



HAL
open science

Une géométrie sans figure ?

Philippe Nabonnand

► **To cite this version:**

Philippe Nabonnand. Une géométrie sans figure?. Evelyne Barbin & Philippe Lombard. La Figure et la Lettre, Presses Universitaires de Nancy - Editions de l'Université de Lorraine, p. 99-119., 2011, Collection "Histoires de géométries". hal-01082518

HAL Id: hal-01082518

<https://hal.science/hal-01082518>

Submitted on 13 Nov 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une géométrie sans figure ?

Philippe Nabonnand¹

Dans son célèbre exposé d'histoire de la géométrie, Michel Chasles déclare que « L'ancienne géométrie est hérissée de figures » faisant le constat que la géométrie « pure » consiste essentiellement à résoudre, de manière plus ou moins organisée, des problèmes concernant une figure particulière. En développant des méthodes de démonstration qui privilégient la généralité, – c'est-à-dire qui conduisent à des théorèmes concernant des classes de figures *corrélatives* – Lazare Carnot, Jean Victor Poncelet et Jacob Steiner entre autres inaugurent une nouvelle pratique de la géométrie. Dans un premier temps, la question tourne autour de la définition et de la résolution de « problèmes généraux » puis, en défendant l'idée que l'étude de la géométrie doit commencer par celle des propriétés des formes projectives (droites, plan, faisceaux, ...), Steiner fait émerger la conception de la géométrie comme théorie.

Ce changement radical dans les pratiques et dans la conception de la géométrie pure s'accompagne d'une part de la considération d'éléments dits (dans un premier temps) *idéaux* (éléments à l'infini, éléments imaginaires) et d'autre part, d'un processus d'effacement de la figure qui trouve son achèvement avec le traité de Carl Christian Georg von Staudt, *Geometrie der Lage* (1847).

1. Les figures corrélatives de Carnot

L'ambition géométrique de Carnot peut se résumer en deux points : d'une part, légitimer la considération de l'implicite en géométrie pure, d'autre part étendre le domaine de la géométrie. User de l'implicite dans les raisonnements de la géométrie signifie autoriser des procédures qui permettent au géomètre de généraliser les considérations qui découlent de l'examen d'une figure particulière. Ainsi, de la considération de la figure 1

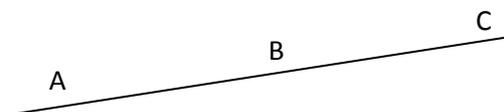


Figure 1

Carnot revendique pour le géomètre d'utiliser la *formule explicite* $AB + BC = AC$ mais aussi la *formule implicite* $AB - BC = AC$ qui correspond à la figure 2.

¹ Archives Poincaré (UMR 7117 du CNRS) – Nancy Université
Philippe.Nabonnand@univ-nancy2.fr.

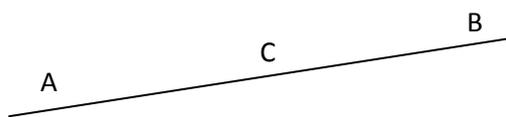


Figure 2

Ainsi, Carnot ambitionne de donner au géomètre le droit de considérer des déploiements de figures dites corrélatives :

Le mode que je me propose de suivre consiste à rapporter chaque figure dont on recherche les propriétés, à une autre figure dont les propriétés sont connues, et qu'on prend pour terme de comparaison ; puis à l'aide de caractéristiques particulières, et de l'arrangement systématique des lettres employées pour désigner les points qui déterminent les diverses parties de ces figures, on exprime les modifications qui les distinguent : c'est ce que j'appelle établir la corrélation des figures. [Carnot 1801, 1] & [Carnot 1803, 3]

Ainsi, toute la connaissance que l'on a du système primitif se transmet sous forme implicite aux systèmes corrélatifs. Il ne reste plus qu'à mettre en place les procédures qui permettent de rendre explicite cette connaissance implicite. Carnot justifie l'utilisation des figures corrélatives comme l'application en géométrie d'une méthode générale qui consiste à ramener l'analyse de l'inconnu à des situations connues :

Ainsi, cette théorie dérive essentiellement d'un principe fondamental qui ne s'applique pas seulement à la question ici traitée, mais à toutes les parties des mathématiques et de la dialectique en général ; et qui consiste à rapporter toujours l'objet qu'on veut considérer à un autre objet connu que l'on prend pour terme de comparaison ; car en observant la marche de l'esprit dans la recherche des vérités, on voit facilement qu'elle se réduit toujours à décomposer les questions qui sont trop compliquées, eu égard à l'étendue de nos facultés intellectuelles, pour les ramener à des questions plus simples. [Carnot 1801, 27]

Carnot propose de résumer les relations entre les différents éléments des figures sous forme de tableaux ; on rapporte le problème à une figure particulière, on dresse alors un tableau qui représente l'ensemble des propriétés de cette figure *primitive*, puis en prenant cette figure comme « terme de comparaison », il suffit alors « d'y rapporter par des tableaux additionnels [appelés tableaux de corrélation], toutes celles dont la construction est essentiellement la même », c'est-à-dire les figures corrélatives :

Pour découvrir les mutations qui doivent avoir lieu pour tel ou tel système corrélatif, je le regarde comme né du système primitif, en vertu d'une transformation opérée par degrés insensibles, qui ne change rien aux bases générales de la première construction, mais qui modifie seulement les positions respectives, en faisant passer au-dessus ce qui étoit au-dessous, ou à droite ce qui étoit à gauche. De ce mouvement graduel, il résulte que telle quantité du système qui se trouvoit d'abord plus petite que telle autre, devient plus grande, et respectivement. Or c'est de-là uniquement [...] que naît le principe général de la mutation des signes, qui doit avoir lieu dans les formules du système primitif, pour qu'elles deviennent applicables au système transformé ou corrélatif. [Carnot 1803, xxviii]

Pour établir par exemple que la formule $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ supposée montrée dans le cadre du « premier système » reste valable dans pour le second,

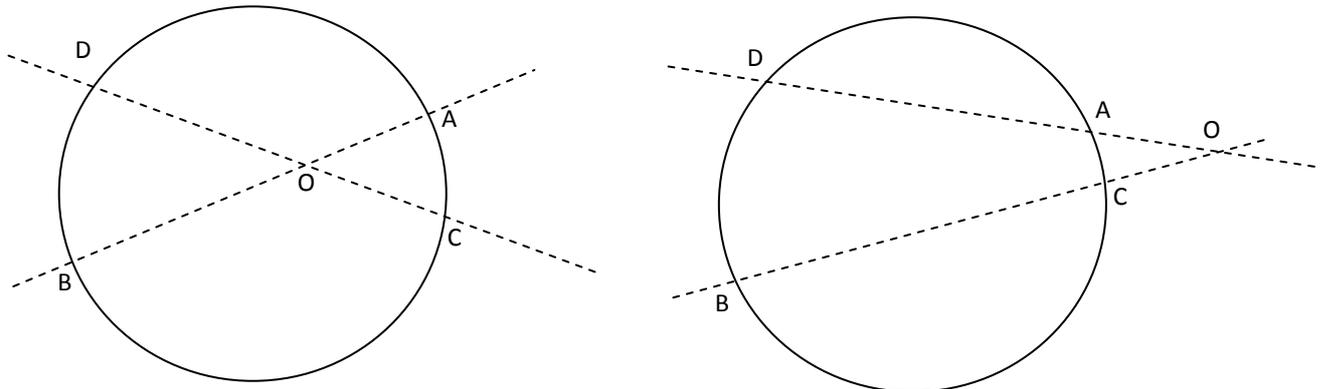


Figure 3 – 1^{er} système

2^{ème} système

Carnot établit un premier *tableau de corrélation de construction*. Ce tableau met en correspondance les divers éléments des figures corrélatives. Dans l'exemple, chaque point correspond à son transformé.

Corrélation de construction

1 ^{er} système	O	A	B	C	D
2 ^e système	O	A	B	C	D

A partir de ce premier tableau de corrélation de construction, Carnot établit le tableau de corrélation de quantités ou des valeurs absolues entre les segments, angles et surfaces. Dans l'exemple, nous limitons les termes mis en correspondances aux quatre segments impliqués par la relation :

Corrélation des valeurs absolues

1 ^{er} système	OA	OB	OC	OD
2 ^e système	OA	OB	OC	OD

Le tableau de corrélation de position établit la liste des inversions de position relative des éléments lorsque l'on passe de la figure primitive à la figure corrélative :

Corrélation de position

1 ^{er} système	AOB	COD
2 ^e système	OAB	OCD

Le tableau des corrélations de position fait apparaître un certain nombre d'inversions ; dans l'exemple, l'inversion des positions relatives des points A et O sur la droite AB et ainsi que celle des positions relatives de C et O sur la droite CD. Un certain nombre de quantités impliquant les éléments dont les positions relatives ont été inversées sont alors affectées d'un signe « – ». On obtient ainsi le tableau général de corrélation des deux figures.

