



HAL
open science

Poincaré's „vierte Geometrie“

Philippe Nabonnand, Klaus Volkert

► **To cite this version:**

Philippe Nabonnand, Klaus Volkert. Poincaré's „vierte Geometrie“. *Mathematische Semesterberichte*, 2014, 61, pp.79 - 91. 10.1007/s00591-013-0120-2 . hal-01082858

HAL Id: hal-01082858

<https://hal.science/hal-01082858v1>

Submitted on 14 Nov 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Poincaré's „vierte Geometrie“

Philippe Nabonnand¹

Klaus Volkert (traducteur)

Henri Poincaré (Nancy 1854 – Paris 1912) wird oft in Werken zitiert, welche sich mit der Geschichte der nichteuklidischen Geometrie beschäftigen. Jeder, der sich für die Mathematik des 19. Jhs. interessiert, weiß, dass Poincaré in seiner Abhandlung über Fuchssche Funktionen ein konformes Modell der hyperbolischen Geometrie vorgeschlagen hat, mit dessen Hilfe er die Operation dieser Gruppen² verdeutlichte [Poincaré 1884]³. Alle an der Wissenschaftstheorie Interessierten haben das dritte Kapitel von „Wissenschaft und Hypothese“ gelesen [Poincaré 1902], in dem der Autor einem breiten Publikum gebildeter Laien seine Auffassung von Geometrie erklärt und bezüglich der Frage nach dem Status der geometrischen Axiome eine konventionalistische Sichtweise verteidigt.⁴ In diesem Kapitel, das einen Artikel wieder aufnimmt, den Poincaré etwa 10 Jahre zuvor in der Zeitschrift „Revue générale des sciences pures et appliquées“ (Allgemeine Zeitschrift für reine und angewandte Wissenschaften) publiziert hatte⁵, spricht Poincaré neben der nichteuklidischen Geometrie auch noch andere Geometrien an. Neben den Geometrien variabler Krümmung von Riemann und den nicht-archimedischen Geometrien⁶, welche er aus dem Gebiet der Anwendungen ausschließt, betrachtet er noch eine vierte Geometrie, der man ihm zu Folge einen Status ähnlich dem der nichteuklidischen Geometrien – elliptisch oder hyperbolisch – zugestehen muss.

¹ Laboratoire d'histoire des sciences et de philosophie – Archives Poincaré (UMR 7117 du CNRS) & MSH de Lorraine – Université de Lorraine (Philippe.Nabonnand@univ-lorraine.fr). Übersetzung von K. Volkert (Bergische Universität Wuppertal, Fachbereich C, AG Didaktik und Geschichte der Mathematik).

² Eine Fuchssche Gruppe ist eine diskrete Untergruppe der Bewegungsgruppe der hyperbolischen Ebene (welche man mit $PSL(2, \mathbb{R})$ identifizieren kann).

³ Das konforme Modell von Poincaré wird in vielen Lehrbüchern der hyperbolischen Geometrie behandelt, etwa in demjenigen von Marcel Berger [1977]. Zu Poincaré's Verwendung des Modells in der Theorie der Fuchsschen Funktionen vgl. man das Buch von Jeremy J. Gray [1986].

⁴ Vgl. hierzu [Zahar 2000], [Nabonnand 2010] oder [Volkert 2013].

⁵ [Poincaré 1891].

⁶ In der ursprünglichen Fassung von 1891 spricht Poincaré nicht von nicht-archimedischen Geometrien. Diese treten erst in der überarbeiteten Fassung des Textes auf, welche dem dritten Kapitel von „Wissenschaft und Hypothese“ zu Grunde liegt.

Diese vierte Geometrie hat mit ihren überraschenden Eigenschaften seiner Zeit zu bemerkenswerten Kommentaren sowohl von Mathematikern als auch von Philosophen Anlass gegeben. Wir können aber auch eine Anmerkung eines kanadischen Ökonomen zitieren, der ein Anhänger der Theorie des Freihandels war:

Die Prinzipien des Freihandels haben in Kanada keine Anhänger. Die Besitzer der Manufakturen lehnen sie mit Nachdruck ab. Die Händler und die Banker schenken ihnen keinen Glauben und die Landwirte waren schon immer Befürworter der protektionistischen Prinzipien.

Umso schlimmer für sie. Was beweist all das?

Es gibt eine vierte Geometrie, welche ebenso kohärent ist wie die Geometrien von Euklid, von Riemann und von Lobatschewskij. Hier ist ein Satz dieser Geometrie: Eine reelle Gerade kann senkrecht zu sich selbst sein. Der gesunde Menschenverstand „lehnt dies mit Nachdruck ab“, die Maurer und die Metzger „schenken ihnen keinen Glauben“ und unsere Gymnasiasten „waren schon immer Befürworter“ der gegenteiligen Prinzipien.

Und was beweist das?

