



HAL
open science

La polémique entre Poincaré et Russell au sujet du statut des axiomes de la géométrie

Philippe Nabonnand

► **To cite this version:**

Philippe Nabonnand. La polémique entre Poincaré et Russell au sujet du statut des axiomes de la géométrie. *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 2000, 6, pp.219-269. hal-01082436

HAL Id: hal-01082436

<https://hal.science/hal-01082436>

Submitted on 13 Nov 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LA POLÉMIQUE ENTRE POINCARÉ ET RUSSELL AU SUJET DU STATUT DES AXIOMES DE LA GÉOMÉTRIE

Philippe NABONNAND (*)

RÉSUMÉ. — Avant leur célèbre polémique sur la logistique, Poincaré et Russell s'étaient déjà publiquement opposés sur la question du statut des axiomes de la géométrie. Les débats philosophiques de la fin du XIX^e siècle autour de la géométrie et de la théorie de l'espace influent de manière significative sur la conception et le développement de la géométrie. Le but de cet article est de montrer comment les mathématiques sont mises au service des thèses soutenues par Poincaré et Russell et d'analyser quelle influence ces thèses peuvent avoir sur leurs conceptions géométriques.

ABSTRACT. — **THE POLEMIC BETWEEN POINCARÉ AND RUSSELL ABOUT THE STATUS OF THE AXIOMS OF GEOMETRY.** — Before their well-known dispute over logistics, Poincaré and Russell polemized over the status of the axioms of geometry. At the close of the 19th century, philosophical discussions about geometry and space theory strongly influenced both the idea and the development of geometry. This paper stresses how Poincaré and Russell used mathematics to support their philosophical arguments, and shows, conversely, how their respective philosophical stances influenced their thoughts about geometry.

INTRODUCTION

Durant le XIX^e siècle, l'émergence des géométries non-euclidiennes et de la physique mathématique d'une part, la prise de conscience au sein de la communauté des mathématiciens de la nécessité d'un travail réflexif centré sur des exigences de rigueur d'autre part, rendent particulièrement cruciales les questions de fondements de la géométrie. On ne peut pas appréhender cette histoire sans prendre en compte l'étroite imbrication de ses aspects mathématiques et philosophiques : au début du XIX^e siècle,

(*) Texte reçu le 27 septembre 1999, révisé le 2 mars 2001.

P. NABONNAND, Université de Nancy 2, Archives Henri Poincaré, 23 bd. Albert 1^{er}, BP 3397, 54015 Nancy Cedex (France).

Courrier électronique : Philippe.Nabonnand@plg.univ-nancy2.fr.

Mots clés : histoire de la géométrie, conventionnalisme, Poincaré, Russell.

Classification AMS : 01A55, 01A60, 51–03.

avant l'apparition des géométries non-euclidiennes, les notions d'espace physique, intuitif ou abstrait n'étaient pas dégagées. On pouvait donc se contenter d'admettre comme données préalables la notion d'espace et quelques constructions géométriques. À la fin du XIX^e siècle, la reconnaissance des géométries non-euclidiennes « conduisit à cette idée nouvelle et remarquable que l'espace physique pourrait être différent de l'image que nous en fournit notre intuition habituelle » [Enriques 1912, p. 3]; en même temps que leurs efforts tendaient à déterminer un système aussi complet que possible d'axiomes ou encore à produire divers modèles des géométries non-euclidiennes, les mathématiciens intervinrent aussi directement dans le champ de la philosophie en posant les questions du statut des axiomes de la géométrie et de l'origine de nos conceptions géométriques.

Le débat philosophique sur le statut des axiomes de la géométrie opposait les tenants de la philosophie critique de Kant et les empiristes. La conception kantienne de l'espace s'articule essentiellement (au moins pour notre propos) autour de deux thèses :

(T1) l'espace est une intuition pure ;

(T2) les axiomes de la géométrie sont des jugements synthétiques *a priori*.

Pour un kantien, les conceptions spatiales sont donc des conditions nécessaires à toute expérience. Les empiristes s'appuient quant à eux sur l'existence des géométries non-euclidiennes pour considérer la géométrie comme une science expérimentale. Pour un empiriste, les conceptions spatiales proviennent de l'expérience.

Helmholtz occupe une position intermédiaire en défendant un empirisme modéré : il considère l'existence de corps solides comme une condition nécessaire à toute possibilité de mesure et donc à celle de la géométrie. Par contre, l'existence de tels corps n'est jamais affirmée comme une vérité expérimentale. Poincaré s'oppose à la fois aux thèses kantienne et empiriste en défendant une position conventionnaliste : les axiomes de la géométrie ne sont pas des jugements synthétiques *a priori*, parce qu'alors, « il serait impossible de s'y soustraire et de rien fonder sur leur négation » [Poincaré 1887, p. 90]; ils ne sont pas non plus des faits expérimentaux car, dans ce cas, la géométrie perdrait son caractère de science exacte. Pour Poincaré, les axiomes de la géométrie sont des conventions et la question de leur vérité n'a donc aucun sens. Mais 'conventionnel' ne

signifie pas pour autant arbitraire. En effet, l'expérience nous guide dans le choix des conventions les plus commodes.

Ces débats ne sont pas sans conséquences sur le développement de la géométrie. Enriques soulignait dans l'*Encyclopédie des sciences mathématiques* [1912] avec justesse qu'à travers ces discussions, tant mathématiques que philosophiques, se faisait jour une conception nouvelle purement abstraite de la géométrie, dégagée des considérations sur l'espace physique ou intuitif.

Le but principal de cet article est de montrer, à partir de l'étude de la polémique entre Poincaré et Russell sur le statut des axiomes de la géométrie¹, l'importance de ces débats philosophiques sur l'évolution de la conception de la géométrie et même sur son développement. En affirmant qu'«une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre» [Poincaré 1902a, p. 76], le conventionnalisme géométrique reconnaissait à la géométrie son autonomie et y contribuait. De plus, en considérant que l'expérience sur les corps solides réels nous guide dans le choix d'une convention, Poincaré est amené à privilégier la présentation de la géométrie comme étude d'un groupe de transformations. D'un autre côté, les positions purement épistémologiques² de Russell et son refus des considérations psychologiques l'amenaient à adopter au contraire une présentation axiomatique de la géométrie. Cette controverse est caractéristique de la fin des débats philosophiques initiés par l'émergence des géométries non-euclidiennes : au delà de leurs divergences philosophiques, les deux protagonistes admettent des thèses qui, directement ou indirectement, plaident pour l'émancipation de la géométrie des questions liées à la théorie de l'espace. Dans ce qui suit, nous nous intéresserons moins à

¹ Russell et Poincaré s'opposent entre 1899 et 1900 sur cette question dans trois articles publiés dans la *Revue de métaphysique et de morale* : «Des fondements de la géométrie, à propos d'un livre de M. Russell» [Poincaré 1899], «Sur les axiomes de la géométrie» [Russell 1899a] et «Sur les principes de la géométrie, réponse à M. Russell» [Poincaré 1900]. Une autre importante source concernant cette polémique est la correspondance échangée par Russell et Louis Couturat. Cette correspondance est conservée aux Archives de la bibliothèque municipale de La-Chaux-de-Fond (Suisse). Elle sera prochainement (2001) éditée et commentée par Anne-Françoise Schmidt. Toretta [1978] étudie les thèses de Russell dans son livre *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, sans insister cependant sur la polémique entre Poincaré et Russell.

² Le terme «épistémologique» est utilisé tout au long de cet article au sens anglo-saxon de «relevant de la théorie des fondements de la connaissance».

l'exposé des thèses philosophiques en présence qu'à étudier comment les mathématiques sont mises au service de ces thèses et analyser comment celles-ci influent sur la présentation des résultats de géométrie ainsi que sur la conception de la géométrie des protagonistes.

Dans la partie 1, la chronologie et le contexte éditorial sont présentés. La partie 2 est consacrée à un rapide rappel du conventionnalisme géométrique de Poincaré (§§ 2.1 et 2.2) et à une présentation d'une première polémique entre Poincaré et Couturat (§ 2.3). Les thèses soutenues par Russell dans son traité *An Essay on the Foundations of Geometry* [1897] et la polémique qu'elles suscitent avec Poincaré sont exposées dans les parties 3, 4 et 5. Les enjeux de cette polémique sont évidemment philosophiques, mais celle-ci porte également sur des points techniques mathématiques. Ainsi, un des points essentiels de cette controverse concerne les fondements de la géométrie projective. Les critiques de Poincaré amèneront Russell³ à abandonner une première version trop vague et imprécise des axiomes de la géométrie projective et à adopter une axiomatique inspirée de celle de Pieri (§ 3.5). La question des conditions nécessaires à la possibilité de la mesure et celle du statut de la définition de la distance sont l'occasion pour Poincaré de nier la possibilité de définir une distance indépendamment du choix d'une géométrie et par-là de réaffirmer son conventionnalisme géométrique (§ 4.2). La discussion se poursuit sur la notion de définition (§ 4.3). Russell distingue la définition mathématique qui pose simplement une relation entre différents termes et la définition philosophique qui intègre selon lui une exigence de compréhension. Nous terminerons l'analyse de cette polémique par la discussion sur la possibilité d'expériences spatiales cruciales (partie 5).

1. PRÉSENTATION ET RÉSUMÉ DE LA POLÉMIQUE ENTRE RUSSELL ET POINCARÉ

Cette polémique ne peut être comprise sans évoquer le contexte d'intense activité en France autour de la question des fondements de la géométrie, dans le cadre, en particulier, de la nouvelle *Revue de*

³ On peut penser que Poincaré n'est pas le seul responsable du changement de point de vue de Russell. En effet, à cette époque (1899–1900), Russell commençait à lire les travaux de l'école italienne, entre autres ceux de Pieri et Peano, sur les questions de logique et de fondements des mathématiques.

*métaphysique et de morale*⁴. En effet, dès sa création autour de Xavier Léon et Élie Halévy, la *Revue* s'est voulue lieu d'échanges entre philosophes et savants. Ainsi, Poincaré publie dans ses deux premiers volumes les articles « Sur le continu mathématique » [Poincaré 1893] et « Sur la nature du raisonnement mathématique » [Poincaré 1894]; Couturat, philosophe ayant reçu une solide formation en mathématiques, rejoint son comité de direction et établit des contacts avec de nombreux scientifiques, logiciens et philosophes des sciences.

La *Revue de métaphysique et de morale* publie avec la *Revue philosophique* une grande partie des nombreux travaux philosophiques sur les fondements de la géométrie qui sont menés en France à cette époque. Outre Poincaré et Couturat, on peut citer parmi les plus importants auteurs le néo-kantien Charles Renouvier, Auguste Calinon et Georges Lechalas qui défendent tous deux des conceptions intermédiaires entre rationalisme et conventionnalisme, Jules Andrade qui prône plutôt une conception empiriste de la géométrie. Ces travaux font l'objet de nombreuses controverses; ainsi, une première polémique au sujet de la géométrie oppose Couturat et Poincaré dans les colonnes de la *Revue* ([Couturat 1896], [Poincaré 1897]). Couturat y défend la théorie kantienne de l'espace et attaque le conventionnalisme de Poincaré.

La controverse entre Poincaré et Russell est provoquée par un article de Couturat [1898] publié dans la *Revue* rendant compte du livre de Bertrand Russell *An Essay on the Foundations of Geometry* [1897]. Cet ouvrage est la rédaction de son travail de thèse (Trinity College, Cambridge 1895) et de ses leçons sur les fondements de la géométrie aux États-Unis (Bryn Mawr College, 2-20 novembre 1896 et Johns Hopkins University, 2-11 décembre 1896). Il s'inscrit dans les diverses tentatives de concilier les développements de la géométrie au cours du XIX^e siècle avec la thèse kantienne selon laquelle « si la géométrie a une certitude apodictique, son objet, l'espace, est *a priori*; et réciproquement » [Couturat 1898, p. 355]. Ces thèses sont donc fort éloignées du programme logiciste que Russell commencera à développer en 1903 avec *The Principles of Mathematics*⁵.

⁴ Pour plus de précisions sur la création et les débuts de la *Revue de métaphysique et de morale*, on peut consulter le mémoire de maîtrise de P. Touvet, « L'histoire des sciences et la logique », dans la *Revue de métaphysique et de morale*, Nancy 2, 1995.

⁵ Russell reniera son premier ouvrage de philosophie qui ne sera réédité qu'en 1956

L'ouvrage comporte quatre chapitres. Dans l'introduction, Russell s'attache à délimiter son entreprise et en particulier précise la notion d'*a priori*. Il se place exclusivement d'un point de vue épistémologique et en conséquence dit qu'il ne s'intéressera pas aux causes et genèse de nos connaissances. Pour cela, il distingue le concept psychologique de subjectif de celui philosophique d'*a priori*. Selon Russell, un axiome est *a priori* si sa négation rend impossible l'expérience. Sa signification est purement logique et sans implication psychologique. Le premier chapitre retrace de manière documentée (en s'inspirant fortement du cours de Klein [1890]⁶) l'histoire de la géométrie au cours du XIX^e siècle. Dans le second, Russell commente et critique « quelques théories philosophiques antérieures de la géométrie », dont celles de Kant, Riemann, Helmholtz et Erdmann. Le troisième chapitre est consacré à l'exposé des axiomes de la géométrie projective et de ceux de la géométrie métrique. Russell tente de montrer que ces axiomes sont *a priori* et que seuls les axiomes qui caractérisent la géométrie euclidienne parmi les géométries métriques sont empiriques. Dans le quatrième chapitre, Russell examine la question classique en philosophie des rapports entre un concept général et une instantiation particulière dont on a l'expérience. Par exemple, il reprend, dans cette partie, le problème de l'espace vide.

Dans son ouvrage, Russell tente de concilier la théorie kantienne de l'espace et les géométries non-euclidiennes. Il n'essaie pas comme la plupart des autres néo-kantiens de rejeter les géométries non-euclidiennes du côté de la pure spéculation intellectuelle mais tente au contraire de dégager la part commune aux géométries euclidiennes et non-euclidiennes et ainsi de définir une géométrie qu'il qualifie d'absolue. Son objectif est de montrer que les axiomes de la géométrie euclidienne se répartissent en

[Toretti 1978, p. 301]. Dans *My Philosophical Development*, un livre dans lequel il décrit son itinéraire intellectuel, Russell critique son premier essai sur la géométrie et n'y trouve rien de valide.

« My first philosophical book, *An Essay on the Foundations of Geometry*, which was an elaboration of my *Fellowship dissertation*, seems to me now somewhat foolish. I took up Kant's question, "how is geometry possible?" and decided that it was possible if, and only if, space was one of the three recognised varieties, one of them Euclidean, the other two non-Euclidean but having the property of preserving a constant "measure of curvature". Einstein's revolution swept away everything at all resembling this point of view. [...] Apart from details, I do not think that there is anything valid in this early book. » [Russell 1959, p. 40–41]

⁶ Russell reconnaît sa dette dans la préface de l'ouvrage [1897, p. 9].

deux classes : ceux communs aux espaces euclidiens et non-euclidiens et ceux qui distinguent l'espace euclidien des espaces non-euclidiens. La thèse principale de Russell est que les axiomes communs aux trois géométries hyperbolique, elliptique et euclidienne sont *a priori* alors que ceux qui distinguent la géométrie euclidienne des autres géométries sont empiriques. Russell fait montre dans son ouvrage d'une réelle culture mathématique. Son journal et ses notes de lecture montre qu'il a étudié les travaux de Killing [1885], Klein [1890] et Riemann [1854]. Sa formation lui permet donc de lire les travaux des mathématiciens contemporains. Cependant, il faut noter que Russell n'est pas un mathématicien. Sa connaissance des derniers développements de la géométrie n'est pas professionnelle : il peut devenir rapidement peu rigoureux et sa compréhension de certains points techniques est souvent incomplète.

