



HAL
open science

La notion d'holonomie chez Élie Cartan

Philippe Nabonnand

► **To cite this version:**

Philippe Nabonnand. La notion d'holonomie chez Élie Cartan. *Revue d'Histoire des Sciences*, 2009, Regards sur les mathématiques en France entre les deux guerres (coordonné par Liliane Beaulieu), 62, pp.221-245. 10.3917/rhs.621.0221 . hal-01082871

HAL Id: hal-01082871

<https://hal.science/hal-01082871>

Submitted on 14 Nov 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

A paraître dans la *revue d'histoire des sciences* (dans un numéro consacré aux mathématiques française entre deux guerres – éd. Liliane Baulieu).

La notion d'holonomie chez Élie Cartan

Philippe Nabonnand

Archives Poincaré, Université de Nancy 2, 23 Bd. Albert 1^{er}, BP 3397, F-54015 Nancy Cedex

Résumé : A partir de 1922, Élie Cartan développe une théorie originale des connexions. L'objectif de cet article est de montrer que la notion d'holonomie, héritée de la mécanique, joue un rôle central dans le dispositif théorique de Cartan et dans sa genèse.

Mots-clés : Cartan, connexions, holonomie, groupe d'holonomie

Abstract : Élie Cartan elaborated from 1922 an original theory of connections. The aim of this paper is to show how fundamental is the notion of holonomy in Cartan's framework and for its genesis.

Keywords : Élie Cartan, connections, holonomy, holonomy group

Introduction

La théorie des espaces généralisés ou « non-holonomes » de Élie Cartan généralise à la fois la géométrie riemannienne et les principes développés par Felix Klein dans son programme d'Erlangen. D'une part, en définissant la notion de connexion à partir de la notion de changement de repères, Cartan peut envisager de traiter des géométries dont le groupe fondamental est plus général que celui des déplacements euclidiens, d'autre part, en ne considérant que des groupes opérant infinitésimalement, il s'abstrait de la condition d'homogénéité qu'imposait Klein aux espaces. Les espaces de Cartan généralisent les espaces de la géométrie riemannienne de manière analogue à celle dont les espaces de Klein généralisent l'espace euclidien. Ils sont aussi des généralisations des espaces de Klein au même titre que l'espace de Riemann généralisait l'espace euclidien. Ainsi, Cartan qualifie

d'« espace euclidien non holonome », ¹ l'espace riemannien, vu comme généralisation de l'espace euclidien ². Ses méthodes lui permettent de développer non seulement les notions de connexions euclidienne et affine mais aussi celles de connexions conforme et projective – ce qu'il présente comme la supériorité de son point de vue – et de définir des espaces affines, projectifs ou conformes non holonomes.

La lecture des textes de Cartan présente plusieurs difficultés : paradoxalement, la première est que ses idées sont toujours actuelles ; la tentation est grande de les comprendre en les traduisant de manière récurrente dans le langage des fibrés ou des G-structures. ³ La seconde, plus essentielle, est la compréhension profonde des liens, qu'il met en lumière à cette occasion, entre la théorie des groupes de Lie et l'une des techniques essentielles de la tradition française de géométrie française, à savoir la théorie du repère mobile. Hermann Weyl soulignait cette difficulté dans sa recension du livre de Cartan, *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle* ⁴ :

« I must admit that I found the book, like most of Cartan's papers, hard reading. Does the reason lie only in the great French geometric tradition on which Cartan draws, and the style and contents of which he takes more or less for granted as a common ground for all geometers, while we, born and educated in other countries do not share it ? » ⁵

L'objectif de cet article est de montrer l'importance de la notion d'holonomie dans les travaux de Cartan en géométrie différentielle. En particulier, cette notion est essentielle pour comprendre la genèse de ces travaux tant du point de vue de la démarche mathématique de Cartan que de celui de l'analyse des contextes. Dans la première partie, l'origine mécanique

¹ É. Cartan, *La théorie des groupes et les recherches récentes de géométrie différentielle*, *O.C.*, vol. III.1, 894 (1924).

² É. Cartan, *La théorie des groupes de transformations et la géométrie*, *O.C.*, vol. I-2, 847 (1927).

³ L'objectif d'un travail historique n'est sûrement pas de traduire en langage moderne les théories obtenues par les mathématiciens. Néanmoins, pour faciliter la compréhension de la démarche des auteurs, il peut être utile de temps en temps d'exprimer comment un résultat est conçu actuellement. Dans le cas de Cartan, nous nous servons alors du remarquable traité de R. W. Sharpe, *Differential Geometry, Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program* (New York-Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag, 1997).

⁴ Paris ; Gauthier-Villars, 1937.

⁵ Hermann Weyl, *Cartan on Groups and Differential Geometry*, *G.A.*, 4, 595.

de la notion d'holonomie est rappelée. Dès 1910, dans un premier travail, Cartan établit des relations entre la théorie du trièdre mobile de Darboux et celle théorie des groupes de transformations qui avait été jusque là au centre de ses efforts.⁶ Cette première contribution pour importer la notion de groupe de transformations en géométrie différentielle est l'objet de la seconde partie. Dans une troisième partie, je montre comment Cartan se sert de la notion d'holonomie pour caractériser les géométries de Klein comme holonomes et pour motiver l'introduction des espaces généralisés ou non-holonomes. L'holonomie permet à Cartan de mobiliser sa théorie des groupes continus et la théorie du repère mobile de Darboux pour introduire sa définition de la notion de connexion. L'exemple des espaces à connexion projective est développé dans la troisième partie. Nous verrons dans une quatrième partie comment Cartan explique dans sa correspondance avec Hermann Weyl qu'il considère les espaces à connexion qu'il vient de définir comme des « supports de transformations infinitésimales »⁷, posant ainsi la première pierre de la construction de la notion de fibré principal. La dernière partie de cet article est consacrée à l'introduction par Cartan des groupes d'holonomie.

1 La notion d'holonomie en mécanique

Dans la notice sur ses travaux scientifiques (⁸), Élie Cartan précise que le qualificatif de « non-holome » qu'il utilise pour décrire ses nouvelles géométries est lié « à la notion mécanique de liaisons non holonomes ». Dans sa présentation géométrique de la mécanique⁹, Hertz introduit les interactions entre les points d'un système matériel comme des liaisons qui s'expriment analytiquement dans les coordonnées générales du système sous la forme d'équations différentielles du premier ordre :

⁶ É. Cartan, La structure des groupes de transformations continus et la théorie du trièdre mobile, *O.C.*, vol. III-1, p. 145-178 (1910).

⁷ É. Cartan, lettre adressée à H. Weyl le 5 janvier 1930 – archives de l'ETH de Zurich – réf. Hs91 : 503.

⁸ É. Cartan, Notice sur les travaux scientifiques, *O.C.*, vol. I-1, p. 61 (1931).

⁹ H. Hertz, *Die Prinzipien der Mechanik in neuen Zusammenhänge dargestellt*, Leipzig : J. A. Barth, 1894.

$$\sum_{\rho=1}^r p_{\chi\rho} dp_{\rho} = 0, \quad \chi = 1, \dots, k$$

où les fonctions $p_{\chi\rho}$ sont continues des p_i .