Es beweist, dass eine der angesprochenen Gruppen Geometrie lernen müsste und die andere Ökonomie. – Und sonst nichts.“

[Macquart 1904, 66]

Poincaré selbst hat kein großes Aufheben um seine Ideen gemacht, die dennoch eine Entdeckung waren, die er 1887 in einem Artikel im „Bulletin de la société mathématique de France“ veröffentlichte. Dieser beschäftigte sich mit den Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.⁷

Im ersten Abschnitt des vorliegenden Artikels wird die rhetorische Rolle erläutert, welche die vierte Geometrie im zweiten Kapitel von „Wissenschaft und Hypothese“ spielt, dann werden wir auf den früheren Artikel von Poincaré zurückkommen, in dem vierte Geometrie als ein Beispiel für eine quadratische Geometrie auftritt. Schließlich werden wir uns die Frage stellen, warum Poincaré nur eine vierte Geometrie entdeckt hat, obwohl er mit denselben

⁷ [Poincaré 1887].

mathematischen Mitteln – Modellierung von quadratischen Geometrien auf Quadriken - auch eine fünfte hätte finden können.

2. Das dritte Kapitel von „La Science et l’Hypothèse“

Dieses Kapitel trägt den Titel « Die nichteuklidischen Geometrien »; sein Ziel ist es, die Idee zu verteidigen, dass die Axiome der Geometrie weder synthetische Wahrheiten a priori noch experimentelle Tatsachen sind sondern Konventionen. Dabei leitet uns die Erfahrung bei der Wahl der bequemsten Konventionen. Das Kapitel ist in zwei Teile unterteilt. Im ersten Teil führt Poincaré ausgehend vom Parallelenaxiom die nichteuklidischen Geometrien ein, was ihn zur räumlichen hyperbolischen Geometrie (er nennt sie Geometrie von Lobatschewskij) und zur dreidimensionalen sphärischen Geometrie (Geometrie von Riemann bei Poincaré) führte.

Poincaré schreibt nicht im Stil der Mathematik, dennoch muss sein Leser eine gewisse mathematische Bildung mitbringen, zumindest muss er mit den grundlegenden Begriffen der Geometrie umgehen können. In Bezug auf die zweidimensionale Geometrie erwähnt Poincaré einerseits das Modell von Beltrami, andererseits spricht er von „einer Art von Entgegensetzung zwischen der Geometrie von Riemann und derjenigen von Lobatschewskij“, da erstere auf der Sphäre realisiert ist, letztere aber auf der Pseudosphäre. Um diese zweidimensionalen Geometrien vorzustellen, verwendet er fiktive „Wesen ohne Dicke (Flächenwesen)“, die aber über dieselben kognitiven Fähigkeiten verfügen wie Menschen. Je nachdem, ob diese Wesen in einer Ebene, auf einer Sphäre oder einer Pseudosphäre leben und in Ermangelung anderer Erfahrungen, schließt Poincaré, dass sie „dem Raum gewiss nur zwei Dimensionen zuschreiben werden“ und dass sie im ersten Fall zur Euklidischen Geometrie, im zweiten Fall zur sphärischen und im dritten Fall zur hyperbolischen Geometrie geführt würden. Diese Überlegung belegt nach Poincaré, dass die Erfahrung bei der Wahl der Geometrie, in deren Rahmen wir unsere räumlichen Erfahrungen ausdrücken, eine Rolle spielt.

In dem Maße, in dem es möglich ist, Modelle anzugeben, von denen man sich vorstellen kann, wie sie die mit menschlichen kognitiven Fähigkeiten ausgestatteten Wesen gemäß ihren Erfahrungen verwenden könnten, um ihre räumliche Wahrnehmung zu beschreiben, geht Poincaré davon aus, dass „so

der Vorbehalt⁸ bezüglich der zweidimensionalen Geometrien verschwindet“.⁹ Um die nichteuklidischen Geometrien in der Dimension drei zu rechtfertigen, verwendet Poincaré nicht die vorangehenden Überlegungen, indem er diese auf Sphären oder Pseudosphären im vierdimensionalen Raum erweitert; er bevorzugt vielmehr eine der Dimension drei intrinsische Rechtfertigung. Hierzu konstruiert er ein eigenes Modell für die hyperbolische Geometrie:

„Wir betrachten eine beliebige Ebene, die ich Fundamentalebene nenne. Wir konstruieren eine Art Wörterbuch, indem wir paarweise die Begriffe, die in zwei Spalten angeordnet sind, einander zuordnen – genauso, wie in einem gewöhnlichen Wörterbuch die Wörter zweier Sprachen mit gleicher Bedeutung einander zugeordnet werden:

Raum	Teil des Raumes, der oberhalb der Fundamentalebene liegt
Ebene	Sphäre, die die Fundamentalebene senkrecht schneidet
Gerade	Kreis, der die Fundamentalebene senkrecht schneidet
Sphäre	Sphäre
Kreis	Kreis
Winkel	Winkel
Abstand zweier Punkte	Logarithmus des Doppelverhältnisses dieser beiden Punkte und der Durchschnittspunkte der Fundamentalebene mit dem Kreis, der durch die zwei Punkte geht und die Fundamentalebene senkrecht schneidet.“

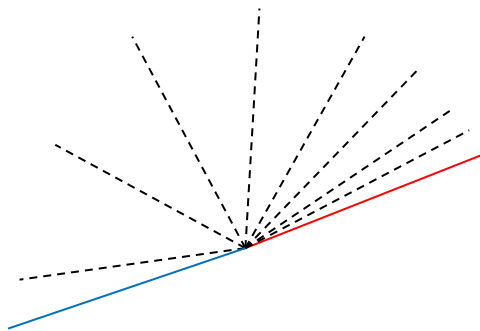
[Poincaré 1902, 68]

⁸ Gemeint ist der seitens der Philosophie vorgebrachte Einwand, dass die nichteuklidischen Geometrien nicht auf räumliche Fragen anwendbar seien, weil sie rein logischer Natur seien.

