



HAL
open science

Contributions à l'histoire de la géométrie projective au 19e siècle

Philippe Nabonnand

► **To cite this version:**

Philippe Nabonnand. Contributions à l'histoire de la géométrie projective au 19e siècle. 2006. hal-01082207

HAL Id: hal-01082207

<https://hal.science/hal-01082207v1>

Preprint submitted on 12 Nov 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright

Contributions à l'histoire de la géométrie projective au 19^e siècle

Philippe Nabonnand

25 janvier 2008

Table des matières

1	Introduction	1
2	L'émergence d'un désir de géométrie	11
2.1	La méthode des signes de Carnot	11
2.2	Le rejet des quantités négatives	17
2.3	La méthode de Carnot	21
2.3.1	Un premier exemple	23
2.3.2	Les corrélations générales	25
2.4	La géométrie des transversales	25
2.5	La réception des travaux de Carnot	30
2.5.1	La géométrie pratique de Servois	30
2.5.2	<i>L'Application de la théorie des transversales</i> de Brianchon	32
2.5.3	L'application à la théorie de la conique de la théorie des transversales par Brianchon	36
2.5.4	Les critiques de Poncelet	39
3	Poncelet et l'étude des propriétés projectives	43
3.1	Le principe de continuité et les éléments imaginaires	44
3.1.1	La réception du principe de continuité	50
3.2	Qu'est ce qu'une propriété projective?	55
3.3	La théorie des polaires	58
3.3.1	Les notions de sécante idéale et de coniques supplémentaires	58
3.3.2	Sécantes communes réelles et idéales	61

3.3.3	Le cas particulier des cercles	62
3.3.4	La théorie des polaires réciproques	66
3.3.5	la polémique avec Gergonne	70
3.4	Les principes de projection	73
3.5	La notion d'homologie	76
4	Les travaux de Steiner	79
4.1	Introduction	79
4.2	Les notions et les relations primitives de la géométrie	81
4.3	La notion de formes projectives	82
4.3.1	La relation projective entre droite et faisceau plan de rayons	82
4.3.2	Droites projectives et faisceaux plans projectifs	84
4.3.3	Incise : le style de démonstration de Steiner	86
4.3.4	Les éléments harmoniques et les similitudes	88
4.3.5	Les éléments doubles	88
4.3.6	Droites, faisceaux plans et faisceaux dans l'espace projectifs	91
4.3.7	Quelques théorèmes et porismes qui se déduisent des relations projectives entre formes	93
4.4	La théorie des coniques et des surfaces du second ordre	99
4.4.1	La description des coniques à partir d'un cône	99
4.4.2	L'engendrement des coniques par les formes projectives .	101
4.4.3	Les propriétés des coniques	104
4.4.4	La théorie des surfaces du second degré	107
4.4.5	Généralisation de la notion de relation projective	107
4.5	Conclusion	109
5	Le radicalisme synthétique de von Staudt	111
5.1	Introduction	111
5.2	Les formes géométriques	112
5.2.1	Les formes fondamentales	112

5.2.2	Les éléments à l'infini et la généralisation de la définition des formes fondamentales	115
5.2.3	La dualité	117
5.3	Une théorie purement géométrique des correspondances projectives entre formes fondamentales de première espèce	120
5.3.1	Les formes harmoniques	120
5.3.2	Les correspondances projectives entre formes uniformes	121
5.3.3	Les relations projectives entre formes fondamentales de seconde espèce et entre système-espace	124
5.4	La théorie des coniques et des surfaces du second ordre de von Staudt	128
5.4.1	Les involutions	128
5.4.2	Les systèmes involutifs et les systèmes polaires	130
5.4.3	Les coniques et les surfaces du second ordre	131
5.5	Les formes élémentaires et les involutions	136
5.6	Le calcul des jets	138
5.6.1	Les jets	138
5.6.2	L'addition des jets	139
5.6.3	La multiplication des jets	142
5.7	La valeur numérique des jets et la déduction des coordonnées	145
5.7.1	La notion de valeur d'un jet	145
5.7.2	La déduction des coordonnées	148
5.8	Les éléments imaginaires et le calcul des jets	150
5.8.1	Les différentes catégories d'éléments imaginaires	150
5.8.2	La généralisation de la définition des jets et des opérations sur les jets	152
5.8.3	Puissances de jets et l'introduction des nombres complexes	153
5.9	La réception de la théorie des jets	154
6	La Géométrie supérieure de Chasles	159
6.1	Les principes méthodologiques de la <i>Géométrie supérieure</i>	162
6.2	Le principe des signes et le rapport anharmonique	166

6.3	La théorie des homographies	168
6.4	La théorie de l'involution	174
6.5	Les figures homographiques et corrélatives	177
7	Démontrer le théorème fondamental de la géométrie projective	181
7.1	Introduction	181
7.2	La géométrie projective et l'axiome des parallèles	182
7.3	Le théorème fondamental de la géométrie projective et l'axiome de continuité	189
7.3.1	La lacune de Staudt et la première analyse de Klein	189
7.3.2	La discussion autour des questions de continuité	190
7.3.3	La <i>Geometrie der Lage</i> de Th. Reye	197
7.4	Montrer le théorème fondamental sans hypothèse de continuité	201
7.5	Les échelles numériques de Hölder	210
7.6	L'analyse de Enriques	212
7.7	La géométrie projective générale de Veblen et Young	217
7.8	Annexe : qu'est-ce qu'une correspondance projective?	225
8	Le temps des axiomatiques	229
8.1	La nouvelle géométrie de Pasch	229
8.1.1	L'énumération des notions et des principes de base	233
8.1.2	L'extension de l'acception des mots de la géométrie	240
8.1.3	Les notions de perspective, de forme harmonique et de dualité	248
8.1.4	La congruence	253
8.1.5	La démonstration de Pasch du théorème fondamental de la géométrie projective.	255
8.2	Les systèmes hypothético-déductif de Mario Pieri	266
8.3	Whitehead	276

Chapitre 1

Introduction

Depuis 5000 ans, les mathématiques sont une des entreprises culturelles qui constituent l'humanité. Ses applications, son importance pour l'enseignement et pour la connaissance de l'esprit humain en font une des disciplines structurantes du champ intellectuel dans la plupart des sociétés. Au 19^e siècle, les mathématiques dans les sociétés dites «occidentales» sont bouleversées dans leur organisation, leur pratique, leur importance sociale, ... On peut rappeler le programme d'arithmétisation de l'analyse, l'émergence des géométries non-euclidiennes, la rupture entre géométrie et intuition spatiale, l'apparition des structures algébriques et des systèmes formels, la mathématisation accrue de la physique théorique, l'importance croissante accordées à la fois aux questions de fondements et aux applications des mathématiques, la prise en compte des *curricula* mathématiques dans tous les ordres d'enseignement. Les mathématiques du 20^e (et du 21^e ?) siècle sont héritières de ces bouleversements et de ce point de vue, l'histoire des mathématiques au 19^e siècle est une des clés pour comprendre l'importance des mathématiques dans la société actuelle, la genèse de nombre de points de vue et de problèmes contemporains, l'organisation de la discipline et la structuration des communautés mathématiques.

La géométrie projective est de nos jours essentiellement une discipline d'enseignement et, la plupart du temps, la présentation analytique fondée sur la notion de coordonnées homogènes est privilégiée. Pour autant, le terme de projectif n'a pas disparu du vocabulaire des géomètres contemporains, en particulier en géométrie différentielle, en géométrie analytique et en géométrie algébrique.

L'histoire de la géométrie projective au 19^e siècle est emblématique des changements de conceptions des mathématiciens sur la pratique de leur discipline. Les discussions autour de la question de la généralité durant la première moitié du 19^e siècle, la question de la rigueur des démonstrations, celle de l'organisation d'un corpus de théorèmes et de problèmes, le passage d'une mathématiques de problèmes à une mathématiques de théories, l'évolution concomitante d'une géométrie centrée autour des figures à une géométrie des relations entre formes fondamentales, les discussions autour des questions de continuité des formes fondamentales, les relations entre géométrie synthétique et géométrie analytique, la légitimation purement géométrique de l'utilisation de considérations algébriques en géométrie, la question des axiomatisations font de la géométrie projective

un cas d'étude crucial des débats autour de la pratique mathématique durant le 19^e siècle. Les géomètres projectifs du 19^e inventent une nouvelle manière de considérer les problèmes géométriques et doivent justifier leurs innovations conceptuelles ou méthodologiques. Un des objectifs de cet ouvrage est de rendre compte de leurs discours de justification, d'analyser leur rhétorique et d'essayer de reconstruire les intentions et les programmes de recherche des différents protagonistes ou groupes de protagonistes. Cela passe à la fois par une attention spécifique aux présentations et aux préfaces des ouvrages des géomètres mais aussi par l'analyse de l'organisation des corpus, des implicites méthodologiques et de la forme des démonstrations. En ce sens, l'intention de cet ouvrage n'est pas seulement historique mais aussi philosophique ; une philosophie des mathématiques centrée sur la pratique des mathématiques dont la méthodologie clairement revendiquée est de s'appuyer sur ce que disent les mathématiciens de leur discipline, de leur méthode et de leur manière de pratiquer. De ce point de vue, la préface du traité de *Géométrie supérieure*¹ de Chasles ou l'intervention de Pieri au congrès de philosophie de Paris (1900)² deviennent des textes essentiels de philosophie mathématiques parce qu'inscrits dans des problématiques liées à la pratique des mathématiques.

Selon le mathématicien italien Cremona, la paternité de l'expression *Géométrie projective* doit être attribuée à Klein dans son premier article de 1871 sur les géométries non-euclidiennes³. De fait, le premier ouvrage revendiquant la géométrie projective comme son objet est celui de Cremona⁴ qui paraît en 1873 :

Bien des noms ont été donnés à cet ensemble de doctrines dont nous allons exposer les principes fondamentaux. Je ne veux pas adopter celui de *Géométrie supérieure* (*Hohere Geometrie*), parce que ce qui a pu paraître supérieur un jour est aujourd'hui très-élémentaire, ni celui de *Géométrie moderne* (*Neuere Geometrie, Modern Geometry*) qui n'exprime qu'une conception relative ; du reste, quoique les méthodes puissent être considérées comme modernes, la matière est vieille en grande partie. Le titre de *Géométrie de position* (*Geometrie der Lage*), dans le sens de Staudt, ne me paraît pas plus propre, parce qu'il exclut la considération des propriétés métriques des figures. J'ai choisi le titre de *Géométrie projective*, qui exprime la vraie nature des méthodes qui sont fondées essentiellement sur la projection centrale ou perspective. J'ai été confirmé dans mon choix en considérant que le grand Poncelet, le principal créateur des méthodes modernes, a intitulé son livre immortel : *Traité des propriétés projectives des figures* (1822). [Cremona, 1873, VIII]

L'apparition tardive du terme «géométrie projective» amène naturellement à se poser la question : de quoi fait-on l'histoire lorsque l'on prétend étudier l'histoire de la géométrie projective ? Le corpus de théorèmes étudiés par Crémona dans son traité correspond à peu près à ce que l'on entend aujourd'hui par géométrie projective, quoique l'attention apportée à la théorie des coniques reste

¹[Chasles, 1852].