Lorsque ces équations sont intégrables et donnent lieu à des équations du type :

$$F_{\chi}(p_1, \dots, p_r) = 0,$$

Hertz qualifie le système d'holonome. Intuitivement, l'holonomie des contraintes astreint le système à se déplacer sur une sous-variété de l'espace. Si les équations différentielles de liaison ne sont pas intégrables, le système est non-holonome. Un exemple de système non-holonome est celui d'une boule roulant sur un plan. Les systèmes holonomes à k degrés de liberté sont caractérisés par le fait que les coordonnées des points du système peuvent s'exprimer sous forme finie en fonction de k paramètres :

$$\begin{aligned} x_v &= \varphi_v(q_1, q_2, \dots, q_k) \\ y_v &= \psi_v(q_1, q_2, \dots, q_k) \\ z_v &= \omega_v(q_1, q_2, \dots, q_k) \\ &\quad (v=1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Dans son traité de mécanique,¹⁰ Appell prend cette propriété comme définition des systèmes holonomes. Dans son *Traité d'énergétique* (1911), Duhem généralise « la dénomination introduite par M. Hertz »¹¹ ; il qualifie de *conditions de liaison holonome*, des équations qui conservent leur valeur quelque soit l'état du système étudié.

« Le cas où les liaisons qui fixent la constitution d'un système ne sont pas holonomes apparaît à l'algébriste, [...] comme le cas général ; les systèmes dont la constitution dépend exclusivement de liaisons holonomes présentent le caractère de systèmes très exceptionnels. Cependant, pendant longtemps, les mécaniciens n'ont eu affaire qu'à ces derniers systèmes ;

¹⁰ P. Appell, *Traité de mécanique rationnelle, 2^e édition entièrement refondue*, vol. 1, Paris : Gauthier-Villars, 1902.

¹¹ Pierre Duhem, *Traité d'énergétique*, Paris : Gauthier Villars, 1911, p. 32.

c'est fort tard que leur attention a été appelée sur les systèmes dont la constitution dépend de liaisons non holonomes. »¹²

Les espaces de Klein peuvent apparaître alors comme holonomes : en 1923, dans son article Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée¹³, Cartan donne l'exemple de la géométrie affine en dimension 3. Il associe à chaque point m de l'espace affine, un système de référence e_1, e_2, e_3 . Un mouvement infinitésimal du point et du repère se traduit par les équations :

$$\begin{aligned} dm &= \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3 \\ de_1 &= \omega_1^1 e_1 + \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 \\ de_2 &= \omega_2^1 e_1 + \omega_2^2 e_2 + \omega_2^3 e_3 \\ de_3 &= \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 + \omega_3^3 e_3 \end{aligned}$$

où les formes ω_i et ω_i^j vérifient les équations (exprimées avec des notations contemporaines) :

$$d\omega^i = \sum_{k=1}^3 \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad d\omega_i^j = \sum_{k=1}^3 \omega_i^k \wedge \omega_k^j$$

Or ces équations de structure expriment que les équations du mouvement sont complètement intégrables. Suivant Cartan, l'espace sera dit holonome ou non-holonome selon que le système des équations de structure du groupe des mouvements infinitésimaux associés est intégrable ou non.

2 Une première contribution liant théorie des groupes de transformations et géométrie différentielle

En 1910, Cartan propose en complément de son étude de la structure des groupes de transformations, un court article dans lequel il se propose de lier sa présentation des groupes continus de transformations sous forme de systèmes de Pfaff et la théorie des trièdres mobiles

¹² *Ibid.*, p. 36.

¹³ É. Cartan, *OC.*, vol. III-1, p. 659-746 (1923).

élaborée par Darboux pour étudier la géométrie des surfaces.¹⁴ Ce travail repose sur un des lemmes centraux de la théorie des groupes de Cartan :

« Étant donné un groupe G fini et transitif à n variables (x_1, x_2, \dots, x_n) et $r \geq n$ paramètres, on peut toujours adjoindre aux n variables données un certain nombre (ici $r - n$) variables auxiliaires y de telle sorte que le groupe G soit formé de l'ensemble des transformations qui laissent invariantes r expressions linéaires aux différentielles totales $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$. »¹⁵

Lorsque G est le groupe des déplacements de l'espace et que l'on adjoint aux coordonnées d'un point trois variables auxiliaires définissant l'orientation d'un trièdre ayant pour sommet le point, alors « les 6 expressions ω ne sont pas autre chose que les composantes par rapport au trièdre mobile du déplacement instantané de ce trièdre quand on donne aux 6 variables des accroissements infiniment petits arbitraires »¹⁶. Plus précisément, on associe à chaque point de \mathbf{R}^3 un repère orthonormé e_1, e_2, e_3 . Le passage de (x, e_1, e_2, e_3) à

$(x + dx, e_1 + de_1, e_2 + de_2, e_3 + de_3)$ est décrit par les équations :

$$\begin{aligned} dx &= \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3 \\ de_1 &= \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3 \\ de_2 &= \omega^1 e_1 + \omega^3 e_3 \\ de_3 &= \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 \end{aligned} \quad (\omega_i^j = -\omega_j^i)$$

où les formes ω vérifient les équations de structure (dites de Maurer-Cartan) du groupe orthogonal (exprimée dans des notations contemporaines) :

$$d\omega^i = \sum_k \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad d\omega_i^j = \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j \quad (1).$$

¹⁴ É. Cartan, La structure des groupes de transformations continus et la théorie du trièdre mobile, *O.C.*, vol. III-1, 145-178 (1910).

¹⁵ *Ibid.*, p. 145.

¹⁶ *Ibid.*, p. 146.

« Les formules de structure du groupe coïncident alors tout simplement avec les équations aux dérivées partielles du premier ordre que M. Darboux a rendues classiques dans la théorie des déplacements à plusieurs paramètres. »¹⁷

Cartan reprend la description géométrique de Darboux des formes ω : les formes (ω^i) représentent les composantes de la *translation instantanée* et les formes (ω_i^j) celles de la *rotation instantanée* du trièdre mobile.

Cartan généralise dans cet article ce raisonnement moyennant « quelques conventions de langage simples »¹⁸ aux autres groupes finis¹⁹. Il évoque cette généralisation dans l'*Analyse de ses travaux* de 1931²⁰ : en chaque point d'un espace « transformé transitivement par un groupe G fini et continu », on considère une famille de repères (R) « telle que deux quelconques d'entre eux puissent être amenés en coïncidence par une transformation et une seule du groupe G ». Chaque repère fournit un système de coordonnées et l'on passe de l'un à l'autre par une transformation du groupe. « La transformation infinitésimale du groupe qui amène en coïncidence deux repères infiniment voisins a , par rapport aux coordonnées associées à R_a des composantes $\omega_i(a, da)$ satisfaisant aux équations de structure du groupe, qui généralisent ainsi les équations de Darboux »²¹.

3 Les espaces non-holonomes

Cartan est amené à s'intéresser à la géométrie différentielle à la suite de l'utilisation par Einstein, Eddington et Weyl de la géométrie riemannienne dans la théorie de la relativité générale. Ses premières contributions des années 1922-23 ont pour objectif explicite de donner une interprétation géométrique du formalisme d'Einstein, en particulier du tenseur

¹⁷ *Ibid.*, p. 146.

¹⁸ *Ibid.*, p. 146.

¹⁹ Cartan reprend la dénomination de Lie : un groupe continu est fini s'il dépend d'un nombre fini de paramètres.

²⁰ É. Cartan, Notice sur ses travaux scientifiques (rédigée en 1931), *O.C.*, vol.I-1, p. 1-98.