⁹ [Poincaré 1968, 68].

Auf diese Art und Weise lässt sich jeder Satz der hyperbolischen Geometrie in einen Satz der Euklidischen Geometrie übersetzen und umgekehrt. Poincaré erinnert daran, dass Felix Klein und er selbst die hyperbolische Geometrie in ihren mathematischen Arbeiten verwendet hätten. Daraus schließt Poincaré: „Da die Geometrie von Lobatschewskij einer konkreten Interpretation fähig ist, hört diese auf, ein sinnleeres logisches Spiel zu sein, sie kann nun auch Anwendungen erfahren; ...“¹⁰

Bevor er auf den philosophischen Gegenstand seines Kapitels zu sprechen kommt, erklärt Poincaré noch, dass die Geometrien implizit Axiome erfüllen, die zu nennen er aber für überflüssig hält, da diese evident sind. Beispielsweise enthalten Definitionen wie diejenige der Kongruenz von Figuren zugleich eine Definition und ein Axiom – im Falle der Kongruenz ist das ein Axiom, das die freie Beweglichkeit von starren Figuren sichert. Ein Axiom, das in all drei Geometrien, Euklidisch oder nichteuklidisch, in Anspruch genommen wird, besagt, dass eine Gerade nach einer vollen Umdrehung wieder mit sich selbst zur Deckung gelangt. Poincaré schreibt, dass „es so aussieht, als dass dieses Axiom einige Aufmerksamkeit verdient, da man, indem man auf seiner Verneinung eine vierte Geometrie aufbauen kann, die ebenso kohärent ist wie die Geometrien von Euklid, Lobatschewskij und Riemann.“¹¹



Poincaré weist darauf hin, dass manche Sätze, die in dieser vierten Geometrie gelten, überraschend sind. Als Beispiel hierfür erwähnt er Geraden, die zu sich selbst orthogonal sind¹². Dennoch sei diese Geometrie, wie Poincaré betont, nicht widersprüchlich.

Indem er diese Geometrie entwickelt, zeigt Poincaré, dass im Bereich von Geometrien, welche die „freie Beweglichkeit von starren Figuren“ zulässt –

¹⁰ [Poincaré 1902, 72].

¹¹ [Poincaré 1902, 72].

¹² Solche Geraden werden isotrop genannt.

anders gesagt geht es um Geometrien, die durch eine Gruppe von Transformationen definiert werden -, seltsame Geometrien auftreten können. Die Geometrien von Lobatschewskij und Riemann werden so weniger ungewöhnlich und ihre Verwendung zur Beschreibung physikalischer oder astronomischer Phänomene plausibler.

Anschließend bezieht sich Poincaré auf die von Lie angegebene Klassifikation von Transformationsgruppen, welche eine quadratische Form unverändert lassen.¹³ Aus dieser schließt er, dass es nur eine endliche Anzahl von Geometrien gibt, die man untersuchen muss, sobald man freie Beweglichkeit von unveränderlichen Figuren verlangt:

„Angenommen, wir akzeptieren die folgenden Voraussetzungen:

1. Der Raum ist n -dimensional,
2. Die freie Beweglichkeit von unveränderlichen Figuren ist möglich;
3. Es sind p Bedingungen erforderlich, um die Position dieser Figur im Raum festzulegen.

Dann ist die Zahl der Geometrien, die mit diesen Annahmen kompatibel sind, endlich.“¹⁴

Dann schließt Poincaré die Geometrien variabler Krümmung und die nicht-archimedischen Geometrien aus seiner Betrachtung aus. Er tut dies, weil er unseren Erfahrungen Rechnung tragen möchte. Dabei geht er davon aus, dass wir räumliche Verhältnisse auf der Basis unserer Fähigkeit, kontinuierliche Transformationsgruppen zu bilden, erfassen. Deshalb können nach Poincaré die Geometrien variabler Krümmung „niemals etwas anderes als rein analytisch sein. Sie erlauben keine Beweise analog zu denen von Euklid.“¹⁵ Schließlich gelangt Poincaré zu der Auffassung, dass für die Anwendung auf den Raum nur die drei klassischen Geometrien, euklidisch, hyperbolisch oder sphärisch, in Betracht kämen.

Trotz der im Vergleich mit den Theoremen der anderen Geometrien seltsamen Sätze, die Poincaré anführt, ist die vierte Geometrie eine Geometrie, die man

¹³ Vgl. [Nabonnand 2010].