La recension de Couturat [1898], dans laquelle le travail de Russell est défini comme « l'Esthétique transcendantale de Kant, revue, corrigée et complétée à la lumière de la Métagéométrie » [1898, p. 355], est enthousiaste. Couturat a certes quelques réticences concernant l'empiricité des axiomes spécifiques de la géométrie euclidienne mais sa conclusion est que Russell a sauvé définitivement les thèses criticistes⁷ concernant l'espace et la géométrie. Dans sa réponse aux questions de Couturat publiée dans la *Revue*, Russell [1898] signale en préalable de son argumentation que pour discuter de la possibilité de vérifier ou contredire empiriquement les axiomes proprement euclidiens, il faut « rejeter complètement la théorie de M. Poincaré, suivant laquelle ces axiomes sont de pures conventions comme le système métrique, et ne sont par suite pas susceptibles d'être vrais ou faux, vérifiés ou contredits » [Russell 1898, p. 759–760]⁸.

⁷ Dans ce qui suit, « criticiste » désignera essentiellement la philosophie critique de Kant et de ses disciples.

⁸ Dans un premier temps, cet article [Russell 1898] n'attire pas l'attention de Poincaré : « Il [Russell] regrette seulement que vous n'avez pas lu, à ce qu'il semble, son article dans la *Revue de métaphysique* de novembre, où répondant à mes objections, il [Russell] indiquait une expérience (grossière) capable de révéler le non-euclidianisme (sensible) de l'espace » [Lettre de Couturat à Poincaré datée du 28 mai 1899].

« L'article de M. Russell, paru pendant que j'étais en Egypte, m'avait échappé » [Lettre de Poincaré à Couturat datée du 1^{er} juin 1899].

Bien que Russell y exprime son opposition radicale aux thèses conventionnalistes de Poincaré, cet article n'est pas à l'origine de la réaction de Poincaré.

Le 20 avril 1899, Couturat annonce avec une certaine satisfaction à Russell que Poincaré vient d'envoyer à la rédaction de la *Revue de métaphysique et de morale* un article polémique critiquant ses thèses. Dans cet article [Poincaré 1899], qui est aussitôt publié, Poincaré analyse les thèses de Russell et les soumet à une vive critique tant d'un point de vue mathématique que philosophique, s'appuyant non seulement sur la lecture de la recension de Couturat [1898] mais aussi sur une lecture serrée du livre de Russell⁹. Poincaré, mathématicien universellement reconnu, ayant publié depuis 1887 de nombreux travaux philosophiques sur la question de l'espace et de la géométrie, n'hésite pas à débattre avec un jeune homme de vingt-cinq ans encore inconnu. Conformément à son habitude lorsque Poincaré polémique, son ton est vif :

« Nous avons passé en revue les axiomes que M. Russell considère comme des conditions indispensables de l'expérience. Pour la plupart d'entre eux, il ne l'a nullement établi; en employant dans ses énoncés des termes vagues et mal définis, en rendant les contours aussi flous que possible, il arrive à accumuler assez de brouillards pour empêcher de discerner tel axiome qui s'impose véritablement à nous de tel autre axiome plus précis qu'il veut nous imposer. Mais il n'a pu faire illusion qu'à ceux qui n'ont pas voulu prendre la peine de dissiper ce brouillard » [Poincaré 1899, p. 264].

Poincaré commence par souligner l'insuffisance des axiomatiques proposées par Russell, puis argumente contre le caractère *a priori* des axiomes de la géométrie projective et la possibilité d'expérimenter de manière cruciale sur les axiomes de la géométrie. Il termine son article en rappelant ses positions et en répondant aux critiques de Russell contre les positions de Helmholtz. Les objections de Poincaré sont donc nombreuses et variées. Pour recentrer le débat, Poincaré conclut son article en demandant à Russell de répondre au moins à ses critiques concernant la possibilité d'une expérience cruciale au sujet du postulat des parallèles et à celles au sujet de la définition des notions de distance et de ligne droite.

Russell ne s'offense pas du ton utilisé par Poincaré et admet, dans sa lettre adressée à Couturat le 19 mai 1899, que les reproches de Poincaré ne sont pas complètement injustifiés, tout en considérant que

⁹ La traduction de Cadenat du livre de Russell ne paraîtra qu'en 1901. Poincaré a donc travaillé à partir de l'édition originale en anglais.

l'argumentation de celui-ci est loin d'être irréprochable. En particulier, il maintient dans sa réponse [Russell 1899a] ses thèses concernant la possibilité d'expérimenter sur la vérité ou la fausseté de la géométrie euclidienne et continue à opposer aux thèses conventionnalistes de Poincaré le caractère philosophiquement indéfinissable de la distance et de la ligne droite. Le 3 décembre 1899, Couturat se réjouit de trouver en Russell un allié dans sa lutte contre le nominalisme¹⁰. De plus, il lui annonce que Poincaré va répondre à son dernier article.

« M. Poincaré m'a dit qu'il allait vous répondre ; son article, qui paraît assez long est déjà presque terminé. Il paraît qu'il vous attaque surtout sur les preuves empiriques des axiomes euclidiens ; c'est assurément là le point faible de votre thèse, bien que je n'aie rien à vous répondre là-dessus. Cela prouve simplement à quel point vos théories lui paraissent fortes, pour qu'il revienne encore à la charge, ce qu'il n'a jamais fait » [correspondance de Couturat et Russell].

Dans sa réponse, Poincaré [1900] réaffirme avec force sa thèse selon laquelle aucune géométrie n'est ni vraie, ni fausse et développe de nouvelles critiques contre les thèses de Russell au sujet de la définition de la distance et de la possibilité d'expériences concernant la géométrie de l'espace physique.

Dans sa lettre adressée à Russell le 13 décembre 1899, Couturat propose alors de clore le débat ; chacun ayant puissamment posé ses arguments, les deux protagonistes ne peuvent plus que se répéter et la polémique devenir stérile. Russell se rend aux arguments de Couturat dans sa réponse du 18 décembre 1899.

¹⁰ Il est intéressant de noter à cet égard que Couturat considère que le nominalisme est la philosophie partagée par la plupart des mathématiciens français et qu'il ne fait aucune différence entre les thèses de Poincaré et Le Roy. Un peu plus tard, Poincaré prendra soin de se démarquer des positions nominalistes radicales de Le Roy. Ainsi, dans l'introduction de *La science et l'hypothèse*, il refuse de considérer les conventions comme arbitraires [1902a, p. 24–25]. Dans l'introduction de *La valeur de la science*, Poincaré exprime de nouveau ses divergences avec le nominalisme de Le Roy [1905, p. 23].

2. LA GÉOMÉTRIE ET L'ESPACE SELON POINCARÉ

2.1. Le conventionnalisme géométrique de Poincaré

Poincaré a consacré entre 1887 et 1912 de nombreux articles aux questions de la géométrie et de l'espace¹¹. Dans les premiers [Poincaré 1887, 1891 et 1892], il aborde cette question d'un point de vue philosophique et développe sa célèbre théorie du conventionnalisme géométrique¹². Ces conceptions sont bien connues maintenant notamment grâce aux travaux de Vuillemin [1976, 1994], Zahar [1996, 1997, 2000], Giedymin [1977, 1978, 1982, 1991, 1992] ou Grünbaum [1963, 1977, 1994]. Nous nous contenterons de les résumer rapidement sans entrer dans la question d'une reconstruction philosophique des arguments de Poincaré.

1) D'un côté, les axiomes de la géométrie ne sont pas des jugements synthétiques *a priori*. Dans l'interprétation de Poincaré, de tels jugements s'imposent à nous avec une irrésistible évidence « au point que nous ne pourrions concevoir la proposition contraire, ni bâtir sur elle un édifice théorique » [1902a, p. 74]. Poincaré utilise deux types d'argument contre l'idée kantienne que les axiomes de la géométrie sont synthétiques *a priori* :

a) Il a lui-même montré que les géométries non-euclidiennes sont interprétables en termes de géométrie euclidienne et que tout théorème de géométrie non-euclidienne peut être interprété par simple traduction comme un théorème de géométrie euclidienne. Ainsi, ces géométries « cessent d'être un vain exercice de logique et peuvent recevoir des applications » [1902a, p. 69]. Si un tel argument est recevable pour prouver la consistance logique des géométries non-euclidiennes par rapport à la

¹¹ Les articles de Poincaré [1894, 1893, 1891, 1895] constituent respectivement (à quelques modifications près) les quatre premiers chapitres de *La science et l'hypothèse* [Poincaré 1902a]. Les références seront faites par rapport à ce dernier ouvrage qui est beaucoup plus facilement accessible que les articles originaux.

¹² S. Walter [1996, p. 165–168] montre que le conventionnalisme de Poincaré n'est guère soutenu par ses collègues universitaires et est même combattu par certains (Picard, Hadamard) qui adoptaient un point de vue empiriste. Seuls quelques mathématiciens et philosophes français réunis pour la plupart autour du « cercle de Boutroux » se prononcèrent en faveur du conventionnalisme géométrique de Poincaré. Sur la question de la genèse de l'œuvre philosophique de Poincaré et les influences que ce dernier a subies, on peut consulter l'ouvrage de Laurent Rollet [2000] : *Henri Poincaré, des mathématiques à la philosophie. Étude du parcours intellectuel, social et politique d'un mathématicien au début du siècle*.

géométrie euclidienne, il est par contre assez faible pour appuyer la thèse de Poincaré¹³.

b) Le second type d'argumentation reprend en partie les discussions de Helmholtz concernant l'intuition de l'espace. Dans son article sur l'origine et la signification des axiomes de la géométrie [1869], Helmholtz posait la question de la nature intuitive de nos conceptions spatiales. Il envisageait la fiction d'êtres intelligents vivant sur une surface ovoïde et posait la question des conceptions géométriques de tels êtres [*Ibid.*, p. 5]. Helmholtz concluait que ces êtres fictifs adopteraient une géométrie radicalement différente de la nôtre. Le rôle de l'expérience dans la genèse de certaines de nos conceptions spatiales était ainsi montré. Poincaré envisage de la même manière la fiction d'animaux sans épaisseur vivant sur une sphère et ayant l'esprit fait comme nous ; il affirme alors que ces êtres ne pourraient pas adopter la géométrie euclidienne « qui serait contredite par toute leur expérience » [Poincaré 1902a, p. 75].

2) D'un autre côté, les axiomes de la géométrie ne peuvent pas être non plus des vérités expérimentales. En effet, comme on ne peut expérimenter que sur des objets matériels, les expériences fondatrices de la géométrie ne pourraient porter que sur des corps solides naturels ; la géométrie ne serait alors que l'étude des propriétés de ces corps et ne pourrait pas avoir la rigueur qu'on lui connaît.

3) N'étant ni des jugements synthétiques *a priori*, ni des vérités expérimentales, les axiomes de la géométrie sont des conventions, c'est-à-dire des définitions déguisées. Il n'y a pas de géométries imposées par notre esprit comme condition nécessaire de nos expériences, il n'y a pas, non plus, de géométrie imposée par l'expérience ; par contre, parmi toutes les conventions possibles, autrement dit toutes les géométries possibles, l'expérience nous guide dans le choix d'un cadre adéquat pour rendre compte de celle-ci¹⁴. Poincaré conclut que la géométrie euclidienne « est et restera la plus commode » [1902a, p. 76] parce que celle-ci est la plus

¹³ Même en acceptant l'interprétation de Poincaré de la notion de « synthétique *a priori* », prouver que les géométries non-euclidiennes et euclidiennes ont la même consistance logique n'a aucune conséquence sur le caractère d'évidence des fondements de l'une par rapport à ceux de l'autre. Si on interprète la notion de « synthétique *a priori* » comme condition nécessaire à l'expérience, l'argument est encore plus faible.

¹⁴ Il faut bien distinguer le rôle de l'expérience chez les empiristes et chez Poincaré : pour les empiristes, toute connaissance abstraite est obtenue par abstraction à partir d'expériences ; pour Poincaré, l'expérience fait appel à une capacité de notre esprit.

simple d'un point de vue mathématique et « parce qu'elle s'accorde assez bien avec les propriétés des solides naturels, ces corps dont se rapprochent nos membres et notre œil et avec lesquels nous faisons nos instruments de mesure » [Poincaré 1902a, p. 76].

2.2. La genèse psycho-physiologique de la géométrie

Après avoir soutenu la thèse selon laquelle nos conceptions spatiales sont conventionnelles d'un point de vue philosophique, Poincaré développe son argumentation à un niveau psycho-physiologique. Dans deux articles consacrés à la question de l'espace [Poincaré 1895 et 1898], il tente de justifier son conventionnalisme géométrique en fondant la genèse de nos conceptions géométriques sur l'analyse de nos sensations. Poincaré s'inscrit ainsi dans la lignée des travaux de Helmholtz [1867, 1869, 1878].

Une des thèses essentielles de Poincaré est la différence qu'il fait entre d'une part l'espace représentatif ou sensible, entendu comme le cadre de nos représentations et de nos sensations et l'espace géométrique. Ces deux types d'espace sont des formes de notre entendement. Si elles ne sont pas indispensables à la formation de nos sensations, ces deux catégories philosophiques le deviennent pour comparer ou raisonner sur celles-ci. Il ne faut pas, cependant, confondre ces deux catégories sous prétexte que nous raisonnons sur les corps extérieurs, « comme s'ils étaient situés dans l'espace géométrique » [Poincaré 1902a, p. 82].

L'espace géométrique est continu, infini, homogène, isotrope et de dimension 3. Aucun des espaces visuel, tactile ou moteur ne vérifie l'ensemble de ces propriétés. Aucune sensation n'a par elle-même un caractère spatial et n'est accompagnée d'un sentiment de direction. L'espace représentatif est un cadre dans lequel nous rangeons et classons qualitativement nos sensations. Localiser un objet dans l'espace, c'est se représenter les mouvements qu'il faut faire pour atteindre cet objet, autrement dit, se représenter « les sensations musculaires qui les accompagnent et qui n'ont aucun caractère géométrique, qui par conséquent n'impliquent nullement la préexistence de la notion d'espace » [*Ibid.*, p. 82]. La question reste alors entière de l'origine de l'idée d'espace géométrique.

Dans le cas de la géométrie, un empiriste soutient que la connaissance des transformations géométriques provient de nos expériences sur les solides par abstraction et généralisation. Un conventionnaliste au sens de Poincaré considère que notre capacité innée à former des groupes est suscitée par notre expérience des mouvements des solides.

Si aucune sensation ne peut par elle-même nous y mener, l'étude des variations des sensations et de leurs lois de succession, par contre, nous conduit à l'idée d'espace géométrique : Poincaré distingue parmi les phénomènes externes (c'est-à-dire non-accompagnés de sensations musculaires) ceux qui sont susceptibles d'être corrigés par un changement interne (c'est-à-dire accompagnés de sensations musculaires). Nous sommes amenés à nous intéresser à cette classe particulière de phénomènes grâce aux mouvements des corps solides matériels. Poincaré appelle ces phénomènes des déplacements et considère que l'étude des lois de ces phénomènes constitue l'objet de la géométrie.

Poincaré commence par classer les déplacements en considérant comme identiques deux déplacements corrigés par un même changement interne, puis montre que « les déplacements forment un groupe ».

« Ce qui est l'objet de la géométrie, c'est l'étude d'un groupe particulier ; mais le concept général de groupe préexiste dans notre esprit au moins en puissance. Il s'impose à nous, non comme forme de notre sensibilité, mais comme forme de notre entendement.

Seulement, parmi tous les groupes possibles, il faut choisir celui qui sera pour ainsi dire l'étalon auquel nous rapporterons les phénomènes naturels » [*Ibid.*, p. 93–94].

Le choix du groupe est purement conventionnel et n'obéit qu'à des critères de simplicité ou de commodité.

En définissant l'objet de la géométrie comme l'étude d'un groupe de transformations et en évitant de poser l'existence d'un espace géométrique, Poincaré propose une solution originale au débat entre rationalistes et empiristes. Par contre, il ne répond pas encore à la question de la nature de l'espace géométrique.