Tableau général de corrélation des deux systèmes

1 ^{er} système	+OA	+OB	+OC	+OD
2 ^e système	– OA	+OB	– OC	+OD

On peut alors déduire de la formule $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ dans le premier système, la formule $-OA \cdot OB = -OC \cdot OD$ pour le second système.

La méthode des corrélations de Carnot va de pair avec une nouvelle conception de la pratique de la géométrie. En particulier, même dans le cadre de la géométrie élémentaire, on ne peut plus se satisfaire de considérer des problèmes ou des théorèmes particuliers des figures. Pour que l'objectif de la géométrie élémentaire soit atteint, il faut développer une théorie capable de résoudre des problèmes généraux tels celui cité par Carnot :

Dans un système quelconque de lignes droites, tracées ou non dans un même plan, quelques unes d'elles, ou des angles qui résultent de leur assemblage, soit entre elles-mêmes, soit entre les plans qui les contiennent, étant donnés en nombre suffisant pour que toute la figure soit déterminée, trouver tout le reste. [Carnot 1803, xxxiii]

Carnot insiste pour bien faire comprendre que son objectif n'est pas de « grossir les éléments ordinaires d'un grand nombre de nouvelles propositions, quelques curieuses et subtiles qu'elles puissent être » mais bien « de parvenir à la solution d'un problème général qui les renferme toutes comme cas particuliers dans ses développemens, et d'où elles dérivent par une simple combinaison de formules ». L'épistémologie de la généralité avancée par Carnot s'inscrit dans l'idéal combinatoire du XVIII^e siècle. D'autant plus, qu'il propose un embryon de formalisme pour exprimer les propriétés géométriques. Ainsi, la propriété de la puissance d'un point par rapport à un cercle s'exprime dans ce formalisme sous la forme suivante :

Cir. ABCD, A, B, C, D rangés comme on veut, $AB \cdot CD \neq 0$, donne $OA \cdot OB = OC \cdot OD$. [Carnot 1801, 52]

L'idéal géométrique de Carnot rejoint ainsi d'une certaine manière celui de Leibniz qui dans sa célèbre lettre à Huygens du 8 septembre 1679², affirme son intention de développer une « autre Analyse proprement géométrique ou linéaire, qui nous exprime directement *situm*, comme l'Algèbre exprime *magnitudinem* ».

² [Leibniz 1679].

« Ainsi, l'énoncé technique contient une sorte de description symbolique qui renferme elle-même implicitement la description graphique. Ce n'est pas qu'il ne soit très-utile de s'aider de cette dernière ; mais il l'est souvent aussi de pouvoir s'en passer, et de n'avoir à opérer que sur les symboles. C'est même en cela que consiste un des plus grands avantages de l'algèbre, pouvoir se passer de l'inspection de la figure aussi-tôt que ses propriétés en sont traduites en phrases analytiques. » [Carnot 1801, 56]

Les méthodes de Carnot inscrivent les figures particulières dans des déploiements de figures corrélatives qui se transforment continuellement les unes en les autres. En introduisant l'implicite dans le raisonnement géométrique, Carnot donne donc à l'examen d'une figure particulière un caractère de généralité puisque les propriétés de cette figure [particulière] peuvent s'étendre moyennant quelques changements de signes dans les formules aux figures corrélatives.

2. Le principe de continuité et les propriétés projectives de Poncelet

L'intention de Poncelet est, dans la lignée de Gaspard Monge et de son école, d'aborder les questions géométriques dans un cadre général dépassant celui de l'étude de figures ou problèmes particuliers. Il se propose de développer des méthodes purement géométriques qui permettraient « de faire passer dans la Géométrie ordinaire la généralité des conceptions de l'Analyse algébrique, généralité qui doit nécessairement appartenir à l'essence même de la grandeur figurée, indépendamment de toute manière de raisonner³ ». Poncelet met en œuvre de manière complémentaire deux types d'approche pour réaliser ses objectifs :

[...] deux moyens généraux, également puissants, se présentent pour perfectionner la Géométrie rationnelle : l'un qui consiste à étendre l'objet des conceptions de cette Géométrie à l'aide du principe de continuité, l'autre qui met en usage les principes de la doctrine des projections pour procéder, par une marche à la fois rapide et exempte d'hésitation, à la recherche des vérités géométriques. [Poncelet 1822, xxii]

Le *principe de continuité* ou de permanence des propriétés des figures exprime l'idée que les propriétés géométriques d'une figure restent invariantes lorsque les positions relatives des constituants de la figure varient.

[...] par hypothèse, ces positions sont telles, qu'on peut regarder, à volonté, les unes comme provenant des autres par le mouvement progressif et continu de certaines parties de cette figure, sans violer la liaison et les lois primitives établies entre elles. Or, quand deux figures sont ainsi liées entre elles, les propriétés de l'une sont directement applicables à l'autre, sauf les modifications qui peuvent arriver dans les signes de position, ou dans la réalité et la grandeur absolue des parties. [Poncelet 1822, 66]

La figure particulière se dilue ainsi dans des séries de figures dont certains éléments peuvent même disparaître ; en effet, le principe de continuité s'applique selon Poncelet même lorsque certains éléments de la figure deviennent imaginaires.

³ [Poncelet 1818, 297]

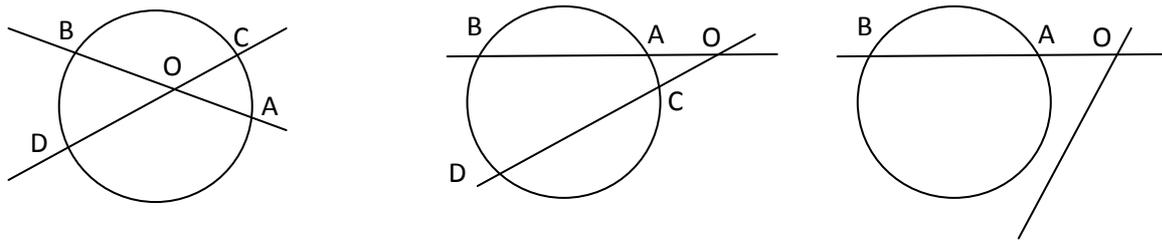


Figure 4 – $OA.OB = OC.OD$

En raison du principe de continuité, les propriétés montrées pour une des figures restent valides pour toutes les figures de la série. Lorsque des éléments deviennent imaginaires, la propriété cesse d'être directement applicable mais n'en devient pas fausse pour autant et peut être utilisée dans le cours de la démonstration, l'important étant que les résultats montrés ne s'appliquent qu'à des éléments réels.

Le principe de continuité permet de justifier l'adoption de convention concernant les éléments à l'infini : ainsi, l'expression « points à l'infini d'une droite » résulte de l'application de ce principe lorsque l'on considère deux sécantes dont l'une pivote autour d'un point jusqu'à ce que les deux droites deviennent parallèles (voir figure 5).

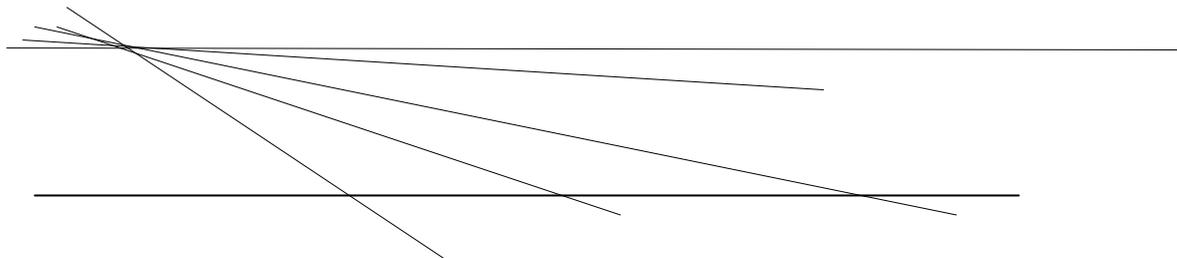


Figure 5 – En même temps qu'une des deux sécantes pivote autour d'un point fixe, le point d'intersection des deux sécantes s'éloigne à l'infini.