²[Pieri, 1900-01].

³[Klein, 1871, 573].

⁴[Cremona, 1873].

hypertrophiée par rapport aux exposés modernes.⁵ Les travaux antérieurs de Poncelet, Steiner, Chasles ou von Staudt avaient pour ambition de traiter avec de nouvelles méthodes de géométrie pure la théorie des coniques. Plus exactement, chacun à sa manière visait à doter la géométrie pure de méthodes offrant le même caractère de généralité que celui de la géométrie analytique et l'aune à laquelle sera estimé le succès de leur entreprise est la capacité à traiter la théorie des coniques. Ainsi, Carnot, Poncelet ou Steiner revendiquent un retour de la géométrie synthétique pour marquer leur refus du cadre de la géométrie analytique et leur ambition de donner à la géométrie synthétique la même puissance que celle de la géométrie analytique. Certes, cette entreprise s'organise à la suite de Poncelet autour de la caractérisation du point de vue projectif en géométrie mais pour autant la définition du champ de la géométrie projective est longtemps problématique; la *Geometrie der Lage*⁶ de von Staudt comporte une démonstration du théorème d'Euler ou des considérations sur les points singuliers des courbes. Les géomètres français Carnot, Poncelet ou Chasles défendent le point de vue synthétique en développant une argumentation centrée autour de la notion de figure générale; Carnot généralise les propriétés d'une figure particulière aux figures corrélatives par la méthode des tableaux; Poncelet met en œuvre deux sortes de principe : le principe de continuité permet d'étendre la portée d'une propriété montrée rigoureusement dans le cas d'une figure particulière à l'ensemble des figures corrélatives. Les principes de projection permettent de simplifier la figure étudiée. Poncelet présente son travail comme l'étude des propriétés projectives (c'est-à-dire des propriétés invariantes par projection) des figures constituées de droites et de coniques (c'est-à-dire des figures auxquelles son principe de continuité s'applique). Poncelet en mettant au centre de son étude la notion de *propriété projective* fait émerger un nouveau champ théorique : celui de la géométrie projective. Certes Poncelet propose une définition de l'expression «élément à l'infini», déduit les propriétés de dualité de sa théorie des figures polaires, développe donc des méthodes projectives en géométrie; pour autant, sa théorie est essentiellement une méthode pour analyser projectivement les figures géométriques; elle s'inscrit dans la tradition⁷ qui considère la géométrie comme l'étude des figures. Steiner est le premier qui subordonne l'étude des figures à la géométrie des formes fondamentales (ponctuelle, système-plan, faisceau et gerbe). Même si son refus d'utiliser le cadre analytique est moins affirmé que chez Poncelet, ses développements s'inscrivent dans le cadre de la géométrie pure et remettent en cause la forme du questionnement géométrique. La théorie de Steiner repose sur la notion de correspondance projective entre forme et la théorie des coniques devient une simple application de la théorie de ces correspondances. Von Staudt reprend en le radicalisant le point de vue de Steiner. Il développe la théorie des formes fondamentales et de leurs correspondances projectives sans faire appel comme ses prédécesseurs (Poncelet et Steiner) à des considérations métriques. La *Geometrie der Lage*⁸ de

⁵La grande différence de statut du cours de géométrie projective réside surtout dans le fait que Cremona présente son cours comme une introduction destinée aux élèves-ingénieurs aux méthodes de la statique graphique. De même, le cours de Reye [1866] qui expose de manière plus pédagogique les théories de von Staudt est lui aussi considéré comme une préparation au cours de Culmann.

⁶[Staudt, 1847].

⁷Cette conception de la géométrie perdure jusqu'à la fin du 19^e siècle dans certains milieux mathématiques comme ceux qui développent les géométries du cercle ou du triangle.

⁸[Staudt, 1847].

von Staudt constitue un premier moment de stabilisation du champ de la géométrie projective. En effet, von Staudt développe systématiquement de manière purement projective une théorie qui, à partir de la propriété fondamentale des correspondances projectives des formes de première espèce, permet d'introduire des considérations algébriques sur les *jets* et les coordonnées.

La définition du champ théorique de la géométrie projective se réalisera pour une grande part en une entreprise de fondements. Fonder la géométrie pour les géomètres de la seconde moitié du 19^e siècle consistait d'une part à axiomatiser les théories géométriques, d'autre part à justifier l'introduction des coordonnées et des considérations algébriques et arithmétiques en géométrie. La théorie de von Staudt est au centre des débats concernant les fondements de la géométrie projective. La discussion autour de la démonstration du théorème fondamental de la géométrie projective débute avec l'analyse de Klein⁹ de la démonstration de von Staudt et s'organise autour du rôle de la continuité en géométrie projective. De même, la théorie des jets de von Staudt est la première tentative d'algébriser la géométrie. Les discussions autour de l'axiomatisation et de l'algébrisation de la géométrie trouvent leur achèvement avec les travaux de Pasch, Pieri, Hilbert et Schur, ce qui clôt en un sens le domaine de la géométrie projective.

Ce livre couvre l'histoire de cette partie de la géométrie que l'on désigne actuellement par géométrie projective synthétique depuis sa renaissance au début du 19^e siècle avec les travaux de Carnot et Poncelet jusqu'aux multiples axiomatiques qui émergent au tournant du 20^e siècle. Un grand nombre de géomètres de la première moitié du 19^e siècle revendiquent un retour à la géométrie dite synthétique en opposition à la géométrie analytique ; ils opposent à une géométrie dans laquelle la conception et la solution des problèmes sont réduites à des considérations d'équations algébriques une pratique de la géométrie qui déterminerait par ses propres ressources – sans l'intermédiaire de l'outil analytique –, ses objets, ses principes et ses méthodes. Une des difficultés de la revendication de la *synthèse* contre l'*analyse* est la formidable efficacité des méthodes analytiques appliquées aux problèmes de géométrie avec lesquelles les méthodes de la géométrie pure d'inspiration euclidienne ne peuvent rivaliser. Le succès de la géométrie analytique se traduit par le caractère *général* des méthodes et des résultats. Le géomètre pur restreint à la considération de figures particulières ne peut espérer, ni même concevoir une telle généralité. Carnot, Poncelet, Chasles développent pour justifier leur conception de la géométrie une rhétorique de la généralité des méthodes et des résultats. Carnot justifie avec sa méthode des tableaux l'extension d'un résultat montré en toute rigueur sur une figure particulière à une classe de figures dites *corrélatives* ; de même, les principes de continuité et de projection de Poncelet lui permettent d'étudier des problèmes concernant les propriétés des figures qui se conservent par perspective et par changement des positions relatives des éléments de la figure. La méthode des signes légitime aux yeux de Chasles l'unification des situations géométriques ce qui autorise de traiter en toute globalité les problèmes relatifs à une figure qui en même qu'elle acquiert une capacité de généralisation commence à s'effacer. Carnot ne justifie pas explicitement pourquoi il faut conserver en géométrie le point de vue de la géométrie pure. Par contre, comme il présente sa méthode de corrélation des systèmes comme une méthode universelle qui répare les er-

⁹[Klein, 1871, 1873].

reurs commises (selon lui) en algèbre et en géométrie analytique et qui permet à la géométrie pure d'accéder au même caractère de généralité qu'en géométrie analytique, il n'y a pas aux yeux de Carnot de concurrence particulière, ni même de différence essentielle entre les deux approches au point que dans sa présentation de sa *théorie des transversales*¹⁰, il affirme que sa théorie est la même que celle des coordonnées. Enfin, pour Carnot, la conception nouvelle de la géométrie synthétique qu'il propose ouvre de nouveaux champs comme la «science des projections» que la géométrie élémentaire ne peut traiter. Même si l'on veut aborder ces questions de manière analytique, il est nécessaire malgré tout que les données de base soient développées dans les termes de la géométrie pure ce qui légitime une nouvelle conception des problèmes et des méthodes de cette géométrie.

Poncelet considère à la suite de Monge que l'approche des problèmes géométriques par la géométrie pure reste plus simple et plus accessible aux praticiens. En effet, en présentant sa *Géométrie descriptive*¹¹, Monge explique qu'un des objectifs principaux de sa méthode est de permettre «de représenter avec exactitude, sur des dessins qui n'ont que deux dimensions, les objets qui en ont trois, et qui sont susceptibles de définition rigoureuse»; en conséquence, elle est donc «une langue nécessaire à l'homme de génie¹² qui conçoit un projet, à ceux qui doivent en diriger l'exécution, et enfin aux artistes qui doivent eux-mêmes en exécuter les différentes parties»¹³. Monge s'inscrit dans les débats autour de la popularisation et la diffusion des savoirs qui caractérisent entre autres la prise en compte des questions d'enseignement par la nouvelle république française. Ainsi, pour Monge, l'approche analytique par les coordonnées suppose une formation élevée alors que l'approche géométrique pure est plus accessible et en fait de part son rapport avec les figures et l'idée de construction géométrique, plus utile aux praticiens.

Poncelet insiste aussi sur le caractère plus constructif des preuves et des résultats de la géométrie pure. Il fournit dans son article sur *l'usage de l'analyse algébrique en géométrie*¹⁴ un certain d'exemples de résolution de problèmes par des considérations de géométrie pure dont il conclut qu'il a de la «peine à se persuader que la Géométrie analytique puisse parvenir à des constructions générales à la fois plus symétriques et plus élégantes»¹⁵. En 1817, Poncelet défend l'idée que la pratique de la géométrie pure (comprise au sens d'une géométrie qui s'interdit l'usage des coordonnées et non pas au sens de la géométrie des anciens) reste complémentaire de celle de la géométrie analytique; les méthodes de la géométrie analytique assurent aux résultats de la géométrie toute l'extension qui leur manque habituellement et inversement, les considérations de géométrie pure servent à mieux appréhender le problème et à simplifier sa mise en équation. Déjà à cette époque, Poncelet défendait l'idée selon laquelle les résultats obtenus uniquement par des considérations géométriques étaient épistémologiquement et pratiquement supérieurs à ceux obtenus par le biais du calcul algébrique et qu'il ne fallait voir dans l'analyse qu'un outil, certes très efficace, pour aborder les problèmes géométriques. Un peu plus tard, dans les

¹⁰[Carnot, 1806].

¹¹[Monge, 1799].

¹²Il faut comprendre «l'ingénieur».

¹³[Monge, 1799, 2].

¹⁴[Poncelet, 1817-1818].

¹⁵[Poncelet, 1817-1818, 476].

années 1820, Poncelet radicalisera ce point de vue et s'attachera à donner à la géométrie pure les moyens d'aborder les problèmes en toute généralité sans le détour de l'analyse. Une des justifications de cette entreprise sera aux yeux de Poncelet, outre l'intérêt intrinsèque de la pureté des méthodes, qu'un principe de continuité analogue à celui qu'il propose d'adopter en géométrie pure est déjà à l'œuvre en analyse et que l'idée de projection est à la base de la théorie des coordonnées et de la géométrie descriptive de Monge.