²¹ *Ibid.*, p. 63.

d'énergie. Dans l'introduction de son mémoire sur les équations de la gravitation d'Einstein²² (1922), Cartan souligne que ses travaux à partir de 1922 sur les espaces généralisés et les connexions trouvent leur origine dans ses premières considérations sur la théorie d'Einstein : « Ce mémoire a été rédigé il y a plus d'un an. Depuis j'ai publié [...] des Notes relatives à une conceptions géométriques des espaces non-euclidiens. L'idée fondamentale de ces Notes est en germe, sous une forme mi-abstraite, mi-géométrique, dans les premiers et les derniers numéros de ce Mémoire. »²³

De même, Emile Borel, en 1922, dans son rapport sur la candidature de Cartan à l'Académie des sciences de Paris, explique que les méthodes géométriques de Cartan sont en fait des généralisations de celles élaborées par Einstein pour aborder la théorie de la relativité générale :

« M. Cartan a appliqué la méthode géométrique de Darboux à des problèmes qui n'avaient jamais été abordés que par des méthodes analytiques formelles ; il a ainsi étudié le système complet des invariants d'une forme différentielle quadratique à quatre variables. Cette étude ne l'a pas seulement conduit à une interprétation géométrique élégante du tenseur fondamental à quatre dimensions de la théorie d'Einstein, interprétation qui éclaire bien des côtés de cette théorie difficile ; la méthode géométrique suivie par M. Cartan l'a mis sur la voie d'une généralisation qui avait échappé aux nombreux mathématiciens qui s'étaient occupés de ces questions d'un point de vue purement analytique. Il arrive ainsi à attacher à un même ds^2 une courbure nouvelle à laquelle il donne le nom de courbure de translation, ou de torsion par opposition à la courbure ordinaire des espaces de Riemann. »²⁴

Borel fait allusion à la manière dont Cartan applique les équations de structure (1) à un

« espace euclidien *déformé* », c'est-à-dire un espace sur lequel le groupe des déplacements

²² É. Cartan, Sur les équations de la gravitation d'Einstein, *O.C.*, vol. III-1, p. 549-611 (1922).

²³ *Ibid.*, p. 552.

²⁴ Émile Borel, Rapport sur la candidature de Cartan à l'Académie des sciences, 1922, Archives de l'académie des sciences, dossier personnel de É. Cartan.

n'opère plus globalement mais seulement infinitésimalement. Dans une note de 1922 sur les équations de structure des espaces généralisés et l'expression analytique du tenseur d'Einstein²⁵, Cartan reprend son analyse de l'espace euclidien de 1910 et montre comment cette analyse peut s'étendre lorsque cet espace est déformé :

« Imaginons l'ensemble de tous les trièdres trirectangles qui dépendent de six paramètres x_1, \dots, x_6 , dont les trois premiers x_1, x_2, x_3 seront les coordonnées (cartésiennes ou curvilignes) de l'origine. On peut passer d'un de ces trièdres (T) à un trièdre infiniment voisin (T') par un déplacement infiniment petit, réductible à une translation et une rotation. Les composantes $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ suivant les axes du trièdre (T), de cette translation, et les composantes

$$\omega_{23} = -\omega_{32}, \omega_{31} = -\omega_{13}, \omega_{12} = -\omega_{21}$$

suivant les mêmes axes, de la rotation sont, les trois premières, linéaires en dx_1, dx_2, dx_3 , les trois dernières en dx_4, \dots, dx_6 , les coefficients des différentielles dépendant eux-mêmes des six variables x_i . Les expressions de Pfaff ω_i, ω_{ij} [...] satisfont aux relations classiques relatives aux déplacements à plusieurs paramètres [...]

$$(1) \quad \omega'_i = \sum_k [\omega_k \omega_{ki}] \quad \omega'_{ij} = \sum_k [\omega_{ik} \omega_{kj}]^{26}$$

Ce sont les équations de structure de l'espace euclidien. [...]

Cela posé, dans un espace euclidien *déformé*, on aura, pour les composantes ω_i, ω_{ij} des déplacements infiniment petits, des formules analogues à (1), mais non identiques. Elles sont modifiées par l'adjonction de termes complémentaires, qui traduiront la divergence entre l'espace considéré et l'espace euclidien. Les équations de structure prendront la forme

²⁵ É. Cartan, Sur les équations de structure des espaces généralisés et l'expression analytique du tenseur d'Einstein, *O.C.*, III-1, 625-627 (1922).

²⁶ Ces formules sont les équations de structure du groupe de déplacements (voir paragraphe précédent) écrites avec les notations de Cartan. Nous continuons à les indiquer par (1).

$$(1') \quad \omega'_i = \sum_k [\omega_k \omega_{ki}] + \Omega_i \quad \omega'_{ij} = \sum_k [\omega_{ik} \omega_{kj}] + \Omega_{ij},$$

où les Ω_i, Ω_{ij} sont les composantes d'une translation et d'une rotation infiniment petites

[...]; les Ω_i définissent la torsion, les Ω_{ij} la courbure de l'espace.

[...] On conçoit que ce qui a été fait pour le groupe euclidien, dont les équations de structure

(1) sont déformées en (1'), peut se répéter pour n'importe quel groupe, fini ou infini. »²⁷

Comme le montre la fin de la citation, Cartan a développé dès le début de ses travaux de géométrie différentielle en 1921-22 un programme de travail général. Dans l'exposé de ses travaux rédigé en 1922²⁸ lors de sa première candidature à l'Académie des sciences, il expose très clairement son projet en quatre temps :

1) Il rappelle sa présentation de l'espace euclidien de 1910 et les formules (1)

$$(a) \quad \omega'_i = \sum_k \omega_k \omega_{ki} \quad (b) \quad \omega'_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \omega_{kj}$$

en expliquant (sans utiliser alors le terme) qu'elles signifient que l'espace est holonome, c'est-à-dire que « lorsqu'on décrit un contour fermé, les résultantes des translations et des rotations infiniment petites qui font passer du système de référence attaché à un point de contour au système de référence attaché au point infiniment voisin, sont toutes les deux nulles »²⁹.

2) Ensuite, il explique qu'une première généralisation de sa présentation permet de redécouvrir la théorie du parallélisme de Levi-Civita ; décomposer une forme différentielle quadratique quelconque de quatre variables en une somme de carrés $\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2$ « revient physiquement à choisir en chaque événement un système de référence euclidien valable au voisinage immédiat de cet événement »³⁰. Dans le cas euclidien (si la métrique est

²⁷ *Ibid.*, p.625-626.

²⁸ É. Cartan, Exposé de ses travaux (1922), Archives de l'Académie des sciences de Paris, dossier personnel de Élie Cartan.

²⁹ *Ibid.*, p. 59.

³⁰ *Ibid.*, p. 59.

définie positive, les repères associés sont animés de translations décrites par les formes ω_i et de rotations décrites par les formes ω_{ij} .

« Or, on peut toujours, *d'une manière et d'une seule*, déterminer six expressions de Pfaff $\omega_{ij} = \omega_{ji}$ satisfaisant aux relations (a) : il est naturel de dire qu'elles représentent la *rotation* instantanée du système de référence mobile. Seulement les formules (b) ne sont plus valables ; il faut les compléter par l'adjonction dans les seconds membres de termes complémentaires

Ω_{ij} :

$$(b') \quad \omega'_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \omega_{kj} + \Omega_{ij}$$

et qui définissent la courbure de Riemann. [...] On peut interpréter ces formules géométriquement. Considérons un contour fermé infiniment petit : la formule (b') exprime que, lorsqu'on décrit ce contour fermé, la résultante des rotations qui permettent de passer du système de référence au système de référence associé au point infiniment voisin, au lieu d'être nulle comme dans l'espace euclidien, a pour composantes les six quantités Ω_{ij} . »³¹

3) Cartan souligne alors que le choix des formes ω_{ij} , c'est-à-dire celui des rotations instantanée du système de référence mobile, de telle manière que les formules (a) restent valables est celui « qui résulte de la théorie du parallélisme de Levi-Civita ». Il constate en même temps que ce choix n'est pas imposé et que « rien n'empêche théoriquement de le définir autrement et même suivant une loi arbitraire : cela reviendrait à modifier les formules (a) sous la forme plus générale :

$$(a') \quad \omega'_i = \sum_k \omega_k \omega_{ki} + \Omega_i$$

où les Ω_i sont des éléments d'intégrales doubles ; ces quantités définissent une translation instantanée à tout contour fermé infiniment petit. On arrive ainsi à la notion d'une variété

