



**HAL**  
open science

**Bases réduites certifiées pour des problèmes  
multi-physiques non-linéaires de grande taille.  
Application au design d'aimants à haut champ**

Cécile Daversin, Christophe Prud'Homme, Christophe Trophime

► **To cite this version:**

Cécile Daversin, Christophe Prud'Homme, Christophe Trophime. Bases réduites certifiées pour des problèmes multi-physiques non-linéaires de grande taille. Application au design d'aimants à haut champ. Journée poster des doctorants - Université de Strasbourg, Oct 2014, Strasbourg, France. hal-01082377

**HAL Id: hal-01082377**

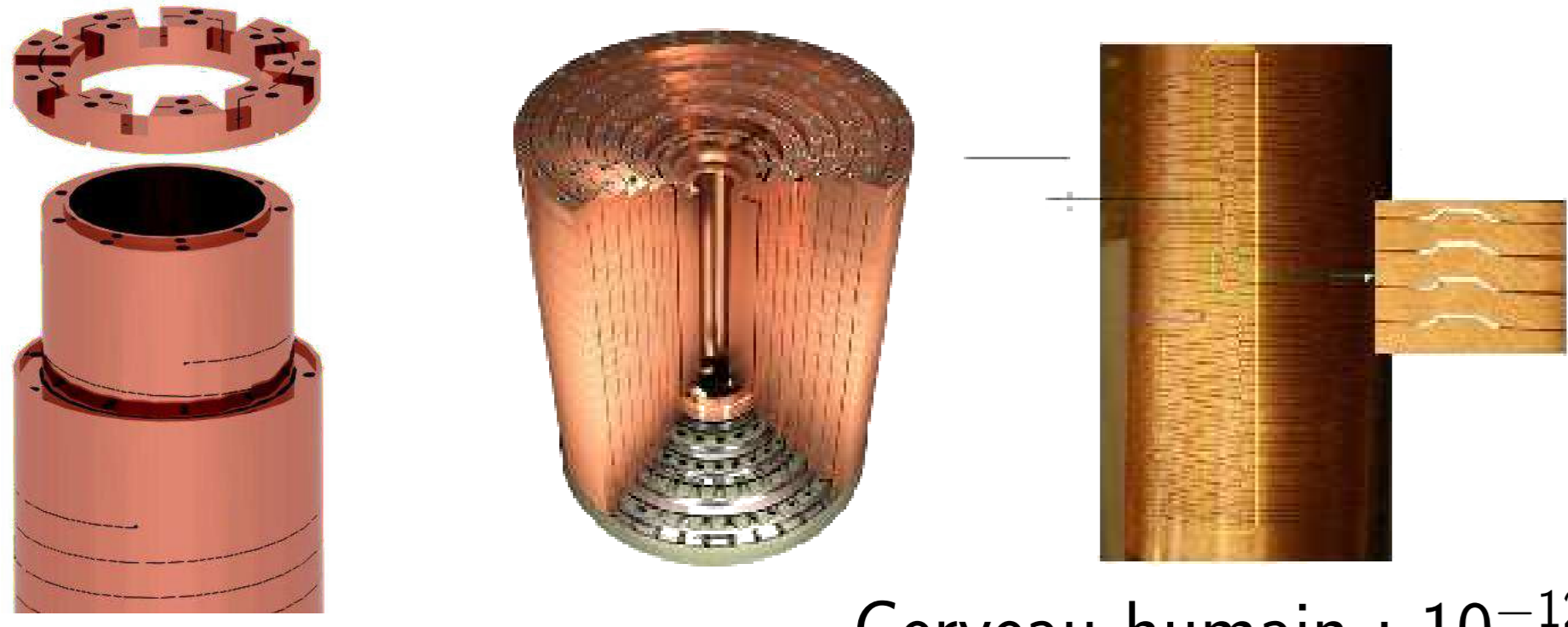
**<https://hal.science/hal-01082377>**

Submitted on 13 Nov 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LNCMI : Laboratoire Magnétique des Champs Magnétiques Intenses



Grand instrument du CNRS :