Chasles n'insiste pas sur le caractère pratique des nouvelles approches tout en reprenant l'argument de la facilité et du caractère naturel du point de vue de la géométrie pure. Chasles reprend l'argumentation selon laquelle la pratique de la géométrie pure est un moyen simple et naturel pour aborder les problèmes géométriques, induisant implicitement que le passage par les coordonnées confère aux résultats de la géométrie analytique une certaine artificialité et un manque de naturalité.

Steiner qui oppose moins radicalement que les géomètres français géométrie synthétique et géométrie analytique et souligne plutôt la complémentarité des deux approches, justifie son point de vue synthétique en défendant l'idée que les approches sont aussi naturelles l'une que l'autre. L'important aux yeux de Steiner est de recentrer les objectifs de la géométrie sur une certaine classe de relations entre les formes fondamentales (la ponctuelle, le plan, les faisceaux de droites et de plans). Les concepts essentiels de la géométrie ne sont plus définis en terme de problèmes rapportés à des figures géométriques mais comme des moyens d'analyser les relations entre formes fondamentales. Ainsi, la notion de projection est définie comme une relation entre les éléments de deux formes de même espèce et non plus, comme chez Poncelet, comme liant deux figures. la géométrie selon Steiner est la théorie des formes fondamentales et de leurs relations. Les figures n'apparaissent plus que comme des configurations particulières de formes fondamentales.

Ainsi, la pratique de la géométrie pure change radicalement durant la première moitié du 19^e siècle. Entre une géométrie «hérissée de figures» selon la célèbre expression de Chasles¹⁶ et celle présentée dans le *traité de Géométrie supérieure*¹⁷, ce n'est pas seulement les méthodes qui sont radicalement renouvelées mais aussi la conception globale que les géomètres se font de leur discipline. Dans la présentation de leurs innovations en géométrie, Carnot, Poncelet, Chasles, Steiner ou von Staudt présentent les travaux antérieurs des géomètres purs comme une succession de problèmes relatifs à des figures particulières et par conséquent ayant peu de rapports entre eux. En même temps que l'exigence de procédures de démonstration plus générales impliquant des énoncés concernant des propriétés générales, émerge l'idée que le corpus des énoncés géométriques se doit d'être structuré en théories elles-mêmes organisées autour de principes généraux. Déjà, Carnot exprimait ce changement radical de conception du travail géométrique lorsqu'il affirmait que son intention n'était pas d'ajouter de nouveaux résultats particuliers à la géométrie mais plutôt de parvenir à des résultats généraux d'où l'on pourrait dériver les propositions particulières. De même, Poncelet¹⁸ qui annonce qu'il ne sera question dans son travail que de propriétés qui auront toute la généralité possible puisque «ces propriétés renferment implicitement toutes

¹⁶[Chasles, 1837a, 208].

¹⁷[Chasles, 1852].

¹⁸[Poncelet, 1818].

les autres»¹⁹. Chasles est sûrement celui qui exprime le mieux la volonté de constituer des théories générales s'appuyant sur quelques principes fondamentaux comme celles des figures homographiques ou corrélatives.

En même temps que l'on passe d'une *géométrie des problèmes* à des *théories géométriques*, on assiste à un effacement progressif de la figure. Le lien entre figure particulière et propriété géométrique est conservé par Carnot dont l'objectif est justement de ne considérer en dernière instance que des propriétés explicites, c'est-à-dire applicables à une figure particulière. Ce lien se dissout chez Poncelet grâce à l'admission du principe de continuité qui est effectivement un principe de permanence des propriétés au delà de la position relative des éléments de la figure et même de l'existence effective de certains de ces éléments. En concevant la géométrie comme un ensemble de théories, Chasles et Steiner, au sens propre comme au sens figuré, efface les figures. Le géomètre ne se confronte plus à une configuration particulière mais au contraire s'intéresse à la manière dont certaines formes peuvent être liées : il est symptomatique que Chasles et Steiner subordonnent l'étude des lignes droites, des cercles ou des sections coniques à celle des relations projectives entre les points d'une droite ou les droites d'un faisceau et des relations.

Von Staudt poursuivra ce programme en renonçant, contrairement à ces prédécesseurs, à toute notion de mesure. Poncelet, Steiner ou Chasles utilisent et étudient des relations métriques ou angulaires. Ainsi, Steiner ou Chasles définissaient la notion de formes projectives par la conservation du birapport. Avec sa *Geometrie der Lage*²⁰, Von Staudt tente de fonder une pure géométrie de l'incidence des formes géométriques, une géométrie où seuls les points, les droites, les plans et leurs relations jouent un rôle. Von Staudt exprime exclusivement en terme d'incidence la notion d'harmonicité à partir des propriétés du quadrilatère complet et ose définir la notion de relation projective entre formes de première espèce par la conservation des formes harmoniques. Il ne peut reprendre la définition de Steiner puisqu'il refuse toute considération de mesure; il ne peut non plus se contenter du point de vue de Poncelet qui concevait les projections comme une succession de perspectives car cette définition ne s'étend pas vraiment aux formes de troisième espèce. Au contraire, une part de son projet géométrique est de montrer qu'il peut retrouver les définitions de ses prédécesseurs : qu'une relation projective entre forme de première espèce au sens de Staudt soit une composition de perspectives est un corollaire du théorème fondamental de la géométrie projective. Retrouver la définition de Steiner sera une entreprise plus longue qui mettra en jeu la théorie des jets développées dans les *Beiträge zur Geometrie der Lage*²¹.

Le statut de la théorie des coniques est emblématique de cette première période de l'histoire de la géométrie projective au 19^e siècle. Poncelet reprend la définition traditionnelle des sections coniques comme projection d'un cercle. Cette définition est remarquablement compatible avec les théories de Poncelet et les principes de projection sont pour l'essentiel énoncés pour unifier et simplifier l'étude des propriétés des coniques. La théorie des coniques supplémentaires permet d'introduire la notion de polarité. Poncelet pratique une géométrie des figures et en ce sens la théorie des coniques occupe une place fondamentale dans le corpus des théorèmes de géométrie. Steiner définira (comme Chasles) les co-

¹⁹[Poncelet, 1818, 298].

²⁰citépStau1847.

²¹[Staudt, 1856, 1857, 1860].

niques à partir de la notion de formes projectives : les coniques apparaissent comme les lieux des points d'intersection des droites correspondantes de deux faisceaux projectifs de droites ou comme enveloppées par les droites joignant les points correspondants de deux ponctuelles projectives. Von Staudt va plus loin. Les coniques sont définies comme les courbes doubles d'une polarité, c'est-à-dire d'une involution réciproque entre formes de seconde ou de troisième espèce. La théorie des coniques apparaît comme complètement subordonnée à celle des relations projectives entre formes. Von Staudt étendra la notion de formes fondamentales de première espèce à celle de formes élémentaires qui comprend outre les formes fondamentales, les coniques et les systèmes réglés. Les formes élémentaires sont pour Staudt les entités les plus générales susceptibles de relations projectives ; les coniques ne sont plus que des supports d'involution à partir desquels von Staudt développe sa théorie des éléments imaginaires et celle des jets.

Parmi toutes les figures évoquées ici, Von Staudt est sûrement le personnage central ; en effet, sa *Geometrie der Lage* achève la première période de renaissance du point de vue synthétique mais en même temps en fondant l'étude des formes géométriques sur le théorème fondamental de la géométrie projective et la notion d'involution, il inaugure la seconde période qui sera centrée autour de deux problèmes essentiels de fondements : d'abord l'axiomatisation des diverses géométries et en particulier de la géométrie projective, puis éclaircir la question de l'introduction des considérations numériques ou algébriques. La démonstration du théorème fondamental est l'occasion d'analyser l'importance des questions de continuité et d'ordre en géométrie projective. En effet, Klein décèle en 1873 une lacune dans la démonstration de von Staudt du théorème fondamental. La difficulté soulignée par Klein est liée à des questions de continuité. Klein, Lüroth, Zeuthen, Darboux, Schur contribueront à réparer la preuve de von Staudt et à préciser les hypothèses de continuité qui sont nécessaires. En rencontrant les travaux de Dedekind ou de Cantor, l'histoire de la géométrie projective croise ici celle des fondements de l'analyse. Cette discussion s'approfondit lorsque Wiener constatant que le théorème fondamental de la géométrie entraîne les théorèmes de Desargues et Pappus, pose la question de savoir si l'admission de ces théorèmes suffit pour prouver le théorème fondamental. En 1899, Schur donne une preuve du théorème fondamental sans utiliser les axiomes de continuité, uniquement en utilisant les théorèmes de Desargues et Pappus. Dans le cadre euclidien, Hilbert construit grâce au calcul des segments le corps de nombres correspondant et montre que l'admission du théorème de Desargues est équivalent à l'existence d'un corps sur lequel est modelée la géométrie. L'étude des relations entre géométrie synthétique et analytique est approfondie lorsque Schur montre en 1909 (en reprenant un raisonnement de Hilbert) que dans une géométrie arguésienne, le théorème de Pappus est équivalent à la commutativité de la multiplication du corps formé par les jets.²² Le théorème de Pappus, le théorème fondamental de la géométrie projective et la commutativité de la multiplication du corps sur lequel est modelé la géométrie projective sont donc équivalents.

²²Hessenberg montrera plus tard que les axiomes d'incidence et le théorème de Pappus entraînent le théorème de Desargues. Ce résultat ne concerne que la géométrie plane puisque le théorème de Desargues est une conséquence des seuls axiomes projectifs en dimension supérieure ou égale à trois. Par contre, Hilbert prouve en 1899 que le théorème de Pappus ne peut être une conséquence des seuls axiomes projectifs.

Cette discussion est évidemment liée au projet d'axiomatisation tel que Hilbert le concevait avec les *Grundlagen der Geometrie*²³, c'est-à-dire une pratique de l'axiomatisation qui structure les théories et les corpus, qui rend compte des relations déductives entre les théorèmes. Les autres axiomatiseurs ne participeront pas directement à l'approfondissement de la question de l'introduction des considérations numériques en géométrie. Ainsi, Pasch refusera d'utiliser des hypothèses de continuité et remplacera celles-ci par des postulats de congruence qui lui apparaissent plus conformes à son épistémologie empiriste. Pasch en déduit une algébrisation de la géométrie projective en montrant que le corps sur lequel est modélisée la géométrie des réseaux est le corps des rationnels. La question de la continuité n'est évoquée que lorsqu'il évoque la question d'appliquer les résultats de la géométrie analytiques au cadre géométrique général mais Pasch ne cherche en aucun cas à fonder cette dernière. Pieri n'introduit que le postulat de continuité dans ses axiomatiques ; il s'intéresse beaucoup plus à exposer la géométrie projective comme système formel, à étudier quels peuvent être les objets fondamentaux à partir desquels on peut développer de tels systèmes formels.