³¹ *Ibid.*, p. 60.

ayant le même ds^2 que précédemment, mais munie d'une courbure nouvelle qu'on pourrait appeler courbure de translation, ou mieux, *torsion* par opposition à la courbure ordinaire des espaces de Riemann. »³²

4) Jusqu'à présent, Cartan a expliqué que sa théorie généralisait les variétés de Riemann. Il évoque alors un autre type d'extension en évoquant la construction d'espaces conformes, affines, projectifs. Il suffit alors de considérer au lieu du groupe euclidien les groupes conformes, affines, projectifs :

« La théorie précédente peut se généraliser en considérant un espace qui serait non euclidien, mais conforme, affine, ou projectif au voisinage de chaque point : la structure de ces espaces est définie par les formules de structure des groupes conforme, affine, projectif, mais modifiées par l'addition de termes complémentaires : ces termes manifestent les divergences qui se produisent, quand on parcourt un contour fermé infiniment petit, entre les propriétés de l'espace considéré et celles d'un espace qui serait rigoureusement, et dans toute son étendue conforme, affine, projectif, etc. »³³

Dès 1922, les intentions de Cartan sont donc de produire une théorie des espaces généralisés et assez rapidement (à partir de ses travaux sur les espaces à connexion projective en 1924), Cartan donne une motivation purement géométrique aux recherches sur les espaces généralisés : unifier les points de vue de Riemann et de Klein.

« Le mouvement d'idées auquel cette théorie [la relativité générale] a donné naissance a conduit, par des généralisations importantes, à des espaces nouveaux ; [...]. Quel rôle la notion de groupe joue-t-elle, ou plutôt doit-elle jouer, dans ce champ nouveau de la Géométrie ; est-il possible de faire rentrer dans le cadre, suffisamment élargi, du programme

³² *Ibid.* p. 61.

³³ *Ibid.*, p. 62.

d'Erlangen toutes les géométries nouvelles et une infinité d'autres, c'est ce que je me propose d'examiner. »³⁴

Cartan souligne le peu de rapports qu'entretiennent la tradition géométrique héritée du programme d'Erlangen de Klein (fondée sur la notion d'égalité géométrique) et celle introduite par Riemann (fondée sur la notion de métrique). L'opinion générale des mathématiciens d'alors est que la notion de groupe de transformations, centrale pour les géométries de Klein, est étrangère à la géométrie des espaces de Riemann. En effet, dans une géométrie de Klein, la transitivité de l'action du groupe sur l'espace implique une propriété d'homogénéité³⁵ de celui-ci que ne vérifient pas les espaces de Riemann. Cependant, les espaces de Riemann possèdent une propriété que Cartan appelle une « sorte d'homogénéité infinitésimale »³⁶ ; autrement dit, le voisinage infinitésimal d'un point peut être assimilé à un voisinage euclidien. En chaque point, la simple donnée de la métrique permet, au moins infinitésimalement, de donner un sens à la notion de rotation. Par contre, la notion de translation n'a pas de sens même infinitésimalement ; en effet, les voisinages infinitésimaux de deux points infiniment proches ne sont pas reliés : certes, on peut considérer chacun d'eux comme des morceaux d'espaces euclidiens mais ces morceaux ne sont pas connectés. La donnée seule de la métrique ne suffit pas à donner un sens à la notion de translation. Pour cela, il faut pouvoir regarder les morceaux d'espaces euclidiens « comme appartenant à un même espace euclidien »³⁷ ce qui ne peut se faire « *sans convention nouvelle* »³⁸.

³⁴ É. Cartan, La théorie des groupes et les recherches récentes de géométrie différentielle, *O.C.*, vol. III-1, p. 892 (1924).

³⁵ Au sens de Cartan, la propriété d'homogénéité signifie que les propriétés de l'espace « restent inaltérées par une transformation du groupe fondamental ». [É. Cartan, *Ibid.*, p. 892. (1924)]. Cartan utilise ici « groupe fondamental » dans le sens utilisé par Klein dans le programme d'Erlangen, à savoir le groupe qui en opérant sur l'espace, définit la géométrie. Lorsqu'il envisage les espaces généralisés, la notion la plus proche exprimée dans le langage de la théorie des fibrés développées à partir de la théorie de Cartan par son élève Charles Ehresmann, serait celle de « groupe structural » du fibré principal que l'on considère.

³⁶ *Ibid.*, p. 893.

³⁷ *Ibid.* p. 893.

³⁸ *Ibid.*, p. 893.

Cartan insiste à plusieurs reprises dans ses travaux pour préciser que la donnée de la connexion n'est pas déterminée par la métrique. Il est significatif que Cartan reprenne le vocabulaire de Poincaré pour qui le choix d'une géométrie pour représenter les phénomènes physiques était conventionnel. L'insistance de Cartan sur ce

« Imaginons un espace qui, au voisinage immédiat de chaque point, ait tous les caractères de l'espace de l'espace euclidien. Les habitants de cet espace sauront, par exemple, repérer les points infiniment voisins d'un point A au moyen d'un trièdre trirectangle ayant ce point A pour origine ; mais nous supposerons en outre qu'ils ont une loi leur permettant de repérer, par rapport au trièdre d'origine A, l'autre de A' ; [...]. En définitive, un tel espace sera défini par la loi de repérage mutuel (de nature euclidienne) de deux trièdres d'origines infiniment voisines. »³⁹

Avec sa théorie du transport parallèle, Tullio Levi-Civita avait proposé en 1917 une solution de ce problème dans le cas particulier des sous-variétés plongées dans un espace euclidien⁴⁰ ; Hermann Weyl avait introduit la notion de connexion affine dans une variété semi-riemannienne de manière intrinsèque en redéfinissant le transport parallèle à partir de la dérivée covariante⁴¹. La théorie du transport parallèle présente aux yeux de Cartan le défaut de ne pouvoir se généraliser aux géométries conforme et projective. De plus, le caractère très analytique de cette théorie ne satisfait pas la volonté affirmée de Cartan de présenter les espaces généralisés de manière géométrique sans « débauche d'indices »⁴². Il ne retient de la théorie de Levi-Civita que l'idée de raccorder deux morceaux infinitésimalement voisins de la variété.

point est peut-être motivée par le fait que les premiers exemples de connexions de Levi-Civita ou de Weyl sont des connexions suffisamment particulières pour être déterminées par la donnée de la métrique.

³⁹ É. Cartan, Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion, *O.C.*, vol. III-1, 616 (1922).

⁴⁰ T. Levi-Civita, Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificaciones geometrica della curvatura Riemannina, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 42, 1917, 173-205.

⁴¹ Pour plus de précisions sur la théorie des connexions affines de H. Weyl, on peut consulter les articles de E. Scholz (1999, 2001) et le traité de H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie* (1918).

Lorsqu'en 1922, Cartan évoque dans l'analyse de ses travaux la possibilité de construire avec sa méthode des espaces généralisés affines, projectifs ou conformes, il signale que ceux de Weyl rentrent aussi dans ce cadre : « [Les espaces généralisés de H. Weyl] généralisent dans l'espace euclidien, mais en donnant à cet espace pour groupe fondamental celui des similitudes au lieu de celui des déplacements ; les espaces de H. Weyl ont une courbure de rotation et une courbure d'homothétie (celle-ci se confondant avec le champs électromagnétique), mais ils n'ont pas de torsion. » (p. 62).