- Champ magnétique intense : > supraconducteur (24 T)
- Grenoble : champs continus (→ 36 T)
- Toulouse : champs pulsés (→ 90 T)

Domaines d'application :

- Chimie, Biochimie
- Magnétoscience
- Supraconductivité appliquée

Cerveau humain :  $10^{-12} T$ , Terre :  $5.10^{-5} T$ , Pace-maker :  $10^{-3} T$ , IRM :  $1 T$ , Supraconducteur :  $24 T$

Modèle multi-physique pour les aimants à haut champs

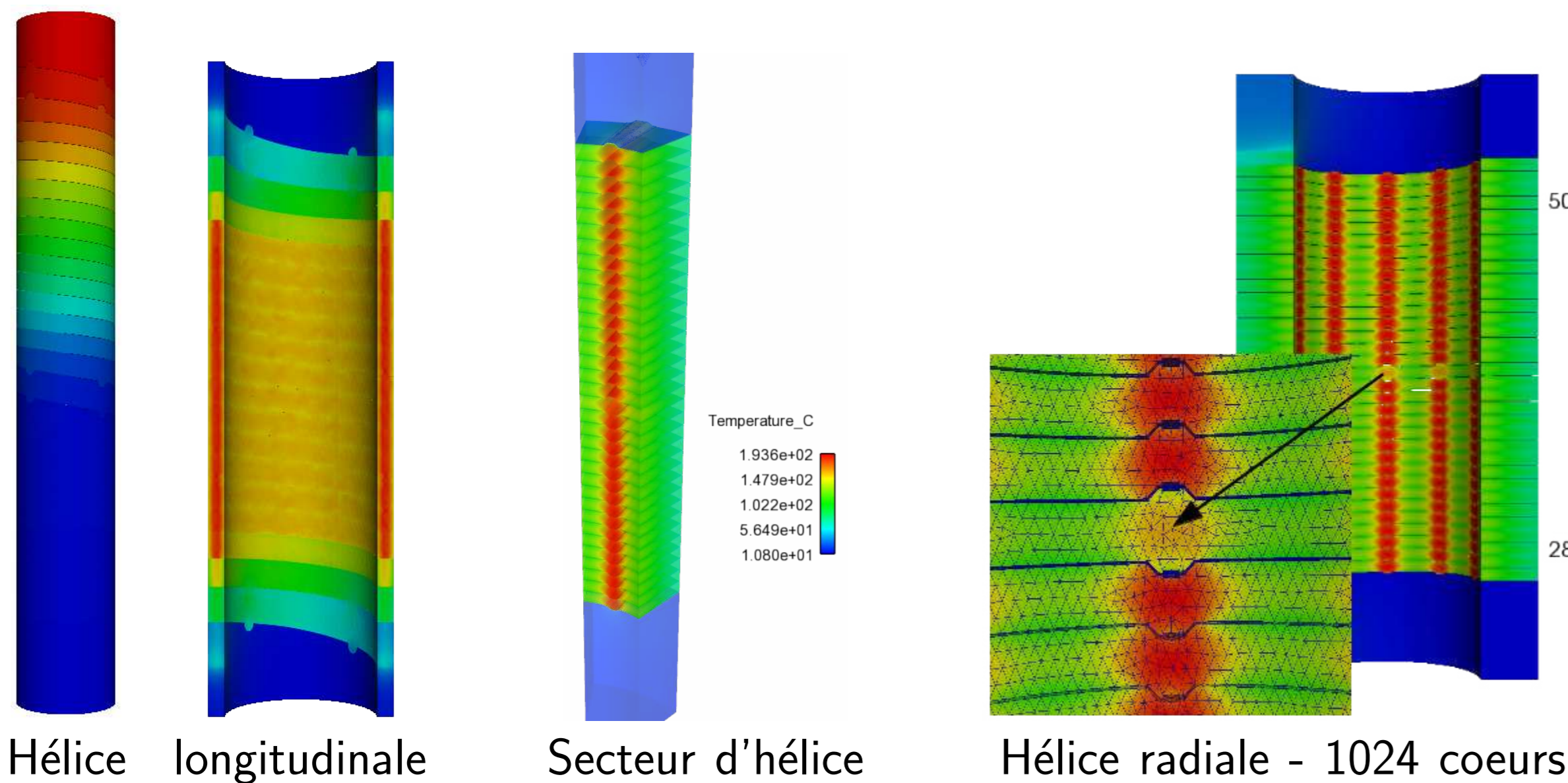
Electro-thermique

$V$  : Potentiel électrique [V]       $T$  : Température [K]