Cet ouvrage est organisé pour la première moitié du 19^e siècle autour de la présentation des travaux de Carnot, Poncelet, Steiner et von Staudt. La seconde partie est structurée autour de la question de la preuve du théorème fondamental de la géométrie projective et des questions d'axiomatisation. L'histoire générale de la géométrie projective au 19^e siècle est un sujet trop vaste et trop divers pour un seul volume. En particulier, les travaux de géométrie analytiques comme ceux, pourtant fondamentaux, de Möbius et de Plücker ne sont pas étudiés ; les conceptions de ces deux géomètres n'influencent que très peu les travaux de géométrie synthétique puisque fondés sur la notion de coordonnées. L'intersection essentielle entre les travaux de Möbius et ceux de la tradition synthétique est la notion de réseau (dit de Möbius) que Möbius introduit dans *Der barycentrische Calcul*²⁴ et qui est reprise dans les discussions sur la continuité des formes fondamentales. La notion de collinéation entre deux plans entre deux points inspire sûrement la définition de la relation de collinéarité de deux plans par von Staudt ou celle d'homographie de Chasles. L'idée de conservation du birapport est aussi commune à Möbius, Steiner et Chasles. Pour autant les conceptions, les méthodes, la philosophie des travaux de Möbius n'entrent pas directement en considération dans les travaux de géométrie synthétique. Il en est de même de ceux de Plücker²⁵ à l'exception de la controverse sur la question de la dualité. En effet, dès que l'on applique la théorie de la dualité aux courbes algébriques de degré supérieur ou égal à trois, il devient difficile de comprendre pourquoi et comment la courbe duale de la courbe duale d'une courbe est la courbe originale sans faire appel à des notions analytiques.²⁶ Cette discussion point ici en quelque sorte une limite du point de vue synthétique mais pour autant la perception de celle-ci n'influence que très peu le programme de recherche de la géométrie synthétique.

²³[Hilbert, 1899].

²⁴[Möbius, 1827].

²⁵[Plü].

²⁶Pour plus de détails sur cette question, on peut consulter l'ouvrage à paraître de J. Gray [2007]. À la lumière de cette discussion sur le degré de la courbe duale, le nombre de points de rebroussement et de tangente double d'une courbe algébrique, on comprend mieux pourquoi von Staudt [1847] tente dans sa *Geometrie der Lage* d'étudier de manière purement synthétique les éléments de rebroussements des courbes ou des faisceaux de droites.

Remerciements

Avant de poursuivre, je voudrais exprimer ma reconnaissance aux membres des Archives Poincaré (UMR7117 du CNRS), aux participants du séminaire d'histoire des mathématiques (IHP), du séminaire *Histoires de géométries* (MSH), du groupe de travail sur la *généralité* (Rehseis), de celui sur l'histoire des courbes (Villejuif), des séminaires d'histoire et de philosophie des mathématiques des universités de Paris 8, de Nice et de Clermont-Ferrand qui ont supporté avec constance mon projet en m'invitant et en interrogeant mon travail ; les questions, remarques, suggestions qui m'ont été faites lors de ces séances de séminaires m'ont obligé à approfondir ma réflexion.

Enfin, Gerhard Heinzmann, Lionel Bérard Bergery, Christian Gilain, Jeremy Gray, David Rowe, Erhard Scholz, Klaus Volkert, Viviane Lopez, Lucile Nabonnand, Anny Bégard, Dominique Flament, Jeanne Peiffer, Catherine Goldstein, Hélène Gispert, Karine Chemla, Marie-Jo Durand, Jacqueline Boniface, Jim Ritter, Philippe Abgrall, Roshdi Rashed, Christian Houzel, John Coltrane, Sébastien Gandon, Manuel Rebuschi, Laurent Rollet, Pierre Édouard Bour, Scott Walter et de nombreux autres savent pourquoi je les remercie tout particulièrement.

Chapitre 2

L'émergence d'un désir de géométrie

2.1 La méthode des signes de Carnot

L'essentiel des contributions de Lazare Carnot à la géométrie est contenu dans trois ouvrages : *De la corrélation des figures de géométrie* [Carnot, 1801], *Géométrie de position* [Carnot, 1803] et *Mémoire sur la Relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace ; suivi d'un essai sur la théorie des transversales* [Carnot, 1806]. L'intention de Carnot est de justifier et de mettre en œuvre des méthodes permettant de traiter les problèmes de géométrie en s'affranchissant des positions respectives des éléments des figures géométriques. En particulier, son objectif est de montrer que l'on peut développer de telles méthodes sans pour autant accorder un statut au signe « $-$ » (ou à la considération des éléments imaginaires) autre qu'opérateur. Il distingue deux sortes de rapports entre les parties d'une figure géométrique : les rapports de grandeur et ceux de position. Les rapports de grandeur concernent la valeur absolue des quantités et les rapports de position sont ceux qui expriment la position respective des éléments de la figure, qui indiquent «si tel point est placé au-dessus ou au-dessous de telle droite, à droite ou à gauche de tel plan, au-dedans ou au-dehors de telle circonférence ou de telle surface courbe, etc» ([Carnot, 1801, 1] & [Carnot, 1803, 1]). Pour Carnot, les rapports de position bien qu'attachés à des situations particulières des figures sont susceptibles d'un traitement général. L'idée est d'exprimer les propriétés d'une figure sous forme de formules, puis de préciser comment les changements de situation de certains éléments de la figure affectent ces formules :

Le mode que je me propose de suivre consiste à rapporter chaque figure dont on recherche les propriétés, à une autre figure dont les propriétés sont connues, et qu'on prend pour terme de comparaison ; puis à l'aide de caractéristiques particulières, et de l'arrangement systématique des lettres employées pour désigner les points qui déterminent les diverses parties de ces figures, on exprime les

modifications qui les distinguent : c'est ce que j'appelle *établir la corrélation des figures* [Carnot, 1801, 1] & [Carnot, 1803, 1]

Si la méthode de résolution des problèmes géométriques exposée dans ces deux premiers traités ([Carnot, 1801, 1803]) est la même, on peut néanmoins y déceler un léger changement de perspective; dans son ouvrage sur *la corrélation des figures*, Carnot [1801] se propose essentiellement d'introduire dans le cadre de la géométrie pure (celle qui n'utilise pas les méthodes de l'analyse) l'étude des figures corrélatives; le projet de *Géométrie de position* [Carnot, 1803] est plus ambitieux puisque Carnot argumente longuement pour montrer que le principe de corrélation sur lequel il appuie son point de vue, s'applique aussi bien à la géométrie pure, dont la méthodologie est ainsi étendue, qu'à la géométrie analytique et même à l'ensemble à l'ensemble de l'analyse qui y trouvent une légitimation de l'utilisation d'«objets qui n'existent pas» [Carnot, 1803, 9]. La généralité d'un raisonnement implique pour Carnot de déterminer les conditions d'application de ce raisonnement à un ensemble de figures corrélatives (obtenues par déplacement continu d'une ou plusieurs parties de cette figure) d'une figure considérée comme primitive; Carnot distingue plusieurs types de corrélations : les corrélations *directes* dans lesquelles n'intervient aucun changement de position relative des éléments, les corrélations *indirectes* dans lesquelles certains éléments de la figure changent de position relative et les corrélations *complexes ou imaginaires* dans lesquelles certains éléments de la figure disparaissent. Plus généralement, lorsque l'on peut appliquer termes à termes un raisonnement à deux systèmes de quantités, ces deux systèmes sont dits *directement corrélatifs* à ce raisonnement, par contre, si ce raisonnement n'est plus directement applicable aux deux systèmes et nécessite d'être adapté à chacun des systèmes, les deux systèmes de quantités sont dits *indirectement corrélatifs* par rapport à ce raisonnement. En particulier, si une formule qui se déduit d'un raisonnement par rapport auquel deux systèmes sont directement corrélatifs, s'applique immédiatement à un des systèmes, alors elle est aussi immédiatement applicable à l'autre :

[...] pour appliquer immédiatement [à l'autre système] la formule trouvée pour le premier, il n'y aura pas d'autre changement à faire que d'y substituer, à la place des valeurs absolues qui y entrent, les valeurs correspondantes de l'autre système, sans aucun changement dans les signes de la formule. [Carnot, 1801, 7-8]

Par contre, si les deux systèmes sont indirectement corrélatifs par rapport à un raisonnement, alors certaines formules qui se déduisent de ce raisonnement et qui sont immédiatement applicables à un des systèmes, nécessitent pour être applicables à l'autre système des modifications de signes. Carnot induit à partir de ces considérations un nouveau mode de raisonnement en géométrie; on obtient d'abord le résultat (exprimé par une ou plusieurs formules liant des quantités géométriques) dans le cas d'une figure particulière, *la figure primitive* à partir de laquelle on définit les figures corrélatives (directes, indirectes ou complexes). Selon le type de corrélation, on analyse comment modifier les formules établies sur la figure primitive pour les rendre immédiatement applicables aux figures corrélatives. Pour cela, Carnot distingue les propriétés *explicites, immédiatement applicables au système considéré* ou aux systèmes directement corrélatifs, et celles *implicites* qui ne sont pas immédiatement applicables au système considéré mais le sont à un système (indirectement) corrélatif. Il est clair que ces distinctions

ne sont pas absolues mais relatives à un état du système ou de la figure. Par exemple, si on considère trois points A, B, C alignés, la formule $AC = AB - AC$ est explicite lorsque C est situé sur le segment AB et est implicite si C est à l'extérieur du segment AB . Dans le second cas, la formule implicite n'est pas immédiatement applicable au système lorsque C est à l'extérieur de AB mais le devient au système corrélatif obtenu en faisant glisser le point C à l'intérieur du segment AB . Les quantités qui ne subissent aucune mutation de signe sont dites *directes* et celles qui en subissent une sont dites *inverses*.

Carnot résume les principes de sa méthode en distinguant deux niveaux de corrélation : la corrélation des valeurs absolues qui relève de la corrélation de construction et celle des signes qui relève de la corrélation des positions :

Pour rendre les formules d'un système quelconques de quantités, immédiatement applicables à un autre système qui lui soit corrélatif, il faut, 1. établir la corrélation des valeurs absolues, en substituant, pour chacune de celles qui appartiennent au système primitif pris pour terme de comparaison, la valeur absolue qui lui correspond dans l'autre système; 2. établir la corrélation des signes, en changeant dans les formules le signe de chacune des valeurs dont les quantités se trouvent en sens inverse dans le second système; et laissant au contraire, à chacune des autres le signe qu'a sa correspondante dans le système primitif. [Carnot, 1801, 11-12]

Réciproquement, les changements de signes dans les formules correspondent à des corrélations de figures, certaines réelles, d'autres complexes :

On voit par-là qu'ayant des formules immédiatement applicables à un système quelconque de quantités, si l'on vient à changer le signe d'une ou plusieurs des valeurs qui y entrent, elles cesseront d'être immédiatement applicables au même système; que le nouveau système pour lequel elles peuvent devenir explicites, est en corrélation indirecte avec le premier; et que, pour le trouver, il faut, parmi tous les systèmes corrélatifs possibles, chercher celui auquel satisfont les changements opérés dans les signes; c'est-à-dire, celui auquel les formules ainsi modifiées, pourront être immédiatement applicables.