⁴² « Les services éminents qu'a rendus et que rendra encore le Calcul différentiel absolu de Ricci et Levi-Civita ne doivent pas nous empêcher d'éviter les calculs trop exclusivement formels, où les débauches d'indices masquent une réalité géométrique souvent très simple. C'est cette réalité que j'ai cherché à mettre partout en évidence. »

É. Cartan, *Leçons sur la théorie des espaces de Riemann*, Paris : Gauthier-Villars, 2e éd., 1946, p. VII.

« En fait, ce qu'il y a d'essentiel dans l'idée de M. Levi-Civita, c'est qu'elle donne un moyen pour raccorder entre eux deux petits morceaux infiniment voisins d'une variété, et c'est cette idée de *raccord* qui est féconde. »⁴³

Dans ses articles sur les connexions affines, conformes ou projectives, avant de présenter analytiquement la notion de connexion, Cartan insiste sur les principes géométriques qui sous-tendent son point de vue :

- 1) Attacher à chaque point d'un « *continuum* »⁴⁴ un espace (affine, conforme ou projectif). Cet espace est désigné par Cartan d'espace affine, conforme ou projectif tangent.⁴⁵
- 2) Définir une loi qui permette de relier deux espaces attachés à des points infinitésimalement proches et ainsi, les considérer comme un et un seul espace.
- 3) Cette loi est techniquement définie en considérant une transformation (affine, conforme ou projective) qui applique l'espace attaché en \mathbf{a} sur celui attaché en \mathbf{a}' , \mathbf{a} et \mathbf{a}' ⁴⁶ étant deux points infiniment voisins.

Cartan désigne sous le nom d'*espace non-holonyme* l'espace obtenu en raccordant les espaces tangents et de *variété à connexion affine, conforme ou projective* le *continuum* ainsi géométrisé.

⁴³ É. Cartan, Sur les variétés à connexion projective, *O.C.*, vol. III-1, p. 825 (1924).

⁴⁴ Cartan oppose à plusieurs reprises le mot *espace* à celui de *continuum* ; « le premier éveille l'idée d'une organisation géométrique qui n'existe pas (ou qui n'existe qu'à un degré rudimentaire) dans le second » [É. Cartan, Les groupes d'holonomie des espaces généralisés, *O.C.* vol. III-2, p. 997 (1926)].

⁴⁵ Les dimensions du *continuum* et de l'espace tangent peuvent être différentes.

« On pourrait même généraliser la géométrie différentielle à n dimensions sur un *continuum* à $m \neq n$ dimensions [...] » É. Cartan, lettre adressée à H. Weyl le 5 janvier 1930 – archives de l'ETH de Zurich – réf. Hs 91 : 503.

Même si leurs dimensions sont identiques, les relations entre le *continuum* et l'espace tangent ne sont pas étudiées par Cartan dans le cadre de sa théorie des connexions. De plus, le terme « tangent » utilisé par Cartan n'exprime rien d'autre que l'idée d'attachement d'un espace en chaque point du *continuum*.

« Ce qui peut induire en erreur, c'est l'expression d'« espace projectif tangent », ce qui est, je vous l'avoue assez mal choisi. [...] En tout cas le problème d'établir une correspondance ponctuelle déterminée entre l'espace à connexion projective et l'espace projectif tangent ne se pose pas ici pour moi ; c'est un problème intéressant mais qui, dans ma théorie, est hors de question. » (É. Cartan, lettre adressée à H. Weyl le 5 janvier 1930 – archives de l'ETH de Zurich – réf. Hs 91 : 503).

Dans ce qui suit, nous utiliserons le terme « tangent » dans le sens utilisé par Cartan.

⁴⁶ Cartan suppose que la loi vérifie les hypothèses habituelles de la géométrie différentielle (conditions de différentiabilité, de linéarité des composantes, etc.).

4 Un exemple : les espaces à connexion projective

Pour définir les espaces à connexion projective, Cartan considère une variété numérique et attache à chacun de ses points un espace projectif muni d'un repère ; chacun de ses repères définissant un système de coordonnées projectives, le lien entre les espaces attachés à deux points infinitésimalement voisins « se traduira analytiquement par une transformation homographique, celle qui permet de passer des coordonnées d'un point \mathbf{m}' de l'espace projectif attaché au point \mathbf{a}' aux coordonnées de celui des points \mathbf{m} de l'espace projectif attaché en \mathbf{a} qui coïncide avec \mathbf{m}' quand on fait le raccord des deux espaces. »⁴⁷

La donnée des coefficients de cette transformation définit, selon Cartan, la connexion projective. Pour cela, Cartan attache en chaque point \mathbf{a} de l'espace un espace projectif. Il regarde ce point \mathbf{a} comme faisant partie de l'espace projectif et considère dans cet espace projectif un repère constitué de $n+1$ points : $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. De même, en $\mathbf{a} + d\mathbf{a}$. La donnée de ces deux repères définit une transformation projective dont les composantes ω^i, ω_i^j de la connexion projective s'expriment par les formules :

$$(3) \quad \begin{cases} d\mathbf{a} = \omega_0^0 \mathbf{a} + \omega_1^1 \mathbf{a}_1 + \dots + \omega_n^n \mathbf{a}_n \\ d\mathbf{a}_1 = \omega_1^0 \mathbf{a} + \omega_1^1 \mathbf{a}_1 + \dots + \omega_1^n \mathbf{a}_n \\ \dots \\ d\mathbf{a}_n = \omega_n^0 \mathbf{a} + \omega_n^1 \mathbf{a}_1 + \dots + \omega_n^n \mathbf{a}_n \end{cases}$$

où $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ et $\mathbf{a}' = \mathbf{a} + d\mathbf{a}, \mathbf{a}'_1 = \mathbf{a}_1 + d\mathbf{a}_1, \mathbf{a}'_2 = \mathbf{a}_2 + d\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}'_n = \mathbf{a}_n + d\mathbf{a}_n$

désignent les repères en \mathbf{a} et \mathbf{a}' , deux points infiniment proches. Cartan considère alors deux points, le premier dans l'espace projectif attaché en \mathbf{a} , le second dans celui attaché en $\mathbf{a} + d\mathbf{a}$.

Si les deux points coïncident, les coordonnées respectives (x^i) et $(x^i + dx^i)$ de ces deux points, lorsque les espaces attachés en \mathbf{a} et \mathbf{a}' sont raccordés, vérifient le système suivant :

⁴⁷ É. Cartan, Sur les variétés à connexion projective, *O.C.*, vol. III-1, p. 828 (1924).

$$(4) \quad \begin{cases} dx + \omega_0^0 x + \omega_1^0 x^1 + \cdots + \omega_n^0 x^n = 0, \\ dx^1 + \omega^1 x + \omega_1^1 x^1 + \cdots + \omega_n^1 x^n = 0, \\ \dots \\ dx^n + \omega^n x + \omega_1^n x^1 + \cdots + \omega_n^n x^n = 0. \end{cases}$$

Lorsque les deux points \mathbf{a} et \mathbf{a}' ne sont plus infiniment proches, on peut, en considérant une courbe joignant \mathbf{a} et \mathbf{a}' et en intégrant le système (4) le long de la courbe, on peut « définir analytiquement le raccord de proche en proche, le long de la ligne considérée, de l'espace projectif attaché au point d'arrivée avec l'espace projectif attaché au point de départ »⁴⁸.