¹⁴ [Poincaré 1891, 772 – 773], [Poincaré 1902, 72 – 73]. Die genannten Annahmen sind analog jenen, welche Poincaré 1887 ausgewählt hatte, um die quadratischen Geometrien zu charakterisieren (vgl. [Poincaré 1887, 213 – 214]).

¹⁵ [Poincaré 1902, 73].

ausgehend von allgemeinen Erwägungen ebenso folgerichtig erhält wie die anderen. Sei es, dass man von Axiomen ausgeht, sei es, dass man, wie Poincaré dies in seinem in der „Revue générale des sciences pures et appliquées“ erschienen Artikel tut, dass man von Geometrien ausgeht, die sich auf einer Quadrik ergeben, die vierte Geometrie erscheint in Poincarés Augen strukturell sehr nahe an der Euklidischen und den nichteuklidischen Geometrien.

4. Die quadratischen Geometrien

Einige Jahre zuvor, 1887, hatte Poincaré einen Artikel über die der Geometrie zu Grunde liegenden Hypothesen geschrieben. Die Absicht dieser Arbeit war es, „alle“ für die ebene Geometrien „notwendigen Hypothesen zu benennen und nur diese“.

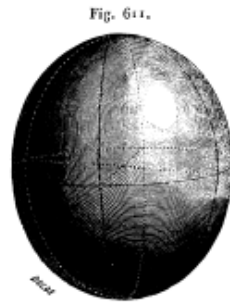
Das Problem wird von Poincaré in zwei Teile zerlegt: 1) Bestimmung aller Hypothesen, die den quadratischen Geometrien gemeinsam sind (also allen Geometrien, die man auf Quadriken modellieren kann). 2) Auszeichnung der Euklidischen Geometrie unter den quadratischen Geometrien. Die Antwort auf die erste Frage liefert eine Anwendung der Methoden von Lie, mit denen dieser die geometrischen Transformationsgruppen klassifiziert hatte.

Um die quadratischen Geometrien zu ermitteln, geht Poincaré von der Feststellung aus, dass die Geometrie Riemanns (in der es durch einen gegebenen Punkt keine einzige Parallele zu einer gegebenen Geraden gibt) „einer einfachen Interpretation fähig sei“ – nämlich in Gestalt der sphärischen Geometrie – „vorausgesetzt man kommt überein, die Bezeichnung Gerade den Großkreisen der Sphäre zuzuerkennen.“¹⁶ Poincaré stellt sich dann der Aufgabe, diese Interpretationsmethode auf die Euklidische und auf die hyperbolische Geometrie zu verallgemeinern. Hierzu genügt es, die Geometrie von ebenen Schnitten Flächen zweiter Ordnung (deshalb quadratisch) zu betrachten, wenn man festlegt, „die Bezeichnung Geraden den ebenen Diametralschnitten¹⁷ dieser Fläche und die Bezeichnung Kreise ihren ebenen nicht-diametralen Schnitten beizulegen.“¹⁸

¹⁶ [Poincaré 1887, 205].

¹⁷ Ein diametraler Schnitt ist ein ebener Schnitt, der durch den Mittelpunkt der Quadrik geht. Dabei wird der Mittelpunkt von Paraboloiden festgelegt als der Fernpunkt ihrer Achse.

¹⁸ [Poincaré 1887, 205].



Das Ellipsoid¹⁹

Um den Winkel zwischen zwei sich in einem Punkt schneidenden Geraden zu definieren, betrachtet Poincaré die Tangenten der beiden zugehörigen ebenen Diametralschnitte und die beiden erzeugenden Geraden der Fläche, welche durch diesen Punkt gehen.²⁰

„Diese vier Geraden (im gewöhnlichen Sinn des Wortes) besitzen ein bestimmtes Doppelverhältnis. Der Winkel, den wir definieren möchten, ist dann, falls die beiden Erzeugenden reell sind (falls es also bei der Fläche um ein einschaliges Hyperboloid²¹ handelt), der Logarithmus dieses Doppelverhältnis. Im gegenteiligen Fall ist unser Winkel ebenfalls gleich diesem Doppelverhältnis dividiert durch $\sqrt{-1}$.“²²

Poincaré greift hier auf die Theorien von Laguerre²³ zurück, reinterpretiert diese aber im Tangentialraum der Quadriken. Analog definiert er den Abstand zweier Punkte, indem er das Doppelverhältnis dieser beiden Punkte mit den beiden Fernpunkten, die sich auf einem ebenen Diametralschnitt befinden, der diese beiden Punkte enthält, bildet:

„Betrachten wir einen Bogen eines Kegelschnitts, der in einem ebenen Diametralschnitt liegt (wir sind überein gekommen, dies eine Strecke zu nennen). Die beiden Endpunkte des Bogens haben zusammen mit den beiden Fernpunkten des Kegelschnitts, wie jedes System von vier auf einem Kegelschnitt liegender Punkte, ein Doppelverhältnis. Wir verabreden dann, den Logarithmus dieses Doppelverhältnisses im Falle,

¹⁹ [Comberousse-Rouché 1891, 490].

²⁰ Auf jeder Quadrik gibt es zwei Systeme von geradlinigen Erzeugenden, die reell oder imaginär sein können.