2.3. Une polémique avec Couturat

Dans son article « L'espace et la géométrie », Poincaré [1895] se contente, dans un paragraphe intitulé « Nombre de dimensions »¹⁵, d'exprimer ses « difficultés à expliquer sa pensée en ce qui concerne l'origine de la notion de point et le nombre de dimensions » [*Ibid.*, p. 640] et d'affirmer qu'elle est très différente des conceptions habituelles. Selon Poincaré, certains

¹⁵ Ce paragraphe, non repris dans *La science et l'hypothèse* est situé entre les paragraphes « Loi d'homogénéité » [1902a, p. 87] et « Le monde non-euclidien » [1902a, p. 88].

déplacements particuliers conservent les mêmes sensations. L'ensemble de ces déplacements constitue un sous-groupe de déplacements laissant fixe un point. Comme le groupe de tous les déplacements est d'ordre¹⁶ 6 et que les sous-groupes laissant fixe un point sont d'ordre 3, Poincaré voit dans la différence l'origine du nombre de dimensions de notre espace.

Poincaré n'est pas très explicite, même s'il revendique avec force que la notion spatiale de base, le point, et le nombre de dimensions trouvent leur origine dans l'étude du groupe. Une des premières critiques de Couturat porte sur ce point. Il pense avoir prouvé la circularité de la construction de Poincaré. En effet, selon lui, l'affirmation que le groupe est d'ordre 6, autrement dit que la détermination de la position d'un corps dans l'espace dépend de six variables, est une propriété qui repose sur le fait que l'espace est de dimension 3. La raison profonde de l'objection de Couturat réside dans sa conception de la notion de groupe. En effet, si celle-ci apparaît comme centrale pour les géomètres de la fin du XIX^e siècle, les groupes ne sont pas étudiés en eux-mêmes, mais comme des groupes de transformations opérant sur un espace. En particulier, ici, Couturat ne distingue pas les propriétés formelles du groupe de celles liées à son action. Dans sa réponse, Poincaré [1897] précise son point de vue et insiste sur le fait que, une fois obtenue la classification des déplacements réels, l'esprit « ne sait pas encore la géométrie, ne sait pas que l'espace a trois dimensions, ne sait pas que la position d'un corps est déterminée par six quantités » [1897, p. 64]. L'étude du groupe se fait alors expérimentalement et c'est l'expérience qui nous permet d'affirmer que le groupe des déplacements est d'ordre 6. La réponse sera beaucoup plus précise dans l'article « On the Foundations of Geometry » [Poincaré 1898]. Poincaré y décrit l'étude d'un groupe comme l'étude de ses propriétés formelles et expliquera que deux groupes isomorphes, c'est-à-dire ayant mêmes propriétés formelles, ont même ordre et peuvent opérer sur des espaces de dimensions différentes. Ainsi, le groupe des déplacements opère sur l'espace sensible qui est de dimension très grande et son étude est difficile. Mais heureusement, le problème se simplifie en remplaçant ce groupe par un autre groupe isomorphe qui opère sur un espace de

¹⁶ L'ordre d'un groupe continu de transformations est chez Poincaré le nombre de paramètres dont il dépend et le degré la dimension de l'espace sur lequel il opère.

dimension plus petite¹⁷. La reconnaissance d'un isomorphisme entre deux groupes de transformation s'effectue en reconnaissant les sous-groupes qui conservent certains éléments.

Cette définition est le second point critiqué par Couturat. Il demande à Poincaré ce que signifie l'expression, « certains déplacements ont un caractère commun : on dit qu'ils laissent fixe un point de l'espace » et y voit deux interprétations possibles : « En résumé, ou bien ce caractère commun à tous les déplacements du sous-groupe consiste à avoir un point fixe, et alors la définition implique le défini; ou bien c'est un caractère purement analytique, et alors c'est arbitrairement qu'on lui attribue un sens géométrique, en postulant précisément que l'espace a trois dimensions » [Couturat 1896, p. 660].

Dans sa réponse, Poincaré distingue deux moments qui scandent la genèse de l'espace : un premier moment psychophysiologique qui, à partir des données brutes constituées par les sensations, nous fait reconnaître « que les déplacements se composent d'après les mêmes lois que les substitutions d'un certain groupe G » [1897, p. 67]. L'expérience a été l'occasion pour notre esprit de mettre en œuvre sa capacité innée à former des groupes. Un second moment est constitué par l'étude des propriétés du groupe. Conceptuellement, Poincaré ne dispose que de la notion de groupe de transformations au sens de Lie. Mais, nous avons vu que, contrairement à Couturat, il fait explicitement la différence entre les propriétés formelles et celles plus contingentes liées à l'ensemble sur lequel opère le groupe. Nous connaissons un groupe G auquel nous rapportons les déplacements, mais pour l'étudier, nous pouvons choisir un groupe isomorphe à G . Il reste à poser la question de savoir quel groupe choisir parmi tous les groupes isomorphes à G . La plus importante des propriétés formelles d'un groupe est l'existence de sous-groupes. Poincaré distingue dans le groupe G trois catégories de sous-groupes : ceux (d'ordre 3) constitués des rotations autour d'un point, ceux (d'ordre 2) constitués de vissages autour d'un axe et ceux (d'ordre 1) constitués par les rotations autour d'un axe¹⁸. Il

¹⁷ On voit ici que Poincaré, qui distinguait pourtant explicitement les propriétés formelles d'un groupe de celles liées à son action, concevait, lui aussi, la notion de groupe uniquement comme « *groupe de transformations* ». En particulier, je ne peux être d'accord avec l'interprétation de Johnson [1981] selon laquelle Poincaré étudie les groupes comme groupes abstraits.

¹⁸ Poincaré [1898] distingue les sous-groupes rotatifs, c'est-à-dire dans la représentation

considère l'action des transformations qui sont dans la terminologie moderne appelées « automorphismes intérieurs »¹⁹ de G sur ces trois ensembles et conclut sans démonstration que, dans le premier cas, la dimension de l'espace obtenu est 3, dans le second 4 et 5 dans le dernier²⁰. Il termine en affirmant que l'on choisit le premier cas, car c'est celui qui donne le moins grand nombre de dimensions (critère de simplicité) et pour des raisons d'ordre expérimental²¹. L'espace géométrique est donc obtenu à partir du groupe. Poincaré rompt ici avec toute une tradition qui pose en donnée préalable à la possibilité d'une géométrie la notion d'espace. Au contraire, Poincaré subordonne la notion d'espace géométrique à celle de géométrie.

La suite de la critique de Couturat concerne plus spécifiquement la genèse psycho-physiologique de l'espace, tentée par Poincaré. Dans un

standard du groupe euclidien, les sous-groupes d'isotropie d'un point, les faisceaux rotatifs, c'est-à-dire les sous-groupes des rotations autour d'un axe fixe et les sous-groupes hélicoïdaux, autrement dit, les sous-groupes des vissages d'un axe donné. Il considère aussi le sous-groupe des translations et signale à cette occasion que le groupe euclidien est le seul à posséder un tel sous-groupe commutatif et conjugué. Dans sa réponse à Couturat, il oublie les sous-groupes de translations d'ordre 3, 2 ou 1. Le raisonnement de Poincaré repose implicitement sur le fait que les sous-groupes qu'il considère laissent invariant (globalement ou point par point) un unique objet affine (point ou droite) bien déterminé. Les sous-groupes du groupe affine euclidien avaient été classés par Jordan dans son « Mémoire sur les groupes de mouvements » [1868–1869].

¹⁹ Poincaré ne donne pas de dénomination particulière à ces transformations. Il introduit cette notion pour classer les déplacements et leur sous-groupes.

²⁰ Ce résultat est assez intuitif et peut être facilement démontré (voir [Johnson 1981] ou [Nabonnand 2000]). Poincaré exprime ces résultats très clairement :

« Supposons que nous prenions les différents transformés d'un sous-groupe rotatif. Nous avons ici une infinité triple. La matière de notre groupe se compose donc d'une triple infinité d'éléments. Le degré du groupe est trois. Nous avons en ce cas choisi le point comme élément de l'espace et donné à l'espace trois dimensions.

Supposons que nous prenions les différents transformés d'un sous-groupe hélicoïdal. Ici nous avons une infinité quadruple. La matière de notre groupe se compose d'une quadruple infinité d'éléments. Son degré est quatre. Nous avons en ce cas choisi la ligne droite comme élément de l'espace —, ce qui donnerait à l'espace quatre dimensions.

Supposons enfin que nous choissions les différents transformés d'un faisceau rotatif. Le degré serait alors cinq. Nous avons choisi comme élément de l'espace la figure formée par une ligne droite et un point sur cette ligne droite. L'espace aurait cinq dimensions » [Poincaré 1898, p. 38].

²¹ Ces raisons sont explicitées dans l'article « On the Foundations of Geometry » [1898]. « Mais il y a une autre raison qui recommande ce choix. Le sous-groupe rotatif attire d'abord notre attention parce qu'il conserve certaines sensations. Le sous-groupe hélicoïdal ne nous est connu que plus tard et plus indirectement. Le faisceau rotatif d'autre part n'est lui-même qu'un sous-groupe du sous-groupe rotatif » [Poincaré 1898, p. 38 de la traduction française].

premier temps, il interprète de façon grossière et erronée les thèses de Poincaré en ne comprenant pas la différence entre espace sensible et espace géométrique. Le fond de la critique de Couturat est beaucoup plus intéressant car elle s'appuie sur la thèse du caractère d'intuition pure de l'espace (T1) :

« En général, on essaie d'engendrer l'espace avec des données qui n'ont aucun sens géométrique ni même aucune valeur mathématique; et c'est de ces sensations si confuses et si obscures, dénuées de toute extension et n'ayant qu'une vague intensité, qu'on espère tirer l'espace avec sa clarté, sa netteté et sa précision! Au fond, si l'on croit expliquer l'espace par les mouvements de l'œil, c'est qu'on imagine d'avance l'œil dans l'espace; et si l'on trouve que l'espace visuel a trois dimensions, c'est qu'on les a d'abord attribuées à l'organe même de la vision. Ainsi, M. Poincaré l'avoue de bonne foi, on raisonne comme si l'on savait déjà la géométrie; et c'est là le vice irrémédiable de toute théorie psychologique de l'espace. [...] Ce qui montre bien que la psychologie ne réussit pas à expliquer l'espace, c'est qu'elle est forcément amenée à distinguer l'espace géométrique de l'espace sensible, et à ne rendre compte que de celui-ci. C'est déjà pour elle un échec et un signe d'impuissance, car l'espace géométrique est le seul qui ait une valeur objective, à la fois scientifique et pratique : c'est celui où nous localisons nos perceptions, où nous projetons nos figures et où nous construisons le monde physique » [Couturat 1896, p. 662].

Dans sa réponse, Poincaré [1897] montre rapidement que Couturat n'a pas compris ses arguments. Il avoue qu'il n'espère pas convaincre Couturat. En effet, il se rend compte que leur différend ne réside pas en une simple incompréhension, mais qu'au contraire, leurs thèses sont radicalement opposées. Il reproche à son contradicteur de présupposer une intuition directe du point géométrique et des notions géométriques fondamentales. La conclusion de Poincaré est le constat de l'irréductibilité des divergences entre les points de vue criticistes et conventionnalistes. L'approche de Couturat consiste à reconstruire logiquement la géométrie afin d'en caractériser les éléments *a priori*; Poincaré tente une reconstruction psychologique des notions géométriques : il admet une capacité de notre esprit à former des groupes et montre comment, à chaque étape de cette genèse, l'expérience guide les choix lorsqu'une décision conventionnelle est nécessaire. Cette différence d'approche du problème de l'espace rendra de

la même manière la discussion entre Poincaré et Russell très difficile.

3. LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE EST-ELLE LA GÉOMÉTRIE QUALITATIVE?

Selon Russell, pour traiter de la géométrie métrique, donc quantitative, il faut d'abord définir la géométrie qualitative. Après les travaux de Cayley et Klein sur les modèles projectifs des géométries euclidienne et non-euclidiennes, la géométrie projective lui semble pouvoir être, si elle est fondée purement projectivement, une géométrie sans considérations ni présupposés quantitatifs, et donc à même de jouer le rôle de la géométrie qualitative.

3.1. La présentation de l'histoire des géométries non-euclidiennes par Russell

Russell distingue dans son livre, à la suite de Klein [1890a, p. 161–353], trois périodes dans l'histoire de la géométrie : une période d'émergence des géométries non-euclidiennes avec les travaux de Gauss, Bolyai et Lobatchevski, une seconde essentiellement centrée autour de la notion de métrique, marquée par les travaux de Riemann et Helmholtz, et une troisième période caractérisée par les modèles projectifs des géométries non-euclidiennes de Cayley et Klein. Une introduction historique peut paraître contradictoire avec le projet épistémologique de fondation logique de la géométrie. En fait, Russell s'appuie sur cette présentation afin de montrer l'insuffisance et l'inutilité des traitements mathématiques pour la résolution de la question philosophique de l'espace, et donc prouver ainsi la pertinence de l'approche philosophique.

Selon Russell, l'objectif de Riemann [1854] et de Helmholtz [1868a, 1868b, 1869] était « de montrer, par l'exposition d'alternatives logiquement possibles, la nature empirique des axiomes admis » [Russell 1897, p. 23]. Il insiste, cependant, sur l'importance de distinguer l'exposé mathématique de leurs travaux et les considérations philosophiques contenues dans ceux-ci et considère que contrairement à leurs intentions philosophiques, leurs travaux mathématiques plaident plus pour une conception *a priori* que pour un fondement empirique de certains axiomes. En effet, selon Russell, Riemann et Helmholtz introduisent implicitement certains axiomes dans

l'exposition de leurs travaux géométriques, l'utilisation de ces axiomes étant logiquement inévitable.

3.2. *La critique de Riemann et de Helmholtz*

Les deux concepts fondamentaux de l'exposé de Riemann sont ceux de multiplicité²² et de courbure. Riemann considérait en effet que l'espace était un cas particulier de multiplicité numérique. Dans une telle multiplicité de dimension n , la détermination des positions s'effectue par celle de n grandeurs numériques qui n'ont pas de signification géométrique intrinsèque. Les considérations géométriques ne peuvent donc intervenir qu'une fois donnée la possibilité de mesurer les longueurs. Riemann montre alors qu'il est possible de construire plusieurs métriques sur une même multiplicité. La description des diverses géométries qui en découlent peut s'effectuer à l'aide d'un nouveau concept géométrique, la courbure. Riemann distingue trois systèmes d'hypothèses qui conduisent à envisager trois types de géométries : selon que la courbure est nulle, constante ou variable.

Russell déplore que Riemann pose, en préalable à toute construction de la géométrie, l'espace comme une grandeur. Autrement dit, Riemann répond avec succès à la question : « Quelle espèce de grandeur est l'espace ? » mais ne pose pas la question « Que doit être l'espace pour qu'on puisse le regarder comme une grandeur quelconque ? », la seule philosophiquement fondamentale aux yeux de Russell. Russell refuse l'hypothèse de Riemann selon laquelle l'espace est un cas particulier de multiplicité numérique. Cette hypothèse parfaitement acceptable du point de vue mathématique ne peut satisfaire le philosophe et doit être considérée comme une pétition de principe. Sa critique est fondée sur une analyse logique de la notion de grandeur : un jugement de grandeur est nécessairement le résultat de la comparaison de deux objets qualitativement semblables et néglige donc la forme qualitative des objets comparés. Par conséquent, il est logiquement impossible d'obtenir une quelconque connaissance qualitative des propriétés de l'espace à partir de jugements de grandeur. De plus, la possibilité même de la comparaison nécessite une

²² La traduction en français habituelle à l'époque du terme *manifold* ou *Mannigfaltigkeit* est *multiplicité*. Nous reprenons ce terme, car le terme plus moderne de 'variété' introduit, outre un anachronisme, des considérations globales, étrangères aux travaux de Riemann, Helmholtz, Beltrami et Klein.

connaissance qualitative des objets et du milieu. En conséquence, Russell rejette la distinction effectuée par Riemann entre une géométrie purement qualitative fondée sur le seul concept de grandeur et, par là, commune à toutes les géométries, l'*analysis situs*, et celle quantitative fondée sur la notion de métrique dont l'applicabilité à l'espace physique relève de l'expérience.