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma(T) \nabla V) = 0 & \text{dans } \Omega \\ -\nabla \cdot (k(T) \nabla T) = \sigma(T) \nabla V \cdot \nabla V & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

$$\sigma(T) = \frac{\sigma_0}{1 + \alpha(T - T_0)} \quad \text{Propriétés des matériaux} \quad k(T) = LT\sigma(T) \quad \text{Non linéarité}$$

$$\begin{aligned} V = 0 & \text{ (bas)} & -\sigma(T) \nabla V \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{ (isolation elec.)} \\ V = V_D & \text{ (haut)} & -k(T) \nabla T \cdot \mathbf{n} = h(T - T_w) & \text{ (refroidissement)} \end{aligned}$$



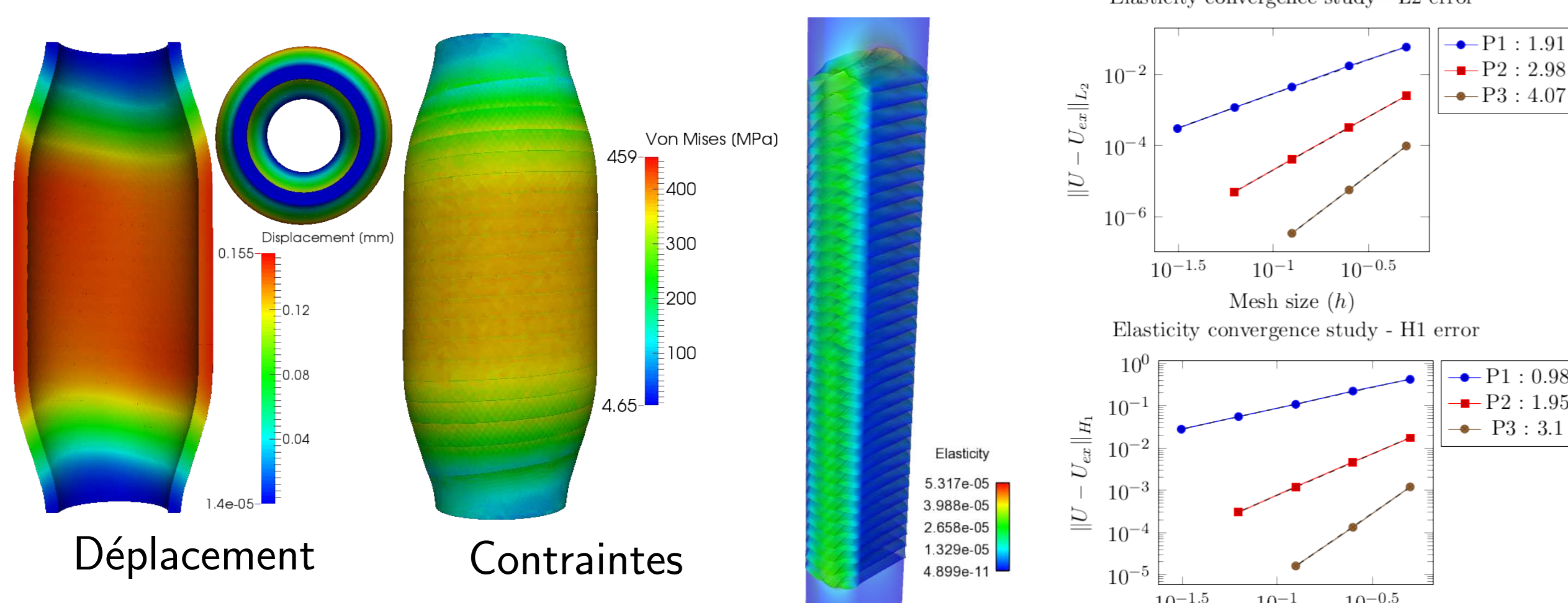
Vérification et validation : 2D axi, 3D ✓