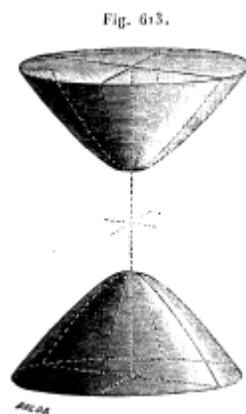
²¹ Man beachte, dass Poincaré das hyperbolische Paraboloid nicht erwähnt.

²² [Poincaré 1887, 205].

²³ Vgl. beispielsweise die Note [Laguerre 1853], die Edmond Laguerre in den „Nouvelles annales de mathématiques“ veröffentlicht hat oder die Besprechung der Arbeiten von Laguerre durch Eugène Rouché [Rouché 1887].

dass der Kegelschnitt eine Hyperbel ist, als Länge des Segments zu bezeichnen. Ist der Kegelschnitt eine Ellipse, so nimmt man den durch $\sqrt{-1}$ dividierten Logarithmus.“²⁴

Poincaré nennt die Geometrien, die man auf den Quadriken erhält, quadratische Geometrien. Er betont, dass „es mehrere quadratische Geometrien gibt, weil es mehrere Sorten von Flächen zweiter Ordnung gibt.“²⁵ Er teilt mit, dass die auf dem Ellipsoid konstruierte Geometrie die Geometrie Riemanns sei; auf dem zweischaligen Hyperboloid ergibt sich die Geometrie von Lobatschewskij und auf dem elliptischen Paraboloid die Euklidische Geometrie.



Zweischaliges Hyperboloid²⁶

Selbstverständlich erschöpfen diese drei Geometrien nicht die „Liste der quadratischen Geometrien“, weil insbesondere die Geometrie des einschaligen Hyperboloids weder untersucht noch überhaupt erwähnt wurde.



Einschaliges Hyperboloid²⁷

²⁴ [Poincaré 1887, 205].

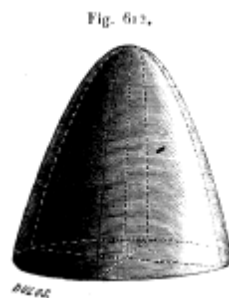
²⁵ [Poincaré 1887, 205].

²⁶ [Comberousse-Rouché 1891, 493].

Poincaré fügt hinzu:

„Folglich können wir festhalten, dass es drei quadratische Geometrien gibt, welchen drei Arten von Flächen zweiter Ordnung mit Mittelpunkt entsprechen.

Wir müssen aber dem noch die Geometrien hinzufügen, die den Grenzfällen entsprechen, unter denen sich die Geometrie Euklids findet.“²⁸



Elliptisches Paraboloid²⁹

Weiter erklärt Poincaré, warum die Geometrie, die sich auf dem einschaligen Hyperboloid modellieren lässt, bislang nicht von den Mathematikern bemerkt wurde: Deren Eigenschaften sind derart befremdlich, dass sie stets implizit ausgeschlossen wurden:

„Wie kommt es nun, dass die Geometrie des einschaligen Hyperboloids bislang den Theoretikern entgangen ist? Das liegt daran, dass in ihr folgende Sätze gelten:

1. Der Abstand zweier Punkte, die auf ein und derselben geradlinigen Erzeugenden der Fundamentalfäche liegen, ist Null.
2. Es gibt zwei Arten von Geraden: Die ersteren gehören zu elliptischen Diametralschnitten, die letzteren zu hyperbolischen. Es ist nicht möglich, vermöge einer reellen Bewegung eine Gerade der ersten Art mit einer Geraden der zweiten Art zur Deckung zu bringen.
3. Es ist nicht möglich, eine Gerade durch eine reelle Drehung um 180° um einen ihrer Punkte mit sich zur Deckung zu bringen, wie das in der

²⁷ [Comberousse-Rouché 1891, 483].

²⁸ [Poincaré 1887, 206].

²⁹ [Comberousse-Rouché 1891, 492].

[gewöhnlichen] Geometrie der Fall ist, wenn man eine Gerade um einen ihrer Punkte um 180° dreht.³⁰

Alle Geometer haben stillschweigend vorausgesetzt, dass diese drei Aussagen falsch sind. In der Tat widersprechen diese drei Sätze zu sehr den Gewohnheiten unseres Denkens, als dass die Begründer der Geometrie hätten glauben können, eine derartige Hypothese unter Leugnung dieser Gewohnheiten aufstellen und aussprechen zu können.“³¹

Viele Kommentatoren beschränken sich einfach darauf, die Eigenschaften von Poincarés vierter Geometrie zu beschreiben. Sie identifizieren diese mit der zweidimensionalen Minkowski-Geometrie. Schlomo Sternberg allerdings erliegt nicht diesem Irrtum, er erkennt vielmehr in ihr eine De Sitter-Geometrie.³²

So now we see exactly what this fourth geometry of Poincaré was referring to is, it is the two-dimension version of the geometry of the De Sitter space. That is, one can regard the group $SO(1,2)$ as the group of isometries of the usual Lobachevski geometry – $SO(1,2)/SO(2)$ but we can also regard this same group as the group of automorphisms of the two-dimensional De Sitter space $SO(1,2)/SO(1,1)$. One of the degeneracies of this single-sheeted hyperboloid is of course the hyperbolic paraboloid. The corresponding geometry of course is nothing other than two-dimensional Minkowski space.³³