Après les travaux de Riemann, Russell discute ceux de Helmholtz [1868a, 1868b, 1869]. Il commence par signaler que Helmholtz est « guidé par une philosophie empiriste semblable » [Russell 1897, p. 32] à celle de Riemann. Il présente la démarche de Helmholtz comme fondée sur la notion de congruence des corps solides, celle-ci étant prouvée par l'expérience²³. Puis, il cite de manière incomplète les axiomes posés par Helmholtz, qui, selon ce dernier, caractérisent les géométries euclidiennes et non-euclidiennes²⁴. Les critiques de l'argumentation de Helmholtz sont multiples et sont essentiellement relatives à l'existence des corps rigides et à l'axiome de libre mobilité. Russell distingue les propriétés de congruence des solides et de libre mobilité des points. La première requiert selon lui que, si deux solides sont congruents en une position, ils le sont en toute autre position. La seconde propriété affirme pour tout point la possibilité de « passer librement et d'une manière continue d'une position à une autre » [1897, p. 33]. Russell souligne le cercle vicieux qu'il y a à faire, comme Helmholtz, reposer la possibilité de la mesure sur l'existence des solides et la constatation de leur congruence : comment sans possibilité de mesure constater l'existence et la congruence des solides ? De plus, selon Russell, l'affirmation de l'existence de solides et de la libre mobilité des points suffit à entraîner la propriété de congruence telle qu'il la définit. Enfin, il n'est pas besoin de formuler l'axiome de libre mobilité des points

²³ Après les commentaires de Schlick sur les travaux de Helmholtz [Hertz-Schlick], présenter ainsi Helmholtz comme un empiriste naïf n'est plus possible. Par contre, à la fin du XIX^e siècle, la philosophie de Helmholtz était souvent interprétée comme un empirisme radical.

²⁴ Caractériser les géométries euclidienne et non-euclidiennes sera appelé par Lie le problème de Riemann-Helmholtz [Lie-Engel 1893, p. 397]. Dans la terminologie moderne, il s'agit de caractériser les variétés complètes simplement connexes à courbure constante. Il faut bien le distinguer du problème de Clifford-Klein (*Space form problem*) qui consiste à caractériser les variétés (riemanniennes ou pseudo-riemanniennes) complètes connexes à courbure constante.

car il est contenu dans l'affirmation de l'homogénéité de l'espace, elle-même équivalente à la propriété de congruence et conséquence du principe de relativité de l'espace.

Que penser de ces critiques ? On peut premièrement remarquer que l'axiome de Helmholtz concerne la libre mobilité des solides et est donc une exigence plus forte que la propriété de congruence de Russell. Comme le montre l'exemple de l'action des translations sur les solides euclidiens, l'axiome de libre mobilité des solides (au sens de Helmholtz) n'est pas une conséquence de l'existence des solides et de l'axiome de libre mobilité des points.

Deuxièmement, dans le dispositif argumentatif de Russell, l'homogénéité de l'espace et la relativité de la position sont des hypothèses nécessaires à la géométrie qualitative, c'est-à-dire, pour lui, la géométrie projective ; l'équivalent métrique de ces propriétés est l'axiome de libre mobilité des figures défini comme la possibilité pour les grandeurs spatiales de se déplacer sans déformation. Russell ne précise pas dans cet axiome que le déplacement doit être libre. Pourtant, dans la suite, Russell admet implicitement que les déplacements des figures sont libres.

Troisièmement, selon Helmholtz, les axiomes de l'existence des corps rigides et de la libre mobilité des solides étaient des conditions nécessaires pour définir la congruence et donc la mesure ; en montrant que l'on peut déduire à partir de ces axiomes que la courbure est nécessairement constante, Helmholtz prouvait que la constatation empirique de l'existence de solides naturels entraînait la constance de la courbure de l'espace physique. Correctement interprétés dans le cadre de la théorie des groupes de transformations, ces axiomes caractérisent en dimension 3 les trois géométries à courbure constante²⁵. Russell se contente de mettre en doute le développement mathématique de Helmholtz et n'aborde pas la question pourtant épistémologiquement intéressante de la signification philosophique de cette inférence pourtant rigoureusement prouvée par Lie. La question est d'autant plus pertinente que, comme on le verra, Russell

²⁵ Les développements mathématiques de Helmholtz sont erronés. Cette erreur, découverte par Lie [1890a, 1890b], est assez subtile et consiste à transférer de manière non justifiée à l'ensemble des transformations infinitésimales des propriétés vérifiées par les seules transformations finies (sur cette question, on peut consulter l'article de Freudenthal, « Lie Groups in the Foundations of Geometry » [1964]). Russell [1897, p. 33] signale la critique de Lie du traitement mathématique de Helmholtz.

reprendra à quelques nuances près, les mêmes axiomes en argumentant sur leur caractère *a priori*.

3.3. Les modèles projectifs de Cayley et Klein

La troisième période de la métageométrie correspond, pour Russell, aux modèles projectifs de Cayley et de Klein. Selon Russell, le principal avantage de ce point de vue est : « tant que les propositions sont vraiment projectives, les grandeurs qui y figurent sont de simples noms attribués aux points, et non, comme en géométrie métrique, des quantités spatiales réelles » [1897, p. 37].

Dans un premier temps, il résume rapidement les travaux de Cayley et Klein sur cette question et en signale une première difficulté technique. Si l'on définit les coordonnées projectives et le birapport à partir d'un système de coordonnées métriques²⁶, alors définir la distance à partir des coordonnées projectives constitue évidemment un cercle vicieux ou au mieux privilégie la distance originale. Cette objection n'est plus pertinente si les coordonnées projectives sont définies par des propriétés purement projectives. Russell fait explicitement référence à la définition purement projective du birapport que donne Klein dans son cours²⁷ [Klein 1890a, p. 338–344]. Cependant, si la réduction du point de vue métrique au projectif lui donne certains éléments pour justifier ses conceptions philosophiques, il considère que celle-ci n'a néanmoins qu'une valeur technique et non philosophique.

En particulier, dans le reste de la discussion, il s'efforce de montrer que les conclusions philosophiques de Cayley, Klein et Poincaré sont erronées mais qu'une interprétation correcte des propositions de la théorie de Cayley et Klein peut être d'« une grande portée philosophique ». Le reproche principal de Russell concernant les conceptions de Cayley et

²⁶ Un des premiers à avoir posé la question d'une présentation purement projective (exempte d'apport de la géométrie métrique) de la géométrie projective est Von Staudt [1847, 1856]. Klein réalisera rigoureusement ce programme dans ces travaux sur les géométries non-euclidiennes. Il pose explicitement la question de « l'indépendance de la géométrie projective de la théorie des parallèles » et conclut « que la géométrie projective peut être développée complètement avant de poser la question de la mesure » [1871, 303].

²⁷ La méthode est classique et se trouve dans tous les cours de géométrie projective (par exemple [Coxeter 1942, p. 71–76], [Efimov 1981, p. 277–289]). Elle repose sur le théorème de la division harmonique.

Klein est de ramener la question de la géométrie métrique au choix d'une métrique dans un espace euclidien.

« Puisque ces systèmes proviennent tous du plan euclidien par un simple changement dans la définition de la distance, Cayley et Klein tendent à considérer la question tout entière comme portant, non sur la nature de l'espace, mais sur la définition de la distance. Du moment que cette définition est, à leur avis, parfaitement arbitraire, le problème philosophique s'évanouit; l'espace euclidien reste en possession indiscutée (*undisputed possession*), et le seul problème qui subsiste est une affaire de convention et de commodité mathématique. Cette opinion a été énergiquement exprimée par M. Poincaré : "Que doit on penser de cette question : La géométrie euclidienne est-elle vraie? elle n'a aucun sens". D'après lui, les axiomes géométriques sont de pures conventions : ce sont "des définitions déguisées" » [Russell 1897, p. 38-39].

Selon Russell, les mathématiciens ne se sont pas rendu compte que, au contraire de celles qui apparaissent en géométrie métrique, les coordonnées en géométrie projective ne sont pas des grandeurs spatiales mais « des signes purement conventionnels, qui servent à désigner distinctement les différents points » [1897, p. 44]²⁸. Indépendantes de toute notion de grandeur et de tout présupposé métrique, les coordonnées projectives ne peuvent servir à exprimer les propriétés métriques et encore moins à définir philosophiquement la notion de distance.

On peut certes définir mathématiquement la distance comme une fonction de ces coordonnées. Pour autant, la notion de distance peut-elle être définie arbitrairement? Russell reconnaît que l'on peut attribuer le nom de distance à toute fonction convenable des coordonnées. Mais, en introduisant cette notion, on fait réapparaître inévitablement des notions métriques et on risque donc de confondre cette nouvelle définition et la notion ordinaire de distance. L'argument de Russell revient à expliquer que pour définir de manière projective la distance, il faut déjà savoir ce qu'est une distance. Il poursuit son raisonnement en utilisant dans un

²⁸ Concernant les travaux de Klein, ce reproche peut paraître étrange. En effet, ce dernier précise à plusieurs reprises que l'on peut définir le birapport et par conséquent les coordonnées projectives comme un nombre pur (*reine Zahl*) [Klein 1871, p. 304]. Comme Russell connaît bien les travaux de Klein, on peut penser qu'en fait Russell veut dire que Klein ne tire pas les conséquences philosophiques de la présentation purement projective de la géométrie projective.

premier temps un argument purement philosophique : la distance est une relation quantitative; or, il est classique en philosophie d'affirmer que l'étude d'une relation quantitative présuppose une identité qualitative. La géométrie projective ne traite que de la qualité et donc ne saurait être suffisante pour définir la distance. C'est en ce sens que la réduction des propriétés métriques aux propriétés projectives n'est qu'apparente et purement technique, et n'a donc aucune valeur philosophique²⁹.

Nous allons suivre pas à pas le raisonnement de Russell; il est, en effet, particulièrement intéressant de comprendre sa démarche : utiliser une connaissance mathématique fine pour prouver l'incapacité des mathématiques à résoudre les questions philosophiques de l'espace et par là affirmer la nécessité de la démarche philosophique. Dans ce qui suit, Russell va implicitement restreindre son propos au cas particulier de la droite.

1) Le premier point du raisonnement de Russell est qu'il n'existe pas d'invariant projectif pour deux ou trois points; on ne peut donc pas distinguer projectivement les couples et les triplets de points. Par contre, comme il existe un invariant projectif pour quatre points, à savoir le birapport, on sait distinguer les quadruplets de points. Comme une distance doit permettre de distinguer des couples de points, il est donc nécessaire de fixer deux points.

2) De là, résulterait la « nature arbitraire et conventionnelle de la distance, telle que la conçoivent MM. Poincaré³⁰ et Klein³¹ » [Russell 1897, p. 43]; la distance ordinaire n'étant qu'un cas particulier d'une distance définie projectivement et dépendant du choix arbitraire d'un couple de points.

3) Russell pose alors la question de savoir si néanmoins cette ambiguïté ne peut être réellement levée et si la géométrie projective ne peut définir adéquatement la distance. Il soutient alors que le choix des deux points

²⁹ Poincaré arrive pour d'autres raisons liées à son point de vue psychogénétique aux mêmes conclusions que Russell. Dans son article « On the Foundations of Geometry », il souligne concernant la *Géométrie* de Staudt que la déduction de la distance à partir du birapport n'est pas satisfaisante [Poincaré 1898, p. 52–53].

³⁰ Comme on l'a vu plus haut, le point de vue conventionnaliste de Poincaré ne se fonde pas à partir de considérations sur la distance. D'autre part, Poincaré accordait une grande importance à l'expérience dans le choix des conventions et n'associait pas la notion de convention à celle d'arbitraire.

³¹ Par exemple, Klein exprime des positions assez proches de celles de Poincaré dans une note sur les géométries non-euclidiennes [Klein 1890c, p. 381–382].

nécessite de pouvoir les distinguer à l'aide d'une relation indépendante des autres points et que cette relation ne peut qu'être la distance au sens ordinaire. La définition projective de la distance présuppose logiquement la donnée d'une distance. Russell précise alors dans une note que, comme il l'avait annoncé, « il s'ensuit que la réduction des propriétés métriques aux propriétés projectives (même lorsque l'absolu est réel, comme dans le cas la géométrie hyperbolique) n'est qu'apparente et a une valeur purement technique » [*Ibid.*, p. 43]³².

La conclusion de Russell est donc que la géométrie métrique reste un domaine autonome des mathématiques, en particulier de la géométrie projective, même si elle lui est logiquement postérieure.

3.4. La géométrie projective

Le projet de Russell va être de proposer une axiomatique de la géométrie projective, puis de montrer que ces axiomes sont *a priori*, c'est-à-dire, dans sa terminologie, des conditions nécessaires de l'expérience. Dans son exposé des fondements de la géométrie projective, Russell fait référence aux traités de Cremona [1873], Klein [1890a], von Staudt [1847] et Veronese [1891]. Fidèle à son principe épistémologique de reconstruction logique, il adopte spontanément un point de vue axiomatique. Il signale à cet égard qu'exprimer un système d'axiomes de la géométrie projective est loin d'être évident car les points de vue métriques et projectifs n'ont jamais été historiquement réellement distingués³³.

Le premier problème selon Russell concerne la possibilité de distinguer les points les uns des autres et de les lier. Une telle relation doit être purement qualitative et ne pas faire appel à une quelconque idée de grandeurs. La notion naturelle de relation entre deux points est la droite.

³² L'argument de Russell n'a pas grand sens. En effet, les deux points fixes sont définis comme l'intersection de la droite définie par les deux points dont on veut évaluer la distance et l'absolu, qui est défini comme une hypersurface projective (en dimension 1, le couple de points est une hypersurface de dimension 0). La définition de la distance est donc purement projective et ne suppose pas une quelconque distance initiale. En fait, Russell semble confondre deux choses : il est vrai que le groupe projectif de la droite opère transitivement sur les couples et les triplets de points et ne distingue donc pas de classes de tels couples ou de triplets. Suivant le programme d'Erlangen, les notions de couples de points ou de triplets de points n'ont pas de propriétés projectives. Une autre chose est de choisir 2 ou 3 points de la droite projective ce qui est toujours possible sans pour autant faire référence à une quelconque métrique originelle.

³³ À l'époque où écrit Russell, ce n'est plus vrai.

Russell insiste sur le cercle vicieux inhérent à toute tentative de définir les notions de base de la géométrie : un point sera défini comme point d'intersection de deux droites et une droite ne peut être définie que par les points par où elle passe. Il est donc indifférent de commencer par la notion de point ou par celle de droite. Russell choisit la première solution. Il s'ensuit que deux points sont indiscernables de tout autre couple de points de la droite qu'ils engendrent puisque la seule relation dont nous disposons pour les distinguer est la droite qu'ils engendrent ; de même, deux couples de droites ayant même point d'intersection ne sont pas discernables. Russell précise philosophiquement cette question : l'espace est un ensemble de relations ; pour définir ces relations, il est nécessaire d'avoir précisé quels étaient les termes de ces relations. Il choisit les « points comme les termes des relations spatiales, en regardant tout ce qui n'est pas un point comme une relation entre des points » [Russell 1897, p. 165] et définit la notion de point comme étant « la plus petite chose spatiale que la Géométrie puisse considérer, c'est-à-dire la chose qui, tout en étant dans l'espace, ne contient aucun espace » [*Ibid.*, p. 165]. La ligne droite sera définie alors comme la relation entre deux points et le plan comme celle entre trois points.

