont dits conjugués entre eux. La définition des opérations sur les jets et l'essentiel de leurs propriétés se généralisent aux jets imaginaires. De plus, si U et V sont conjugués aux jets U_1 et V_1 , alors la somme $U + V$ est conjuguée de la somme $U_1 + V_1$; de même pour les produits UV et U_1V_1 . En particulier, la somme et le produit de deux jets conjugués entre eux est un jet neutre. La somme et le produit de deux jets neutres est un jet neutre; le produit d'un jet neutre ($\neq 0$) par un jet non-neutre est un jet non-neutre.

Von Staudt construit l'algèbre des jets en soulignant l'analogie avec celle des nombres complexes. Ainsi, il établit que si U, V, U_1, V_1 sont des jets neutres, J un jet non-neutre et si $U + VJ = U_1 + V_1J$, alors $U = U_1$ et $V = V_1$. La démonstration repose sur les propriétés de régularité de l'addition des jets et est donc similaire à la preuve de la proposition analogue des nombres complexes; soit V_2 le jet neutre vérifiant $V = V_1 + V_2$, comme $U + V_1J + V_2J = U_1 + V_1J$, $U + V_2J = U_1$ et donc V_2J est un jet neutre; comme V_2 est neutre et J non-neutre, il s'ensuit que $V_2 = 0$. Réciproquement, la donnée d'un jet non-neutre J et d'un jet quelconque W définit deux jets neutres U, V tels que $W = U + VJ$.

7.3 Puissances de jets et l'introduction des nombres complexes

Von Staudt définit la puissance m^e du jet U comme le produit de m jets tous égaux à U . Toute puissance d'un jet neutre est un neutre et les puissances de deux jets conjugués sont conjuguées. Une puissance d'un jet harmonique

système involutif $gg_1.hh_1\dots$. Si on note e, e_1, f, f_1 les droites de ce système contenues dans les plans E, E_1, F, F_1 , dire que la droite ghg_1h_1 est située dans le plan EFE_1F_1 signifie donc que $gg_1.hh_1\dots$ et $ee_1.ff_1$ désignent la même involution.

⁸⁵ Von Staudt utilise de temps en temps le qualificatif de *non-neutre* pour désigner les jets qui n'admettent aucune représentation réelle et réserve celui d'*imaginaire* aux jets définis à l'aide d'éléments imaginaires. Un jet défini par des éléments imaginaires peut être neutre. En effet, un tel jet peut admettre une représentation réelle. Von Staudt montre par exemple que si $ABCD$ est un jet harmonique et si A_1, B_1, C_1, D_1 sont les éléments conjugués de A, B, C, D le jet $A_1B_1C_1D_1$ est aussi harmonique.

est soit un jet harmonique, soit un jet impropre de seconde espèce ($= 1$) selon que la puissance est impaire ou paire. En effet, si $MANB$ est harmonique, $MN.AA.BB$ est une involution. Comme $MANB = MBNA$, $(MANB)^2 = (MANB)(MBNA) = MANA$ ce qui montre que $(MANB)^2 = 1$. Von Staudt généralise cette propriété en en déduisant que les puissances de deux jets opposés sont des jets égaux ou opposés selon que la puissance est paire ou impaire. Si une puissance d'un jet U est un jet impropre de seconde espèce ($= 1$), alors le jet inverse et le jet conjugué de U possèdent aussi cette propriété.

Après avoir établi ces propriétés qui illustrent l'identité de l'algèbre des jets et de celle des nombres, von Staudt montre qu'«un jet $MANC$ qui n'est pas égal à 0 détermine deux jets opposés entre eux $MANB$, $MANB_1$ tels que $(MANB)^2 = (MANB_1)^2 = MANC$ »⁸⁶. La démonstration s'appuie de nouveau sur les propriétés des éléments doubles d'une involution; en effet si $(MANP)^2 = MANC$, comme $MANP = MPNC = NCMP$, P est un élément double de l'involution $MN.AC\dots$. Réciproquement, les éléments doubles B, B_1 de cette involution vérifient $(MANB)^2 = (MANB_1)^2 = MANC$. De plus, comme $MANB_1 = (MANB)(MBNB_1)$ et que $MBNB_1$ est un jet harmonique, les deux jets $MANB$ et $MANB_1$ sont opposés. Lorsque $MNAC = 1$, c'est-à-dire lorsque A et C coïncident, l'un des deux jets ainsi définis est $= 1$ et l'autre harmonique; si $MANC$ est un jet neutre et si les éléments M, N ne sont pas séparés par les éléments A, C , les deux jets $MANB$ et $MANB_1$ sont neutres. Si au contraire, $MANC$ est non-neutre ou si $MANC$ est neutre et M, N sont séparés par A, C , les deux jets $MANB$ et $MANB_1$ sont non-neutres.

