



**HAL**  
open science

## Introduction du livre "Justifier en mathématiques"

Dominique Flament, Philippe Nabonnand

► **To cite this version:**

Dominique Flament, Philippe Nabonnand. Introduction du livre "Justifier en mathématiques". Dominique Flament & Philippe Nabonnand. Justifier en mathématiques, Editions de la Maison des sciences de l'homme, 2011, 978-2-7351-1414-6. hal-01082462

**HAL Id: hal-01082462**

**<https://hal.science/hal-01082462>**

Submitted on 13 Nov 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Justifier en mathématiques

## Introduction

Dominique Flament & Philippe Nabonnand

La question de la validité d'un résultat en mathématiques paraît être réglée par les procédures de démonstration ; l'édifice mathématique, quant à lui, semble relativement assuré par les diverses théories de fondements. Pourtant, les écrits des mathématiciens anciens et contemporains fourmillent d'exemples de justification. Lorsqu'une notion est introduite, il est de bonne politique d'en justifier l'intérêt par quelques exemples bien choisis, le choix des méthodes de démonstration est aussi souvent l'objet d'une discussion ; plus généralement, les premières minutes d'un exposé de séminaire ou les premières pages d'un livre sont souvent consacrées à montrer l'ancrage du sujet de l'exposé ou du livre dans l'histoire, à en prouver la modernité et à en illustrer la pertinence par des exemples. Quelle est donc l'utilité des pratiques de justification en mathématiques ? Ces pratiques relèvent-elles de l'indispensable communication des résultats d'une recherche ou sont-elles plus inhérentes à la pratique des mathématiques ? Relèvent-elles de la rhétorique d'exposition ou de l'épistémologie ambiante d'une discipline ? Comment s'imbriquent-elles avec les questions de fondements ?

Une telle étude n'a pas encore été faite : on ne trouve dans la littérature que peu de travaux sur les aspects rhétoriques des discours des mathématiciens ou des scientifiques<sup>1</sup> et encore moins sur les liens qu'une telle rhétorique entretient avec l'épistémologie ou l'ontologie du ou des mathématiciens qui la mettent en œuvre. S'intéresser à la « justification en mathématiques » peut dans un premier temps sembler provocant et même présomptueux ; le corpus envisagé devrait être la quasi-totalité des textes mathématiques. Comme l'un des premiers objectifs de cette recherche est de comprendre comment les pratiques de justification ont modelé l'activité de fondements, nous nous intéresserons aux discours de justification en mathématiques au cours du 19<sup>e</sup> siècle. En effet, les questions de fondements et celles du rapport entre logique et mathématiques sont à la fin du 19<sup>e</sup> siècle l'occasion de nombreuses discussions et discours dans lesquels les mathématiciens tentent de définir ce que doivent être

---

<sup>1</sup> On peut citer parmi les travaux les plus intéressants sur cette question l'article de Karine Chemla sur Lazare Carnot et la généralité en géométrie (*Revue d'histoire des mathématiques*, 4 : 163-190.) et le livre de Fernand Hallin sur *les structures rhétoriques de la science* (Paris : Lavoisier Librairie, 2004.).

les mathématiques et de proposer des normes à leur pratique. Les arguments avancés dans ces discussions sont parties prenantes de lignes argumentatives qui sont développées tout au long du 19<sup>e</sup> siècle. En suivant les trajectoires de ces lignes, nous proposerons quelques contributions à une reconstruction de l'histoire des fondements qui, à la différence de l'histoire convenue, seraient inscrites dans la pratique des mathématiciens du 19<sup>e</sup> siècle et dans les débats qui traversent à cette époque ces milieux.

Que justifie-t-on en mathématiques ?

On peut trouver de nombreux exemples de justification d'une notion (quatrième dimension, les éléments imaginaires, ...). Justifier une notion mathématique selon les différents auteurs peut signifier défendre l'utilisation de cette notion ou lui donner un statut. Dans cette perspective, les analyses en termes d'outils ou d'objets peuvent être fécondes. On peut aussi justifier l'extension ou la signification d'une définition, d'un théorème ou d'un principe (par exemple, la définition de fonction continue et la discussion concernant les contre-exemples) ; on peut aussi citer dans cet ordre d'idée la discussion autour du principe de continuité (Lacroix, Poncelet, Gergonne, Cauchy, ...). Les questions du statut d'une théorie, d'une méthode ou d'un point de vue nécessitent souvent (lorsqu'ils apparaissent ou sont concurrencés par exemple) sont autant d'occasion de discours de justification. On peut citer les géométries non-euclidiennes, la théorie des ensembles, la réduction logiciste mais aussi la défense du point de vue « synthétique » en géométrie ou l'exclusion des arguments géométriques en analyse, ou encore, l'exigence de rigueur dans les questions de convergence en analyse. Plus généralement, le choix d'un point de vue méthodologique et/ou conceptuel nécessite une discussion qui relève de la justification ; par exemple, l'adoption du point de vue « moderne » que représentent les conceptions ensemblistes, la justification de l'utilisation d'entités « imaginaires » ou « complexes », la justification de certains types de preuves (preuve non effective, utilisation du principe de continuité, argument de la diagonale, récurrence transfinie, ...).