Russell définit comme projective une propriété qui reste invariante par l'action des sections et projections, ces deux opérations étant définies au sens de Cremona³⁴. Les figures dérivables les unes des autres par des transformations projectives sont qualitativement semblables, ce qui se traduit à partir de la conservation du birapport. Pour cela, il est nécessaire de définir le birapport indépendamment de toutes considérations métriques. Russell définit cette notion de manière purement projective en posant que deux séries de quatre points alignés ont même birapport si « les points correspondants des deux séries se trouvent deux à deux sur quatre droites qui passent par un même point, ou lorsque les deux séries sont dans cette relation avec une troisième » [*Ibid.*, p. 124]. La définition du birapport de quatre droites est obtenue de manière analogue. Russell utilise alors la construction du quadrilatère harmonique de Staudt pour définir l'« important cas particulier connu sous le nom de proportion harmonique » [*Ibid.*, p. 125] et, par là, définir de manière purement projective la notion de

³⁴ Russell cite un long passage du traité de Cremona dans lequel sont définies les projections et les sections.

coordonnées. Il insiste sur le fait qu'affecter la valeur -1 au birapport d'un quadruplet harmonique est arbitraire, cette valeur n'étant justifiée que par des raisons de commodité lorsque l'on veut interpréter métriquement certains résultats de géométrie projective. Russell énonce alors trois axiomes qui lui paraissent suffisants pour fonder la géométrie projective. Il introduit la nécessité pour l'espace d'être de dimension finie mais reporte la démonstration de cette proposition à l'exposé de la géométrie métrique.

« I. On peut distinguer différentes parties de l'espace, mais toutes ces parties sont qualitativement semblables, et ne se distinguent que par le fait immédiat qu'elles sont situées les unes en dehors des autres.

II. L'espace est continu et divisible à l'infini ; le résultat de cette division infinie, le zéro d'étendue, s'appelle point.

III. Deux points quelconques déterminent une figure unique, appelée ligne droite ; trois points quelconques, en général, déterminent une figure unique, le plan. Quatre points quelconques déterminent une figure correspondante de trois dimensions, et il n'y a aucune raison pour que la même chose ne soit pas vraie d'un nombre quelconque de points. Mais ce processus prend fin, tôt ou tard, avec un certain nombre de points qui déterminent la totalité de l'espace. Car, s'il n'en était pas ainsi, aucun nombre de relations d'un point à une collection de points donnés ne pourrait jamais déterminer sa relation à des nouveaux points, et la Géométrie deviendrait impossible » [*Ibid.*, p. 133].

La géométrie projective étant mathématiquement fondée à ses yeux³⁵, Russell tire les conséquences philosophiques de ce travail mathématique et se propose de montrer le caractère *a priori* de ses axiomes. Pour Russell, l'importance philosophique de la géométrie projective dépasse de beaucoup son importance mathématique. En effet, il lui assigne le rôle de caractériser « toutes les figures qui, étant donnée une figure quelconque, ne peuvent se distinguer de cette figure que par le seul fait qu'elles lui sont extérieures, aussi longtemps qu'on en exclut la quantité » [*Ibid.*, p. 134], c'est-à-dire de définir une notion de comparaison spatiale qualitative. Selon Russell, l'homogénéité de l'espace, la relativité de la position et un nombre fini de dimensions sont les propriétés que doit nécessairement

³⁵ Il est clair que ces axiomes sont insuffisants. Par exemple : avec ce système d'axiomes, deux droites coplanaires ne sont pas nécessairement sécantes ! Comme nous le verrons, Poincaré pointerait un certain nombre d'insuffisances de ce système d'axiomes.

vérifier l'espace pour qu'une géométrie purement qualitative soit possible. Il désignera sous le terme de « forme d'extériorité » tout espace vérifiant ces propriétés. Russell se propose alors de déduire les axiomes de la géométrie projective des propriétés d'une forme d'extériorité³⁶.

Cette partie du raisonnement de Russell est particulièrement obscure et même assez incompréhensible. Nous ne le suivrons pas dans les méandres de sa pensée car le seul commentaire de Poincaré sera l'expression de sa totale incompréhension³⁷.

La conclusion de cette section est que la géométrie projective est *a priori* puisque déduite des caractéristiques *a priori* d'une forme d'extériorité.

3.5. Les critiques de Poincaré

Après avoir rappelé les axiomes de la géométrie projective énoncés par Russell³⁸, Poincaré [1899] pose deux questions. La première est mathématique et interroge la suffisance de ces axiomes, la seconde philosophique concerne leur statut *a priori*. Il n'insiste pas sur les deux premiers axiomes et souligne simplement que la similitude qualitative entre les différentes parties de l'espace exigée par le premier axiome concerne aussi les éléments (points, droites, plan) à l'infini.

« Il faut encore qu'« un point à l'infini » (pour parler le langage des géomètres projectifs) soit qualitativement équivalent à un point ordinaire ; l'ensemble des points à l'infini forme un « plan à l'infini » qui doit être regardé comme indiscernable d'un plan ordinaire, au point de vue qualitatif » [Poincaré 1899, p. 252].

Poincaré insiste donc sur la différence entre l'espace de la géométrie projective et celui de la géométrie « ordinaire ». Il va de la même manière critiquer la formulation du troisième axiome. Il considère que l'énoncé

³⁶ Avec ce projet de déduction transcendantale des axiomes de la géométrie, Russell est cohérent avec son intention de sauver le projet kantien.

³⁷ Le commentaire de Poincaré sur cette déduction de Russell est qu'il accepte la conclusion sans chercher à comprendre le raisonnement.

« Ensuite M. Russell cherche à démontrer que cette forme ne saurait être homogène sans être continue et divisible à l'infini. Ici je ne comprends pas le premier mot de son raisonnement, mais je puis néanmoins lui accorder, non certes que toute forme homogène doit être continue, mais que l'existence d'une forme d'extériorité constitue peut-être la condition indispensable de certains genres d'expérience » [1899, p. 254].

³⁸ La traduction des citations du livre de Russell sont dues à Couturat. Elles sont très légèrement différentes de celles de l'édition française.

« deux points déterminent une droite » est trop vague car l'appartenance des deux points à la droite et l'unicité de celle-ci ne sont pas stipulées ; il cite l'exemple de l'ellipse déterminée par la connaissance de son grand axe et de ses foyers et qui ne passe pas par ceux-ci ou celui de l'infinité des circonférences passant par deux points. Il propose de remplacer cet axiome par : « par deux points passe une droite, et une seule » [*Ibid.*, p. 253]³⁹.

Le troisième axiome de Russell pêche non seulement par le manque de précision de sa formulation mais aussi par ses oublis. En effet, il n'est pas demandé qu'un plan contienne les droites qui joignent les trois points le déterminant ; on ne peut donc déduire la proposition fondamentale selon laquelle toute droite qui a deux points dans un plan y est contenue tout entière. Enfin, avec les axiomes de Russell, on ne peut pas prouver qu'une droite et un plan possèdent nécessairement une intersection non vide. Poincaré propose une nouvelle liste d'axiomes susceptibles de fonder la géométrie projective.

« En résumé, il est nécessaire de compléter la liste des axiomes, et de modifier les énoncés en remplaçant les expressions un peu vagues et ambiguës de M. Russell par d'autres plus précises. On arrive ainsi à la liste suivante :

1) L'espace est une multiplicité (variété, *Mannigfaltigkeit*, *manifold*) continue à trois dimensions.

2) Les points de cette multiplicité, tant à distance finie qu'à distance infinie, sont qualitativement indiscernables les uns des autres.

3) Par deux points passe une droite et une seule.

4) Par trois points, non en ligne droite, passe un plan, et un seul, qui contient les droites qui joignent ces trois points deux à deux.

5) Un plan et une droite se rencontrent toujours.

De cette liste on ne peut rien retrancher » [*Ibid.*, p. 254].

Dans sa réponse, Russell [1899a] reconnaît la pertinence de la plupart de ces critiques et formule une nouvelle liste d'axiomes de la géométrie projective en insistant sur son souci de les exprimer sous forme symbolique. De fait, il propose une véritable axiomatique abstraite dont la

³⁹ La formulation de Hilbert des axiomes de la géométrie évite cette ambiguïté. Les trois premiers axiomes d'appartenance précisent que les axiomes d'appartenance « expriment un lien entre les notions de point, de droite et de plan », qu'« il existe une droite liée à deux points donnés A et B à laquelle appartiennent ces deux points » et qu'« il n'existe pas plus d'une droite à laquelle appartiennent deux points A et B » [Hilbert 1899, p. 12].

géométrie projective en dimension 3 est un modèle⁴⁰. En adoptant un point de vue abstrait pour la géométrie projective, Russell est conséquent avec son projet épistémologique : les fondements de la géométrie qualitative, ainsi exprimés abstraitement, sont présentés indépendamment de toute référence ou intuition métrique.

Russell poursuit en expliquant que la géométrie projective se déduit de ces axiomes puisque l'on peut prouver l'unicité de la construction du quadrilatère de Staudt. La démonstration n'est pas reproduite dans l'article publié par la *Revue de métaphysique et de morale*. Par contre, dans l'original anglais [Russell 1899b], Russell traduit en forme algorithmique ses axiomes et obtient une démonstration purement formelle du théorème de la division harmonique. Il précise que la notion de birapport découle de ce théorème et que l'on peut ainsi définir les coordonnées projectives d'un nombre infini de points. Mais cette méthode ne permet d'atteindre qu'une quantité dénombrable de points de la ligne.

« On peut même démontrer que la construction de Staudt ne donne pas tous les points de la ligne. En effet, elle ne donne qu'une suite dénombrable de points, tandis que l'ensemble de tous les points de la ligne (continue) est de la seconde puissance (dans le langage de M. Cantor) » [*Ibid.*, p. 699]. Il est nécessaire pour "obtenir" tous les points à partir de la construction de Staudt d'ajouter un axiome de continuité, ce que refuse Russell, car, selon lui, la continuité de l'espace n'est pas une notion projective mais au contraire est purement métrique [*Ibid.*, p. 697].

En conclusion, Russell revient sur son affirmation de l'impossibilité d'une géométrie projective à moins de trois dimensions. Techniquement, le théorème de la division harmonique proposé par Russell [1899b,c] est un corollaire immédiat des théorèmes de Desargues. Or, il est bien connu qu'une démonstration de ces théorèmes n'utilisant que des propriétés d'incidence ne peut se faire qu'en dimension supérieure ou égale à trois. Russell est bien entendu conscient de cette contrainte technique mais, selon lui, la raison profonde de la nécessité de travailler en dimension

⁴⁰ Pieri [1898 et 1899] propose aussi, à la même époque un système purement hypothético-déductif de la géométrie projective en dimension 3. Après avoir dénigré avec Couturat les travaux de Peano (lettre de Russell à Couturat datée du 9 octobre 1899), Russell exprimera son admiration pour les travaux italiens récents et en particulier pour ceux de Peano en arithmétique et de Pieri pour la géométrie projective [Russell 1901 et lettre de Russell à Couturat datée du 18 septembre 1900].

supérieure ou égale à trois est liée à celle de pouvoir définir (au sens mathématique) un objet. Ainsi, en dimension trois, une droite peut être déterminée par deux points mais aussi par deux plans et « c'est là la source de toutes les propositions purement projectives⁴¹ » [*Ibid.*, p. 697].

Poincaré ne se contente pas de critiquer les aspects mathématiques du travail de Russell. Il en discute certains aspects philosophiques. S'il admet avec Russell la nécessité d'une forme d'extériorité pour qu'une expérience soit possible et que cette forme puisse se réduire à un ensemble de relations, Poincaré n'admet pas que la relation entre deux points soit nécessairement la ligne droite.

« Mais pourquoi cette relation [entre deux points] est-elle une ligne, c'est-à-dire un ensemble d'autres points ? Cela paraît d'abord dénué de sens ; mais en y réfléchissant on peut arriver à comprendre : M. Russell a probablement voulu dire que le lieu des points qui ont avec le point A la même relation qu'un autre point B est une ligne qu'il appelle ligne droite. [...] Pourquoi est-il nécessaire que cette ligne passe par le point A ? Pourquoi le lieu des points qui ont même relation avec A que B avec A , est-il le même que le lieu des points qui ont même relation avec B que A avec B ? Pourquoi C ne pourrait-il avoir même relation avec A que B avec A sans avoir en même temps même relation avec B que A avec B , sans que A ait même relation avec C que B avec C ? » [Poincaré 1899, p. 254–255]

Dans sa réponse [1899a], Russell souligne son accord avec l'interprétation de Poincaré et qu'il considère la ligne droite comme « essentiellement une entité simple » [*Ibid.*, p. 697] et non pas comme un ensemble de points. Russell raisonne en fait dans un système formel alors que Poincaré continue de penser dans le modèle classique de la géométrie projective. Sur la question philosophique proprement dite de la nécessité des axiomes de la

⁴¹ La question de la démonstration du théorème de Desargues dans le plan était l'objet de nombreuses réflexions de la part des participants au débat sur la métageométrie et le problème de l'espace. Ainsi, elle fut abordée par Lechallas lors du Congrès international de philosophie (Paris 1900) à l'occasion d'une discussion avec Russell [*Actes du congrès international de philosophie* (Paris 1900), *Revue de métaphysique et de morale*, 8 (1900), p. 644–646]. Lechallas trouvait paradoxal que le théorème de Desargues qui exprime une propriété projective du plan ne puisse être démontré dans le cadre de la géométrie projective du plan. Il ignorait que son paradoxe avait déjà reçu une solution puisque Hilbert avait proposé dans les *Grundlagen der Geometrie* [1899] une géométrie plane non arguésienne.

géométrie projective, Russell admet ne pas avoir réellement prouvé leur nécessité et considère que c'est assez difficile.

4. QUELS SONT LES AXIOMES DE LA GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE ET QUEL EST LEUR STATUT ?

4.1. La géométrie métrique

Pour la géométrie métrique, Russell va distinguer d'une part les conditions géométriques qui rendent possible la mesure et qui doivent à peu de choses près être analogues aux axiomes *a priori* de la géométrie projective, et d'autre part les axiomes propres à la géométrie euclidienne qui sont des résultats empiriques de la mesure. Il va donc tenter de déterminer les conditions présumées par la possibilité de la mesure, autrement dit, distinguer les éléments *a priori* des éléments empiriques et les définir. La géométrie projective ne peut être « toute la science de l'espace » [Russell 1897, p. 147]. En effet, pour distinguer les espaces euclidien et non-euclidiens ou pour appliquer la géométrie à la physique, la mesure est nécessaire. Mais, selon Russell, l'élément *a priori* des deux géométries doit être le même. En effet, l'*a priori* en géométrie métrique est constitué des présuppositions qui rendent possible « la mesure spatiale, c'est-à-dire une comparaison spatiale quantitative » [*Ibid.*, p. 147]. Or, une telle comparaison quantitative présuppose une notion d'identité qualitative que l'on déduit de la géométrie projective. Les axiomes *a priori* prennent cependant une forme mathématique différente. Ainsi, l'axiome de l'homogénéité de l'espace sera remplacé par celui de libre mobilité et l'axiome de la ligne droite par celui de la distance. La part *a priori* de la géométrie métrique est constituée de ces deux axiomes et de celui des dimensions.

4.2. L'axiome de libre mobilité

Comme la géométrie métrique est la science qui traite des relations spatiales quantitatives, Russell en déduit qu'il est nécessaire d'introduire dès le début le concept de grandeur. Les axiomes d'Euclide qualifiés habituellement d'arithmétiques ont donc, pour pouvoir s'appliquer aux grandeurs spatiales, une signification spatiale⁴². Ces axiomes expriment

⁴² Dans son commentaire de l'ouvrage de Russell, Poincaré exprime son accord complet sur ce point.

des propriétés de la comparaison des grandeurs spatiales et donc « on postule, dès le début même, un critérium de l'égalité spatiale » [Russell 1897, p. 149]. Deux figures seront égales si elles sont congruentes, la coïncidence de deux figures ne dépendant pas du « chemin suivi pour les y amener » [*Ibid.*, p. 150]. Russell exprime cette exigence sous la forme de l'axiome de libre mobilité :

« Les grandeurs spatiales peuvent être déplacées de place en place sans déformation, ou, comme on peut encore l'énoncer : Les formes ne dépendent en aucune manière de la position absolue dans l'espace » [*Ibid.*, p. 150].