Elasticité linéaire

$\bar{\sigma}$  : Tenseur des contraintes       $\bar{f}$  : Forces volumiques       $\bar{u}$  : Déplacement

$$\nabla \cdot \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}) + \bar{f} = 0 \quad \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \bar{u} + \nabla \bar{u}^T)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{E}{1 + \nu} \left( \bar{\varepsilon} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \text{Tr}(\bar{\varepsilon}) I \right) - \frac{E}{1 - 2\nu} \alpha(T - T_0) I \quad \bar{f} = \bar{j} \times \bar{B}$$



Vérification et validation : 3D ✓

Magnetostatique

$\bar{j}$  : Densité de courant [ $A.m^{-2}$ ]       $\bar{H}$  : Intensité magnétique [ $A.m^{-1}$ ]       $\bar{B}$  : Flux magnétique [ $V.s.m^{-2}$ ]

$$\text{Faraday : } \int_{\partial\Omega} \bar{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{Ampère : } \int_{\partial\Omega} \bar{H} \cdot \mathbf{t} = \int_{\Omega} \bar{j} \cdot \mathbf{n}$$

$$\begin{cases} \text{div}(\bar{B}) = 0 \\ \text{curl}(\bar{H}) = \bar{j} = -\sigma \nabla V \end{cases} \Rightarrow \exists \bar{A} \mid \bar{B} = \text{curl}(\bar{A}) \quad \bar{B} = \mu \bar{H}$$