4. Warum Poincaré keine fünfte Geometrie entdeckt hat

Es ist erstaunlich, dass Poincaré nicht wenigstens noch eine fünfte Geometrie entdeckt hat. Er wusste selbstverständlich, dass es fünf (nicht ausgeartete) Quadriken gibt; deren Beschreibung findet man beispielsweise in dem klassischen Geometrielehrbuch von Rouché und Comberousse.³⁴ Nachdem die

³⁰ In dem den Grundlagen der Geometrie gewidmeten Artikel [Poincaré 1898] verwendet dieser die Liesche Klassifikation der 12 Transformationsgruppen des \mathbb{R}^3 , welche eine quadratische Invariante zulassen. Um unter diesen die Euklidische Geometrie und die nichteuklidischen Geometrien auszuzeichnen, benutzt Poincaré die Eigenschaft, eine Drehuntergruppe der Ordnung 3 zu besitzen.

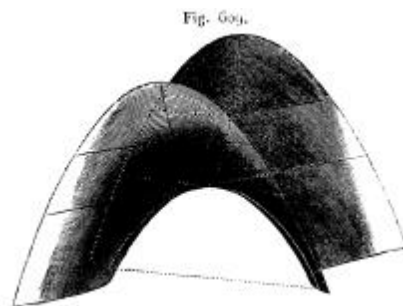
³¹ [Poincaré 1887, 206]

³² Sowohl die Minkowski- als auch die De Sitter-Geometrie besitzen beide eine Lorentz-Metrik, die erstere aber hat verschwindende Krümmung, während die Krümmung der De Sitter-Geometrie $+1$ oder -1 beträgt. Mehr Informationen zur De Sitter-Geometrie findet man in dem Artikel „A Geometrical Background for De Sitter World“ von H. S. M. Coxeter (Coxeter [1943]).

³³ [Sternberg 2006, 68]. Der Autor dankt Scott Walter (Nancy) für seinen Hinweis auf diese Quelle.

³⁴ [Comberousse-Rouché 1891]. Poincaré hat im Jahre 1900 für die siebte Auflage dieses klassischen Lehrbuchs eine Note über die nichteuklidischen Geometrien geschrieben.

beiden Autoren Flächen zweiten Grades als solche Flächen definiert haben, deren ebenen Schnitte sämtlich (reelle oder imaginäre) Kegelschnitte sind, unterschieden diese fünf Typen von Flächen zweiter Ordnung im „eigentlichen Sinn“: Die Flächen zweiter Ordnung, die Regelflächen sind (das einschalige Hyperboloid und das elliptische Paraboloid), ergeben sich als der Ort aller Schnitte homologer Ebenen, welche zu zwei Büscheln bestehend aus projektiven Ebenen gehören. Das einschalige Hyperboloid besitzt einen nicht-ausgearteten Schnitt mit der Fernebene, während sich der analoge Schnitt beim hyperbolischen Paraboloid auf zwei Geraden reduziert. Comberousse und Rouché klassifizieren die Flächen zweiter Ordnung im „eigentlichen Sinne“ gemäß ihren Schnitten mit der Fernebene. Folglich waren diese Flächen in den 1880iger Jahren aus einem Kapitel eines Standardlehrbuch der Raumgeometrie wohlbekannt³⁵.



Das hyperbolische Paraboloid³⁶

Wie das Zitat aus Poincarés Artikel von 1887 oben zeigt, betrachtete dieser die drei von ihm behandelten Typen von quadratischen Geometrien, welche auf den drei Quadriken mit Mittelpunkt (Ellipsoid, einschaliges und zweischaliges Hyperboloid) modelliert werden können, gewissermaßen als generische Fälle; die Geometrien, welche auf anderen Quadriken modelliert werden können, sind nur ausgeartete Fälle. Poincaré bemerkt sehr wohl, dass zu jeder ausgearteten Quadrik eine Geometrie gehört und dass die Geometrie des elliptischen Paraboloids die Euklidische ist. Warum hat Poincaré nicht wenigstens auf eine fünfte, zum hyperbolischen Paraboloid gehörige

³⁵ Das „Lehrbuch der Elementargeometrie“ « *Traité de géométrie élémentaire* » von Eugène Rouché und Charles de Comberousse behandelt umfassend Fragen der ebenen und räumlichen (reinen) Geometrie. Es wandte sich in erster Linie an Kandidaten, die sich für die Aufnahmeprüfung einer „Grande Ecole“ (etwa der „Ecole Polytechnique“) vorbereiteten. Die erste Auflage erschien 1860; die zahlreichen weiteren Auflagen waren mit Änderungen und Ergänzungen verbunden.

³⁶ [Comberousse-Rouché 1891, 486].

Geometrie,³⁷ die dieselben Eigenschaften wie Poincarés vierte Geometrie besitzt, hingewiesen?