Lorsque l'espace est holonome, c'est-à-dire si la manière de raccorder les espaces projectifs attachés en \mathbf{a} et \mathbf{a}' est définie indépendamment du chemin suivi pour aller de \mathbf{a} à \mathbf{a}' , le système (4) est complètement intégrable. Lorsque l'on intègre le long d'une courbe fermée, le raccord obtenu est l'identité et les composantes ω^i, ω_i^j de la connexion projective vérifient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (\omega^i)' = [\omega_0^0 \omega^i] + \sum_{k=1}^{k=n} [\omega^k \omega_k^i], \\ (\omega_0^0)' = \sum_{k=1}^{k=n} [\omega^k \omega_k^0], \\ (\omega_i^0)' = [\omega_i^0 \omega_0^0] + \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_i^k \omega_k^0], \\ (\omega_i^j)' = [\omega_i^0 \omega^j] + \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_i^k \omega_k^j]. \end{cases}$$

Lorsque l'espace est non-holonome, c'est-à-dire si la manière de raccorder les espaces projectifs attachés en \mathbf{a} et \mathbf{a}' dépend du chemin suivi pour aller de \mathbf{a} en \mathbf{a}' , le système (4) n'est pas complètement intégrable et l'intégration le long d'un contour fermé infiniment petit permet d'obtenir les équations :

⁴⁸ É. Cartan, *O.C.*, Sur les espaces à connexion projective, vol. III-1, p. 834 (1924).

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega^i = (\omega^i)' - [\omega_0^0 \omega^i] - \sum_{k=1}^{k=n} [\omega^k \omega_k^i], \\ \Omega_0^0 = (\omega_0^0)' - \sum_{k=1}^{k=n} [\omega^k \omega_k^0], \\ \Omega_i^0 = (\omega_i^0)' - [\omega_i^0 \omega_0^0] - \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_i^k \omega_k^0], \\ \Omega_i^j = (\omega_i^j)' - [\omega_i^0 \omega^j] - \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_i^k \omega_k^j]. \end{array} \right.$$

Les composantes Ω^i « révèlent la *torsion* » de la variété et les composantes Ω_i^j « révèlent la courbure »⁴⁹ de celle-ci.⁵⁰

5 Les espaces à connexion

La manière de Cartan d'aborder la question des connexions lui permet de traiter les cas euclidien, affine, conforme ou projectif. Son point de vue est donc susceptible d'être exposé de manière très générale ce qu'il ne manque pas de faire : en fait, à ses yeux, le point le plus important de sa théorie est l'existence, en chaque point de la variété, de transformations qui permettent de relier les « espaces tangents ». De même que dans la théorie de Klein des espaces holonomes, les notions de transformation géométrique et de groupe de transformation introduisent un « principe d'unité »⁵¹ dans la théorie des espaces non-holonomes. Dans sa correspondance avec H. Weyl, il explique la philosophie de sa méthode :

« [...] cet espace projectif tangent ne joue qu'en apparence dans ma théorie le rôle essentiel ; en réalité son rôle est tout à fait accessoire et n'a pour but que de rendre l'exposition plus concrète et moins abstraite. [...] Pour moi un espace à connexion projective est un support de transformations infinitésimales projectives [...]. »⁵²

Ainsi, Cartan définit la notion d'espace à connexion en faisant uniquement référence à la celle de transformation :

⁴⁹ É. Cartan, Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée, *O.C.*, vol. III-1, p. 707 (1924).

⁵⁰ Dans le cas affine, les composantes Ω^i correspondent à une translation et les composantes Ω_i^j à une rotation.

⁵¹ É. Cartan, Le rôle de la théorie des groupes de Lie dans l'évolution de la géométrie moderne, *O. C.*, vol. III-2, p. 1382 (1936).

⁵² É. Cartan, lettre adressée à H. Weyl le 5 janvier 1930 – archives de l'ETH de Zurich – réf. Hs 91 : 503.

« Un tel espace [à connexion projective] est défini si l'on associe à tout couple de points infiniment voisins (x) et $(x + dx)$ une transformation infinitésimale projective T_ω , dont les paramètres $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$ sont supposés être des formes linéaires par rapport aux dx_k avec des coefficients fonctions arbitraires des x_k . »⁵³

Pour Cartan, la donnée des transformations T_ω est pratiquement la seule essentielle. En effet, les espaces dans lesquels opèrent ces transformations n'ont pour utilité que de permettre de donner une interprétation aux équations de structure (5) que vérifient les formes ω_i en terme de courbure et de torsion des espaces à connexion :

« C'est surtout pour donner une interprétation géométrique concrète de ces formes, qui sont liées au produit des transformations infinitésimales T_ω attachés aux différents éléments d'un cycle, que j'ai imaginé un espace projectif auxiliaire dans lequel ces différentes transformations T_ω sont censées s'exécuter par le passage l'un à l'autre de systèmes de référence successifs. »⁵⁴

Dans sa lettre adressée à Weyl le 19 décembre 1930⁵⁵, Cartan insiste en précisant que la donnée d'un espace « tangent » en chaque point de l'espace est aussi un moyen de se faire comprendre des « non-initiés ». Pour lui, la donnée d'un *continuum* et des « transformations T_ω attachées aux couples de points infiniment voisins » et appartenant à un groupe \mathcal{G} suffit à définir une « entité géométrique » dans laquelle les opérations de la géométrie différentielle de l'espace holonome associé au groupe \mathcal{G} « continuent à avoir en partie un sens » de la même manière que les opérations de la géométrie différentielle euclidienne conservent leur signification en géométrie riemannienne.

6 Les groupes d'holonomie

⁵³ É. Cartan, lettre adressée à H. Weyl le 5 janvier 1930 – archives de l'ETH de Zurich – réf. Hs 91 : 503.

⁵⁴ É. Cartan, lettre adressée à H. Weyl le 5 janvier 1930 – archives de l'ETH de Zurich – réf. Hs 91 : 503.

⁵⁵ É. Cartan, lettre adressée à H. Weyl le 19 décembre 1930 – archives de l'ETH de Zurich – réf. Hs 91 : 504.

Comme le soulignent Chern et Chevalley,⁵⁶ un des grands apports de Cartan à la théorie des groupes de Lie est de s'intéresser d'abord à la détermination des structures abstraites avant d'examiner leur éventuelle réalisation comme groupes de transformations. Les travaux de Cartan concernant les groupes de Lie s'inscrivent donc dans le cadre de l'émergence des points de vue algébriques de cette théorie.⁵⁷ Néanmoins, s'il privilégie un point de vue que l'on peut qualifier d'abstrait et ne centre donc plus l'étude des groupes continus autour de la notion de groupe de transformations, Cartan n'abandonne pas pour autant toute préoccupation géométrique. Comme on vient de la voir, dès 1910, juste après avoir rédigé ses mémoires sur la structures des groupes infinis,⁵⁸ il montre comment les équations de structure dans le cas des groupes finis généralise la théorie du repère mobile de Darboux. Dans ce travail, Cartan met ainsi en lumière que ces équations, dues à Maurer,⁵⁹ traduisent que lorsque l'on associe à chaque point d'un espace de Klein un repère et des transformations infinitésimales qui relient chaque repère aux repères infiniment voisins, la composition de ces transformations le long d'un contour fermé infiniment petit est égale à l'identité.

Dans un espace non-holonome, la composition de ces transformations n'est plus égale à l'identité et définit un déplacement infinitésimal. Cette propriété apparaît comme fondamentale dès les premiers travaux de Cartan sur la théorie des espaces généralisés. En effet, en 1922 il utilise cette propriété pour proposer « une définition géométrique du tenseur d'énergie d'Einstein » en terme de courbure et de torsion.

⁵⁶ Shiing-Shen Chern-Claude Chevalley, É. Cartan and his Mathematical Work, *Bulletin of the American Mathematical Society*, t. 58 (1952), 219.

⁵⁷ Sur cette question, on peut consulter l'ouvrage de T. Hawkins, *Emergence of the Theory of Lie Groups, An Essay in the History of Mathematics, 1869-1926*, New York-Berlin-Heidelberg : Springer, 2000.