Le choix d'une notation, comme la présentation vectorielle des équations différentielles, ou simplement la pertinence d'un problème sont aussi des occasions de justification. On retrouve aussi des discours de justification lorsqu'il s'agit de discuter du sens de certaines procédures : ainsi, la discussion sur la signification à accorder à l'idée de calculer avec des 'objets'

géométriques (Monge, Grassmann, Hamilton, Möbius, ...).

Quand justifie-t-on en mathématiques ?

L'émergence de domaines d'étude, de questions, de méthodes ou les changements de points de vue sur une question ou plus généralement sur les mathématiques sont les moments privilégiés pendant lesquels les mathématiciens doivent justifier les innovations par rapport aux pratiques et/ou conceptions antérieures, démarquer les notions, méthodes, conceptions nouvelles des anciennes (l'émergence des géométries non-euclidiennes, de la géométrie projective, l'apparition du point de vue ensembliste, l'utilisation des nombres idéaux, l'arithmétisation de l'analyse et de l'algèbre, Poincaré et la topologie en dimension supérieure à 3, ...). Mais la nécessité de discours justificateurs se fait sentir aussi lorsque la spécificité d'un domaine, ses méthodes sont critiquées et remises en cause (l'utilisation des contre-exemples en analyse, la question de la rigueur, celle de l'utilisation des séries divergentes, la géométrie euclidienne, les crises des fondements ou dans un domaine très proche des mathématiques comme l'astronomie, l'utilisation d'algorithmes non convergents).

Dans cet ordre d'idée, la question de la spécificité des pratiques (et des discours) de justification au XIX<sup>e</sup> siècle par rapport à l'importance et l'émergence des questions de fondements, de l'apparition de la logique moderne ou des questions d'application des mathématiques en physique mathématique et théorique, apparaît comme essentielle.

Comment et pourquoi justifie-t-on en mathématiques ?

On peut dégager un certain nombre de lignes argumentatives comme celles de la généralité, de la rigueur, de l'utilité, de la tradition, de la simplicité, de la nouveauté, de la naturalité, de l'élégance, de l'esthétique, de la fécondité, ... Les discours de justification empruntent à ces lignes pour organiser leur(s) stratégie(s) argumentative(s). Une première étude consiste à analyser les effets rhétoriques de ces arguments et leur position dans le discours : arguments d'autorité, historique, esthétique, philosophique, ... L'appartenance à une école, une tradition ou de manière plus ténue, l'adhésion à un style sont-elles peu ou prou corrélées à l'utilisation d'une catégorie d'arguments ? Ainsi, en première approche, on peut

évoquer que les géomètres du début du XIX<sup>e</sup> siècle qui défendent un point de vue synthétique utilisent pour la plupart des arguments de généralité alors que les mathématiciens qui tentent d'imposer une nouvelle méthodologie en analyse invoquent le plus souvent l'idée de rigueur. D'autres lignes argumentatives sont à suivre : celle de l'élégance, celle de la « naturalité »... Décider qu'une preuve est élégante, affirmer qu'un point de vue ou une question sont naturels reposent sur une conception de ce que sont les « bonnes mathématiques ». Les discours de justification sont l'occasion pour ces conceptions de s'exprimer explicitement ou implicitement. De même, l'émergence de nouvelles méthodes ou de nouveaux points de vue en mathématiques sont accompagnés de discours de justification qui utilisent des arguments insistant sur leur nouveauté, leur modernité ou leur simplicité.

Une telle analyse nécessite de tenir compte du destinataire du discours : quels publics, quels lecteurs sont-ils visés ? L'exemple de l'analyse des modes d'exposition par Minkowski de ses travaux en géométrie des nombres selon qu'il s'adresse à Hermite ou à un public moins averti à Chicago est de ce point de vue particulièrement éloquent.

Les types de publications dans lesquelles les mathématiciens développent leurs discours de justification (articles dans les journaux scientifiques, de vulgarisation, préfaces de traités ou de manuels) ont aussi leur importance ; de même, quel statut accorder aux discours de justification que l'on trouve dans les correspondances, dans les *Nachlass* ? L'idée de discours de justification à usage restreint ou privé est-elle pertinente ? Enfin, on ne peut se cantonner aux discours explicites de justification et le choix d'une forme d'exposition relève aussi de notre analyse comme l'atteste l'exemple de Minkowski évoqué ci-dessus.