Russell se propose de montrer le caractère *a priori* de cet axiome en montrant que sa négation conduit à des absurdités logiques et philosophiques. Il propose deux types d'argumentation, une philosophique et une seconde qu'il qualifie de géométrique. L'argumentation philosophique revient à montrer que la négation de cet axiome conduit à admettre la non-homogénéité de l'espace et donc à une contradiction avec une des propriétés *a priori* des formes d'extériorité. La seconde argumentation peut se résumer ainsi : on ne peut vérifier expérimentalement si la métrique varie avec la position. En effet, dans ce cas, la graduation d'une règle variera en même temps que la position et on ne peut donc « ni prouver, ni infirmer la constance des formes lors d'un déplacement » [*Ibid.*, p. 152]⁴³. Russell affirme alors qu'il n'y a aucun sens à supposer que les grandeurs puissent

« M. Russell remarque ensuite fort judicieusement que les axiomes d'Euclide dits arithmétiques ne doivent pas pourtant, au point de vue de leur usage en géométrie, être considérés comme purement arithmétiques. Qu'on me permette d'insister sur ce point plus qu'il ne l'a fait lui-même » [Poincaré 1899, p. 257].

Poincaré explique alors que l'axiome « deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles » signifie que la composition des transformations est une opération interne.

« Donc la catégorie de transformations qui sert à définir l'égalité des figures doit être telle que si deux transformations α et β en font partie, il en sera de même de leur combinaison $\alpha + \beta$. C'est ce que les mathématiciens expriment en disant que cette catégorie est « un groupe ». Ainsi le sens de notre axiome en géométrie, c'est que les transformations qui servent à définir l'égalité des figures doivent former un groupe » [*Ibid.*, p. 257].

⁴³ Cet argument est classique et n'a pas grand sens si l'on admet la possibilité d'expériences purement spatiales. En effet, une des définitions de la courbure riemannienne est

$$d(x_0 + h, x_0 + k)^2 = -\frac{1}{3}R_{x_0}(h, k, h, k) + o(\text{ordre } 4)$$

Le résultat de la mesure peut donc faire apparaître les variations de la métrique. De plus, une part de la géodésie consiste à mesurer les variations de la métrique sur la

varier lors d'un mouvement. Selon Russell, cet axiome est par conséquent *a priori*.

4.3. L'axiome des distances

En géométrie projective, deux points déterminent une ligne droite; autrement dit la relation projective entre deux points est la ligne droite. En géométrie métrique, « deux points doivent déterminer une grandeur spatiale unique, la distance » [*Ibid.*, p. 162]. Russell se propose alors de montrer que l'axiome de la distance est *a priori*.

Comme deux points constituent une figure, l'axiome de libre mobilité implique qu'il existe entre eux une relation intrinsèque qui reste invariante par congruence. L'existence d'une telle relation déterminée par deux points étant assurée, il reste à déterminer les conditions nécessaires de la mesure de cette distance. Russell affirme que la possibilité de la congruence entraîne l'existence d'une courbe entre deux points. Mais, il refuse de définir la droite comme la plus courte distance entre deux points car, selon lui, la distance ne peut être mesurée par des lignes courbes. En effet, calculer la longueur d'une courbe suppose que celle-ci est divisée en arcs rectilignes infiniment petits et donc la comparaison des longueurs des différentes courbes présuppose la ligne droite. « Ainsi la ligne droite n'est pas la plus courte distance, mais simplement la distance entre deux points » [*Ibid.*, p. 166].

Le dernier point du raisonnement de Russell est de montrer que la notion de coordonnées métriques implique celle de ligne droite. Son raisonnement est en fait circulaire puisqu'il n'envisage dans le cadre de la géométrie métrique que des coordonnées ayant intrinsèquement une signification géométrique et ne pouvant être obtenues qu'à partir de la notion de distance ou en supposant implicitement la ligne droite.

4.4. L'axiome des dimensions

Toute position étant relative, celle-ci ne peut être déterminée que par

terre.

On peut voir ici que Russell n'a pas lu ou compris Riemann. En effet, ce dernier montre l'existence en tout point de coordonnées normales. Dans de telles coordonnées, la métrique s'exprime sous la forme

$$ds^2 = \sum dx_i^2 + \sum \varphi_{ij}^2$$

où les φ_{ij} sont des éléments de courbure. Donc, si l'on admet la possibilité d'expériences dans l'ordre du spatial, les résultats de la mesure peuvent faire apparaître les variations de la métrique.

un nombre fini de relations.

« Pour que la Géométrie soit possible, il faut que, une fois donné un nombre de relations suffisant pour déterminer un point de manière unique, ses relations à tout autre point puissent se déduire des relations déjà données. On obtient ainsi comme condition *a priori* de la Géométrie, logiquement indispensable à son existence, cet axiome que l'Espace doit avoir un nombre entier fini de dimensions » [*Ibid.*, p. 160].

Par contre, le fait que le nombre de dimensions soit exactement 3 est empirique. Poincaré choisira de ne pas polémiquer avec Russell sur ce point⁴⁴.

Dans sa conclusion, Russell affirme avoir cerné avec ses trois axiomes le noyau *a priori* de toute géométrie métrique. Les autres axiomes qui caractérisent une géométrie particulière ne peuvent qu'être empiriques.

« Les trois axiomes précédents [axiomes de la libre mobilité, des dimensions et de la distance], nous l'avons vu, sont nécessaires *a priori* à la Géométrie métrique. Aucun autre ne peut être nécessaire, puisque des systèmes métriques, logiquement aussi inattaquables que celui d'Euclide, et portant sur des espaces également homogènes et également relatifs, ont été construits par les Métagéomètres sans l'aide d'aucun autre axiome. Les autres axiomes de la Géométrie euclidienne (l'axiome des parallèles, l'axiome qui fixe à trois le nombre de dimensions, et l'axiome de la ligne droite sous la forme d'Euclide : deux lignes droites ne peuvent pas enfermer un espace) ne sont pas essentiels à la possibilité de la Géométrie métrique, c'est-à-dire ne peuvent pas se déduire du fait qu'une science des grandeurs spatiales est possible. On doit plutôt y voir des lois empiriques obtenues, comme les lois empiriques des autres sciences, par l'étude positive de l'objet donné, qui est, dans ce cas, l'espace de notre expérience » [Russell 1897, p. 173].

4.5. La distance et la mesure

Poincaré admet sans restriction qu'un axiome de libre mobilité est nécessaire à la notion de mesure quantitative. Par contre, il exprime

⁴⁴ « Je ne chicanerai pas non plus sur le nombre de dimensions » [Poincaré 1899, p. 254].

Dans sa réponse à Russell, Poincaré réaffirme nettement son opinion sur cette question.

« Je considère l'axiome des trois dimensions comme conventionnel au même titre que ceux d'Euclide; mais j'ai laissé cette question de côté provisoirement afin de circonscrire le terrain de la discussion » [Poincaré 1900, p. 73].

quelques réserves sur la forme de l'énoncé de Russell.

« Que signifient les mots sans distorsion⁴⁵ ? La forme (*shape*) est-elle quelque chose que nous connaissons d'avance, ou est-ce, par définition, ce qui n'est pas altéré par les mouvements envisagés ?

Votre axiome signifie-t-il :

Pour que la mesure soit possible, il faut que les figures soient susceptibles de certains mouvements, et qu'il y ait une certaine chose qui ne sera pas altérée par ces mouvements et que nous appellerons la forme (*shape*) ?

Ou bien veut-il dire :

Vous savez bien ce que c'est que la forme ; eh bien ! pour que la mesure soit possible, il faut que les figures puissent subir certains mouvements qui n'altéreront pas cette forme ? » [Poincaré 1899, p. 259].

Poincaré considère que seule la première version, que l'on pourrait qualifier avec Martin Carrier [1994] de métrogénétique, est correcte et *a priori*. Il précise que cet axiome ne donne en revanche aucune indication sur l'ordre du groupe des transformations et que la condition de transitivité n'est pas nécessairement impliquée.

L'expression mathématique correcte du principe de libre mobilité selon Poincaré est l'affirmation de l'existence d'un groupe de transformations qui conserve certaines propriétés des figures, l'ensemble de ces propriétés constituant ce qui est appelé la forme. Par contre, ce principe ne nous apprend rien sur les propriétés du groupe. Il donne l'exemple du groupe à trois paramètres des translations avec lequel la comparaison des longueurs, des surfaces ou des angles n'est plus possible en général mais avec lequel « la mesure des volumes reste encore possible » [1899, p. 260]⁴⁶. Ce groupe d'ordre 3 (alors que les groupes de transformations associés aux géométries euclidienne et non-euclidiennes de l'espace sont d'ordre 6) permet donc, en un certain sens, une mesure spatiale. L'ordre du groupe n'est donc pas une condition *a priori*. Le choix du groupe ne pourra se faire que guidé par l'expérience et aucune des propriétés spécifiques du groupe choisi n'est

⁴⁵ Poincaré traduit le mot anglais "*distortion*" utilisé par Russell dans l'énoncé de son axiome de libre mobilité par "*distorsion*". Cadenat préférera employer à juste raison "*déformation*".

⁴⁶ La propriété invoquée par Poincaré est mathématiquement exacte. On ne peut pas associer canoniquement de métrique au groupe des translations de \mathbb{R}^3 ; par contre, on peut canoniquement construire une mesure (la mesure de Haar du groupe des translations est la mesure de Lebesgue).

a priori.

L'affirmation de Russell selon laquelle deux figures ne peuvent être égales, au sens de la géométrie métrique, sans être qualitativement équivalentes au sens de la géométrie projective ne satisfait pas non plus Poincaré; il considère l'hypothèse selon laquelle le groupe métrique est contenu dans le groupe projectif comme la plus commode mais n'en admet pas la nécessité.

Poincaré n'est pas non plus convaincu par l'axiome de la distance de Russell. En premier lieu, il refuse de lier la propriété projective de la ligne droite et celle métrique de la distance. Il fonde sa critique sur la distinction entre les notions de grandeur non mesurable (*quantity*) et de grandeur mesurable (*magnitude*). Comparer des distances considérées comme grandeurs non mesurables consiste à déterminer laquelle est la plus grande ce qui ne nécessite pas de faire intervenir la notion de ligne. Poincaré cite l'exemple de la "géométrie du compas" « où l'on ne se sert pas de la règle, où l'on parle de cercles et jamais de droites » [Poincaré 1899, p. 264]. Par contre, comparer des distances considérées comme des grandeurs mesurables consiste à évaluer dans quel rapport numérique l'une est plus grande que l'autre, auquel cas la considération des droites devient, aux yeux de Poincaré, nécessaire.

Avec les arguments précédents, Poincaré conteste la thèse de Russell selon laquelle la part *a priori* de la géométrie métrique réside dans les liens qu'elle entretient avec la géométrie projective. Cependant, ses principales objections vont concerner la définition de la distance. Il définit la notion de distance comme une relation entre couples de points et pose la question du caractère *a priori* de la notion de distance et celle de son unicité. Le point essentiel de son raisonnement concerne la possibilité de définir la distance dans le cadre de la géométrie absolue. Pour pouvoir parler de l'axiome de la distance, il faut avoir défini cette notion. Autrement, l'axiome n'est, comme Poincaré l'affirme, qu'une définition déguisée.

« En un mot, pour qu'une propriété soit un axiome ou un théorème, il faut que l'objet qui possède cette propriété ait été complètement défini indépendamment de cette propriété. Ainsi, pour avoir le droit de dire que les soi-disant axiomes relatifs à la distance ne sont pas une définition déguisée de cette distance, il faudrait définir la distance autrement que par ces axiomes. Mais cette définition, où est-elle ? » [Poincaré 1899, p. 274].

Dans la conclusion de son article, Poincaré considérera que la question de la « définition de la distance et de la ligne droite, indépendante du postulat [d'Euclide], et exempte [...] de cercle vicieux » [*Ibid.*, p. 279] est une des plus importantes puisque c'est une de celles auxquelles il demande à Russell de répondre en priorité.

4.6. La notion de définition

La réponse de Russell à la question de Poincaré sur la définition de la distance est qu'il est impossible de définir une notion fondamentale; il souligne à ce sujet une erreur fréquemment commise par les mathématiciens concernant la question des définitions. Dans sa lettre adressée à Couturat le 22 juin 1899, il exprime déjà son opinion sur la demande de Poincaré.

« Mais ce qui est plus difficile, c'est de donner une bonne théorie de la distance. Il est absurde d'en demander une définition : c'est comme si on voulait demander comment appeler les lettres de l'alphabet. Mais je voudrais cependant montrer sa place dans le système des idées géométriques, et c'est ceci qui me donne à penser » [correspondance de Couturat et Russell].

Le 19 mai, dans une lettre adressée au même Couturat, Russell évoque les cercles vicieux commis par Poincaré quand il définit la distance en affirmant que c'est une relation entre couples de points. Il reproche à Poincaré de confondre systématiquement les notions de distance et de mesure de celle-ci⁴⁷. En effet, concevoir la distance comme une relation entre deux couples de points nécessite de définir la relation $AB = CD$; Russell considère alors que Poincaré se propose de définir la distance comme une relation entre distances, ce qui est évidemment circulaire. Russell affirme que la distance existe avant la mesure et ne dépend pas de celle-ci.

« On semble croire que, puisque la mesure est nécessaire pour découvrir l'égalité et l'inégalité, il ne peut pas exister d'égalité ou d'inégalité sans la mesure. Or la vraie conséquence est exactement contraire. Ce qu'on peut découvrir au moyen d'une opération doit exister indépendamment de cette opération : l'Amérique existait avant Christophe Colomb, et

⁴⁷ Russell reconnaît que son exposé de la congruence n'est pas exempt du même reproche.

deux quantités de même espèce doivent être égales ou inégales avant d'être mesurées. Une méthode quelconque de mensuration est bonne ou mauvaise, suivant qu'elle fournit un résultat vrai ou faux. M. Poincaré, au contraire, estime que la mensuration crée l'égalité et l'inégalité. Il s'ensuit, comme il le soutient que toutes les méthodes de mensuration sont également bonnes » [Russell 1899a, p. 687–688].

Le principal point de l'argumentation de Russell est la différence entre une définition mathématique qui consiste à exhiber une relation quelconque n'appartenant qu'à l'objet à définir et une définition philosophique. La philosophie est plus exigeante mais il lui est impossible de définir les termes simples ou fondamentaux.

« Mais ces sortes de définitions [les définitions des mathématiciens] ne sont pas des définitions au sens propre et philosophique du mot. Philosophiquement, un terme est défini quand on en connaît le sens, et son sens ne peut consister en relations avec d'autres termes. On admettra bien qu'un terme ne peut être utilement employé que s'il signifie quelque chose. Sa signification peut être complexe ou simple. Autrement dit, ou bien elle est composée d'autres significations, ou bien elle est elle-même un de ces éléments ultimes qui constituent les autres significations. Dans le premier cas, on définit philosophiquement le terme en énumérant ses éléments simples. Mais lorsqu'il est lui-même simple, aucune définition philosophique n'est possible. Le terme peut encore avoir une relation particulière avec quelque autre terme, et peut encore avoir une définition mathématique. Mais il ne peut pas signifier cette relation, et par suite la définition mathématique devient un théorème qui est vrai ou faux, et qui n'est pas le moins du monde arbitraire » [*Ibid.*, p. 700].

Russell pose une différence très intéressante entre comprendre un terme et le définir. Il montre que si l'on n'adopte pas son point de vue et que l'on refuse d'admettre l'existence de termes simples indéfinissables, on est conduit à une régression infinie qui interdit de connaître le sens de quoi que ce soit.

« Donc, si l'on ne peut comprendre quelques termes sans définition, on ne pourra jamais comprendre aucun terme au moyen d'une définition. Toutes ces vérités sont si évidentes que je rougirais de les rappeler, si les mathématiciens ne persistaient à les méconnaître » [*Ibid.*, p. 701].