De même, il résulte de l'application du principe de continuité que « tous les points à l'infini d'un plan puissent être considérés idéalement comme distribués sur une droite unique, située elle-même à l'infini sur ce plan⁴ ».

Poncelet défend l'admission du principe de continuité en géométrie pure en argumentant que celui-ci est déjà couramment utilisé en géométrie analytique puisque lorsqu'on raisonne géométriquement avec des équations, on envisage dans un même geste une multiplicité de figures corrélatives. Dans l'introduction du *Traité des propriétés projectives des figures*⁵, il semble faire une concession en demandant l'adoption du principe de continuité « comme moyen de découverte ». Pourtant, en revendiquant un usage heuristique de ce principe, il indique en même temps un changement de point de vue sur les objectifs et la nature de la géométrie. En effet, il est bien question de ne pas s'arrêter aux propriétés particulières des figures mais de s'intéresser aux relations entre les éléments des systèmes géométriques considérés dans leur « état général ».

Poncelet ne cache pas qu'il y a quelques difficultés à définir la notion de propriété générale. Pour cette raison, il propose de limiter son programme de recherche à l'étude des propriétés

⁴ [Poncelet 1822, 49].

⁵ [Poncelet 1822, xiv].

projectives des figures, présentées comme des exemples emblématiques de propriétés générales :

Agrandir les ressources de la simple Géométrie, en généraliser les conceptions et le langage ordinairement assez restreints, les rapprocher de ceux de la Géométrie analytique, et surtout offrir des moyens généraux propres à démontrer et à faire découvrir, d'une manière facile, cette classe de propriétés dont jouissent les figures quand on les considère d'une manière purement abstraite et indépendamment d'aucune grandeur absolue et déterminée, tel est l'objet qu'on s'est spécialement proposé dans cet Ouvrage. De telles propriétés subsistent, avons nous dit, à la fois pour une figure donnée et pour toutes ses projections ou perspectives ; on a donc dû les distinguer de toutes les autres par le nom générique de propriétés projectives, qui en rappelle, d'une manière abrégée, la véritable nature. » [Poncelet 1822, xxii]

La restriction aux seules propriétés projectives des figures n'en est pas vraiment une puisque l'ambition de Poncelet est de proposer une présentation synthétique de la théorie des coniques et des surfaces du 2^e degré. En effet, au début du XIX^e siècle, ces deux théories sont l'aune à partir de laquelle se juge la qualité d'un travail en géométrie. On n'imagine pas de contribuer de manière innovante en géométrie sans traiter des coniques et des surfaces du second degré. La définition classique des coniques comme section d'un cône à base circulaire est en harmonie avec la définition de figures projectives proposées par Poncelet. De plus, la classification des coniques s'exprime parfaitement en termes d'intersection avec la droite à l'infini : l'ellipse n'a aucun point à l'infini, la parabole, un et l'hyperbole en présente deux.

Poncelet organise l'étude des propriétés projectives des figures autour de principes de projection qui exprime l'existence d'une relation de projection entre deux figures :

Une figure plane quelconque, où entrent une certaine et une section conique, peut, en général, être regardée comme la projection d'une autre, pour laquelle la droite est passée entièrement à l'infini, et la section conique est devenue une circonférence de cercle. [Poncelet 1882, 53]

Poncelet donne une démonstration explicite et rigoureuse de ce principe de projection lorsque la droite ne coupe pas la conique⁶. Il en étend la validité en invoquant la permanence des propriétés des figures corrélatives, ce qui lui permet de préciser [que c'est] le sens qu'il faut donner à l'expression « en général » utilisée dans l'énoncé du principe. Le principe est rigoureusement démontré pour une série de cas, il ne l'est pas pour une autre série ; pour autant, en vertu du principe de continuité, la propriété n'en demeure pas moins vraie, quoique non applicable :

Si la propriété qu'on examine et qui, par hypothèse, a été établie pour une situation non singulière, mais indéterminée, des parties de la figure, ne concerne que des objets actuellement réels et constructibles, elle aura lieu d'une manière entièrement absolue et géométrique ; dans la supposition contraire, elle cessera d'être applicable à ces objets d'une

⁶ Lorsque la droite coupe la conique, il est manifeste qu'il ne peut y avoir de projection réelle entre les deux figures puisque le nombre de points d'intersection est invariant projectivement.

manière absolue, sans pour cela devenir ni fausse, ni absurde à l'égard des objets demeurés réels. [Poncelet 1822, 66]

La théorie de Poncelet reste une géométrie de figures, de problèmes et théorèmes. Certes la nature des problèmes et des théorèmes changent de nature puisqu'ils concernent les propriétés projectives (invariantes par projection centrale) des figures (car générales). La figure particulière reste en dernière instance le lieu de la démonstration mais comme celle-ci est prise dans des réseaux de figures projectives ou dans des déploiements de figures dont les éléments glissent continuellement les uns par rapport aux autres, les propriétés relatives à une figure particulière acquièrent un caractère de généralité en s'étendant à d'autres figures. Les méthodes projectives mettent en œuvre des notions comme celles d'élément à l'infini, d'éléments imaginaires, de points cycliques permettant de lier des configurations géométriques diverses et en particulier d'obtenir une théorie unifiée des coniques et des surfaces du second degré. Enfin, Poncelet développe une théorie de la polarité des figures à partir de la notion de coniques supplémentaires. Cette théorie justifie entre autre à ses yeux les propriétés de dualité⁷ étendant ainsi dans une nouvelle direction la généralité des énoncés de la géométrie :

[...] la *théorie des polaires réciproques* [est] susceptible d'une extension telle, qu'au simple énoncé d'une proposition suffisamment générale de l'étendue, elle permet d'en assigner sur-le-champ une tout autre différente et tout aussi générale, à moins cependant que la proposée ne soit elle-même sa réciproque, ce dont il y a des exemples. [Poncelet 1829, 1]

Les principes de continuité, de projection ou de dualité sont pour Poncelet des principes méthodologiques de transformation des figures. Les transformations en jeu dans ces principes sont des outils d'études des figures géométriques et pour l'essentiel des coniques. Même lorsque Poncelet s'intéresse à des transformations particulières comme la similitude ou l'homologie, il ne les définit pas comme des transformations du plan ou de l'espace ; il présente ces notions comme des propriétés de certaines figures. La figure reste en toute circonstance l'objet central d'étude dans la géométrie de Poncelet.

3. Les formes fondamentales de Steiner

La présentation de la géométrie change radicalement avec l'exposé de Steiner [1832], dont le titre *Développement systématique de la dépendance mutuelle des figures géométriques eu égard aux travaux des géomètres anciens et contemporains sur les porismes, les méthodes projectives, la géométrie de position, les transversales, la dualité et la réciproque, etc.* annonce l'ambition du programme de recherche. Steiner subordonne l'étude des figures à la géométrie des formes fondamentales (ponctuelle, système-plan, faisceau de droites et de plans, gerbe) en centrant son analyse sur l'étude des relations projectives entre formes fondamentales. Les propriétés des figures, les théorèmes classiques de géométrie et la théorie des coniques et des surfaces du second degré découlent de l'étude des relations projectives entre formes fondamentales.

⁷ Joseph Gergonne [1825-26] développe en même temps une théorie de la dualité fondée sur la symétrie des énoncés. Les deux géomètres se livreront à une virulente polémique de priorité qui les brouillera définitivement.

Comme le titre de son traité l'indique, l'ambition de Steiner est d'exposer et organiser de manière systématique le corpus de la géométrie ancienne et moderne en structurant son analyse autour d'un certain nombre de propriétés fondamentales qui renferment « le germe de tous les théorèmes, porismes et problèmes de la géométrie⁸ ».

L'objectif est de trouver un fil directeur et une origine commune à toutes les théories géométriques qui sont séparées les unes des autres, de déterminer les éléments et leurs relations à partir desquels on pourra appréhender la manière de procéder de la « Nature » pour « conférer une infinité de propriétés le plus économiquement et le simplement possible⁹ ».