Mais il pourroit se faire qu'aucun système transformé ne pût satisfaire au changement opéré dans les signes : dans ce cas, le nouveau système ne seroit ni directement, ni indirectement corrélatif avec le système primitif : néanmoins il conserveroit avec lui une sorte de corrélation que je nomme *complexe*; et de-là naît la notion des imaginaires [...]. [Carnot, 1801, 15]

Des formules qui sont explicites (resp. implicites) par rapport à un certain système deviendront par rapport à un système transformé implicites (resp. explicites). Ainsi, une fois le changement des signes opéré dans une formule, celle-ci devient une propriété immédiatement applicable au système corrélatif, ce système pouvant lui-même devenir l'étalon par rapport auquel on déterminera les corrélations. La figure primitive ou le système primitif et le problème qui lui associé n'a pas de statut privilégié par rapport aux cas corrélatifs. L'utilisation par Carnot de la notion de *système primitif* est d'ordre purement pédagogique (elle lui permet d'exprimer de manière compréhensible sa méthode) et méthodologique. Par exemple, les problèmes que Carnot étudie dans son ouvrage *De la corrélation des figures de géométrie* [Carnot, 1801] à la suite d'un exposé mé-

thodologique général commence tous par une construction explicite d'une figure à partir de laquelle il développe son exposé. Le principe des corrélations permet d'étendre (moyennant certaines modifications des formules) des résultats obtenus dans le cas d'une figure particulière à un ensemble de figures. Chaque figure reste particulière, elle est simplement inscrite dans un réseau d'ensemble de figures corrélatives. Dans la présentation de Carnot, il n'y a pas de figure générale, ni de raisonnement généraux; sa méthode des corrélations permet simplement d'étendre la validité des résultats obtenus dans un cas particulier à d'autres configurations ou systèmes corrélatifs. C'est cette possibilité d'étendre les résultats obtenus dans le cas d'une figure particulière à l'ensemble des figures corrélatives qui leur confère un caractère de généralité :

En regardant tous les systèmes qui sont corrélatifs entre eux, comme les différens états du système primitif qui varie par degrés insensibles, on pourra regarder les formules trouvées pour ce système primitif, comme appartenant à tous les autres, en supposant qu'alors les quantités qui y entrent cessent de représenter ces quantités primitives; mais qu'elles y expriment les valeurs corrélatives qu'elles ont dans le système auquel on voudra les appliquer. C'est dans ce sens que ces formules deviennent générales; mais alors l'application à chaque cas particulier ne peut réellement être effectuée, qu'en opérant cette substitution de la valeur corrélative. [Carnot, 1803, 50]

Carnot signale que la notion de corrélation est composable et qu'il n'est nul besoin de tout ramener à un système primitif pour analyser une corrélation entre deux systèmes : deux systèmes qui peuvent être ramenés l'un à l'autre «au moyen d'une mutation que l'on imagineroit s'opérer par degré insensibles» seront considérés comme corrélatifs et les quantités qui se correspondent dans les deux systèmes seront elles-aussi nommées *quantités corrélatives*. L'ensemble des systèmes corrélatifs peut donc être «considérés comme un seul et même système transformé de diverses manières» [Carnot, 1801, 25]. Comme cela a été souligné par Gillespie [1979], l'imaginaire géométrique de Carnot est très influencé par ses travaux en mécanique et il y a une analogie très forte entre les transformations d'une figure et celles d'un système mécanique. On ne peut néanmoins réduire à cette seule analogie la présentation que fait Carnot de la notion de corrélation. En effet, Carnot ne décrit pas seulement des figures corrélatives comme des figures qui peuvent être dérivées l'une de l'autre par une suite de transformation insensibles mais aussi comme des systèmes de points en nombre égaux, se correspondant deux à deux, dans lesquels on trace un même nombre de droites, de circonférences, par lesquels on mène un même nombre de plans «en menant toujours ces droites, ces circonférences, ces plans, par les points correspondants; et qu'enfin tout ce qui est exécuté d'un côté le soit pareillement de l'autre» [Carnot, 1801, 56]. Ces considérations permettent à Carnot de décliner la thématique de la généralité à un autre niveau celui des problèmes. Sa méthode des corrélation l'amène à envisager un nouveau type de problèmes qu'il qualifie lui-même de généraux. En effet, puisque chaque système (ou figure) peut être considéré comme appartenant à un ensemble de systèmes (ou figures) corrélatifs, un autre objectif du géomètre sera alors de déterminer des formules qui s'appliquent à l'ensemble de ces systèmes (ou formules) :

Il se présente une autre question importante à faire sur la comparaison de deux systèmes corrélatifs, ayant chacun sa formule propre ou

explicite : c'est d'en trouver une troisième qui les renferme l'une et l'autre, ou qui soit immédiatement applicables aux deux systèmes. [...] Au reste, c'est une recherche curieuse et importante que cette généralisation des formules, ou l'art de rendre immédiatement applicables à tous les systèmes corrélatifs possibles, celles qui sont trouvées pour un seul pris comme terme de comparaison : on peut employer pour cela divers moyens ; mais le but commun de tous, est toujours d'éliminer ou faire disparaître, soit par des substitutions, soit par des transformations quelconques, toutes les quantités qui se trouvent respectivement inverses entre ces divers systèmes. [Carnot, 1801, 22]

Cette méthode est beaucoup plus qu'une méthode géométrique. Selon Carnot, et cela justifie son utilisation en géométrie, elle est appliquée en arithmétique et en algèbre et relève du raisonnement en général :

Ainsi, cette théorie dérive essentiellement d'un principe fondamental qui ne s'applique pas seulement à la question ici traitée, mais à toutes les parties des mathématiques et de la dialectique en général ; et qui consiste à rapporter toujours l'objet qu'on veut considérer à un autre objet connu que l'on prend pour terme de comparaison ; car en observant la marche de l'esprit dans la recherche des vérités, on voit facilement qu'elle se réduit toujours à décomposer les questions qui sont trop compliquées, eu égard à l'étendue de nos facultés intellectuelles, pour les ramener à des questions plus simples. [Carnot, 1801, 26-27]

Pour Carnot, le principe de numération, les algorithmes des opérations de l'arithmétique et les techniques algébriques de résolution des équations sont des exemples d'application de cette méthode ; cette méthode relève de l'idéal combinatoire du 18^e siècle : l'objectif est de décomposer les systèmes trop complexes (ou les opérations «sur des nombres trop considérables») pour être traités directement en des systèmes (ou des opérations) plus simples et de rassembler les résultats partiels. En géométrie, de la même manière, les figures trop compliquées et que l'on ne peut se représenter que trop vaguement seront décomposées en figures plus simples.

[...] en la [une figure initiale complexe] décomposant en figures plus simples, en comparant successivement deux à deux, trois à trois, les signes et les angles qui la composent, on parvient à découvrir tous les rapports partiels. On lie ensuite ces rapports ; et de ces combinaisons successives, résulte la découverte des diverses propriétés de la figure. [Carnot, 1801, 28]

L'étude des propriétés des polygones s'effectue par réductions successives. Ainsi, l'étude des propriétés du quadrilatère sont obtenues à partir des propriétés du triangle, celles du pentagone à partir de celles du quadrilatère, et celle des polygones généraux souvent par induction. Pour Carnot, les problèmes géométriques sont donc généraux et leur résolution s'obtient grâce au principe de corrélation à partir de l'étude des figures particulières. Quelle géométrie développe Carnot ? de son propre aveu, les questions qui sont abordées dans la *Géométrie de Position* ressortent pour la plupart de ce qui était alors considéré comme la géométrie élémentaire (au sens de la géométrie des anciens). Carnot rappelle l'utilité pédagogique de l'enseignement de cette géométrie :

En effet, on convient assez généralement aujourd'hui, que la principale utilité des sciences exactes, poussées au-delà de ce qu'il y a de plus usuel pour la pratique des arts, est d'accoutumer l'esprit à la réflexion, à la justesse et à l'enchaînement des idées. Or, cet objet est, par excellence, celui de la géométrie des anciens. Car si cette géométrie est dite élémentaire quant au sujet dont elle s'occupe, elle ne l'est nullement quant à la difficulté; et sous ce rapport, elle ne cède point aux spéculations analytiques.[Carnot, 1803, xxx]

En même temps, Carnot défend l'idée d'étendre le champ de la géométrie. Il s'étonne que «la science des projections» ne soit pas considérée comme partie intégrante de la géométrie élémentaire – il réfute l'argument qui consiste à renvoyer cette théorie dans le champ des applications de la géométrie parce qu'il est, de son point de vue, très difficile de faire la part entre les principes et les applications. Il en est de même de ce que Carnot appelle la science des polygones ou de l'étude des centres de gravité «qui appartiennent réellement à la géométrie». De plus, les principes tels qu'ils sont exposés dans la géométrie élémentaire ne sont pas suffisants :

Il semble que ce qu'on nomme principes doit être la collection des vérités qui une fois bien connues, suffisent pour que l'application aux cas particuliers les plus communs devienne facile. Or, si cela est, je dis que les éléments ordinaires ne suffisent point, car le passage de ces éléments à la science des projections, exige de nouveaux préceptes, et des développements considérables à étudier. [Carnot, 1803, xxxi-xxxii]

Même, note Carnot, si l'on accorde que «ce que l'on comprend ordinairement sous le nom de *géométrie élémentaire* n'est autre chose que le recueil méthodique des propriétés les plus simples et les plus usuelles des figures composées de lignes droites et de circonférences de cercles», les diverses présentations de celle-ci sont incomplètes : les problèmes abordés ne concernent des propriétés particulières des figures et n'ont aucun caractère de généralité :

On voit par là, qu'il ne s'agit pas de grossir les éléments ordinaires d'un grand nombre de nouvelles propositions, quelques curieuses et subtiles qu'elle puisse être, mais de parvenir à la solution d'un problème général qui les renferme toutes comme cas particulier dans ses développemens, et d'où elles dérivent par une simple combinaison de formules. [Carnot, 1803, xxxiii]

Or, pour que l'objectif même de la géométrie élémentaire soit atteint, il faut développer une théorie capable de résoudre des problèmes généraux tels celui cité par Carnot :

Dans un système quelconque de lignes droites, tracées ou non dans un même plan, quelques-unes d'elles, ou des angles qui résultent de leur assemblage, soit entre elles-mêmes, soit entre les plans qui les contiennent, étant donnés en nombre suffisant pour que toute la figure soit déterminée, trouver tout le reste. [Carnot, 1803, xxxiii]

Carnot insiste pour signifier que son objectif n'est pas de «grossir les éléments ordinaires d'un grand nombre de nouvelles propositions» mais bien «de parvenir à la solution d'un problème général qui les renferme toutes comme cas particuliers dans ses développemens, et d'où elles dérivent par une simple combinaison

de formules». On voit ici apparaître que Carnot inscrit son épistémologie de la généralité dans l'idéal combinatoire du 18^e siècle.

2.2 Le rejet des quantités négatives

Carnot rappelle le projet de Leibniz d'une *Analyse de Situation* et le commentaire de d'Alembert qu'une telle analyse permettrait de pallier le défaut de l'algèbre ordinaire qui introduit dans le déroulement des calculs des solutions qui ne concerne pas le cadre particulier d'un problème. La résolution algébrique des problèmes géométriques est en quelque sorte trop générale.