Eine erste Antwort ist in dem Projekt von Poincaré zu suchen, das dieser in der Zeit verfolgte, als er seine Artikel 1887 und 1891 schrieb. 1887 ging es Poincaré darum, „die Hypothesen der Geometrie, die unbeweisbaren Sätze, auf denen diese Wissenschaft beruht“ zu bestimmen. „Dabei schließen wir wohlverstanden diejenigen Sätze aus, die schon erforderlich sind, um die Analysis zu begründen, ...“³⁸ Die von Poincaré gesuchte Charakterisierung der Euklidischen Geometrie zieht also gewisse nicht spezifisch geometrische Hypothesen nicht in Betracht, muss aber dennoch „eine große Zahl von Hypothesen, die man zu Beginn der Beweise verschiedener Sätze implizit voraussetzt“ erklären. Diese sind zahlreich und schwierig zu ermitteln:

„Allerdings entgehen diese Hypothesen im Allgemeinen dem Leser, zumindest dann, wenn er nicht außergewöhnlich aufmerksam ist; obwohl diese logisch gesehen nicht evident sind, erwecken sie in uns den Anschein, als seien sie es, weil sie in Folge der Gewöhnung in unseren Sinnen und in unserem Denken verwurzelt sind.“³⁹

Die vierte von Poincaré geschilderte Geometrie dient ihm hauptsächlich dazu, diesen Punkt zu illustrieren. Die Diskussionen um das Parallelenpostulat reichen hierzu nicht aus und das Studium allein der nichteuklidischen Geometrien genügt nicht, um alle implizit in der Geometrie zugelassenen Prämissen zu identifizieren. Poincaré gibt eine dieser Geometrien an, die exakt so konstruiert wird, wie die Euklidische und die nichteuklidischen Geometrien, die aber dennoch völlig andersartig ist, zumindest dann, wenn man von unseren Erfahrungen ausgeht. Diese vierte Geometrie rechtfertigt es, zwei weitere Axiome zusätzlich zu denen, die die quadratischen Geometrien charakterisieren, einzuführen. Diese beiden Axiome schließen die vierte Geometrie aus und lassen nur noch die Euklidische und die nichteuklidischen Geometrien zu:

„Der Abstand zweier Punkte kann nur dann Null sein, wenn die beiden Punkte identisch sind.

³⁷ Es handelt sich dabei wohlgerne um die Geometrie der Minkowski-Ebene.

³⁸ [Poincaré 1887, 203].

³⁹ [Poincaré 1887, 214].

Schneiden sich zwei Geraden, so kann man eine von ihnen um den Schnittpunkt so drehen, dass sie mit der anderen zusammenfällt.

Diese beiden Hypothesen hängen notwendig miteinander zusammen; es genügt, eine von beiden zu akzeptieren, um verpflichtet zu sein, auch die andere anzunehmen und die Geometrie des einschaligen Hyperboloids auszuschließen.“⁴⁰

Auch in dem 1891 in der „Revue générale des sciences pures et appliquées » veröffentlichten Artikel geht der Erwähnung der vierten Geometrie ein Abschnitt voraus, der der Lieschen Klassifikation der Transformationsgruppen gewidmet ist.

Obwohl, wie wir uns leicht klar gemacht, haben, die Geometrien eine Vielzahl von impliziten Prämissen mit sich bringen, die keineswegs ohne Konsequenzen sind – die Tatsache, dass die vierte Geometrie übersehen wurde, ist hierfür eine gute Illustration – ist die Aufgabe, die Geometrien exakt zu kennzeichnen, nicht völlig unlösbar, da die Anzahl der in Betracht kommenden Geometrien endlich ist. Folglich war es für Poincaré nicht nötig, eine fünfte Geometrie einzuführen, da diese zur Klärung seines Punktes nichts Zusätzliches mehr beigetragen hätte.

Eine zweite Antwort ergibt sich aus dem mathematischen Kontext. Ende des 19. Jhs. waren der Begriff der Krümmung einer Fläche im Euklidischen oder Riemannschen Raum wohlbekannt; zweifellos beherrschte Poincaré diese perfekt.⁴¹ Dagegen waren der Begriff der Lorentz-Metrik und damit a fortiori derjenige der Krümmung einer Fläche im Lorentz-Raum zu jener Zeit noch nicht bekannt.⁴² Es gab für Poincaré (oder einen anderen Mathematiker dieser Zeit) überhaupt keinen Grund, das einschalige Hyperboloid als eine Fläche mit konstanter nicht-verschwindender Krümmung im Lorentz-Raum zu identifizieren – und analog das hyperbolische Paraboloid als eine Fläche konstant verschwindender Krümmung in eben diesem Raum. Selbst wenn Poincaré die Rechnungen durchgeführt und festgestellt hätte, dass die für diese beiden Flächen erhaltenen Metriken verschieden sind, hätte es ihm sein theoretischer Kontext nicht erlaubt, diese unterschiedlichen Geometrien wirklich zu identifizieren. Das gilt umso mehr, als die von Poincaré betonten

⁴⁰ [Poincaré 1887, 214].

⁴¹ Poincaré hat 1883 die „Werke“ von Riemann bestellt und erhalten (vgl. http://www.univ-nancy2.fr/poincare/chp/image/mayer_muller1b.jpg).