En s'appropriant convenablement les quelques relations fondamentales, on se rend maître de la totalité du sujet ; l'ordre pénètre dans le chaos, et on voit comment toutes les parties sont naturellement liées entre elles, comment elles s'alignent dans le plus bel ordre et comment celles qui ont des affinités se combinent en des groupes bien délimités¹⁰. [Steiner 1832, I, 4]

Steiner présente les objets ordinaires de la géométrie en les dénommant formes fondamentales et en insistant sur leur capacité à être mis en relation entre eux. Ainsi, la droite sera présentée comme le support d'une infinité de points, le faisceau plan de rayons comme la classe des droites d'un même plan passant par un point, le faisceau de plans comme la classe des plans contenant une même droite, le faisceau de rayons dans l'espace comme la classe des droites de l'espace passant par un même point (dont Steiner précise qu'il englobe aussi une infinité de faisceaux de rayons plans et de faisceaux de plans).

Les relations fondamentales, « sur lesquelles toutes les recherches reposent¹¹ » sont de trois catégories : celles qui concernent les formes fondamentales qui sont des déploiements d'une seule catégorie d'éléments : la droite, le faisceau plan de rayons, celles qui associent les formes dans lesquelles deux catégories d'éléments se déploient, et enfin celles qui associent deux espaces. Steiner envisage par exemple la relation entre un plan et un faisceau de rayons dans l'espace qui fait correspondre à chaque point du plan, un rayon du faisceau de rayons et à chaque droite du plan, un plan contenu dans le faisceau.

Une droite et un faisceau plan de rayons sont dits *en perspective* lorsque l'on chaque rayon du faisceau est associé à son point d'intersection avec la droite (voir figure 6).

⁸ [Steiner 1832], 3.

⁹[Steiner 1832], 4.

¹⁰ Durch gehörige Aneignung der wenigen Grundbeziehungen macht man sich zum Herrn des ganzen Gegenstandes; es tritt Ordnung in das Chaos ein, und man sieht, wie alle Theile naturgemäss in einander greifen, in schönster Ordnung sich in Reihen stellen, un verwandte zu wohlbegrenzten Gruppen sich vereinigen.

¹¹ Die Fundamentalbeziehungen, auf welchen alle untersuchungen beruhen, sind folgende. [Steiner 1832, I, 8]

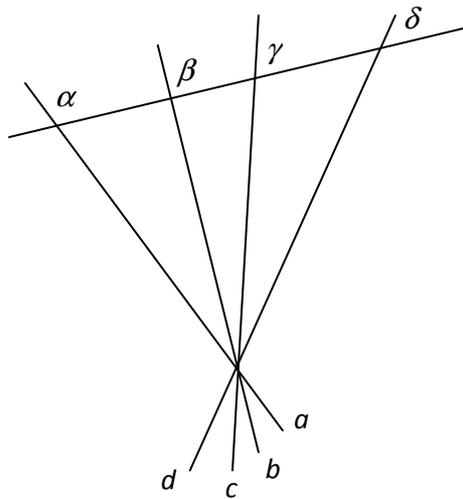


Figure 6 – Le faisceau de rayons $abcd$ et la droite $\alpha\beta\gamma\delta$ sont en perspective.

Cette définition se généralise à une droite et un faisceau de plans. De même, deux droites sont dites en perspective si elles sont perspectives d'un même faisceau plan de rayons, deux faisceaux plans de rayons le sont lorsque qu'ils sont perspectifs d'une même droite.

Steiner généralise la notion de relation entre forme en introduisant la notion de formes fondamentales en *position oblique* : deux formes dont les éléments sont appariés deux à deux sont dites en position oblique si on peut par un glissement (qui n'affecte pas les positions respectives des éléments à l'intérieur de la forme) les mettre en perspective (voir figure 7).

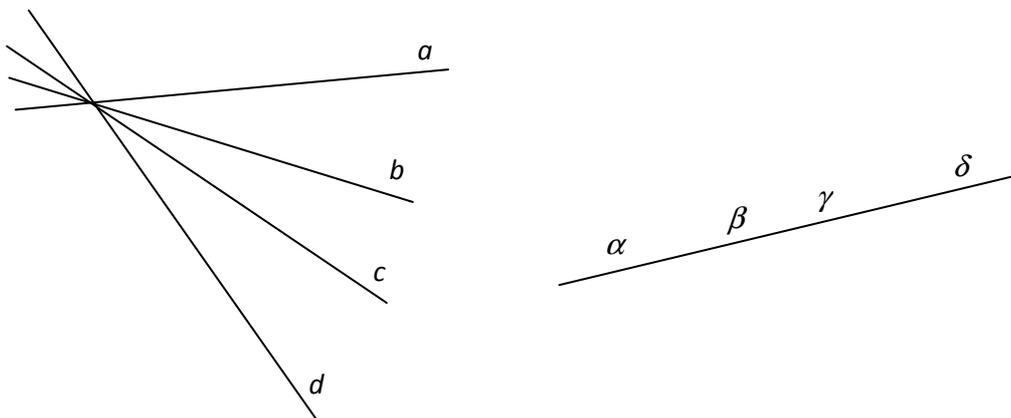


Figure 7 – Le faisceau de rayons $abcd$ et la droite $\alpha\beta\gamma\delta$ sont en situation oblique.

Une propriété évidente des formes en perspective est la conservation des birapports¹² ; étant donné une droite et un faisceau plan en perspective, soit a, b, c, d et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre points de la droite et quatre droites du faisceau qui sont correspondants deux à deux, alors,

¹² La propriété se montre d'abord pour une droite et un faisceau plan de rayons comme conséquence de la définition du sinus et de l'aire du triangle.

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{\sin \alpha\gamma}{\sin \alpha\delta} : \frac{\sin \beta\gamma}{\sin \beta\delta}$$

Puisque deux formes en position oblique peuvent être mises en perspective sans modification des positions de leurs éléments, la propriété de conservation du birapport se généralise pour les formes en position oblique. Steiner définit alors la notion de relation projective à partir de cette propriété :

Si les éléments de deux formes sont appariés de telle manière que les birapports définis par quatre éléments quelconques de la première forme soient égaux aux birapports définis par les quatre éléments de la seconde forme, [...] alors les formes sont, par rapport à toutes ces paires d'éléments, projectives¹³. [Steiner 1832, I-38]

Steiner montre la rigidité de ce type de relation. En particulier, il prouve que la donnée de trois paires quelconques d'éléments est suffisante pour déterminer le système complet des paires d'éléments correspondants entre eux de deux formes. Steiner en déduit une série de théorèmes concernant les formes projectives et les relations entre leurs éléments. Mais comme il l'annonçait dans la préface, il ne se contente pas de développer une nouvelle théorie mais montre en même temps qu'il retrouve l'ensemble des résultats antérieurs. Ainsi, il expose une théorie des coniques (et des surfaces du second degré) qui ne s'appuie que sur des considérations de dépendances projectives des formes. Steiner pose tout d'abord deux questions concernant les formes projectives : les rayons de projections¹⁴ de deux droites en perspective sont (par définition) concourants. Qu'en est-il des rayons de projection de droites en position oblique ? De même, les points d'intersections des droites correspondantes de deux faisceaux plans de rayon en perspective sont (par définition) alignés. Qu'en est-il des points d'intersections des droites correspondantes de deux faisceaux plans de rayon en position oblique¹⁵. Steiner annonce que l'étude de ces ensembles de droites et de points vont permettre de présenter de manière facile, intuitive et générale la théorie des coniques tout en exhibant en même temps un « magnifique double engendrement de celles-ci par des formes projectives¹⁶ ».

Steiner commence par décrire de manière très classique les coniques comme intersection d'un cône à base circulaire et d'un plan. Cette présentation ne sert pas directement dans la suite ; elle n'a pour fonction que d'assurer que les courbes engendrées par les formes projectives sont identiques aux coniques. En même temps, l'insistance de Steiner pour montrer que la présentation classique fait constamment appel à l'intuition géométrique lui permet de faire ressortir *a contrario* le caractère intrinsèque de sa théorie.

¹³ Sind die Elemente zweier Gebilde dergestalt gepaart, dass die durch irgend vier Elemente des einen Gebildes bestimmten Doppelverhältnisse gleich sind den durch vier entsprechenden Elemente des anderen Gebildes bestimmten Doppelverhältnisse, [...], so sind die Gebilde, in Beziehung auf alle jene Elementenpaare, projectivisch.

¹⁴ Les rayons de projection de deux droites projectives sont les droites qui joignent les paires de points correspondants.

¹⁵ Steiner pose les mêmes questions concernant les droites et les faisceaux de plans projectifs.