Il est certain, dit d'Alembert, que l'analyse de situation est une chose qui manque à l'algèbre ordinaire : c'est le défaut de cette analyse qui fait qu'un problème paroît souvent avoir plus de solutions qu'il n'en doit avoir dans les circonstances limitées où on le considère. Il est vrai que cette abondance de l'algèbre, qui donne ce qu'on ne lui demande pas, est admirable à plusieurs égards ; mais aussi elle fait souvent qu'un problème qui n'a réellement qu'une solution, en prenant son énoncé à la rigueur, se trouve renfermé dans une équation de plusieurs dimensions, et par-là, ne peut, en quelque manière, être résolu. Il seroit à souhaiter que l'on trouva moyen de faire entrer la situation dans le calcul des problèmes ; cela les simplifieroit extrêmement pour la plupart ; mais l'état et la nature de l'analyse algébrique ne paroissent pas le permettre. (*Encyclopédie*, art. Situation) [Carnot, 1803, i]

Le problème est d'exprimer la diversité des positions des parties constituant une figure de manière à mieux pouvoir les séparer dans le calcul – on ne cherche pas une méthode qui permettrait de résoudre le problème en toute généralité mais au contraire une méthode de description des situations géométriques qui permet d'analyser et de distinguer l'ensemble des cas possibles pour les pouvoir les traiter chacune en particulier. Or, selon Carnot, «cette diversité de positions s'exprime par de simples mutations de signes» :

La Géométrie de position est donc, à proprement parler, la doctrine des quantités dites positives et négatives, ou plutôt le moyen d'y suppléer ; car cette doctrine y est entièrement rejetée. [Carnot, 1803, ii]

On peut grâce à l'usage des signes «+» et «-» (dans les formules algébriques) exprimer «les propriétés analogues de diverses figures, dont la construction est essentiellement la même, et qui ne diffèrent entre elles que par la transposition des parties correspondantes» [Carnot, 1803, ii]. Mais si ce procédé est utile, il est aussi dangereux aux yeux de Carnot de le généraliser. Le problème est que si l'on peut soustraire à une quantité positive plus grande une certaine quantité plus petite (dans ce cas, la signification de la notion de quantité négative ne pose pas de problème), il n'en est pas de même lorsque l'on est conduit à considérer des «expressions de formes négatives isolées».

[...] lorsqu'on veut savoir au juste le sens de ces expressions, on manque de principes clairs, parce qu'elles sont amenées par des opé-

rations qui ne sont claires elles-mêmes et exécutable, que pour les quantités positives ou plutôt absolues. [Carnot, 1803, ii-iii]

Le signe « $-$ » n'a de sens que dans la mesure où il exprime une possibilité d'opération et mettre un signe « $-$ » devant une quantité n'a pas de sens en soi et n'en au contraire que lorsque cette opération peut effectivement être effectivement réalisée :

Pour obtenir réellement une quantité négative isolée, il faudrait retrancher une quantité effective de zéro, ôter quelque chose de rien : opération impossible. Comment donc concevoir une quantité négative isolée ? [Carnot, 1803, iii]

Carnot rappelle que d'Alembert soulignait déjà l'insuffisance des théories habituelles mais que malheureusement sa critique ne débouchait pas sur une théorie satisfaisante. De même, Euler malgré l'usage virtuose qu'il fait des valeurs négatives (et imaginaires) ne s'arrête guère sur l'analyse du statut de ces valeurs :

[...] il [Euler] dit que les quantités négatives sont moindres que zéro. Mais il est à présumer que ne voulant pas [...] s'occuper spécialement de cet objet, il s'en est tenu à la notion qui se présente le plus naturellement, quoique dénuée d'exactitude. [Carnot, 1803, vi]

Outre la conception défendue par Euler, une autre peut être envisagée, «celle qui consiste à dire, que les quantités négatives sont de même nature que les quantités positives, mais prises dans un sens contraire». Carnot est convaincu par les critiques de d'Alembert et les reprend à son compte. La première conception, celle d'Euler, est critiquée parce que si -3 est plus petit que 2 , alors il est contre-intuitif que $(-3)^2$ puisse être plus grand que 2^2 . La seconde est repoussée en arguant que «si deux quantités, l'une positive, l'autre négative, étoient aussi réelles l'une que l'autre et ne différoient que par leurs positions, pourquoi la racine de l'une seroit-elle une quantité imaginaire tandis que celle de l'autre seroit effective?» [Carnot, 1803, ix]. Pour Carnot, une quantité, par exemple la mesure d'un segment, serait positive ou négative en fonction de la position d'une origine et non pas en fonction du sens de parcours du segment. Il obtient alors assez facilement des paradoxes : si O est le milieu de AB , en considérant que O est l'origine, AO et OB sont des quantités opposées et $AO + OB = 0$ ce que refuse Carnot puisque pour lui $AO + OB = AB$. Carnot ne se contente pas de souligner les erreurs auxquelles, à son avis, conduit la théorie des quantités négatives ; il illustre par des exemples que arriver à des solutions négatives en résolvant un problème prouve simplement que celui-ci n'a pas de solutions ou qu'il faut le reformuler en considérant un système indirectement corrélatif : en considérant par exemple un triangle ABC tel que $AC = BC = \frac{2}{3}AB$, la détermination de CD lorsque l'on pose les calculs en admettant que D est entre B et C , on obtient la valeur négative $-\frac{1}{12}AB$. Cette valeur n'a pour Carnot d'autre signification que le problème n'a pas été mis correctement mis en équation et que l'on n'a pas considéré le «véritable système qui satisfait aux conditions du problème» [Carnot, 1803, 32]. Il faut pour le découvrir changer dans les équations le signe de CD , ce qui conduit à supposer que « C tombe entre B et D ». Plus généralement, si la résolution algébrique d'un problème conduit à des valeurs positives et négatives, celles positives correspondent au système sur lequel on a effectué la mise en équation et le raisonnement alors que les racines négatives correspondent à des problèmes concernant des systèmes (indirectement) corrélatifs ou sont insignifiantes :

[...] on a cru pouvoir conclure généralement, qu'en géométrie les racines négatives indiquoient toujours des quantités effectives, prises seulement dans le sens opposé à celui des racines positives; mais cette conclusion paroît sujette à bien des restrictions, car si le signe négatif qui affecte ces racines peut venir, comme on l'a vu ci-dessus, de ce que la question proposée renferme en elle-même des conditions incompatibles ou de ce qu'on auroit établi le raisonnement sur des hypothèses incompatibles avec ces mêmes conditions; ce signe peut venir aussi, de ce que les transformations algébriques auroient amalgamé des racines insignifiantes avec les racines positives, les seules qui résolvent réellement et pleinement la question; [Carnot, 1803, 36-37]

Carnot poursuit sa critique de l'utilisation des valeurs négatives en précisant que lorsque par hasard, après avoir considéré des valeurs négatives, on obtient un résultat juste, ce n'est que parce que celle-ci se compensent. Pour autant, Carnot ne nie pas que l'utilisation des valeurs «insignifiantes par elles-mêmes» que sont les valeurs négatives et a fortiori celles imaginaires puissent conduire à des «résultats réels et effectifs». Il y voit même la supériorité de l'approche analytique sur celle de la tradition de la géométrie pure. Carnot oppose alors sa conception de l'utilisation des signes fondée sur l'idée qu'un changement de signe correspond, en géométrie à un changement de position relative des éléments de la figure, plus généralement à un changement de systèmes, et ne signifie pas que des quantités puissent devenir négatives. Il illustre son point de vue par un exemple simple. Considérant une droite CD , T un point à l'extérieur du segment CD , P un point à l'intérieur de ce segment et M un point quelconque de cette droite, soit $a = TP$, $y = PM$ et $z = TM$. Selon la position du point du point M , on obtient $y = z - a$ ou $y = a - z$, «d'où l'on a cru pouvoir conclure que $a - z$ étant $z - a$ prise négativement, y devient en effet négative» lorsque la position du point M change. Or suivant Carnot, l'expression algébrique du type $y = z - a$ ne correspond effectivement qu'aux systèmes de quantités dans lesquels z est plus grand que a . Dans le cas contraire, il faut changer le sens de l'opération et n'appliquer la formule et ne raisonner que par rapport à des systèmes dans lesquels se réalise effectivement :

De-là je conclus, 1°. que toute quantité négative isolée est un être de raison, et que celles qu'on rencontre dans le calcul, ne sont que de simples formes algébriques, incapables de représenter aucune quantité réelle et effective. 2°. Que chacune de ces formes algébriques étant prises, abstraction faite de son signe, n'est autre chose que la différence de deux autres quantités absolues, dont celle qui étoit la plus grande dans le cas sur lequel on a établi le raisonnement, se trouve la plus petite dans le cas auquel on veut appliquer les résultats du calcul. [Carnot, 1803, xviii-xix]

En insistant sur le fait que la donnée d'un signe ne peut que représenter une opération effectivement réalisable, Carnot en appelle au bon sens, à des «idées simples et intelligibles» : les seules quantités existant réellement sont les quantités absolues et «les signes dont elles peuvent être précédées, n'indiquent point des quantités, mais des opérations». L'utilisation des signes ne conduit donc pas à des quantités nouvelles auxquelles il faudrait donner un statut, mais à de simples formes algébriques :

Dire d'une quantité qu'elle devient négative, c'est donc employer une expression impropre [...]; et le vrai sens qu'on doit attacher à cette expression, est que cette quantité absolue, n'appartient point au système sur lequel les raisonnemens ont été établis; mais à un autre qui se trouve avec le premier dans une certaine relation; telle que pour lui rendre applicable les formules trouvées pour ce premier système, il est nécessaire d'y changer de + en – le signe qui la précède. [Carnot, 1803, xix]

Carnot, comme on l'a vu, ne renonce pas pourtant à utiliser des procédures générales en mathématiques et en particulier en géométrie. Pour appliquer de manière générale des raisonnements ou des calculs effectués en considérant une figure particulière, il faut rendre compte de l'évolution des positions relatives des éléments de la figure par des changements de signes dans les expressions algébriques des calculs. Comme Carnot le précise explicitement, abandonner les notions de quantités négatives ou imaginaires, les considérer comme des expressions algébriques ne doit pas compliquer les calculs :

Rien ne change pour cela dans les procédés; tout se réduit à substituer une idée simple et juste, à une idée fautive et inutile: et tel est le but de cet ouvrage. Je crois l'avoir rempli, en substituant à la notion que je viens de combattre, des quantités positives et négatives, celle des quantités que je nomme *directes* et *inverses*.