⁴² Etwas später, 1905, und in einem völlig anderen Zusammenhang (Anfänge der Relativitätstheorie) hat Poincaré die Lorentz-Gruppe untersucht und dabei die quadratische Form $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ als invariant unter den „Substitutionen dieser Gruppe“ erkannt [Poincaré 1906, 168].

Eigenschaften, diesen beiden Geometrien gemeinsam sind.⁴³ Poincaré hat, wie dem auch sei, unbestreitbar einen Typ von Geometrie gefunden, den er mit der Tatsache in Beziehung setzte, dass die Operation der Gruppe der Bewegungen auf den Geraden nicht mehr transitiv ist. Dabei war sein Ausgangspunkt entweder wie im Artikel von 1887 ein Zugang über die Bewegungsgruppen oder aber eine Betrachtung der Axiome wie in seinem Beitrag von 1891. Weil diese nicht sein Thema war und weil dies im Rahmen der zu jener Zeit aktuellen Forschungen nicht vorgesehen war, hat er dennoch nicht versucht, diese Geometrien zu erforschen oder gar zu klassifizieren.⁴⁴

Bibliographie

Marcel Berger

[1977] *Géométrie*, Paris : CEDIC-Nathan, 1977 ; Eng. Üb., *Geometry*, Berlin/New York : Springer, 1987.

Charles de Comberousse & Eugène Rouché

[1891] *Traité de géométrie*, 6^e Auflage, Paris : Gauthier-Villars, 1891.

Harold Scott MacDonald Coxeter

[1943] A geometrical background for De Sitter's World, *The American Mathematical Monthly*, 50 (1943), 217-228.

Jeremy J. Gray

[1986] *Linear differential equations and group theory from Riemann to Poincaré*, Boston: Birkhäuser, 1986 ; 2d ed., 2000.

Edmond Laguerre

[1853] Note sur la théorie des foyers, *Nouvelles annales de mathématiques*, (1) 12 (1853), 57-66.

Émile Macquart,

[1905] Revue des principales publications économiques de l'étranger, *Journal des économistes, revue mensuelle de la science économique et de la statistique*, Paris : Librairie Guillaumin, 63^e Jahrgang, 5. Serie, Band 1, 56-74.

⁴³ In seinem Artikel von 1887 betont Poincaré, dass die Euklidische Geometrie ein „Grenzfall“ sei, das heißt, dass man diese als Ausartungsfall der hyperbolischen Geometrie erhalten kann. Man könnte also annehmen, dass Poincaré – wäre dies sein Thema gewesen – hätte erkennen können, dass die Geometrie auf dem hyperbolischen Paraboloid zu derjenigen auf dem einschaligen Hyperboloid in einer analogen Beziehung steht wie die Geometrie auf dem elliptischen Paraboloid zu derjenigen des zweischaligen Hyperboloids.

⁴⁴ Der Autor dankt Caroline Ehrhardt, Philippe Henry und Laurent Rollet für ihr aufmerksames und kritisches Studium einer ersten Version dieses Textes, das es ermöglichte, diese zu verbessern.

Philippe Nabonnand

[2010] La Théorie de l'espace de Poincaré, in P.E Bour & S. Roux (éds.), *Lambertiana*, numéro hors série de *Recherches sur la philosophie et le langage*, Paris : Vrin, 2010, 373-391.

Henri Poincaré

[1884] Théorie des groupes fuchsien, *Acta mathematica*, 1 (1884), 1-62.

[1887] Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 15 (1887), 203-216.

[1891] Les géométries non euclidiennes, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 2 (1891), 769-774.

[1898] On the Foundations of Geometry, *The Monist*, 9 (1898), 1-43 (englische Übersetzung eines Manuskripts von Poincaré durch T.J. Mc Cormack) ; französische Übersetzung der englischen Version durch L. Rougier, *Des Fondements de la géométrie*, Paris : Chiron, 1921 ; wieder veröffentlicht von L. Rollet in: H. Poincaré, *L'Opportunisme scientifique*, Basel : Birkhäuser, 2002, 5-46.

[1902] *La Science et l'hypothèse*, Flammarion : Paris, 1902 ; zitiert nach der Ausgabe Flammarion : Paris, 1968 (mit einem Vorwort von J. Vuillemin).

[1906] La dynamique de l'électron, *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, 21 (1906), 129-176.

Eugène Rouché

[1887] Edmond Laguerre, sa vie et ses travaux, *Nouvelles annales de mathématiques*, (3) 6 (1887), 105-173.

Shlomo Sternberg

[1986] Review of *Imagery in Scientific Thought* by Arthur I. Miller, *The Mathematical Intelligencer*, 8 (2) (1986), 64-74.

Klaus Volkert

[2013] Das Unmögliche denken. Die Rezeption der nichteuclidischen Geometrie im deutschsprachigen Raum 1860 – 1900. Heidelberg: Springer, im Erscheinen.

Elie Zahar

[2000] Les fondements de la géométrie selon Poincaré, *Philosophia Scientiæ*, 1 (2000), 145-186.