Von Staudt propose de désigner par $+i$ et $-i$ les jets dont le carré est un jet harmonique. Plus généralement, si v est un nombre réel quelconque, vi désigne le jet obtenu par la multiplication du jet dont la valeur est égale à v par celui désigné par $+i$. De même, tout jet W ($\neq \infty$) détermine deux jets U, V tels que $W = U + Vi$. Cette propriété permet à von Staudt de définir la valeur d'un jet non-neutre. Si u est la valeur du jet U et v celle de V , alors $u + vi$ est la valeur du jet W . Cette définition est compatible avec l'égalité, l'addition et la multiplication des jets.

Von Staudt donne une interprétation géométrique de la définition de la valeur des jets à l'aide des points cycliques. Cette interprétation lui permet d'introduire la notation trigonométrique des nombres complexes :

Soit B, Q, R trois points réels d'un cercle, M celui des deux points imaginaires en lequel le cercle coupe la droite à l'infini du plan qui est situé dans le sens BQR et N celui qui est situé dans le sens BRQ . Si on désigne par ϕ l'arc BQ qui est une partie de l'arc BQR , alors $\cos \phi + i \sin \phi$ est la valeur du jet $MBNQ$.⁸⁷

86. „Durch jeden Wurf $MANC$, welche nicht $= 0$ ist, sind zwei einander entgegengesetzte Würfe $MANB$, $MANB_1$ bestimmt, so dass $(MANB)^2 = (MANB_1)^2 = MANC$ ist.“ [Staudt, 1857, 177]

87. „Wenn B, Q, R drei reelle Punkte eines Kreises sind, so liegt der eine M von den beiden imaginären Punkten, in welchen der Kreis die unendliche ferne Gerade der Ebene schneidet, im Sinne BQR und der andere N im Sinne BRQ . Bezeichnet man nun den Bogen BQ , welcher von dem Bogen BQR ein Theil ist, durch ϕ , so ist $\cos \phi + i \sin \phi$ der Werth des Wurfs $MBNQ$.“ [Staudt, 1857, 260-261]

8 La réception de la théorie des jets

Les méthodes géométriques de von Staudt ont eu une réception assez faible ; ses livres n'ont connu que très peu de traductions⁸⁸. Même si de nombreux auteurs font référence à son projet d'exposer la géométrie sans faire appel à la mesure, la plupart signale la difficulté du texte et du style d'exposition de von Staudt. Hankel y voit les raisons de la faible diffusion des travaux de von Staudt :

Son petit *Geometrie der Lage* 1847 est un chef d'œuvre classique dont la reconnaissance et la diffusion ont été malheureusement tellement retardées par la brièveté de l'exposé, par le manque d'explications complémentaires et par le caractère extrêmement abstrait de sa méthode que l'auteur, mort en 1867, n'était plus là pour assister à la véritable période de sa gloire.⁸⁹

Theodor Reye dont une des ambitions est d'exposer la théorie de von Staudt de manière pédagogique pour des ingénieurs précise dans l'introduction de son traité *Die Geometrie der Lage* [Reye, 1866] que le livre de von Staudt n'est pas destiné aux débutants et que le style d'exposition de von Staudt est très elliptique :

[Ce livre] se signale en particulier par la concision de la formulation et par un exposé très serré, presque laconique ; seul, le nécessaire est dit, un mot d'explication est rarement ajouté et il reste au lecteur abandonné à lui-même à se former pour les théorèmes posés dans la plus grande généralité des exemples plus facilement intelligibles.⁹⁰

Néanmoins, peu après la discussion initiée par Klein [1873] au sujet de la démonstration du théorème fondamental de la géométrie, une série d'articles de Lüroth [1873, 1875, 1876], Sturm [1875] et Schröder [1876] reprend et approfondit la théorie des jets. Après avoir souligné l'analogie entre le calcul des jets et celui des nombres, Lüroth annonce les développements qu'il donne à la théorie des jets, entre autre l'introduction de la notion de jets positifs et négatifs et la preuve d'un analogue du théorème fondamental de l'algèbre :