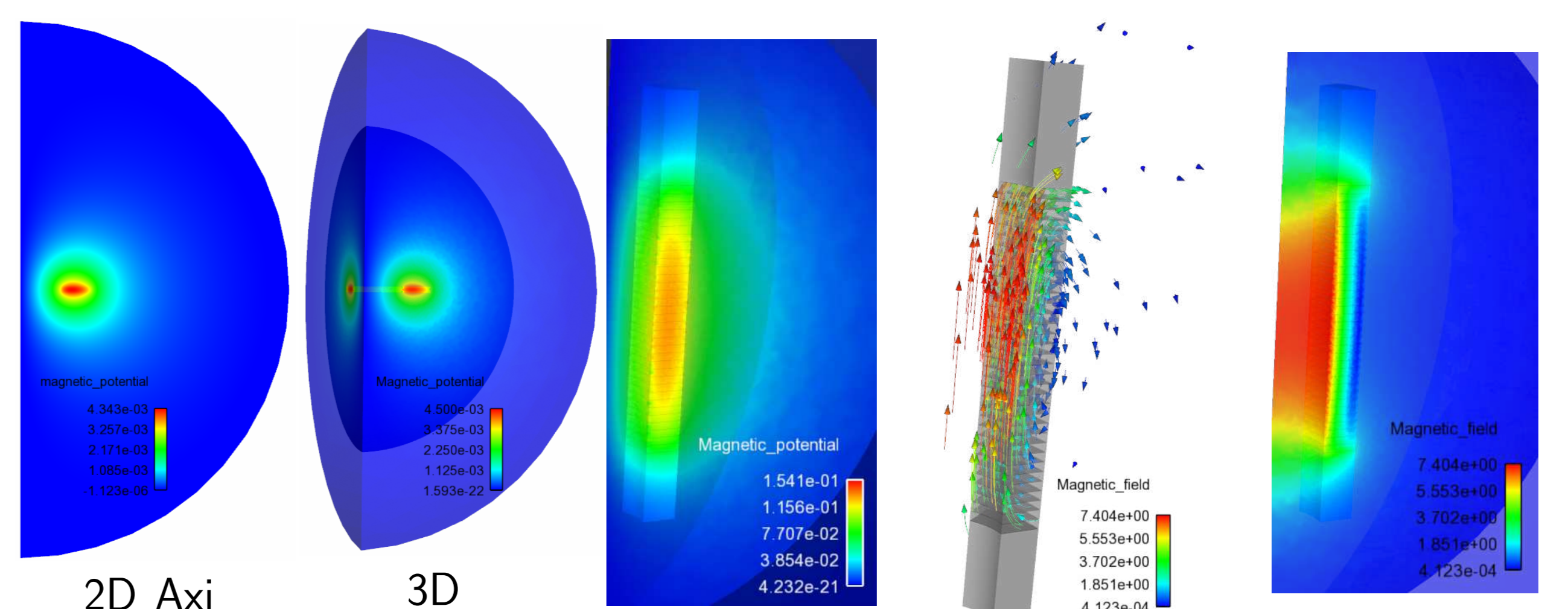
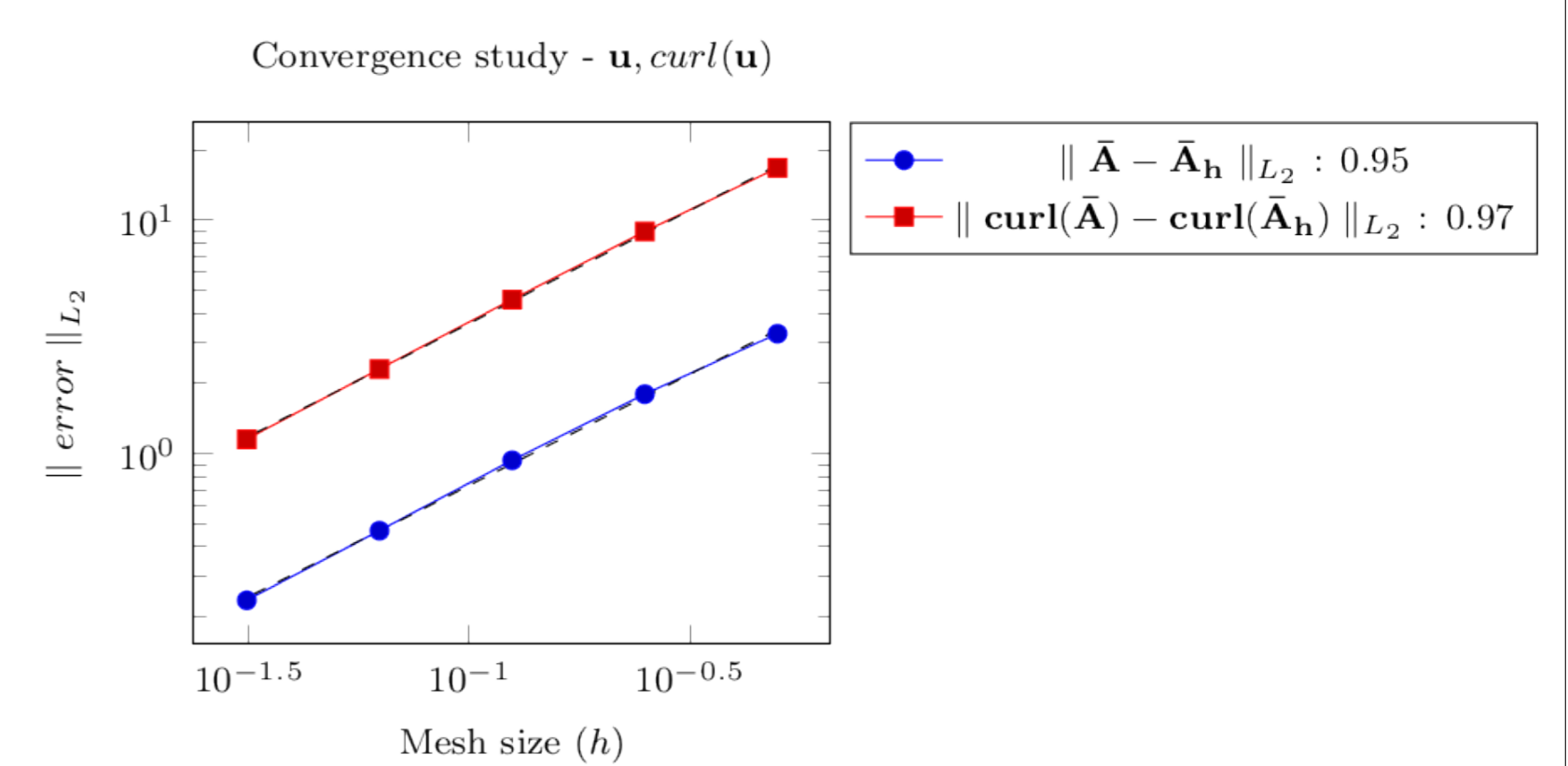
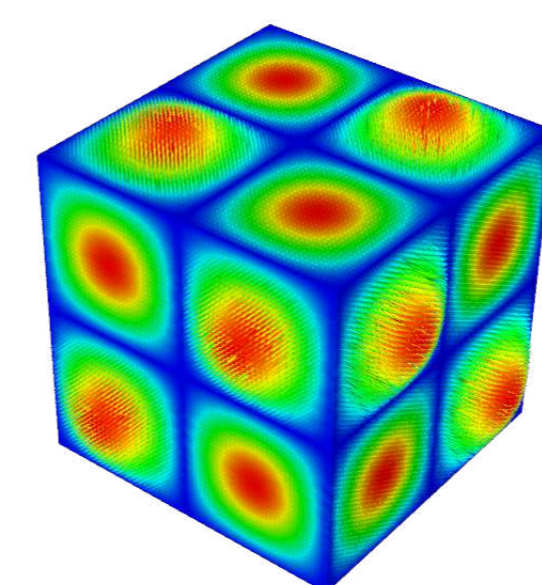
$$\text{curl}(\mu^{-1} \text{curl}(\bar{A})) = \bar{j}$$