¹⁶ [...] ein sehr merkwürdige doppelte Erzeugung derselben durch projectivische Gebilde. [Steiner 1932, II, 3]

La théorie de Steiner repose en fait sur une propriété élémentaire des cercles provenant de la géométrie élémentaires ; soit deux points B et B_1 sur un cercle ; il est bien connu que si deux angles de sommet B et B' intersectent le même arc de cercle, alors les deux angles sont égaux (et réciproquement). Steiner traduit cette propriété en terme de formes fondamentales projective :

Deux faisceaux plans de rayons dont les sommets sont situés sur un même cercle et dont les rayons qui s'intersectent en un même point sont associés deux à deux, sont projectifs.

De manière duale, si l'on considère deux tangentes d'un même cercle, la relation qui associe deux à deux les points d'intersection de ces tangentes avec les autres tangentes du cercle est projective.

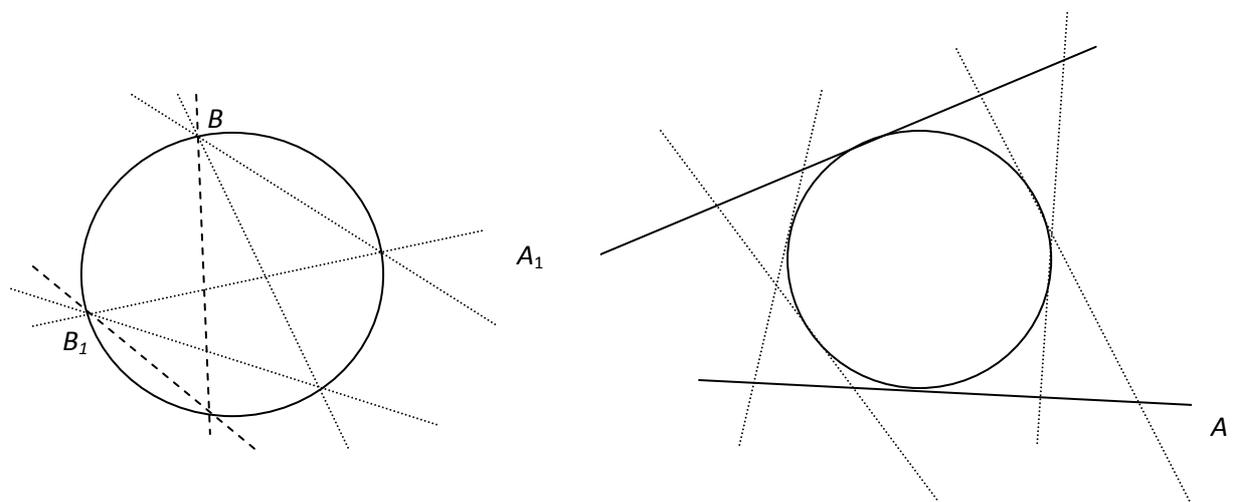


Figure 8 – Les faisceaux B et B_1 sont en relation projective de même que les droites A et A_1 .

En généralisant ces deux théorèmes aux cônes et aux faisceaux de plans et en affirmant les réciproques, Steiner induit un lien intrinsèque entre la notion de relation projective et celle de conique, ce qui lui permet de définir les coniques comme le lieu d'intersection des rayons de deux faisceaux plans de rayons ou comme enveloppées par les rayons de projection de deux droites projectives :

Deux droites A, A_1 en position oblique dans un même plan engendrent une conique qui leur est tangente, c'est-à-dire celles-ci et tous leurs rayons de projection sont les tangentes d'une conique déterminée.

Deux faisceaux (plans) de rayons projectifs B, B_1 en position oblique dans un même plan engendrent une conique qui passe par leur centre, c'est-à-dire ces derniers et les intersections des paires de rayons correspondants sont les points d'une conique déterminée¹⁷. [Steiner 1832, II, 12]

¹⁷ Jede zwei in einer Ebene schief liegende Gerade A, A_1 erzeugen einen Kegelschnitt, der sie berührt, d.h., sie und alle ihre Projektionsstrahlen sind die gesamten Tangenten eines bestimmten Kegelschnitts.

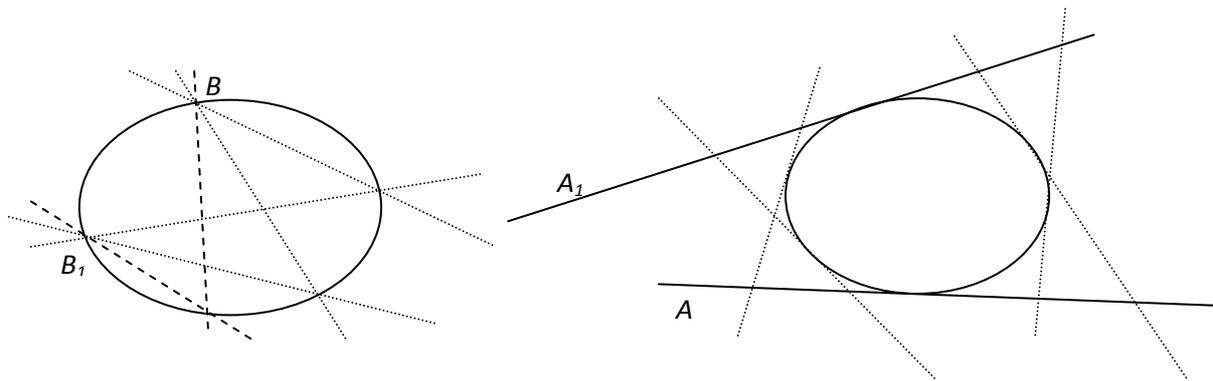


Figure 8 – Les faisceaux B et B_1 sont en relation projective de même que les droites A et A_1 .

Steiner souligne l'importance à ces yeux de ces théorèmes ; non seulement, on peut étudier les propriétés des coniques dans un cadre conceptuel unifié mais surtout la théorie des coniques est intégrée dans le cadre général de l'étude des formes projectives :

Les nouveaux théorèmes établis ci-dessus sur les cônes du second degré et leurs sections sont plus importants pour l'étude de ces figures que tous les théorèmes connus auparavant sur celles-ci car ils sont les théorèmes fondamentaux véritablement authentiques, puisqu'ils sont en effet si universels que presque toutes les autres propriétés de ces figures se déduisent de ceux-ci de la manière la plus simple et la plus claire et aussi parce que la méthode suivant laquelle ils ont été dérivés l'emporte en simplicité et en commodité sur les autres points de vue¹⁸.
[Steiner 1832, II, 12-13]

Avec Steiner, la figure n'est plus au centre des préoccupations du géomètre : elle est remplacée par les relations projectives entre formes. La recherche de propositions fondamentales sur lesquelles le géomètre s'appuiera pour résoudre ses problèmes et développer ses théories induit une subordination de la figure. Les outils dont dispose le géomètre ne concerne plus directement les figures mais les formes fondamentales qui deviennent les objets de base. Par contre, la notion de relation projective repose sur celle, métrique, de birapport, et donc dépend des notions d'angle et de longueur utilisées dans l'ancienne géométrie.

4. La figure disparue chez von Staudt

Jede zwei in einer Ebene schief liegende projectivische (ebene) Strahlbüschel B, B_1 erzeugen einen Kegelschnitt, der durch ihre Mittelpunkte geht, d. h. diese und die Durchschnitte der entsprechenden Strahlenpaare sind die gesammten Punkte eines bestimmten Kegelschnitts.

¹⁸ Die so eben aufgestellten neuen Sätze über den Kegel zweiten Grades und dessen Schnitte sind für die Untersuchung dieser Figuren wichtiger, als alle bisher bekannten Sätze über dieselben, denn sie sind die eigentlichen wahren Fundamentalsätze, weil sie nämlich so umfassend sind, dass fast alle übrigen Eigenschaften jener Figuren auf die leichteste und klarste Weise aus ihnen folgen, und weil auch die Methode, nach der sie daraus hergeleitet werden, jeder bisherige Betrachtungsweise an Einfachheit und Bequemlichkeit übertrifft.

L'ambition du traité *Geometrie der Lage* de von Staudt¹⁹ est de radicaliser le point de vue de Steiner en fondant la géométrie sur la seule considération des relations projectives entre formes sans faire appel à la notion de mesure :

J'ai cherché dans ce travail à établir la géométrie de position comme une science autonome dans laquelle il n'y aurait pas besoin de la mesure²⁰.