Je me permets dans la suite d'exposer rapidement comment grâce à l'introduction appropriée de nouveaux concepts, cette analogie peut être poursuivie plus loin jusqu'à la démonstration du théorème : une fonction entière de degré n d'un jet s'annule pour n jets. Comme cette démonstration est donnée sans introduire la notion de mesure et celle de nombre (à l'exception des nombres entiers positifs et de la fraction $\frac{1}{2}$ comme coefficients et exposants), elle peut donner les

88. La *Geometrie der Lage* est traduite en 1889 en italien par M. Pieri avec une introduction de C. Segre.

89. „Seine kleine „Geometrie der Lage“ 1847 ist ein klassisches Meisterwerk, dessen Anerkennung und Verbreitung durch die grosse Kürze des Vortrages, durch den Mangel aller erläuternden Zusätze und durch den äussert abstracten Charakter seiner Methode sich leider so sehr verzögerte, dass der 1867 verstorbene Verfasser die eigentliche Periode seines Ruhmes nicht mehr erlebt hat.“ [Hankel, 1875, 29]

90. „Es zeichnet sich namentlich aus durch eine merwürdige Knappheit des Ausdrucks und eine sehr gedrängte, beinahe wortkarge Darstellung ; nur das Nothwendige wird gesagt, selten ein erläuterndes Wort hinzugefügt, und dem Leser bleibt es überlassen, zu den in ihrer ganzen Allgemeinheit aufgestellten Sätzen sich leichter fassliche Beispiele selbst zu bilden.“ [Reye, 1866, VII-VIII]

fondements d'une théorie purement géométrique des courbes et des surfaces algébriques.⁹¹

Une des améliorations apportées par Lüroth à la théorie des jets de von Staudt est l'introduction d'une notion d'ordre ; il motive l'introduction de la notion de jets positifs et négatifs par l'analogie avec les nombres. Un jet $(abcd)$ composé de quatre éléments réels sera appelé *négatif* si les éléments ac sont séparés par les éléments bd et *positif* dans le cas contraire.

Par rapport aux changements de ces déterminations dans les calculs, les jets se comportent comme les nombres positifs ou négatifs. Ainsi, le produit de deux jets négatifs est un jet positif.⁹²

De la même manière, le produit d'un jet négatif et d'un jet positif est un jet négatif, celui de deux jets positifs est positif ; l'addition des jets vérifie les propriétés attendues : la somme de deux jets positifs est un jet positif ; Lüroth précise aussi que la somme de deux jets négatifs ou de deux jets positifs ne peut être un jet nul. La démonstration de ces propriétés justifie la pertinence des dénominations de jet positif ou négatif et renforce la compréhension de l'isomorphisme entre l'algèbre des jets et celle des nombres. Par contre, alors que dans son article *Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfeln* [Lüroth, 1875], il reprend et précise la théorie des éléments imaginaires de von Staudt, Lüroth ne précise pas qu'avec ses appellations, les jets racines carrées d'un jet négatif sont des jets non-neutres et que ceux d'un jet positif sont neutres, ni qu'un des jets racines carrées d'un jet neutre est positif et l'autre négatif.⁹³ Il montre en admettant explicitement l'axiome de continuité de la droite (et en faisant référence à Dedekind [1872]) que en divisant successivement par 2 un jet positif, on peut obtenir un jet aussi petit que l'on veut.⁹⁴

Il introduit la notion d'ordre sur les jets en posant que le jet u est plus grand que le jet u_1 si le jet $u - u_1$ est positif. Avant d'étudier les fonctions entières de jets, Lüroth précise que le produit d'un jet non-neutre w par le jet conjugué est égal au carré d'un jet positif qu'il appelle la valeur absolue de w . Il précise que si I vérifie $I^2 = -1$, alors tout jet w définit deux jets neutres u et v tels que :

$$w = u + vI \quad \text{et} \quad ww' = u^2 + v^2$$

où w' est le jet conjugué à w .