Cependant, ces arguments ne relèvent pas d'une simple rhétorique et sont sous-tendus par des positions épistémologiques et souvent ontologiques. Ainsi, en géométrie projective, la ligne de la généralité défendue par différents auteurs n'est pas chargée épistémologiquement de la même manière selon qu'il s'agit de généraliser une démonstration obtenue dans un cas particulier ou d'unifier un certain nombre d'énoncés obtenus dans différents cas.

L'approche de l'histoire des mathématiques par la question de la justification des pratiques révèle souvent une volonté d'établir des normes, de définir ce que sont les « bonnes » mathématiques ou de manière plus modérée, les mathématiques acceptables. Ainsi, une grande partie de l'impulsion du mouvement d'arithmétisation de l'analyse vient de la volonté d'exclure tout recours à l'intuition géométrique et donc aux arguments géométriques. L'émergence de la notion de transformation géométrique est due (en partie) à la présentation de la géométrie projective comme géométrie des formes géométriques.

L'étude des pratiques de justification en mathématiques est donc une approche prometteuse pour appréhender la vision de leur domaine ou de leur discipline qu'avaient les mathématiciens du XIX<sup>e</sup> siècle et par-là renouveler une bonne part de l'historiographie convenue de cette période.

Un autre intérêt de cette approche est de s'interroger sur l'influence des pratiques de justification sur *la manière de faire des mathématiques*, de poser la question : dans quelle mesure, comment et dans quels domaines plus particulièrement, les modes de justification modèlent la pratique des mathématiques ? Ainsi, envisager de la sorte les discours de justification fait apparaître que le terme « arithmétisation » a plusieurs acceptions et recouvre plusieurs manières d'envisager disciplinairement les questions d'analyse, d'algèbre ou d'arithmétique, que l'exigence de rigueur a sinon ses détracteurs, du moins ses critiques et non des moindres (Poncelet, Hermite, Poincaré), que l'émergence d'une discipline est souvent précédée d'un « point de vue sur les problèmes » et que les discours de justification de ce point de vue modèlent les voies d'autonomisation du domaine (géométrie projective, topologie, ...)

L'enquête historiographique est particulièrement pertinente pour aborder ces questions ; en effet, en interrogeant les pratiques des mathématiciens du 18<sup>e</sup>, du 19<sup>e</sup> et du début du 20<sup>e</sup> siècles, en revenant donc à une époque où les fondements des mathématiques ne constituaient pas encore une sous-discipline clairement identifiée, une époque où se mettent en place la plupart des objets, des méthodes et des théories à l'origine de la conception contemporaine de l'activité mathématique (académique), on peut espérer dans le foisonnement des débats qui agitent alors la communauté mathématique, repérer quelle part les pratiques de justification prennent effectivement dans la mise en place des méthodes, l'émergence des nouveaux points de vue et plus généralement, participent à l'organisation du champ autour de ses objets, ses méthodes, ses théories et ses problématiques.

Les lignes argumentatives de la généralité et de la rigueur n'ont pas pour but de donner un quelconque fondement aux mathématiques ; il s'agit plutôt soit de défendre des méthodes, soit au contraire de cerner quelles sont les méthodes acceptables. De fait, au début du XIX<sup>e</sup> siècle, les discours de justification tentent de définir quelles sont les manières acceptables de faire des mathématiques. Même si d'un point de vue rétrospectif, on peut prétendre que ces discours n'ont pour fonction que de pallier l'absence d'une bonne théorie fondationnelle, il nous paraît plus intéressant d'étudier en profondeur l'importance de ces discours, de suivre leurs évolutions, d'analyser les polémiques et de comprendre leur fonction dans la pratique des

mathématiques de cette époque pour en tirer des outils d'analyse pour appréhender la fonction de ces discours dans la pratique contemporaine où les questions de fondements ne posent plus guère de problèmes cruciaux. Revenir aux discours de justification dans une période de transition entre le foisonnement quasi-expérimental du 18<sup>e</sup> et la mise en place du cadre de la théorie des ensembles à la fin du 19<sup>e</sup>, dans une période où il s'agit de redéfinir les méthodes et l'objet de la pratique mathématique, dans une période où les questions de « métaphysique » des mathématiques sont décisives est un détour fécond pour poser la question de la justification dans les pratiques mathématiques.

Nous remercions le programme international d'études avancées de la Maison des Sciences de l'Homme de Paris et de l'université de Columbia pour nous avoir permis de développer un projet autour de la notion de justification en mathématiques. Nous sommes particulièrement reconnaissants à l'équipe de Reid Hall dont l'accueil chaleureux nous a permis de travailler dans des conditions idéales. La maison d'édition de la MSH de Paris a accepté d'éditer ce livre, nous l'assurons de nos plus vifs remerciements. Enfin, nous n'exprimerons jamais assez notre reconnaissance à Catherine Flament qui s'est chargée de la mise en page de cet ouvrage.