$$[\bar{H} \cdot \mathbf{n}]_{\Gamma} \neq 0 \quad \text{Conditions aux interfaces} \quad [\bar{H} \times \mathbf{n}]_{\Gamma} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{id} H_1(\Omega) \xrightarrow{\nabla} H_{\text{curl}}(\Omega) \xrightarrow{\text{curl}} H_{\text{div}}(\Omega) \xrightarrow{\text{div}} L_2(\Omega) \xrightarrow{0} \{0\} \\ \text{De-Rham : } &\downarrow \pi_h \quad \downarrow \pi_h \quad \downarrow \pi_h \quad \downarrow \pi_h \\ \mathbb{R} &\xrightarrow{id} U_h \xrightarrow{\nabla} V_h \xrightarrow{\text{curl}} W_h \xrightarrow{\text{div}} Z_h \xrightarrow{0} \{0\} \end{aligned}$$

$H_{\text{curl}}$  : Element de Nédélec

→ Continuité composante tangentielle



Vérification et validation : 2D axi, 3D ✓

Potentiel Electrique  
Calcul Haute Performance : de qq coeurs à des milliers de coeurs  
Température Champ magnétique

Réduction de modèle

Problème :  $a(u(\mu), v; \mu) = f(v; \mu) \rightarrow$  Quantité d'interet :  $s(\mu) = \ell(u(\mu))$

Approximation Elements Finis :

$$\mathcal{X}^N = \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_N\} \rightarrow u^N(\mu) = \sum_{i=1}^N u_i^N \phi_i \rightarrow \underbrace{A^N(\mu) u^N(\mu)}_{\text{système } N \times N \text{ coûteux à résoudre}} = F^N(\mu)$$

Approximation Bases réduites :

$$u^N(\mu) \approx u^N(\mu) : \text{Combinaison linéaire de solutions}$$

$$\mathcal{W}^N = \text{span}\{u^N(\mu_1), \dots, u^N(\mu_N)\} \rightarrow u^N(\mu) = \sum_{i=1}^N u_i^N(\mu) \underline{u}^N(\mu_i)$$