Comme son ambition est de développer une théorie purement géométrique des courbes algébriques, Lüroth reprend et développe la théorie des jets de von Staudt en montrant systématiquement que l'on peut définir dans l'algèbre des jets les mêmes concepts que ceux de l'analyse. Il obtient ainsi la notion de fonction entière de jets définies à l'aide d'une série :

91. „Ich erlaube mir im Folgenden kurz darzulegen, wie durch passende Einführung neuer Begriffe diese Analogie sich weiter fortsetzen lässt bis zum Beweise des Satzes, dass eine ganze Function n . Grades eines Wurfes für n Würfe verschwindet. Da dieser Beweis ohne Einführung von Maass- und Zahlbegriffen (positive ganze Zahlen und den Bruch $\frac{1}{2}$, als Coefficienten und Exponenten, ausgenommen) geführt ist, so kann er die Grundlage abgeben zur rein geometrischen Theorie der algebraischen Curven und Flächen.“ [Lüroth, 1873, 767]

92. „In Bezug auf die Veränderungen dieser Bestimmungen beim Rechnen verhalten sich [...] die Würfe wie positive oder negative Zahlen. So ist das Product von zwei negativen Würfeln ein positiver Wurf.“ [Lüroth, 1873, 768]

93. C'est d'autant plus surprenant que le résultat est explicitement exprimé par von Staudt (voir [7.3]).

94. [Lüroth, 1875, 197].

Après avoir établi les notions d'addition et de multiplication de jets, la notion de fonction entière d'un jet peut être posée sans avoir besoin d'explications supplémentaires. Puisque les mêmes principes sont valables pour l'addition et la multiplication des jets que pour les opérations numériques correspondantes, on peut mettre, comme avec les nombres, toute fonction entière d'un jet indéterminé x sous la même forme normale, à savoir

$$w_0x^n + w_1x^{n-1} + w_2x^{n-2} + \dots + w_n,$$

où w_0, w_1, \dots, w_n sont des jets donnés.⁹⁵

Un autre type de réception de la théorie des jets s'effectue dans le cadre des discussions autour de l'axiomatisation de la géométrie projective ([Hessenberg, 1905], [Veblen and Young, 1908]). Hessenberg propose un calcul géométrique avec les points d'une droite à partir des deux axiomes d'incidence classiques entre points et droites dans le plan auxquels il ajoute le théorème de Desargues. Il signale que son calcul géométrique est intimement lié à celui de von Staudt ainsi qu'au calcul des segments de Hilbert.

Le calcul développé à partir de ces axiomes est en étroite relation avec deux autres méthodes de calcul géométrique. La première a été introduite par Staudt et poursuivie par M. Lüroth. M. Hilbert a donné la seconde.⁹⁶

Hessenberg considère les intersections d'une droite a avec les six côtés d'un quadrilatère complet. Il nomme un tel système de points la *combinaison du quadrilatère* et montre que ses axiomes suffisent à prouver que la donnée de cinq points d'une telle combinaison détermine le sixième. Cette proposition est en fait le théorème classique de l'involution. L'intérêt de cette présentation est qu'elle n'utilise pas le théorème fondamental de la géométrie projective⁹⁷ et ne nécessite donc pas d'introduire un axiome de continuité. Si $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ désignent les trois paires de côtés opposés du quadrilatère complet, et $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ les six points d'intersection de ces droites avec la droite a , alors lorsqu'on fixe les points A_1, A_2, B_1 , la donnée des deux points C_1, C_2 détermine le point B_2 . Hessenberg note ce résultat sous la forme d'une opération :

$$B_2 = (C_1 C_2).$$

95. „Nachdem die Begriffe der Addition und Multiplication der Würfe festgestellt sind, kann der Begriff einer ganzen Function eines Wurfes aufgestellt werden, der weiter keiner Erläuterung bedarf. Da für Addition und Multiplication von Würfen dieselben Gesetze gelten wie für die betreffenden Zahlenoperationen, so wird man auch jede ganze Function des unbestimmten Wurfes x in dieselbe Normalform bringen können wie bei den Zahlen, nämlich in die

$$w_0x^n + w_1x^{n-1} + w_2x^{n-2} + \dots + w_n,$$

wo w_0, w_1, \dots, w_n gegebene Würfe sind.“ [Lüroth, 1875, 200-201]

96. „Der aus diesen Sätzen zu entwickelnde Calcül steht in enger Beziehung zu zwei anderen geometrischen Rechenverfahren. Das erste ist von von Staudt begonnen und von Herrn Lüroth durchgeführt worden. Das zweite hat Herr Hilbert angegeben.“ [Hessenberg, 1905, 1-2]

97. Hessenberg précise dans l'introduction de son article que pour prouver les propriétés d'associativité, de commutativité et de distributivité des opérations, von Staudt et Lüroth ont besoin du théorème fondamental de la géométrie projective. En fait, la notion d'involution à partir de laquelle ils définissent les opérations sur les jets dépend du théorème de la géométrie projective. Le commentaire de Hessenberg est juste mathématiquement – on peut définir les opérations sur les jets sans faire référence au théorème fondamental – mais inexact historiquement.