S'il reconnaît que ses prédécesseurs ont cherché à différencier le point de vue synthétique en géométrie, qu'il dénomme géométrie de position et le point de vue métrique, il regrette que « des théorèmes dans lesquels il n'est pas question de grandeur, soient démontrés habituellement par des considérations de rapports²¹ ». La définition de Steiner des relations projectives entre formes à partir de la notion de birapport est ici visée. Von Staudt ambitionne de fonder la géométrie de position sur les seules propriétés d'incidence des objets géométriques. La volonté de développer la géométrie pure sans faire appel à la notion de grandeur participe d'un projet d'organisation des corpus géométriques ; il s'agit bien d'énoncer les principes généraux de la géométrie avant de s'intéresser aux considérations de congruence ou de similitude. La géométrie de position est ainsi dans l'ordre d'exposition des théories géométriques antérieure à la géométrie métrique.

*Geometrie der Lage*²² ainsi que les traités suivants²³ ne comportent aucune figure. Von Staudt ne donne pas réellement de justification de ce choix. Le choix de faire disparaître les figures apparaît comme une conséquence des options épistémologiques de von Staudt de considérer les énoncés pour eux-mêmes et non pas comme exprimant les propriétés d'une situation géométrique.

De plus, c'est cohérent avec le mode d'exposition très explicatif de von Staudt ainsi qu'avec ses choix méthodologiques ; l'exposé de Staudt est la plupart du temps double puisqu'il traite les situations duales parallèlement. Enfin, von Staudt considérait que la géométrie de position devait être enseignée de manière à « familiariser l'élève avec les différents types de formes géométriques » et à « exercer sa capacité d'intuition ». Peut-être l'absence de figures est simplement une invite au lecteur à faire les siennes²⁴.

Von Staudt suit Steiner en prenant comme objet élémentaire de sa géométrie la notion de forme fondamentale. Il innove seulement dans la mesure où il classe les formes en formes de première, deuxième ou troisième espèce selon le nombre de types d'objet qui s'y déploient ; ainsi les *formes fondamentales de première espèce* (ou *uniformes*) sont la ponctuelle, le faisceau de droites coplanaires et le faisceau de plans coaxiaux, les *formes*

¹⁹ [Staudt 1847].

²⁰ Ich habe in dieser Schrift versucht, die Geometrie der Lage zu einer selbständigen Wissenschaft zu machen, welche des Messens nicht bedarf. [Staudt 1847, III]

²¹ [...] Sätze, in welchen von keiner Grösse die Rede ist, gewöhnlich durch Betrachtung von Verhältnissen bewiesen. [Staudt 1847, III]

²² [Staudt 1847].

²³ [Staudt 1856-60].

²⁴ Ce qui signifie que la figure n'est plus qu'une aide à la lecture mais certainement pas le centre des préoccupations du géomètre.

fondamentales de seconde espèce, les systèmes plans et les gerbes de plans et droites et les *formes fondamentales de troisième espèce*, les systèmes spatiaux²⁵.

Le cadre initial que considère von Staudt est euclidien ce qui lui donne l'occasion de généraliser les notions de faisceau et de gerbes aux ensembles de droites et de plans parallèles. Des droites parallèles ont selon von Staudt un élément en commun, leur *direction (Richtung)*. Von Staudt propose alors d'exprimer cette proposition pour des raisons de commodité linguistique en disant qu'elles ont même point à l'infini. Il justifie cette appellation de la même manière que Poncelet en considérant la rotation autour d'un point d'une droite sécante à une autre droite. De la même manière, des plans en parallèles ont en commun leur position (*Stellung*) ce que l'on peut traduire par l'expression « avoir même droite à l'infini » :

On peut conclure des théorèmes du [...] dernier paragraphe que dans de nombreux cas, un point sera remplacé par une direction, un plan par une position [...]. Deux droites qui sont situées dans un même plan ont, soit un point commun, soit une même direction. [...] En conséquence, il ne sera pas inapproprié d'introduire à la place de direction et de position d'autres expressions qui rappellent immédiatement celles qu'elles remplacent, et des théorèmes qui soient non seulement des modifications particulières des autres théorèmes mais aussi se présentent de la même manière²⁶. [Staudt 1847, 23]

L'intérêt pour Staudt est double : d'une part, il unifie les énoncés concernant les faisceaux, d'autre part, il évite toute discussion ontologique sur la nature du point à l'infini et toute connotation métrique. La théorie apparaît ainsi mieux organisée autour d'énoncés généraux exprimant les propriétés des formes fondamentales :

Selon le point de vue présenté dans ce §, que l'on qualifiera, par opposition au point de vue habituel, de perspectif, des théorèmes souvent apparemment complètement différents seront rassemblés en une seule proposition ; de plus, les exceptions qui font fréquemment obstacle à l'établissement des principes généraux, seront écartées²⁷. [Staudt 1847, 25]

Deux formes sont rapportées l'une à l'autre si chaque élément de l'une est mis en correspondance (bijective²⁸) avec un élément de l'autre. À partir de ce stade, toutes les notions, tous les nouveaux objets seront introduits en utilisant les correspondances entre

²⁵ Staudt distingue les faisceaux (*Bündel*), qui sont des formes de première espèce, des gerbes (*Büschel*), qui sont des formes de seconde espèce.

²⁶ Aus den Sätzen des [...] letzten §. Ist zu ersehen, dass in vielen Fällen ein Punkt durch eine Richtung, eine Gerade durch eine Stellung vertreten wird [...]. Zwei Gerade, welche in einerlei Ebene liegen, haben entweder einen Punkt gemeinoder einerlei Richtung. [...] Es wird hiernach nicht unzweckmässig seyn für Richtung und Stellung andere Ausdrücke einzuführen, welche an das, was sie vertreten, unmittelbar erinnern und Sätze, welche nur besondere Modificationen von andern sind, auch als solche bezeichnen.

²⁷ Durch die in diesem §. aufgestellte Ansicht, welche im Gegensatz zu gewöhnlichen die perspektivische heissen soll, werden oft anscheinend ganz verschiedene Sätze in eine Aussage zusammengefasst und die Ausnahmen beseitigt, welche ausserdem der Aufstellung allgemeiner Gesetze häufig im Wege stehen würden.

²⁸ Von Staudt ne le précise pas mais les seules correspondances que von Staudt envisage sont bijective.

formes²⁹. Pour spécifier les relations projectives entre formes de manière purement incidente, Staudt définit la notion d'harmonicité à partir du théorème du quadrangle complet³⁰ :

Si trois points A, B, C d'une droite sont donnés, et si l'on construit un quadrangle de telle manière qu'une diagonale passe par le deuxième des points donnés et qu'en chacun des autres points, deux côtés opposés se coupent, alors l'autre diagonale du quadrangle coupera la droite en un quatrième point D, qui est déterminé par les trois points donnés et s'appelle le quatrième harmonique de ceux-ci³¹. [Staudt 1847, 43]

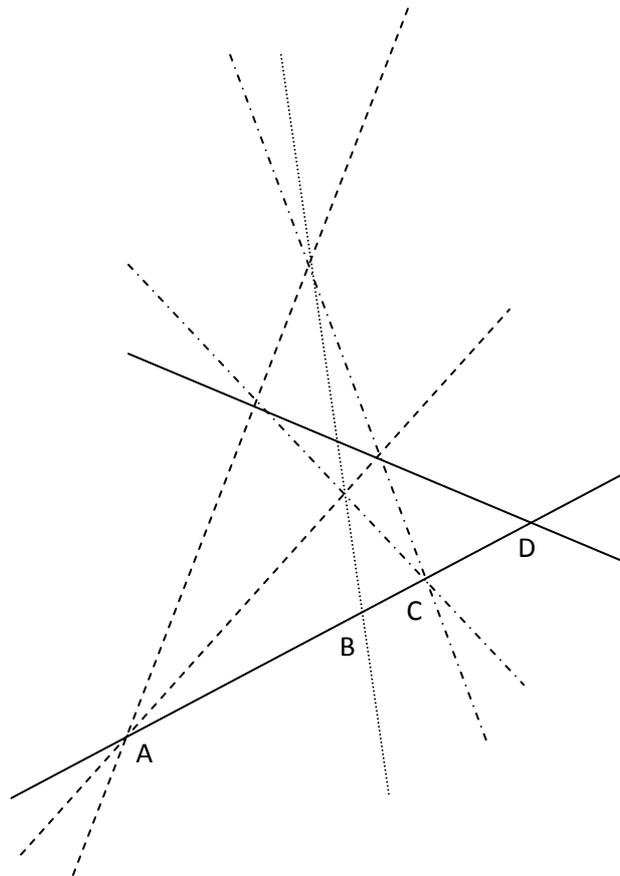


Figure 8 – Le théorème du quadrangle complet³²

²⁹ Von Staudt dans les *Beiträge* [Staudt 1856-1860] introduira ainsi la notion d'élément imaginaire, construira un calcul sur les jets (pour introduire géométriquement la notion de coordonnées projectives), uniquement en terme de correspondances entre formes. Voir [Nabonnand 2008].