Il considère que la distance et la ligne droite sont des termes dont

la signification est simple et donc indéfinissable. Nous avons vu qu'il fondait sur l'irréductibilité de la notion de distance sa critique du point de vue de Cayley et Klein. Pour pouvoir définir projectivement la notion de distance, il est nécessaire selon Russell de distinguer un couple de points particulier et donc supposer la distance au sens ordinaire puisque la géométrie projective ne peut le faire. Il s'ensuit que toute proposition où interviennent les notions de ligne droite ou de distance est un axiome ou un théorème mais non une pure définition du concept de distance. En affirmant que la distance est une notion primitive, Russell répond à la question que posait Poincaré concernant la forme (§ 4.5) en choisissant la deuxième interprétation.

Russell poursuit son raisonnement en insistant sur la différence entre précisions philosophique et mathématique.

« Ce qui importe en Mathématiques, ce sont les relations entre les termes ; lorsque deux séries de termes ont les mêmes relations mutuelles, elles sont équivalentes aux yeux du mathématicien. Il ne s'inquiète pas de savoir ce que les termes sont en eux-mêmes ; seules leurs relations l'intéressent. En philosophie, au contraire, c'est essentiellement les termes qui importent. Il faut se demander : Quel est le sens de chacun de ces termes ? et non plus : Quelles sont ses relations avec les autres termes ? Toutes les fois qu'un terme est analysable, la philosophie doit en entreprendre l'analyse. Or c'est là une tâche à laquelle le langage mathématique est en général très mal approprié, et où l'on ne peut atteindre la précision qu'avec grande difficulté. Et même lorsque l'on a atteint la précision, le sens des termes fondamentaux ne peut pas être défini, mais seulement suggéré. Si la suggestion n'évoque pas chez le lecteur l'idée juste, il n'y a rien de fait. Aussi la précision philosophique est-elle tout autre chose que la précision mathématique. Elle est plus difficile à atteindre, et bien plus difficile à transmettre » [Russell 1899a, p. 702–703].

Poincaré répond qu'il est évident que l'on ne peut pas tout définir mais que la distance fait partie des notions que l'on peut définir. Par exemple, la définition de la distance euclidienne est le postulat d'Euclide. Il précise son point de vue en répondant à l'objection supposée de Russell selon laquelle un tel énoncé ne peut qu'être un axiome déguisé.

« On a souvent remarqué que toute définition implique l'existence de l'objet défini. Si donc je définis la distance par le postulat d'Euclide,

la proposition que j'énonce peut se décomposer en deux parties : il y a quelque chose qui satisfait au postulatum d'Euclide, et ce quelque chose je l'appelle distance.

La première partie est un théorème ou un axiome; la seconde n'est qu'une définition de mots. Cela, je le reconnais.

Vous triomphez et pensez que je suis ramené par un détour à admettre que le postulatum d'Euclide est vrai. Mais prenez garde, il y a aussi quelque chose qui satisfait au postulatum de Lobatcheffski, et c'est ce quelque chose que les géomètres non-euclidiens appelleraient distance. À ce compte le postulatum de Lobatcheffski, que vous jugez faux, serait vrai au même titre que le postulatum d'Euclide » [Poincaré 1900, p. 74].

Le désaccord philosophique est à ce stade total. Pour Russell, la distance, vue comme une relation entre deux points, est une donnée première donc indéfinissable de la géométrie. Il est amené à cette position par son objectif philosophique qui est de prouver le caractère *a priori* de certains axiomes et le caractère empirique des autres. L'existence de la distance est une condition *a priori* de toute géométrie, c'est-à-dire, pour Russell, une condition nécessaire à la possibilité de la mesure. La distance euclidienne s'impose à nous empiriquement. Mais, les thèses de Russell sont directement influencées par ses conceptions mathématiques. En privilégiant la présentation par les modèles projectifs des géométries euclidienne et non-euclidiennes⁴⁸, il est amené à considérer exclusivement des conceptions métriques.

Poincaré, qui privilégie le point de vue des groupes de transformations, dans lequel Russell ne voit qu'un simple changement de formulation dont on n'a rien à espérer philosophiquement, considère la distance comme essentiellement un invariant de ce groupe dont la donnée est équivalente à celle du groupe. Le choix de la distance résulte donc d'une convention

⁴⁸ Les travaux de Cayley et Klein sur cette question sont fondés sur une expression de la distance à partir du birapport et sont donc associés au point de vue métrique sur la question de la géométrie. Ainsi, dans le programme d'Erlangen, Klein n'aborde pas la question des géométries non-euclidiennes (sauf dans la note 5). Par contre, à la suite des travaux de Lie, Poincaré résume à plusieurs reprises les résultats concernant les modèles projectifs comme résultant de l'inclusion des groupes euclidien ou non-euclidiens dans le groupe projectif. Il est clair que ce point de vue est bien connu parmi les géomètres; néanmoins, la présentation des modèles projectifs généralement adoptée par ceux-ci est le point de vue métrique (par exemple, on peut citer le manuel de Darboux, *Principes de géométrie analytique* [1917]).

au même titre que celui du groupe.

Poincaré nie que la notion de distance soit immédiate ou primitive. Il ne se satisfait pas de l'argumentation de Russell et des kantien selon laquelle nous avons une intuition directe de la distance, « c'est-à-dire de je ne sais quoi qui leur apparaît comme éclairé d'une vive lumière » [Poincaré 1900, p. 75]. Poincaré n'adopte pas le système kantien mais le considère comme cohérent ; par contre, il pense déceler une certaine incohérence dans le point de vue de Russell puisque l'intuition chez Russell est insuffisante et nécessite un recours à l'expérience.

5. UNE EXPÉRIENCE CRUCIALE SUR 'LA VÉRITÉ OU LA FAUSSETÉ DE LA GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE' EST-ELLE POSSIBLE ?

Russell [1898] avait déjà répondu à cette question dans un article intitulé « Les axiomes propres à Euclide sont-ils empiriques ? ». Cet article avait été rédigé en réponse à certaines interrogations de Couturat [1898]. Russell considère que pour discuter de la question de savoir si les axiomes proprement euclidiens sont susceptibles d'être vérifiés ou contredits empiriquement, il faut rejeter le conventionnalisme géométrique de Poincaré. Il suppose donc que ces axiomes sont vrais ou faux et la véritable question est « de connaître la nature des raisons qu'on a de les accepter » [Russell 1898, p. 760]. Cette question revêt selon lui deux aspects : le problème de la possibilité d'une expérience cruciale sur la nature de la géométrie de l'espace est purement philosophique, celui de la précision d'une telle expérience est subordonné à une réponse positive à la première question et est purement scientifique. On ne peut donc, selon Russell, argumenter contre la possibilité d'expérimenter de manière cruciale sur la nature de l'espace en invoquant le manque de précision des expériences proposées. Même si elles ne fournissent que des résultats grossiers, elles sont suffisantes pour répondre positivement à la question d'une telle possibilité.

Russell répond affirmativement à la première question. Il propose de prendre un disque de taille ordinaire, de lui faire accomplir le long d'une ligne droite une révolution complète et de mesurer ainsi (même grossièrement) la longueur de la circonférence. Avec cette expérience qui ne suppose rien d'autre que la possibilité de la mesure et qui n'utilise donc

que les seuls axiomes *a priori*, Russell prétend pouvoir obtenir un résultat empirique relatif à la nature de notre espace.

Les critiques de Poincaré reposent sur ses thèses concernant le statut de l'expérience géométrique. On peut distinguer deux moments dans son argumentation; dans un premier temps, il affirme l'impossibilité d'expérimenter sur les objets géométriques. Il dénie donc tout caractère crucial pour la géométrie à toutes les expériences concernant les rayons optiques ou les solides réels. Ce sont à la fois des expériences d'optique ou de mécanique et des expériences de géométrie. Le second moment de l'argumentation de Poincaré concerne l'impossibilité de trouver une propriété «qui puisse être un critère absolu permettant de reconnaître la ligne droite et de la distinguer de toute autre ligne» [Poincaré 1899, p. 266]. Le point est que l'on ne peut tester directement une propriété isolée. Toute propriété et toute expérience sont conçues et interprétées dans un contexte théorique, toute expérience porte donc autant sur la propriété qu'elle est censée tester que sur le contexte théorique.

«[...] qu'on me cite une expérience concrète qui puisse être interprétée dans le système euclidien et qui ne puisse pas l'être dans le système lobatcheffskien. Comme je sais bien que ce défi ne sera jamais relevé, je puis conclure : Aucune expérience ne sera jamais en contradiction avec le postulat d'Euclide; en revanche aucune expérience ne sera jamais en contradiction avec le postulat de Lobatcheffsky» [*Ibid.*, p. 267].

Dans la discussion, Russell concède à Poincaré qu'une seule expérience ne peut être cruciale. Mais, au moyen de plusieurs expériences, on peut réussir à obtenir des conclusions qui, si elles n'ont pas une certitude absolue, ont «un très haut degré de probabilité» [Russell 1899a, p. 692]. En effet, il reconnaît qu'une expérience isolée concerne à la fois une hypothèse géométrique et d'autres hypothèses concernant la nature des corps. Mais en effectuant un grand nombre d'expériences analogues, on peut selon Russell arriver à une quasi certitude concernant autant les hypothèses de nature géométrique que celles de nature physique.

Poincaré ne se gêna pas pour stigmatiser la faiblesse de ce dernier argument. Il le fait avec verve.

«Connaître la hauteur du grand mât, cela ne suffit pas pour calculer l'âge du capitaine. Quand vous aurez mesuré tous les morceaux de bois du navire, vous aurez beaucoup d'équations, mais vous ne connaîtrez pas

mieux cet âge. Toutes vos mesures ayant porté sur vos morceaux de bois ne peuvent rien vous révéler que ce qui concerne ces morceaux de bois. De même vos expériences, quelques nombreuses qu'elles soient, n'ayant porté que sur les rapports des corps entre eux, ne vous révéleront rien sur les rapports mutuels des diverses parties de l'espace » [Poincaré 1900, p. 79]⁴⁹.

Enfin, Poincaré n'accorde pas à Russell la moindre concession sur la notion de distance absolue. Pour ce dernier, certains jugements d'existence concernant l'espace seraient vrais de manière évidente et absolue : on ne peut nier que des jugements comme la distance de Londres à Paris est plus grande qu'un mètre, le triangle dont les sommets sont Paris, Greenwich et New York a une aire supérieure à un millimètre carré ou il existe des corps dont le volume dépasse un millimètre cube sont des jugements d'existence vrai ou faux. Une fois admise l'existence de tels jugements, concevoir des expériences cruciales sur la vérité ou la fausseté de la géométrie euclidienne n'est plus qu'une question de précision. Dans sa réponse, Poincaré refusera d'accorder à Russell que la distance de Paris à Londres est plus grande qu'un mètre. Il ne peut le faire car, comme il le dit, accorder cela c'est tout accorder.

« Tout ce qu'on peut dire c'est ceci : prétendre que cette distance est égale à un mètre, cela n'a pas le sens commun. C'est-à-dire que, dans toutes les circonstances de la vie, on devra se rappeler qu'il est beaucoup plus difficile d'aller de Paris à Londres que de parcourir un mètre, et se comporter en conséquence. [...] Mais que la distance de Paris à Londres soit plus grande qu'un mètre d'une façon absolue et indépendamment de toute méthode de mensuration, cela n'est ni vrai, ni faux; je trouve que cela ne veut rien dire » [*Ibid.*, p. 80–81]. S'il n'accorde aucun rôle à l'expérience du point de vue épistémologique, Poincaré insiste sur son importance psychologique dans la genèse de la géométrie. « La géométrie n'est pas un ensemble de lois expérimentales tirées de l'observation des corps solides; mais cette observation a été pour nous l'occasion de créer la géométrie. Seulement cette occasion était nécessaire » [Poincaré 1899, p. 276].

⁴⁹ Poincaré reprendra ce passage dans le chapitre 5 de *La science et l'hypothèse* [1902a, p. 101].

CONCLUSION

La polémique cesse donc avec le deuxième article de Poincaré [1900]. Elle a un dernier soubresaut avec le compte rendu que fait Russell [1905] de *La science et l'hypothèse* dans lequel il critique assez vivement tous les chapitres du livre de Poincaré. Concernant la seconde partie qui traite de la géométrie et de l'espace, Russell rappelle les thèses essentielles du conventionnalisme géométrique et se contente d'indiquer que puisque « nous percevons les corps comme constitués de parties plus ou moins contiguës [...], la matière est organisée, par la perception, en un ordre spatial qui diffère à coup sûr de certains ordres possibles ». Ces choix nous sont imposés par l'expérience et ne peuvent selon Russell être conventionnels. Dans sa réponse [1906a], Poincaré voit dans l'utilisation par Russell du mot « perception » l'origine de leur désaccord. Il rappelle leur discussion sur la géométrie et constate que Russell « persiste dans son opinion » comme il persiste dans la sienne. Poincaré et Russell sont bien d'accord qu'ils ont épuisé le thème de la géométrie et de l'espace et que polémiquer à ce sujet ne peut être d'un quelconque intérêt. Ils viennent de découvrir que leurs opinions divergent au moins aussi radicalement sur la question de l'induction mathématique et la question des fondements des mathématiques. Poincaré [1906b] annonce dans sa réponse un article sur ce sujet à paraître dans la *Revue de métaphysique et de morale*⁵⁰.

Du point de vue de l'histoire des mathématiques, cette polémique sur la géométrie est importante car les positions philosophiques défendues par les deux protagonistes traduisent des évolutions importantes d'un point de vue interne aux mathématiques. Le conventionnalisme géométrique de Poincaré traduit philosophiquement le complet dégagement de la géométrie des questions de l'espace. Le long processus initié par l'émergence des géométries non euclidiennes débouchent sur l'éviction du champ disciplinaire des mathématiques des questions relatives à l'espace perceptible ou physique. La géométrie ne peut plus être considérée comme une science expérimentale, ainsi que Gauss l'envisageait, ni être soumise au point de vue euclidien comme le soutenaient les kantien. Ce mouvement devait se traduire philosophiquement ; le conventionnalisme géométrique défendu

⁵⁰ Pour plus de précisions sur la deuxième polémique entre Poincaré et Russell, on peut consulter les ouvrages de G. Heinzmann sur la question [Heinzmann 1985 et 1986].

permet de lever la dernière objection : celle de l'évidence de la géométrie euclidienne. En renvoyant cette question à la notion de commodité, Poincaré l'évacue du champ des mathématiques et des préoccupations des mathématiciens. Ainsi, E. Borel [1922], dans *L'espace et le temps* attribue à Poincaré le mérite d'avoir définitivement fondé la part abstraite de la géométrie :

« La géométrie est, en effet, à la fois une science expérimentale et une science abstraite; [...] la portée et les limites de la science abstraite ont été définitivement fixées par la critique de Poincaré » [Borel 1922, p. 5].

La notion d'expérience est dans le même temps renvoyée dans le champ de la physique :

« Mais y a-t-il une géométrie expérimentale ? En fait, tout le monde est d'accord pour penser que ce serait perdre son temps que de chercher à vérifier par l'expérience l'exactitude des relations géométriques, à moins que l'on ne considère cette vérification comme une expérience de physique » [*Ibid.*, p. 11].

Peu de mathématiciens traiteront de ces questions après 1910. Par contre, nombreux seront ceux qui aborderont d'un point de vue philosophique les problèmes de fondements. La question de l'espace se déplacera et sera abordée par les théoriciens (mathématiciens, physiciens et philosophes) à l'occasion de l'apparition des théories de la relativité.

Remerciements

Je tiens à remercier les rapporteurs, dont les remarques, critiques et suggestions ont permis de remanier une première version, puis une seconde de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

BOREL (Émile)

[1922] *L'espace et le temps*, Paris : Alcan, 1922.