⁵⁸ Un groupe continu est qualifié de « fini » lorsque son expression analytique dépend d'un nombre fini de paramètres. Lorsque le nombre de paramètres est infini, il est dit « infini ». La théorie de Lie concerne essentiellement les groupes finis et ne se généralisent pas aux groupes infinis. Des ses premiers travaux, Cartan propose une conception « abstraite » des groupes continus qui permet de traiter de manière unifiée les groupes finis et infinis et de généraliser aux groupes infinis les théorèmes de Lie.

⁵⁹ Cartan appelle les équations de structure d'un espace de Klein, les équations de Maurer (*O.C.* vol.III-2, 1380). En langage moderne, on peut les voir comme l'image inverse par une jauge de la forme de Maurer-Cartan du groupe (R. W. Sharpe, *Differential Geometry*, p. 167).

D'un point de vue géométrique, ne considérer que les transformations associées aux cycles infiniment petits n'est pas suffisant car ces transformations ne constituent pas nécessairement une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie du groupe fondamental de l'espace.⁶⁰ Cartan généralise la construction en intégrant le long d'un contour fermé et associe ainsi à tout contour fermé (fini et infiniment petit) un déplacement. Lorsque l'on considère l'ensemble des contours finis issus d'un point-base, ces déplacements forment évidemment un groupe. La connaissance de ce groupe constitue une information sur la géométrie globale de la variété : dans un premier temps, Cartan montre que lorsque l'on change de point-base, les groupes obtenus sont conjugués.⁶¹ La définition analytique de ces groupes dépend du choix des repères attachés en chaque point de l'espace non holonome ; Cartan en déduit alors qu'en choisissant convenablement les repères, on peut avoir « pour chaque point A, le même groupe g ». ⁶²

« Plus généralement, à tout espace non-holonome de groupe fondamental G est associé un sous-groupe g de G qui est son groupe d'holonomie et qui ne se réduit à la transformation identique que si l'espace est parfaitement holonome.

Le groupe d'holonomie d'un espace mesure en quelque sorte le degré de non holonomie de cet espace, de même que le groupe de Galois d'une équation algébrique mesure en quelque sorte le degré d'irrationalité des racines de cette équation. »⁶³

En 1926, Cartan consacre un article de synthèse à la notion de groupes d'holonomie des espaces généralisés.⁶⁴ Un des premiers résultats généraux concernant ces groupes est un théorème de réduction du groupe fondamental qui montre que le groupe d'holonomie contient l'essentiel de la géométrie des espaces non-holonomes :

⁶⁰ É. Cartan, Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (II), *O.C.*, vol. III-2, p. 922 (1925).

⁶¹ Cartan utilise le terme « homologue » en vigueur à l'époque.

⁶² É. Cartan, Le groupe d'holonomie des espaces généralisés, *O.C.*, vol. III-2, p. 1000 (1926).

⁶³ É. Cartan, La théorie des groupes et les recherches récentes de géométrie différentielle, *O.C.*, vol. III-1, p. 897 (1924).

⁶⁴ É. Cartan, Les groupes d'holonomie des espaces généralisés, *O.C.*, vol. III-2, 997-1036 (1926).

« Si l'espace non holonome \mathcal{E} à groupe fondamental G admet le groupe d'holonomie g , on peut choisir en chacun de ses points un repère normal tel que la connexion de l'espace soit analytiquement la même que celle d'un espace à groupe fondamental g . »⁶⁵

En outre, la notion de groupe d'holonomie permet à Cartan de réunir dans le même cadre théorique des espaces sans torsion la théorie du parallélisme de Levi-Civita⁶⁶, ainsi que les espaces de Weyl ou de Eddington. Il note d'abord que si les transformations infinitésimales associées aux contours infiniment petits sont toutes nulles, le groupe d'holonomie se réduit à l'identité et l'espace est holonome. Par contre, si ces transformations laissent seulement invariant le point-base (ne comportent pas de translation dans le cas affine), l'espace est défini sans torsion.

Le problème de déterminer le groupe d'holonomie d'un espace non holonome à groupe fondamental G se réduit alors à l'examen de tous les types de sous-groupes de G . Pour énoncer cette propriété, Cartan utilise de nouveau l'analogie avec la théorie de Galois :

« Dans la théorie des équations algébriques, on sait qu'il existe toujours des équations algébriques admettant un groupe de Galois donné à l'avance. Il existe toujours d'une manière analogue des espaces holonomes à groupe fondamental G admettant pour groupe d'holonomie un sous-groupe donné de G . »⁶⁷

Le problème devient plus délicat lorsque l'on impose une condition supplémentaire : ainsi, Cartan détermine et classe en fonction de leur groupe d'holonomie les espaces riemanniens sans torsion en dimension 2 et 3. Le choix d'étudier plus particulièrement les espaces riemanniens sans torsion se justifie du fait que la connexion de Levi-Civita de ces variétés est caractérisée par l'absence de torsion et est définie de manière unique par la seule donnée de métrique. Cette connexion a donc un caractère intrinsèque souligné à de nombreuses reprises

⁶⁵ *Ibid.*, p. 1000 (1926).

⁶⁶ Cartan précise que l'absence de torsion dans le cas riemannien caractérise le parallélisme de Levi-Civita (É. Cartan, *La théorie des groupes et les recherches récentes de géométrie différentielle*, *O.C.*, vol. III-1, p. 898 (1924)).

⁶⁷ *Ibid.*, p. 899 (1924).

par Cartan. Il définit dans ses articles sur les variétés à connexion conforme et sur les variétés à connexion projective⁶⁸ la notion de connexion normale de manière analogue : parmi les connexions compatibles avec la donnée des directions isotropes dans le cas conforme et avec celle des géodésiques dans le cas projectif, il en existe une unique pour laquelle « la transformation infinitésimale associée à un cycle arbitraire d'origine A non seulement laisse invariant le point A, mais est encore du *second ordre* en ce point »⁶⁹. Elles ont donc aussi en ce sens un caractère intrinsèque. Cartan étudie les groupes d'holonomie des espaces conformes normaux en dimension 3 et ceux des plans projectifs normaux.

Enfin, la notion de groupe d'holonomie permet alors à Cartan de proposer dans le cadre de ses espaces généralisés un principe de subordination des géométries initié par Klein dans le cadre des espaces holonomes :

« D'une manière générale tout espace holonome à groupe fondamental G peut être regardé comme un espace holonome à groupe fondamental G' si G' est un sous-groupe de G.

Existe-t-il quelque chose d'analogue pour les espaces non holonomes ? La réponse à cette question est facile et à peu près évidente :

Pour qu'un espace non holonome à groupe fondamental G puisse être regardé comme un espace non holonome à groupe fondamental G', il faut et il suffit que son groupe d'holonomie g soit G' ou un sous-groupe de G'. »⁷⁰

Pour obtenir ces résultats, Cartan utilise sa classification des groupes de Lie et suppose donc que les groupes d'holonomie sont des groupes continus, ce qui suppose que la variété est simplement connexe. L'importance de la topologie de la variété n'échappe pas à Cartan qui

⁶⁸ É. Cartan, Sur les espaces à connexion conforme, *O.C.* vol. III-1, p. 747-797 (1923) et Sur les espaces à connexion projective, *O.C.* vol. III-1, 825-861 (1924).

⁶⁹ É. Cartan, Sur les groupes d'holonomie des espaces généralisés, *O.C.* vol III-2, p. 1005 (1926).

Cartan poursuit en précisant que « être du second ordre » signifie « que les coefficients de cette transformation infinitésimale s'annulent tous au point au point, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre ».