³⁰ Von Staudt inverse la présentation classique qui consiste à définir l'harmonicité à partir du birapport et à montrer le théorème selon lequel les diagonales d'un quadrilatère divise harmoniquement les points d'intersection des côtés opposés de ce quadrilatère.

³¹ Wenn in einer Geraden drei Punkte A, B, C gegeben sind, und alsdann ein Viereck so construirt wird, dass eine Diagonale durch den zweiten der gegebenen Punkte geht, in jedem der beiden übrigen aber zwei einander gegenüberliegende Seiten sich schneiden, so schneidet die andere Diagonale des Vierecks jene Gerade in einem vierten Punkte D, welcher durch die drei gegebenen Punkte bestimmt ist und zu denselben der vierte harmonische Punkt heisst.

³² Même si von Staudt n'utilise aucune figure dans son exposé, je continue à illustrer certains énoncés par une figure. L'étude des figures n'est plus l'objet de la géométrie, elles n'en restent pas moins un outil indispensable !

Quatre points situés sur une droite et sur lesquels on peut appuyer un quadrilatère qui vérifie les propriétés du théorème du quadrilatère est appelé une *forme harmonique*. Un *faisceau harmonique* est faisceau de quatre droites qui sont intersectées par une forme harmonique.

Von Staudt propose alors de définir la notion de relation projective entre formes fondamentales de première espèce par la propriété de conservation de l'harmonicité : deux formes fondamentales uniformes sont dites *projectives* entre elles si elles sont rapportées l'une à l'autre de telle manière qu'à toute forme harmonique de l'une corresponde une forme harmonique de l'autre. Bien entendu, les formes fondamentales perspectives constituent le premier exemple de formes de première espèce projectives et comme on va le voir, von Staudt s'attachera à montrer que les correspondances projectives entre formes uniformes se réduisent à des compositions de perspectives. Von Staudt montre immédiatement une propriété importante des formes uniformes projectives à savoir que la donnée de trois paires d'éléments correspondants suffit à déterminer la correspondance :

Si deux formes fondamentales uniformes projectives ont trois éléments correspondants communs³³, alors tous leurs points sont correspondants communs³⁴. [Staudt 1847, 50]

Et donc :

1. Si on veut rapporter projectivement deux formes fondamentales uniformes, on peut faire correspondre arbitrairement à trois éléments de la première forme, trois éléments de l'autre, et ainsi, à chaque élément de la première forme, un élément de l'autre est rapporté³⁵. [Staudt 1847, 52]
2. [...] deux ponctuelles projectives, si elles ne sont pas des sections d'un même faisceau de rayons, peuvent cependant être considérées comme la première et la dernière de trois ou quatre ponctuelles qui sont, chacune, la projection à partir d'un point, de la précédente³⁶. [Staudt 1847, 55]

³³ [Invariant].

³⁴ Wenn zwei projektivische einförmige Gebilde drei Elemente entsprechend gemein haben, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein.

Cette propriété deviendra le théorème fondamental de la géométrie projective. Dans la démonstration de ce théorème, von Staudt suppose implicitement que les formes sont continues. La discussion de la « lacune » de von Staudt donnera lieu à une importante discussion sur les axiomes de la géométrie projective initiée par Klein et à laquelle participeront Lüroth, Zeuthen, Darboux, F. Schur, Wiener, Enriques, ... Pour plus de précisions on peut consulter [Voelke 2008] et [Nabonnand 2010].

³⁵ Will man zwei einförmige Grundgebilde projektivisch auf einander beziehen, so kann man zu drei Elementen des einen drei Elemente des andern, welche jenen entsprechen sollen, nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Elemente des einen Gebildes ein Element im andern zugewiesen ist.

³⁶ [...] zwei projektivische gerade Gebilde, wenn sie auch nicht Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels sind, doch als das erste und letzte von drei oder vier geraden Gebilden betrachtet werden können, von welchen jedes folgende eine Projektion des vorhergehenden aus einem Punkt ist.

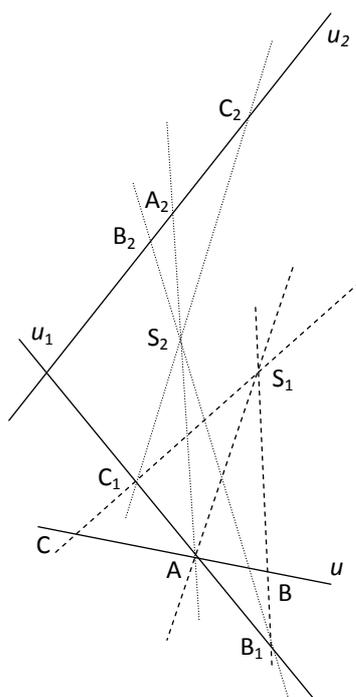


Figure 9 – La correspondance projective $(AA_2)(BB_2)(CC_2)$ entre u et u_2 est la composée de la perspective $(AA)(BB_1)(CC_1)$ de centre S_1 entre u et u_1 et de la perspective $(AA_2)(B_1B_2)(C_1C_2)$ de centre S_2 entre u_1 et u_2 . Von Staudt conclut de cette décomposition que l'utilisation du terme « projectif » est ainsi justifiée.

3. Toutes les formes harmoniques sont projectives entre elles. Si la première de deux formes uniformes, toutes deux constituées de quatre éléments, est harmonique, alors la seconde est aussi harmonique³⁷. [Staudt 1847, 58]

Pour généraliser la notion de correspondance projective aux formes de seconde et troisième espèce, von Staudt définit les notions de *collinéarité* et de *réciprocité*³⁸ : deux formes fondamentales de deuxième espèce ou encore deux systèmes-espace sont dits collinéaires s'ils sont rapportés l'un à l'autre de telle manière que deux éléments P, q d'espèces différentes du premier système tel que le premier appartient au second correspondent à deux éléments P_1, q_1 d'espèces différentes du second système, tels que le premier soit également situé sur le second. De même, deux formes fondamentales de deuxième espèce ou encore deux-systèmes-espace sont dits réciproques s'ils sont rapportés l'un à l'autre de telle manière que deux éléments P, q d'espèces différentes du premier système tels que le premier appartient au second correspondent à deux éléments P_1, q_1 d'espèces différentes du second système, tels que le premier passe par le second (ou le second appartient au premier). Comme, par définition, les collinéations et réciprociétés respectent les incidences, elles conservent la configuration du quadrilatère complet (ou sa duale). Von Staudt en conclut que ces correspondances conservent l'harmonicité et sont donc projectives :

³⁷ Alle harmonischen Gebilde sind zu einander projektivisch. Und wenn das eine von zwei zu einander projektivischen einförmigen Gebilden, deren jedes aus vier Elementen besteht, harmonisch ist, so ist auch das andere harmonisch.

³⁸ Les collinéations et réciprociétés de von Staudt sont respectivement les *homographies* et les *corrélations* de Chasles.

Deux systèmes, qui sont soit collinéaires, soit réciproques, sont aussi dits projectifs entre eux, puisque dans les deux cas, à chaque forme harmonique du premier système correspond une forme harmonique de l'autre, et donc deux quelconques formes uniformes homologues sont projectives³⁹. [Staudt 1847, 61]

Von Staudt généralise alors l'ancienne notion d'involution en considérant le cas particulier des formes fondamentales projectives dites en situation *involution*, c'est-à-dire celles dont tous les éléments se correspondent doublement. Une *involution* désigne l'ensemble d'au moins trois paires d'éléments correspondants d'une forme de première espèce involutive.

Von Staudt retrouve de manière incidente la définition classique des involutions de six points. Traditionnellement, 6 points $(A,A')(B,B')(C,C')$ sont en involution s'ils vérifient des relations du type $AB' \cdot BC' \cdot CA' = A'B \cdot B'C \cdot C'A$. C'est cette relation qui est utilisée pour montrer le théorème classique de l'involution des points d'intersection d'une droite avec les côtés d'un quadrilatère complet.