Lorsque X parcourt la droite, les points $Y = (CX)$ et $Y' = (XC)$ parcourent aussi la droite. Les éléments A_1 et A_2 se correspondent et si X coïncide avec B_1 , alors Y et Y' coïncident avec C . Cette opération est associative. Par contre, la commutativité est équivalente au théorème de Pappus⁹⁸. Comme les trois axiomes posés par Hessenberg ne sont pas suffisants pour montrer le théorème de Pappus⁹⁹, l'opération définie par Hessenberg n'est donc pas commutative. Hessenberg précise que dans un cas particulier, lorsque A_1 et A_2 coïncident, l'opération devient immédiatement commutative puisque la propriété pour un système de points d'être une combinaison du quadrilatère se conserve lorsque on effectue deux permutations.

A partir de ces considérations générales, Hessenberg définit deux opérations sur les points d'une droite; la première lorsque A_1 et A_2 sont distincts, notée $P = AB$, associative et non commutative sera la multiplication des points; la seconde, lorsque A_1 et A_2 coïncident, notée $S = A + B$, associative et commutative, sera l'addition. Ces deux opérations sont bien entendu identiques à celles définies par von Staudt.

Veblen and Young [1908] reprennent essentiellement le point de vue développé par Hessenberg. Ils reprennent la notion de *combinaison du quadrilatère* et la désignent par *ensemble quadrangulaire* :

L'ensemble des points en lesquels les côtés d'un quadrangle complet rencontrent une droite est appelé un *ensemble quadrangulaire*; il est noté par le symbole $Q(A, B, C; D, E, F)$, ce qui implique que $A, D; B, E; C, F$ sont les intersections des paires de côtés opposés du quadrangle et que A, B, C sont les intersections de AB avec trois côtés concourants du quadrangle.¹⁰⁰

Veblen et Young introduisent à partir de la notion d'ensemble quadrangulaire l'algèbre des points. Ils considèrent sur une droite trois points fixes distincts, notés P_0, P_1, P_∞ et appelés les *points fondamentaux*. Les points fondamentaux déterminent sur la droite l'échelle (P_0, P_1, P_∞) . La donnée d'une échelle sur une droite permet de définir deux opérations sur les points de la droite :

Le point P_{x+y} déterminé par la relation $Q(P_\infty, P_x, P_0; P_\infty, P_y, P_{x+y})$ est appelé la *somme* des deux points P_x et P_y (en symboles $P_x + P_y = P_{x+y}$) dans l'échelle (P_0, P_1, P_∞) sur l . Le point P_{xy} déterminé par la relation $Q(P_0, P_1, P_x; P_\infty, P_{xy}, P_y)$ est appelé le *produit* de P_x par P_y (en symboles $P_x \cdot P_y = P_{xy}$) dans l'échelle (P_0, P_1, P_∞) sur l .¹⁰¹

98. Le théorème de Pappus affirme que si A_1, A_2, A_3 sont trois points d'une droite d et A'_1, A'_2, A'_3 trois points d'une droite d' , alors les points d'intersection de $A_1A'_2$ et $A_2A'_1$, $A_2A'_3$ et $A_3A'_2$, $A_3A'_1$ et $A_1A'_3$ sont alignés. Ce théorème est souvent désigné comme le théorème spécial de Pascal. En effet, le théorème de Pappus est le théorème de Pascal dans le cas particulier où la conique est dégénérée en deux droites.

99. Hessenberg a montré dans un travail précédent que l'on peut montrer le théorème fondamental de la géométrie projective à partir du théorème de Desargues et de celui de Pappus. ([Hessenberg, 1904])

100. "The set of points in which the sides of a complete quadrangle meet a line is called a *quadrangular set*; it is denoted by the symbol $Q(A, B, C; D, E, F)$, which implies that $A, D; B, E; C, F$ are the intersections of pairs of opposite sides of the quadrangle with AB and that A, B, C are the intersections with AB of three concurrent sides of the quadrangle." [Veblen and Young, 1908, 351]

101. "The point P_{x+y} determined by the relation $Q(P_\infty, P_x, P_0; P_\infty, P_y, P_{x+y})$ is called the *sum* of the two points P_x and P_y (in symbols $P_x + P_y = P_{x+y}$) in the scale (P_0, P_1, P_∞) on l . The point P_{xy} determined by the relation $Q(P_0, P_1, P_x; P_\infty, P_{xy}, P_y)$ is called the *product*