Espace d'approx. réduit       $10 \leq N \leq 100$

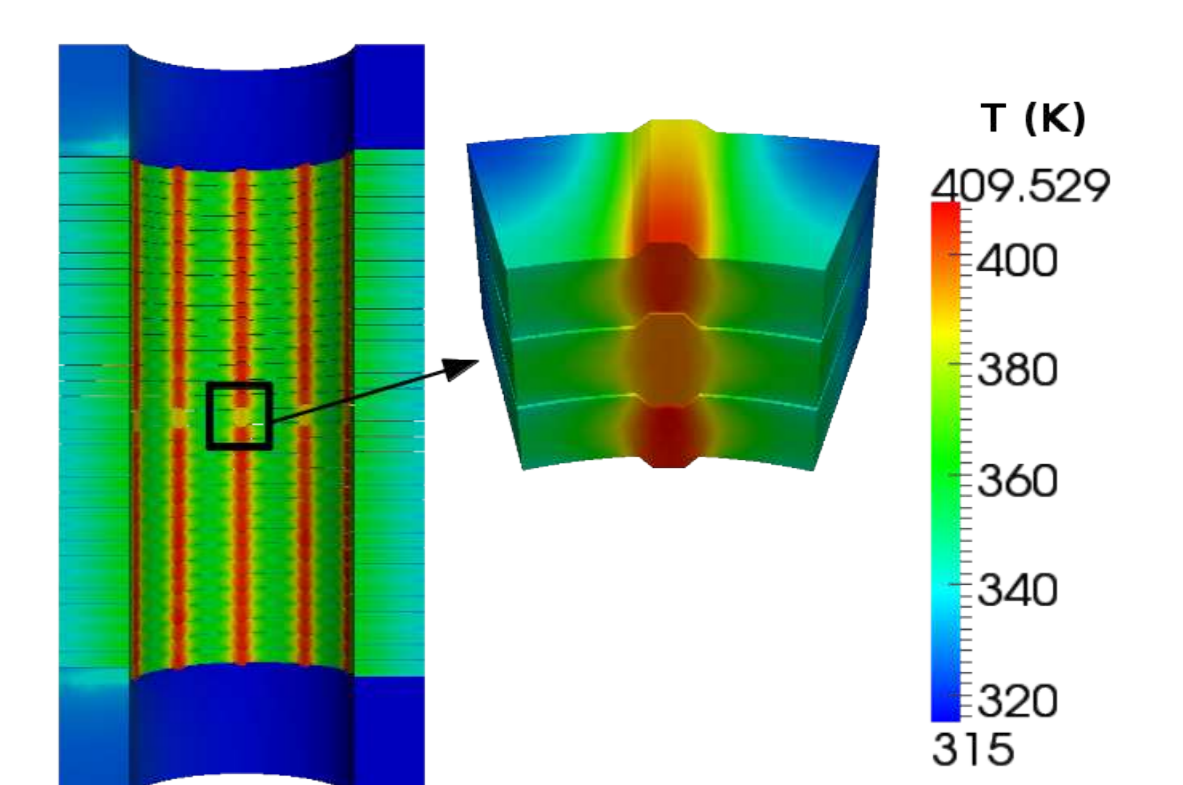
$$A^N(\mu) u^N(\mu) = F^N(\mu) \rightarrow \text{système } N \times N \text{ moins cher à résoudre}$$

Analyse de sensibilité

- $\sigma_0 \in [50.10^6; 50, 2.10^6] (S.m^{-1})$
- $\alpha \in [3, 3.10^{-3}; 3, 5.10^{-3}] (K^{-1})$
- $L \in [2, 5.10^{-8}; 2, 9.10^{-8}]$
- $U \in [0.14; 0.15] (V)$  Intensité  $\approx 25$  kA
- $h \in [70000; 90000] (W.m^{-2}.K^{-1})$
- $T_w \in [293, 313] (K)$

Indices de sensibilité (Sobol) :

- $\sigma_0$  : 6.85e-05
- $\alpha$  : 4.54e-04
- $L$  : 9.21e-03
- $U$  : 1.28e-01
- $h$  : 2.40e-01
- $T_w$  : 6.21e-01



Quantiles :

$q(\gamma)$  tel que  $P(Y < q(\gamma)) > \gamma$   
99.0 quantile = 380 K = 107 C  
80.0 quantile = 377.5 K = 104.5 C