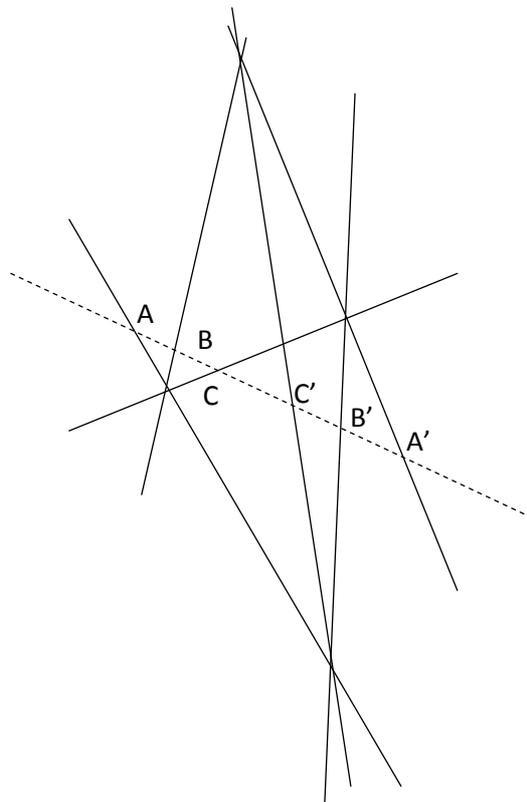


Figure 10 – Les six points d'intersection $(AA')(BB')(CC')$ de la droite u avec les 6 côtés du quadrilatère complet sont en involution.

Deux systèmes réciproques involutifs sont dits *polaires* et von Staudt reconstitue la théorie de la polarité des systèmes de deuxième et troisième espèce uniquement sur la base de

³⁹ Zwei Systeme, welche entweder collinear oder reciprok sind, heissen auch zu einander projektivisch, weil in beiden Fällen jedem harmonischen Gebilde in dem einen Systeme ein harmonisches gebilde in andern entspricht, und also je zwei homologe einförmige Gebilde zu einander projektivisch sind.

considérations d'incidence sans faire appel à la notion de coniques, ni à des considérations de mesures :

Dans un système polaire plan, chaque point est appelé le pôle de la droite qui lui est associée, et chaque droite, la polaire du point qui lui est associé, de telle sorte que les pôles de toutes les droites qui se coupent en un même point, sont situés sur la polaire de ce point et que les polaires de tous les points qui appartiennent à une même droite, se coupent au pôle de cette droite. Si un point est situé sur sa polaire, alors tout autre point de cette droite est situé à l'extérieur de sa polaire⁴⁰. [Staudt 1847, 131-132]

Deux points sont dits *conjugués* s'ils sont situés chacun sur la polaire de l'autre. Von Staudt s'intéresse particulièrement aux points qui sont conjugués à eux-mêmes et montre que si un point est conjugué à lui-même, alors toute droite passant par ce point contient un autre point conjugué à lui-même. S'il existe un point conjugué à lui-même P_1 , l'ensemble des points conjugués à eux-mêmes constitue donc une courbe du second ordre puisque chaque rayon du faisceau de rayons de centre P_1 contient un autre point conjugué à lui-même. Cette propriété permet à von Staudt de proposer une nouvelle définition des coniques (ou courbe du second ordre) comme le lieu des éléments conjugués à eux-mêmes d'un système-plan polaire⁴¹. Chaque point de la conique est le pôle de la tangente en ce point et réciproquement, chaque tangente est la polaire du point de tangence. Comme les courbes et les surfaces du second ordre sont reliées projectivement, toute section par un plan d'une surface du second ordre est une conique ce qui permet à von Staudt de retrouver immédiatement la définition traditionnelle des coniques comme section d'un cône.

La définition des coniques de Steiner, les théorèmes de Pascal et Brianchon, la théorie des coniques et des surfaces du second degré se déduisent comme de simples corollaires de la théorie de la polarité.

La théorie emblématique de la géométrie, à savoir la théorie des coniques, devient un simple chapitre de la théorie des relations projectives entre forme. En même temps que l'objet principal devient la transformation géométrique, la figure s'efface. C'est particulièrement le cas des coniques qui passent du statut de figure centrale de la pratique géométrique à celui subalterne de courbe double des polarités. Von Staudt poursuivra ce mouvement en associant les coniques et les surfaces réglées aux formes fondamentales en définissant les formes élémentaires et en travaillant sur les relations projectives entre formes élémentaires⁴². Le processus d'effacement de la figure en géométrie pure est corrélatif de l'apparition des formes fondamentales et de leurs relations dans le contexte de

⁴⁰ In einem ebenen Polarsysteme heisst jeder Punkt der Pol der ihm zugeordneten Geraden und jede Gerade die Polare des ihr zugeordneten Punktes, so dass also die Pole von allen Geraden, welche in einem und demselben Punkte sich schneiden, in der Polare dieses Punktes liegen und die Polaren von allen Punkten, welche einer und derselben Gerade angehören, in dem Pole dieser Gerade sich schneiden. Liegt ein Punkt in seiner Polare, so liegt jeder andere Punkt dieser Geraden ausserhalb seiner Polare.

⁴¹ Von Staudt définira de même les surface du second ordre comme le lieu des éléments conjugués à eux-mêmes d'un système-espace polaire.

⁴² Voir [Staudt 1856-60] et [Nabonnand 2008].

la géométrie projective. En même temps que se construit le cadre projectif, la figure n'apparaît déjà plus que comme un outil représentant une situation générale. La conception de la géométrie comme l'étude d'un ensemble de transformations géométriques et la présentation axiomatisée ne feront qu'accentuer cette évolution.

Bibliographie :

[Carnot 1801] Carnot, Lazare, *De la Corrélation des figures de géométrie*, Paris : Duprat, 1801.

[Carnot 1803] Carnot, Lazare, *Géométrie de position*, Paris : Duprat, 1803.

[Gergonne 1825-26], Gergonne, Joseph, Considérations philosophiques sur les éléments de la science de l'étendue, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 16 (1825-26), 209-236.

[Leibniz 1679] Leibniz, G. W. , Lettre à Huyghens, A III, 2, 346, 846.

[Nabonnand 2008] Nabonnand, Philippe, La théorie des jets de von Staudt : une irruption de l'algèbre en géométrie, *Archives for History of Mathematics*, 62 (2008), 201-242.

[Nabonnand 2009] Nabonnand, Philippe, La théorie des coniques chez Poncelet, Steiner et von Staudt à paraître en 2009 dans *Oriens-Occidens, Cahiers du Centre d'Histoire des sciences et des philosophies arabes et médiévales*.

[Nabonnand 2010] Nabonnand, Philippe, *Contributions à l'histoire de la géométrie projective au 19^e siècle*, (à paraître).

[Poncelet 1818], Poncelet, Jean Victor, Considérations philosophiques et techniques sur le principe de continuité dans les lois géométriques, in *Applications d'analyse et de géométrie qui ont servi de principal fondement au traité des propriétés projectives des figures*, tome 2, Paris : Gauthier-Villars, 1864, 296-362.

[Poncelet 1822], Poncelet, Jean Victor, *Traité des propriétés projectives des figures*, volume 1, Metz-Paris, 1822 ; 2^e éd. avec des annotations et des compléments, Paris : Gauthier-Villars, 1865.

[Poncelet 1829], Poncelet, Jean Victor, Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 4 (1829), 1-71 ; réédité in *Traité des propriétés projectives des figures*, volume 2, Paris : Gauthier-Villars, 1866, 57-121.

[Staudt 1847] Staudt, Carl Christian Georg von, *Geometrie der Lage*, Nuremberg : Verlag von Bauer und Raspe, 1847 ; trad. It., M. Pieri, *Geometria di posizione*, Turin : Bocca, 1889 ; trad. Fr., P. Nabonnand, *Geometrie de position*, Paris : Hermann, à paraître en 2010.

[Staudt 1856-60] Staudt, Carl Christian Georg von, *Beiträge zur Geometrie der Lage*, 3 vol., Nuremberg : Verlag von Bauer und Raspe, 1856-1857-1860.

[Steiner 1832] Steiner, Jacob, *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität, und Reciprocität, etc.*, Berlin, 1832, cité d'après l'édition Ostwald's Klassiker der Exakten Wissenschaften 82 (1^{ère} partie) et 83 (2^e partie), Leipzig : Akademische Verlagsgesellschaft MBH.

[Voelke 2008] Voelke, Jean Daniel, Le théorème fondamental de la géométrie projective : évolution de sa preuve entre 1847 et 1900, *Archives for History of Sciences*, 62 (2008), 243-296.