CARRIER (Martin)

[1994] Geometric Facts and Geometric Theory : Helmholtz and 20th Century Philosophy of Physical Geometry, dans [Krüger 1994], p. 276–291.

COUTURAT (Louis)

[1896] Études sur l'espace et le temps, revue critique de "Étude sur l'espace et le temps de G. Lechalas", *Revue de métaphysique et de morale*, 4 (1896), p. 646–669.

[1898] Essai sur les fondements de la géométrie, revue critique de "An Essay on the Foundations of Geometry de B. Russell", *Revue de métaphysique et de morale*, 6 (1898), p. 354–380.

- [1899] Recension de l'ouvrage de B. Russell, "An Essay on the Foundations of Geometry", *Bulletin des sciences mathématiques*, 2^e série, 23 (1899), p. 54–62.
- COXETER (H.S.M.)
- [1942] *Non-Euclidian Geometry*, Toronto : The University of Toronto Press, 1942; cité d'après la 5^e éd. 1965.
- CREMONA (Luigi)
- [1873] *Elementi di geometria proiettiva*, Turin, 1873.
- DARBOUX (Gaston)
- [1917] *Principes de géométrie analytique*, Paris : Gauthier-Villars, 1917.
- EFIMOV (Nikolai)
- [1981] *Géométrie supérieure*, Moscou : Éditions Mir, 1981.
- ENRIQUES (Federigo)
- [1912] Les principes de la géométrie, *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, III, 1 (1912), p. 1–151.
- FREUDENTHAL (Hans)
- [1964] Lie Groups in the Foundations of Geometry, *Advances in Mathematics*, 1 (1964), p. 145–190.
- GIEDYMIN (Jerzy)
- [1977] On the Origin and Significance of Poincaré's Conventionalism, *Studies in History of Science*, 8 (1977), p. 271–301.
- [1978] Radical Conventionalism, its Background and Evolution : Poincaré, Le Roy, Adjukiewicz, dans Giedymin (J.), éd., Adjukiewicz (K.), *The Scientific World-Perspective and other Essays 1931–1963*, Dordrecht/Boston : D. Reidel, 1978, p. XIX-LIII.
- [1982] *Science and Convention. Essays on Henri Poincaré's Philosophy of Science and the Conventionalist Tradition*, Oxford/New York : Pergamon Press, 1982.
- [1991] Geometrical and Physical Conventionalism of Henri Poincaré in Epistemological Formulation, *Studies in History and Philosophy of Science*, 22 (1991), p. 1–22.
- [1992] Conventionalism, the Pluralist Conception of Theories and the Nature of Interpretation, *Studies in History of Science*, 23 (1992), p. 423–443.
- GREFFE (Jean-Louis), HEINZMANN (Gerhard) & LORENZ (Kuno), éd.
- [1996] *Henri Poincaré : science et philosophie*, Paris/Berlin : Blanchard/Akademie Verlag, 1996.
- GRÜNBAUM (Adolf)
- [1973] *Philosophical Problems of Space and Time*, 1^e éd. 1963; 2^e éd. augmentée, Boston Studies in Philosophy of Science, XII, Dordrecht/Boston : D. Reidel Publishing Company, 1973.
- [1977] Absolute and Relational Theories, dans Earman (J.), Stachel (J.), éd., *Foundations of Space-Time Theories, Minnesota Studies in the Philosophy of the Foundations of Science*, 8, University of Minnesota Press, 1977, p. 303–373.
- [1994] Energy Conservation and Theological Misinterpretation of Current Physical Cosmology, in [Greffe-Heinzmann-Lorenz 1996], p. 209–230.

HEINZMANN (Gerhard)

- [1985] *Entre intuition et analyse, Poincaré et le concept de prédictivité*, Paris : Blanchard, 1985.
- [1986] *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano, textes de la discussion (1906-1912) sur les fondements des mathématiques : des antinomies à la prédictivité*, Paris : Blanchard, 1906.
- [1995] *Zwischen Objektkonstruktion und Strukturanalyse*, Göttingen : Vandenhoeck & Ruprecht, 1995.

HEINZMANN (Gerhard) & NABONNAND (Philippe)

- [à paraître] *Poincaré : The Genesis of Geometry*.

HELMHOLTZ (Hermann von)

- [Werke] *Wissenschaftliche Abhandlungen von Hermann Helmholtz*, I–III, Leipzig : Barth, 1883.
- [1867] *Handbuch der Physiologischen Optik*, Leipzig : Leopold Voss, 1867; 2^e éd., 1886–1896; 3^e éd., 1909–1911; trad. fr. E. Javal et N. Th. Klein, Paris : Masson, 1867.
- [1868a] Über die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie, *Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg*, 4 (1868), p. 197–202; *Werke* II, p. 610–617; [Helmholtz 1987], p. 108–112; trad. fr. par J. Houël, Sur les faits qui servent de base à la géométrie, *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 5 (1867–1868), p. 372–378.
- [1868b] Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen, *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, (1868), p. 193–221; *Werke* II, p. 618–639; cité d'après la trad. angl. de M. Lowe dans [Hertz-Schlick 1977], p. 39–58.
- [1869] Ueber den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze, *Vorträge und Reden*, 2, p. 1–32; [Helmholtz 1987], p. 113–132; trad. angl. de M. Lowe dans [Hertz-Schlick 1977], p. 1–38; cité d'après la trad. fr., *La revue scientifique de la France et de l'Étranger*, 51 (1877), p. 1196–1206.
- [1878] Die Tatsachen in der Wahrnehmung, Rede zur Stiftungsfeier der Berliner Universität am 3 August 1878; [Helmholtz 1987], p. 172–185.
- [1987] *Abhandlungen zur Philosophie und Geometrie*, herausgegeben und eingeleitet von S. Gehlhaar, Cuxhaven : Junghans-Verlag, 1987.

HERTZ (Paul) & SCHLICK (Moritz)

- [Hertz-Schlick 1977] *Hermann von Helmholtz, Epistemological Writings*, trad. angl. par M. Lowe de Hermann von Helmholtz, Schriften zur Erkenntnistheorie (Berlin : Springer, 1921), Dordrecht-Boston : Reidel, 1977.

HILBERT (David)

- [1899] *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig : Teubner, 1899; trad. fr. de L. Laugel, *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 17 (1900), p. 103–209; trad. fr. commentée P. Rossier, Paris : Dunod, 1971.

HYLTON (Peter)

- [1990] *Russell, Idealism and the Emergence of Analytic Philosophy*, Oxford : Clarendon Press, 1990.

JOHNSON (Dale M.)

- [1981] The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology, Part II, *Archive for History of Exact Science*, 25 (1981), p. 85–267

JORDAN (Camille)

- [1868-1869] Mémoire sur les groupes de mouvements, *Annali di matematica*, 2 (1868–1869), p. 167–215; p. 322–345.

- KILLING (Wilhelm)
 [1885] *Die nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung*, Leipzig : Teubner, 1885.
- KLEIN (Felix)
 [Werke] *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Berlin : Springer (1921–1923), I–III.
 [1871] Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, *Mathematische Annalen*, 4 (1871); cité d'après *Werke* 1, p. 254–305.
 [1890a] *Nicht-Euklidische Geometrie I*, Vorlesung von F. Klein gehalten während des Wintersemesters 1889–1890, Göttingen, 1892.
 [1890b] *Nicht-Euklidische Geometrie II*, Vorlesung von F. Klein gehalten während des Sommersemesters 1890, Göttingen, 1892.
 [1890c] Zur Nicht-Euklidischen Geometrie, *Mathematische Annalen*, 37 (1890), p. 544–572; *Werke* I, p. 353–383.
- KRÜGER (Lorenz), éd.
 [1994] *Universalgenie Helmholtz, Rückblick nach 100 Jahren*, Berlin : Akademie Verlag, 1994.
- LECHALAS (Georges)
 [1901] Un paradoxe géométrique, *Revue de métaphysique et de morale*, 9 (1901), p. 361–367.
- LIE (Sophus)
 [Werke] *Gesammelte Abhandlungen*, Leipzig/Oslo : Teubner/Aschehoug & Co, 1935, t. I–VII.
 [1890a] Über die Grundlagen der Geometrie (I), *Berichte über die Verhandlungen der königlich-sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, (1890), p. 284–321; *Werke* II, 1^e partie, p. 380–413.
 [1890b] Über die Grundlagen der Geometrie (II), *Berichte über die Verhandlungen der königlich-sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, (1890), p. 355–418; *Werke* II, 1^e partie, p. 414–468.
 [1892] Lettres de Lie à Poincaré, *Cahiers du Séminaire d'histoire des mathématiques*, 10 (1989), p. 151–163, 165–177 (trad. fr. de J. Peiffer).
- LIE (Sophus) & ENGEL (Friedrich)
 [1893] *Theorie der Transformationsgruppen III*, Leipzig : Teubner, 1893.
- NABONNAND (Philippe)
 [2000] La genèse psychophysiologique de la géométrie selon Poincaré, *Histoires de Géométries – Textes du séminaire de l'année 2000*, Série “Documents de travail”, Paris : Maison des Sciences de l'Homme, 2001, p. 12–28.
- PIERI (Mario)
 [1898] Nuova metodo di svolgere deduttivamente la geometria proiettiva, *Rendiconti Istituto Lombardo* (2), 31 (1898), p. 780–798.
 [1899] Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo, *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino* (2), 48 (1899), p. 1–62.
- POINCARÉ (Henri)
 [Œuvres] *Œuvres de Henri Poincaré*, t. 1–11, Paris : Gauthier-Villars, 1916–1956.
 [1887] Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 15 (1886–1887), p. 203–216; *Œuvres* 11, p. 79–90.
 [1891] Les géométries non-euclidiennes, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 1891, p. 769–774.
 [1892] Lettre de H. Poincaré à M. Mouret, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 1892, p. 74–75.

- [1893] Sur le continu mathématique, *Revue de métaphysique et de morale*, 1 (1893), p. 26–34.
- [1894] Sur la nature du raisonnement mathématique, *Revue de métaphysique et de morale*, 2 (1894), p. 371–384.
- [1895] L'espace et la géométrie, *Revue de métaphysique et de morale*, 3 (1895), p. 630–646.
- [1897] Réponse à quelques critiques, *Revue de métaphysique et de morale*, 5 (1897), p. 59–70.
- [1898] On the Foundations of Geometry, *The Monist*, (9) 1 (1899), p. 1–43; cité d'après la trad. fr. de L. Rougier, *Des fondements de la géométrie*, Paris : Chiron, 1922.
- [1899] Des fondements de la géométrie, à propos d'un livre de M. Russell, *Revue de métaphysique et de morale*, 7 (1899), p. 251–279.
- [1900] Sur les principes de la géométrie, réponse à M. Russell, *Revue de métaphysique et de morale*, 8 (1900), p. 73–86.
- [1902a] *La science et l'hypothèse*, Paris : Flammarion, 1902; cité d'après la rééd. Paris : Flammarion, 1968.
- [1902b] Les fondements de la géométrie, *Bulletin des sciences mathématiques*, 26 (1902), p. 249–272; *Œuvres* 11, p. 92–113.
- [1905] *La valeur de la science*, Paris : Flammarion, 1905; cité d'après la rééd. Paris : Flammarion, 1970.
- [1906a] Lettre au directeur de *Mind*, *Mind*, 15 (1906), p. 141–143.
- [1906b] Les mathématiques et la logique, *Revue de métaphysique et de morale*, 13 (1905), p. 815–835 et 14 (1906), p. 17–34; repris dans *Science et méthode* (chap. 3 et 4) et dans [Heinzmann 1986], p. 11–53.
- [1908] *Science et méthode*, Paris : Flammarion, 1908; rééd. *Philosophia scientiae*, cahier spécial n° 3, Paris : Kimé, 1999.
- [1913] *Dernières pensées*, Paris : Flammarion, 1913.
- RIBOT (Théodule)
- [1879] *La psychologie allemande contemporaine (École expérimentale)*, Paris : Alcan, 1879; cité d'après la 7^e éd., 1909.
- RIEMANN (Bernhard)
- [*Werke*] *Gesammelte mathematische Werke, Wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge*, herausgegeben unter Mitwirkung von R. Dedekind und H. Weber, Leipzig : Teubner, 1876; 2^e éd. 1892; Berlin : Springer, 1990; trad. fr. Paris : Gauthier-Villars, 1898.
- [1854] Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, *Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 13 (1867), p. 133–150; *Werke*, p. 254–269.
- ROLLET (Laurent)
- [2000] *Henri Poincaré, des mathématiques à la philosophie : Étude du parcours intellectuel, social et politique d'un mathématicien au début du siècle*, Lille : Éditions de Septentrion, 2000.
- RUSSELL (Bertrand)
- [*Papers*] *The Collected Papers of Bertrand Russell*, London and New-York : Routledge.
- [*Essays*] *Philosophical Essays*, London : George Allen and Unwin, 1966; trad. fr. par F. Clémentz et J.-P. Cometti, *Essais philosophiques*, Paris : Presses universitaires de France.

- [1897] *An Essay on the Foundations of Geometry*, Cambridge : Cambridge University Press, 1897; London and New York : Routledge, 1996; trad. fr. de A. Cadenat, Paris : Gauthier-Villars, 1901.
- [1898] Les axiomes propres à Euclide sont-ils empiriques ?, *Revue de métaphysique et de morale*, 6 (1898), p. 759–776.
- [1899a] Sur les axiomes de la géométrie, *Revue de métaphysique et de morale*, 7 (1899), p. 684–707.
- [1899b] The Axioms of Geometry, original anglais de [1899a], *Papers* 2, p. 394–415.
- [1899c] Notes on Geometry, *Papers* 2, p. 359–389.
- [1901] Recent Italian Work on the Foundations of Mathematics, *Papers* 3, p. 352–362.
- [1903] *The Principles of Mathematics*, Cambridge : Cambridge University Press, 1903.
- [1905] Review of Science and Hypothesis by H. Poincaré, *Mind*, 14 (1905), p. 412–418; *Papers* 4, p. 589–594; cité d’après la trad. fr. in *Essais philosophiques*, p. 119–128.
- [1959] *My Philosophical Development*, London : Allen & Unwin, 1959.
- STAUDT (Georg Karl Christian von)
- [1847] *Geometrie der Lage*, Nuremberg : Bauer und Raspe, 1847; trad. ital. de M. Pieri, *Geometria di posizione di Georgio Carlo Cristiano von Staudt*, avec une présentation des travaux de Staudt par C. Segre, Turin : Bocca, 1889.
- [1856–1860] *Beiträge zur Geometrie der Lage*, 3 volumes, Nuremberg : Bauer und Raspe, 1856–1860.
- TORRETTI (Roberto)
- [1978] *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Dordrecht : D. Reidel Publishing Company, 1978.
- VERONESE (Giusseppe)
- [1891] *Fondamenti di geometria a più dimensioni ed a più spezie di unità rettilinee esposti in forma elementare*, Padoue : Tipografia del seminario, 1891; trad. all. par A. Schepp, *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt*, Leipzig : Teubner, 1894.
- VUILLEMIN (Jules)
- [1976] Conventionalisme géométrique, dans Science et métaphysique, *Archives de l’institut international des sciences théoriques*, 20, Bruxelles : Office international de librairie, p. 65–105.
- [1994] L’espace représentatif, in [Grefe-Heinzmann-Lorenz 1996], p. 279–285.
- WALTER (Scott)
- [1996] *Hermann Minkowski et la mathématisation de la théorie de la relativité restreinte, 1905-1915*, thèse soutenue à l’université de Paris 7, 1996.
- ZAHAR (Élie)
- [1996] Poincaré’s Structural Realism and his Logic of Discovery, in [Grefe-Heinzmann-Lorenz 1996], p. 45–68.
- [1997] Poincaré’s Philosophy of Geometry, or does Geometric Conventionalism Deserve its Name, *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 28 (2) (1997), p. 183–218.
- [2000] Les fondements de la géométrie selon Poincaré, *Philosophia scientiae*, 4(2000), fasc. 1, p. 145–186.