⁷⁰ É. Cartan, La théorie des groupes et les recherches récentes de géométrie différentielle, *O.C.* vol. III-1, p. 902 (1924).

consacre à cette question une note et la fin de son article de synthèse.⁷¹ Il exhibe des exemples simples comme celui du cylindre dans lesquels le groupe d'holonomie n'est plus continu.⁷²

6 Conclusion

La notion d'holonomie sert à Cartan de contexte théorique pour fusionner sa théorie des groupes continus, la tradition française de géométrie différentielle (théorie du repère mobile de Darboux) et les récents résultats de l'analyse tensorielle (calcul différentiel absolu de Levi-Civita). En comparant les équations obtenues en considérant les mouvements infinitésimaux des « espaces tangents » avec la formule de Maurer, il peut donner une interprétation géométrique des notions de torsion et de courbure, unifiant ainsi les traditions géométriques initiées par Riemann et Klein. Cette interprétation se traduit en terme de groupe : avec la notion de groupe d'holonomie, Cartan se dote d'un instrument lui permettant de généraliser à la géométrie des espaces non holonomes le programme d'Erlangen de Klein.

Bibliographie

M. A. Akivis-B. A. Rosenfeld, *Élie Cartan (1869-1951)*, Providence : American Mathematical Society, 1993.

Paul Appell, *Traité de mécanique rationnelle, 2^e édition entièrement refondue*, vol. 1, Paris : Gauthier-Villars, 1902.

Élie Cartan, *Œuvres complètes* (6vol.), Paris : Gauthier-Villars, 1952-1955.

Élie Cartan, La structure des groupes de transformations continus et la théorie du trièdre mobile, *Bulletin des sciences mathématiques*, t. 34, 1910, p. 250-284 ; *O.C.*, vol III-1, p. 145-178.

Élie Cartan, Sur une définition géométrique du tenseur d'énergie d'Einstein, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. 174, 1922, p. 437-439 ; *O.C.*, vol. III-1, p. 613-615.

⁷¹ É. Cartan, Les groupes d'holonomie des espaces généralisés et l'*Analysis situs*, *O.C.* vol. III-1, p. 919-920 (1925) et Les groupes d'holonomie des espaces généralisés, *O.C.*, vol. III-2, p. 1037-1038 (1926).

⁷² Cartan utilise aussi la notion de groupe d'holonomie dans sa présentation de la géométrie des groupes de transformations et son interprétation des travaux de Veblen. Ces théories dépassent le cadre de cet article et feront l'objet d'articles ultérieurs.

Élie Cartan, Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. 174, 1922, p. 593-595 ; *O.C.*, vol. III-1, p. 616-618.

Élie Cartan, Sur les équations de structure des espaces généralisés et l'expression analytique du tenseur d'Einstein, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 174 (1922), p. 1104 ; *O.C.*, III-1, p. 625-627.

Élie Cartan, Sur les équations de la gravitation d'Einstein, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1 (1922), p. 141-203 ; *O.C.*, vol. III-1, p. 549-611.

Élie Cartan, Exposé de ses travaux (1922), Archives de l'Académie des sciences de Paris, dossier personnel de Élie Cartan.

Élie Cartan, Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée, *Annales de l'école normale*, t. 40, 1923, p. 325-412 ; *O.C.*, vol. III-1, p. 659-746 – t. 41, 1924, p. 1-15 ; *O.C.* vol. III-1, p. 799-823 – t. 42, 1925, p. 17-88 ; *O.C.* vol. III-2, p. 921-995.

Élie Cartan, Sur les variétés à connexion projective, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 52, 1924, p. 205-241 ; *O.C.*, vol. III-1, p. 825-861.

Élie Cartan, Les récentes généralisations de la notion d'espace, *Bulletin des sciences mathématiques*, t. 48, 1924, p. 294-320 ; *O.C.*, vol. III-1, p. 863-889.

Élie Cartan, La théorie des groupes et les recherches récentes de géométrie différentielle (Conférence faite au congrès international des mathématiciens, Toronto, 1924), *L'Enseignement mathématique*, t. 24 (1925), p. 1-18 ; *Proc. Int. Math. Congress Toronto*, t. 1, 1928, p. 85-94 ; *O.C.*, vol. III-1, p. 891-904.

Élie Cartan, *La géométrie des espaces de Riemann*, Fascicule IX du Mémorial des sciences mathématiques, Paris : Gauthier-Villars, 1925.

Élie Cartan, Les groupes d'holonomie des espaces généralisés, *Acta Mathematica*, t. 48 (1926), p. 1-42 ; *O.C.*, vol. III-2, p. 997-1038.

Élie Cartan, La théorie des groupes de transformations et la géométrie, *L'enseignement mathématique*, t. 26 (1927), p. 200-225 ; *O.C.*, vol. I-2, p. 841-866.

Élie Cartan, *Leçons sur la théorie des espaces de Riemann*, Paris : Gauthier-Villars, 1928 ; cité d'après la 2^e éd., 1946.

Élie Cartan, Notice historique sur la notion de parallélisme absolu, *Mathematische Annalen*, t. 102 (1930), p. 698-706 ; *O.C.*, vol. III-2, p. 1121-1129.

Élie Cartan, Notice sur ses travaux scientifiques, (rédigée en 1931) in *Selecta*, p. 15-112 ; *O.C.*, vol. I-1, p. 1-98.

Élie Cartan, Le rôle de la théorie des groupes de Lie dans l'évolution de la géométrie moderne, *Comptes rendus du congrès international des mathématiciens d'Oslo*, 1936, vol. I, p. 92-103 ; *O. C.*, vol. III-2, p. 1373-1384.

Élie Cartan, *Leçons sur la théorie des espaces à connexions projectives*, Paris : Gauthier-Villars, 1937.

Élie Cartan, *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie*, Paris : Gauthier-Villars, 1937.

Shiing-Shen Chern-Claude Chevalley, Élie Cartan and his Mathematical Work, *Bulletin of the American Mathematical Society*, t. 58 (1952), p. 217-250.

Thomas Hawkins, *Emergence of the Theory of Lie Groups, An Essay in the History of Mathematics, 1869-1926*, New York-Berlin-Heidelberg : Springer, 2000.

Heinrich Hertz, *Die Prinzipien der Mechanik in neuen Zusammenhänge dargestellt*, Leipzig : J. A. Barth, 1894 ; *Gesammelte Werke*, vol. 3, Leipzig : A. Barth 1910 ; cité d'après la trad. angl. *The Principles of Mechanics Presented in a New Form*, New-York : Dover, 1956.

Tullio Levi-Civita, Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificaciones geometrica della curvatura Riemannina, *Rendicontidel Circolo Matematico di Palermo*, t. 42, 1917, p. 173-205.

Erhard Scholz, Hermann Weyl's Contribution to Geometry 1917-1923, in S. Sasaki-S. Mitsu-J. Dauben éd., *The Intersection of History and Mathematics*, Basel : Birkhäuser, 1994, p. 203-229.

Erhard Scholz, Weyl and the Theory of Connections, in J. Gray (éd.), *The Symbolic Universe, Geometry and Physics 1890-1930*, Oxford : Oxford University Press, 1999, p. 260-284.

Erhard Scholz, Weyl's Infinitesimalgeometrie, in E. Scholz (éd.), *Hermann Weyl's Raum-Zeit-Materie and a General Introduction to His Scientific Work*, Basel : Birkhäuser, 2001, p. 48-104.

Richard W. Sharpe, *Differential Geometry, Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program*, New York-Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag, 1997.

Hermann Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, Berlin : J. Springer, 1918 ; 4^e éd. 1919 ; trad. fr. d'après la 4^e édition, *Temps, espace, matière*, Paris : Blanchard, 1922.

Hermann Weyl, Cartan on Groups and Differential Geometry, *Bulletin of the American Mathematical Society*, t. 34, 1938, p. 598-601 ; *G.A.*, 4, p. 592-595.