Ces quantités, que je nomme directes et inverses, ne sont autre chose que les quantités ordinaires ou absolues, mais considérées chacune comme la différence variable de deux autres quantités qui deviennent alternativement tantôt plus grandes, tantôt plus petites l'une que l'autre. Lorsque celle qui étoit la plus grande d'abord, c'est-à-dire dans le système sur lequel on a établi les raisonnemens, demeure constamment la plus grande, la quantité qui exprime la différence de leurs valeurs absolues, se nomme *quantité directe*; lorsqu'au contraire elle devient plus petite, cette différence se nomme *quantité inverse*. Ainsi disparaît toute la métaphysique des quantités positives et négatives. Il ne reste plus que des quantités directes et inverses, qui sont des quantités absolues comme toutes les autres quantités imaginables. Suivant les diverses circonstances où elles se trouvent, on doit conserver le signe qui les précède dans les formules où elles entrent, ou le changer; et c'est la théorie de ces mutations que je nomme *géométrie de position*, parce qu'en effet c'est par elles qu'on exprime la diversité de position des parties correspondantes dans les figures de même genre. [Carnot, 1803, xxii-xxiii]

La différence entre quantités positives et négatives et quantités directes et inverses pourraient paraître ténue; épistémologiquement, elle est fondamentale: Carnot refuse de donner un statut aux quantités positives et négatives et refuse toute «métaphysique» qui s'y risquerait; par contre, il justifie une pratique, celle du changement de signes dans la mise en équation de problèmes ou dans la formulation des propriétés d'une figure. Pour Carnot, la métaphysique des mathématiques consistent à justifier des méthodes et non pas à essayer de donner un quelconque statut à des entités nouvelles; pour aborder les problèmes généraux, il ne faut pas essayer de généraliser les entités mathématiques mais au contraire définir des méthodes générales de manipulation des quantités

absolues :

D'ailleurs, la métaphysique des sciences n'en est pas la portion la moins intéressantes, il est important d'en exclure les idées fausses ou obscures. Or, certainement, pour quiconque veut approfondir le sujet dont il s'occupe, la notion des quantités dites négatives, porte ce caractère, et cependant elle sert de base aux principales opérations de l'algèbre, ou plutôt c'est sur elle que repose entièrement l'analyse algébrique. Les efforts qu'ont faits les plus grands Géomètres pour éclaircir ce point de doctrine, et les contestations auxquelles il a donné lieu, justifient assez une entreprise dont le but spécial a été de faire voir la fausseté comme l'inutilité absolue de cette notion, et d'y en substituer une autre aussi simple que rigoureuse, en revenant seulement aux idées naturelles, et qui se présentent les premières à tout le monde. [Carnot, 1803, xxx]

2.3 La méthode de Carnot

Dans son traité *Géométrie de position* associe à sa théorie des quantités directes et inverses, une méthode pour décrire les modifications qu'une figure peut éprouver lors du changement de position de ses éléments : ainsi, il décrit la *corrélacion de construction* qui consiste à «écrire la série des points qui déterminent chaque figure, en les plaçant dans un même ordre les uns sous les autres, chacun sous son correspondant» [Carnot, 1803, 81], la *corrélacion de position* dans laquelle l'ordre des points sur une droite ou une courbe est indiquée et la corrélation des valeurs absolues. L'objectif de Carnot est de fournir «une sorte de mécanisme [...] propre à rendre plus sensible l'analogie qui lie entre elles les figures d'un même genre, et à rendre les formules trouvées pour l'une successivement applicables à toutes les autres» [Carnot, 1803, xxv].

Outre l'exposition de la règle des signes, l'ambition de Carnot est de développer une méthode générale de démonstration en géométrie. Non seulement, Carnot fournit un principe général (la règle des signes) mais il ajoute une méthode d'utilisation de ce principe.

[...] mais je m'y suis, de plus, proposé un autre but, [...] celui d'exposer une méthode propre à représenter, par des tableaux analytiques, l'ensemble des propriétés d'une figure quelconque proposée, et d'en faire en quelque sorte une énumération complète, ainsi que de celles de toutes les figures qu'on peut lui rapporter.

Pour cela, je considère d'abord cette figure proposée comme un terme de comparaison ou *figure primitive*, et je nomme *figures corrélatives*, celles qu'on se propose de lui comparer.

Dans la figure primitive elle-même, je prends parmi les quantités qui la composent, un certain nombre d'entre elles, suffisant pour qu'étant connues, toutes les autres soient déterminées. Ces nouvelles bases choisies, j'exprime toutes les autres parties de ce système primitif en valeurs de ces premières seules, et j'en forme le tableau général. Ce tableau renferme évidemment tous les rapports cherchés des diverses parties de cette figure primitive, puisqu'il donne le moyen de

les comparer toutes deux à deux par l'intermédiaire des quantités primordiales prises pour leur servir de termes communs de comparaison.

Cette figure primitive étant supposée l'objet réel et existant sur lequel les raisonnemens ont été établis, les formules qui expriment les rapports de ses diverses parties, et qui composent le tableau général dont nous avons parlé, ne peuvent aussi contenir que des expressions réelles et intelligibles; et par conséquent, elles ne peuvent indiquer aucune opération inexécutable, aucune quantité absurde; il ne peut donc s'y rencontrer de quantités négatives isolées, puisqu'une pareille quantité est un être de raison, ni à plus forte raison, de quantités imaginaires; c'est-à-dire que les signes + et - qui entrent dans ces formules, n'y expriment jamais que des opérations qu'on peut effectuer, et n'y peuvent être considérés que comme des abréviations.

Ce tableau des propriétés de la figure primitive une fois établi, il s'agit de savoir quelles modifications on doit y apporter, pour qu'il puisse représenter successivement de la même manière, les propriétés des figures qui lui sont corrélatives. La construction de chacune de celles-ci étant essentiellement la même que celle de la figure primitive, on sent que les formules qui en expriment les propriétés doivent avoir d'autant plus d'analogie avec celles de cette figure primitive, qu'il y a moins de disparité entre elles : les quantités correspondantes doivent s'y trouver combinées de la même manière quant à leurs valeurs propres ou absolues; il ne s'agit donc que d'exprimer la diversité des positions, et c'est ce qui s'opère par la mutation des signes qui affectent ces quantités ou les différens termes des formules du tableau.

Pour découvrir les mutations qui doivent en effet avoir lieu pour tel ou tel système corrélatif, je le regarde comme né du système primitif, en vertu d'une transformation opérée par degrés insensibles, qui ne change rien aux bases générales de la première construction, mais qui modifie seulement les positions respectives, en faisant passer au-dessus ce qui étoit au-dessous, ou à droite ce qui étoit à gauche. De ce mouvement graduel, il résulte, que telle quantité du système qui se trouvoit d'abord plus petite que telle autre, devient plus grande, et respectivement. Or c'est de-là uniquement, et non de ce que ces quantités seroient opposées l'une à l'autre, que naît le principe général de la mutation des signes, qui doit avoir lieu dans les formules du système primitif, pour qu'elles deviennent applicables au système transformé ou corrélatif. [Carnot, 1803, xxvi-xxviii]

La méthode préconisée par Carnot peut se résumer ainsi : il rapporte le problème à une figure particulière et dresse un tableau qui représente l'ensemble des propriétés de cette figure, puis en prenant cette figure comme «terme de comparaison», il imagine «d'y rapporter par des tableaux additionnels [appelés tableaux de corrélation], toutes celles dont la construction est essentiellement la même.

Le premier de ces tableaux n'est autre chose que l'énumération complète des parties tant linéaires, qu'angulaires ou superficielles, etc. qui entrent dans la composition de la figure primitive, toutes ex-

primées en valeurs de quelques-unes seulement d'entre elles, prises en nombre suffisant, pour qu'étant supposées connues, tout le reste soit déterminé. Les autres, c'est-à-dire les tableaux de corrélation, indiquent les mutations qui doivent être faites à ce tableau primitif, lorsqu'on veut l'appliquer, lorsqu'on veut l'appliquer à telle ou telle figure du même genre, ou corrélatifs, c'est-à-dire, qui ne diffère pas essentiellement de la première, mais seulement par quelques modifications ou par la diversité de positions des parties correspondantes. [Carnot, 1803, xxxiii-xxxiv]

2.3.1 Un premier exemple

On considère deux triangles ABC et $A'B'C'$ deux triangles. Soient AD et $A'D'$ les hauteurs issues de A et A' . Si l'on considère que A et A' , B et B' , C et C' sont respectivement corrélatifs, D et D' le seront par construction. Carnot établit le premier tableau établissant la *corrélation de construction* en écrivant «la série des points qui déterminent chaque figure, en les plaçant dans un même ordre les uns sous les autres, chacun sous son correspondant» :

Corrélation de construction.

1 ^{er}	<i>Système.....</i>	$A B C D$	
2 ^e	<i>Système.....</i>	$A'B'C'D'$	[Carnot, 1801, 40].

D'après cette corrélation de construction, on peut établir le tableau de *corrélation des quantités ou des valeurs absolues* entre les segments, angles et surfaces :

Corrélation de valeurs absolues.

1 ^{er}	<i>Système..</i>	$\overline{AB},$	$\overline{AC},$	$\overline{BC},$	$\overline{BD},$	\overline{CD}	
2 ^e	<i>Système..</i>	$\overline{A'B'},$	$\overline{A'C'},$	$\overline{B'C'},$	$\overline{B'D'},$	$\overline{C'D'},$	
		$\overline{AD},$	$B\hat{A}C,$	$A\hat{B}C,$	$A\hat{C}B,$	$B\hat{A}D,$	
		$\overline{A'D'},$	$B'\hat{A}'C',$	$A'\hat{B}'C',$	$A'\hat{C}'B',$	$B'\hat{A}'D',$	
		$C\hat{A}D,$	$\overline{ABC},$	$\overline{ABD},$	\overline{ACD}		
		$C'\hat{A}'D',$	$\overline{A'B'C'},$	$\overline{A'B'D'},$	$\overline{A'C'D'}$		[Carnot, 1801, 45]

Si l'on suppose que D soit placé entre B et C alors que C est placé entre B et D , la *corrélation de position* sera établie par le tableau suivant dans lequel les séries de points sont écrites dans leur ordre d'apparition sur les droites BC et $B'C'$:

Corrélation de position.

1 ^{er}	<i>Système.....</i>	\overline{BDC}	
2 ^e	<i>Système.....</i>	$\overline{B'C'D'}$	[Carnot, 1801, 40].

Comme dans le tableau de corrélation de positions, il y a une inversion entre les points C, D et leurs correspondants C', D' , il faut chercher les quantités qui deviennent inverses lorsque l'on passe du premier système au second. On affectera le signe $-$ aux valeurs qui leur correspondent tandis que celles qui correspondent à des quantités directes seront affectées du signe $+$. On obtient alors le tableau des *valeurs de corrélation* :

Corrélation de valeurs absolues.