En fondant l'algèbre des points d'une droite sur la configuration du quadrilatère complet, Hesse d'une part, Veblen et Young d'autre part en proposent une présentation très géométrique et très élémentaire qui ne repose que sur les propriétés immédiates de cette configuration. Au contraire de von Staudt qui introduit la notion d'involution comme un cas particulier de transformation projective, leurs démonstrations, au moins dans les préliminaires, n'utilisent pas la notion de transformation projective puisqu'ils subordonnent la notion d'involution à la considération des quadrilatères complets.

Remerciements : Je remercie Ralf Krömer et Jean-Daniel Voelke dont la lecture attentive et amicale m'a permis de corriger nombre d'imprécisions.

Références

- Michel Chasles. *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie I*. Bruxelles : Hayez, 1837.
- Richard Dedekind. *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Braunschweig, 1872.
- Jeremy Gray. *Worlds out of Nothing; A Course in the History of Geometry in the 19th Century*. Springer, 2007.
- Hermann Hankel. *Die Elemente der projectivischen Geometrie*. Teubner, Leipzig, 1875.
- Gerhard Hessenberg. Desargues'scher Satz und Centralcollineation. *Archiv der Mathematik und Physik*, 6 : 123–127, 1904.
- Gerhard Hessenberg. Über einen geometrischen Calcul. *Acta Mathematica*, 29 : 1–23, 1905.
- Felix Klein. Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie (zweiter Aufsatz). *Mathematische Annalen*, 6 : 112–145, 1873. Cité d'après Werke 1, [311-343].
- Felix Klein. Nachtrag zu dem „zweiten Aufsatz über Nicht-Euklidische Geometrie“. *Mathematische Annalen*, 7 : 531–537, 1874. Werke 1, 344-350.
- Jacob Lüroth. Ueber das Rechnen mit Würfeln. *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen*, 27 : 767–779, 1873.
- Jacob Lüroth. Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfeln. Darstellung und Erweiterung der v.Staudt'schen Theorie. *Mathematische Annalen*, 8 : 145–214, 1875.
- Jacob Lüroth. Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfeln. (Zweite Abhandlung). *Mathematische Annalen*, 11 : 84–110, 1876.
- Philippe Nabonnand. *Contributions à l'histoire de la géométrie projective*. <http://www.univ-nancy2.fr/poincare/perso/nabonnand/docs/book.ps>, à paraître.

of P_x by P_y (in symbols $P_x.P_y = P_{xy}$) in the scale (P_0, P_1, P_∞) on l ." [Veblen and Young, 1908, 353]

- Theodor Reye. *Geometrie der Lage, Erste Abtheilung*. 1866.
- Ernst Schröder. Ueber v. Staudt's Rechnung mit Würfeln und verwandte Prozesse. *Mathematische Annalen*, 10 : 289–317, 1876.
- Georg von Staudt. *Geometrie der Lage*. Verlag von Bauer & Raspe, Nürnberg, 1847. Trad. it. de M. Pieri, *Geometria di posizione* di Georgio von Staudt avec une présentation des travaux de von Staudt de C. Segre, Turin : Bocca, 1889 ; trad. fr. de P. Nabonnand, à paraître.
- Georg von Staudt. *Beiträge zur Geometrie der Lage, I*. Verlag von Bauer und Raspe, 1856.
- Georg von Staudt. *Beiträge zur Geometrie der Lage, II*. Verlag von Bauer und Raspe, 1857.
- Georg von Staudt. *Beiträge zur Geometrie der Lage, III*. Verlag von Bauer und Raspe, 1860.
- Jacob Steiner. *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*. Berlin, 1832. cité d'après l'édition Ostwald's Klassiker der Exakten Wissenschaften 82 (1^{re}partie) et 83 (2^epartie), Leipzig : Akademische Verlagsgesellschaft M.B.H.
- Rud. Sturm. Ueber die v. Staudt'schen Würfe. *Mathematische Annalen*, 9 : 333–346, 1875.
- Oswald Veblen and John Wesley Young. A Set of Assumptions for Projective Geometry. *American Journal of Mathematics*, 30 : 347–380, 1908.
- Jean-Daniel Voelke. Le théorème fondamental de la géométrie projective : évolution de sa preuve entre 1847 et 1900. *Archives for History of sciences*, 2007.