1 ^{er}	<i>Système..</i>	$+\overline{AB},$	$+\overline{AC},$	$+\overline{BC},$	$+\overline{BD},$	$+\overline{CD}$	
2 ^e	<i>Système..</i>	$+\overline{A'B'},$	$+\overline{A'C'},$	$+\overline{B'C'},$	$+\overline{B'D'},$	$-\overline{C'D'},$	
		$+\overline{AD},$	$+\overline{B\hat{A}C},$	$+\overline{A\hat{B}C},$	$+\overline{A\hat{C}B},$	$+\overline{B\hat{A}D},$	
		$+\overline{A'D'},$	$+\overline{B'\hat{A}'C'},$	$+\overline{A'\hat{B}'C'},$	$+\overline{A'\hat{C}'B'}$	$+\overline{B'\hat{A}'D'},$	
		$+\overline{C\hat{A}D},$	$+\overline{\overline{ABC}},$	$+\overline{\overline{ABD}},$	$+\overline{\overline{ACD}}$		
		$-\overline{C'\hat{A}'D'},$	$+\overline{\overline{A'B'C'}},$	$+\overline{\overline{A'B'D'}},$	$-\overline{\overline{A'C'D'}}$		[Carnot, 1801, 47]

Carnot établit ce tableau en considérant que le triangle ABC se transforme en $A'B'C'$ par le mouvement de C sur BC (en fait il suppose que A et B restent fixes et que le point C se déplace sur la droite BC). Lors de ce déplacement, les quantités qui ne s'annulent pas, ni ne deviennent infinies sont en sens direct dans le second système ; par contre CD s'annule lorsque C coïncide avec D et cette quantité est susceptible de devenir inverse. Elle le devient effectivement puisque dans le premier système (le système primitif), on a :

$$\overline{CD} = \overline{BC} - \overline{BD} \quad (2.1)$$

et dans le second système (le système corrélatif ou transformé) :

$$\overline{C'D'} = \overline{B'D'} - \overline{B'C'}. \quad (2.2)$$

Carnot montre de la même manière pour les angles ou les triangles lesquels doivent considérés comme des quantités en sens direct et ceux qui deviennent inverses.

Une fois ces tableaux établis, les formules applicables au second système se déduisent automatiquement de celles établies pour le premier système. On obtient par exemple pour le premier triangle la formule

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - 2\overline{BC}.\overline{CD}. \quad (2.3)$$

Cette formule utilise l'hypothèse 2.1. Pour obtenir la formule analogue qui s'applique au second triangle, il suffit de tenir compte du signe $-$ qui apparaît dans le tableau de corrélation devant $C'D'$, on obtient alors la formule

$$\overline{A'B'}^2 - \overline{A'C'}^2 = \overline{B'C'}^2 + 2\overline{B'C'}.\overline{C'D'}. \quad (2.4)$$

On obtient immédiatement en éliminant CD de la formule 2.3 une équation qui s'applique aux deux triangles puisqu'elle ne fait intervenir que des quantités en sens direct :

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 2\overline{BC}.\overline{BD} - \overline{BC}^2. \quad (2.5)$$

2.3.2 Les corrélations générales

Carnot établit une série de tableaux de corrélation (qu'il qualifie de générale) dans lesquelles toutes les positions possibles des éléments de la figure sont envisagées. Il commence suivant sa méthode de réduction des problèmes généraux par le cas le plus simple du triangle. Il propose d'«établir les corrélations de construction et de position qui existent entre deux triangles [...] dans chacun desquels se trouvent les perpendiculaires abaissées de deux quelconques des angles sur les côtés respectivement opposés» [Carnot, 1803, 99]. Le système primitif sera la figure dans laquelle les trois angles du triangle ABC sont aigus. La hauteur issue de C coupe le côté AB en F et celle issue de B coupe le côté AC en G . Les deux hauteurs se coupent en D . La première figure corrélatrice étudiée par Carnot est celle pour laquelle l'angle $B\hat{A}C$ est obtus. Pour déterminer les quantités directes et inverses, il distingue les quantités qui «n'ont passé ni par 0, ni par ∞ , car celles-là seront restées directes, et l'on saura déjà que le signe de corrélation de chacune d'elles est +» [Carnot, 1803, 101-102]. Les autres quantités nécessitent un examen plus approfondi car elles sont susceptibles d'être inverses. Les deux autres figures corrélatrices correspondent chacune au cas où un des autres angles $A\hat{B}C$ ou $A\hat{C}B$ est obtus. Carnot résume les résultats de son étude sous la forme d'un tableau de *corrélation générale des quatre systèmes* ([Carnot, 1803, 107] :

1 ^{er} Syst....	$+\overline{AF}$,	$+\overline{AG}$,	$+\overline{BF}$,	$+\overline{CG}$,	$+\overline{BD}$,	$+\overline{CD}$,	$+\overline{FD}$,	$+\overline{GD}$
2 ^e Syst....	$-\overline{AF}$,	$-\overline{AG}$,	$+\overline{BF}$,	$+\overline{CG}$,	$+\overline{BD}$,	$+\overline{CD}$,	$-\overline{FD}$,	$-\overline{GD}$
3 ^e Syst....	$+\overline{AF}$,	$+\overline{AG}$,	$-\overline{BF}$,	$+\overline{CG}$,	$-\overline{BD}$,	$+\overline{CD}$,	$-\overline{FD}$,	$+\overline{GD}$
4 ^e Syst....	$+\overline{AF}$,	$+\overline{AG}$,	$+\overline{BF}$,	$-\overline{CG}$,	$+\overline{BD}$,	$-\overline{CD}$,	$+\overline{FD}$,	$-\overline{GD}$
	$+A\hat{B}D$,	$+A\hat{C}D$,	$+B\hat{C}D$,	$+C\hat{B}D$				
	$-A\hat{B}D$,	$-A\hat{C}D$,	$+B\hat{C}D$,	$+C\hat{B}D$				
	$+A\hat{B}D$,	$+A\hat{C}D$,	$-B\hat{C}D$,	$+C\hat{B}D$				
	$+A\hat{B}D$,	$+A\hat{C}D$,	$+B\hat{C}D$,	$-C\hat{B}D$				

L'intérêt d'un tel tableau est que l'on peut rapporter directement toute autre configuration semblable :

Quelqu'autre triangle qu'on puisse proposer, il sera toujours facile d'établir sa corrélation directe avec l'un des quatre systèmes précédents, et par conséquent de trouver de suite les formules qui lui seront immédiatement applicables. [Carnot, 1803, 107]

Carnot poursuit son catalogue des situations géométriques en dressant des tableaux analogues concernant le quadrilatère complet que Carnot introduit en 1800 dans sa lettre à Bossut [Carnot, 1800], les *quantités linéo-angulaires qui dépendent aux diverses régions de la circonférence* desquels il déduit des formules *des principaux rapports qui existent entre les quantités linéo-angulaires de deux angles quelconques*, etc.

2.4 La géométrie des transversales

Dans sa lettre à Bossut, Carnot [1800] définit l'objet de la trigonométrie comme la détermination des «rapports qui existent entre les quantités linéaires

et les quantités angulaires d'un triangle, et en général d'une figure quelconque». Il propose un autre projet, celui «de trouver séparément ceux de ces rapports qui existent entre les quantités linéaires seulement, sans faire intervenir dans le calcul les quantités angulaires» [Carnot, 1800, 401]. Puisqu'il n'existe pas de rapport indépendant des quantités angulaires entre les trois côtés d'un triangle, la première figure étudiée par Carnot est le quadrilatère complet, c'est-à-dire la figure formée par un quadrilatère (simple) $BCDF$ dont on prolonge «indéfiniment» les côtés ¹. En notant A l'intersection de BF et CD et G celle de BC et DF , Carnot note que cette figure présente «douze quantités linéaires à considérer», à savoir les quatre côtés BC, CD, DF, FB et «les huit segments formés deux à deux sur chacun de ces côtés», $BG, GC, AC, AD, GD, GF, AB, AF$:

Or de ces douze quantités il est facile de voir que cinq étant connues, indépendantes les unes des autres, les sept autres seront déterminées. Donc, il existe entre les côtés du quadrilatère et leurs segments respectifs sept rapports nécessaires, c'est-à-dire sept équations au moyen desquelles, cinq de ces quantités étant connues, on peut trouver toutes les autres : mais de ces sept équations il y en a déjà quatre qui résultent évidemment de la construction même ; ces quatre équations expriment que chacun des côtés du quadrilatère proposé est égal à la différence de ses segments : ce sont $BF = AF - AB$, $BC = BG - CG$, $CD = AD - AC$, $DF = GF - GD$.² Il reste donc à trouver trois nouvelles équations : on peut les obtenir, ou par les règles de trigonométrie, en faisant intervenir dans le calcul les sinus des angles pour les éliminer ensuite, ou directement par la seule comparaison des quantités linéaires. [Carnot, 1800, 402-403]

Carnot propose deux démonstrations qui sont essentiellement similaires (lorsque le quadrilatère est convexe) mais dont une n'utilise, comme il l'annonce, que des relations entre longueurs de segment. Les relations trigonométriques sont remplacées par des considérations de similitudes de triangles : il considère la parallèle au côté BC passant par D . En notant K le point d'intersection de cette droite avec BF , la similitude entre les triangles FKD et FBG donne :

$$FD : KD :: FG : BG.$$

¹Dans sa lettre à Bossut, Carnot [1800] n'introduit pas la dénomination de «quadrilatère complet». Il l'utilise dans son premier traité de géométrie sur la corrélation des figures pour désigner la figure d'un quadrilatère dont on prolonge les côtés et auquel on adjoint les trois diagonales :

Nous avons vu que quatre droites tracées à volonté dans un même plan, et indéfiniment prolongées, forment trois quadrilatères : or, chacun de ces quadrilatères a deux diagonales, ce qui fait en tout six diagonales : mais ces six diagonales se réduisent à trois, parce que chacune d'elles appartient en même temps à deux des trois quadrilatères. [...]. Appelons *quadrilatère complet*, l'assemblage de ces trois quadrilatères avec leurs trois diagonales, jusqu'à ce qu'elles se rencontrent réciproquement. [Carnot, 1801, 121-122]

Dans sa lettre à Bossut, Carnot introduit une autre notion de quadrilatère, à savoir la figure définie par quatre points et les six droites les joignant deux à deux. Von Staudt distinguera plus tard la notion de quadrilatère complet définie par quatre droites et leurs six points d'intersection de celle, duale, de quadrangle complet définie par quatre points et les six droites les joignant.

²Carnot suppose implicitement que le quadrilatère $BCDF$ est convexe.

De même, celle entre les triangles ABC et AKD donne :

$$KD : AD :: BC : AC,$$

d'où

$$FD.AC.BG = AD.FG.BC.$$

Les autres équations sont analogues et obtenues de la même manière. Comme la figure du quadrilatère peut être vue comme «un triangle ABC , dont les côtés sont indéfiniment prolongés, et coupés par une transversale commune FG », Carnot énonce ce résultat sous la forme :

Les trois côtés d'un triangle quelconque (ABC) étant prolongés indéfiniment, si l'on mène une transversale indéfinie FG qui les coupe tous trois (aux points F, D, G , il résultera de cette construction sur chacun des côtés du triangle deux segments [...]. Or de ces six segments le produit formé de trois d'entre eux comme facteurs est égal au produit formé des trois autres, en prenant ces facteurs de manière qu'il n'en entre pas deux dans le même produit qui aient pour extrémités un même angle du triangle, ou un même point de la transversale. [Carnot, 1800, 404]³

Chasles [1837a] attribue ce théorème à Hipparque, Menelaus et Ptolémée. Il signale que ce théorème est souvent cité et utilisé durant le 17^e siècle mais soutient que sa reprise par Carnot est en fait une redécouverte :

Depuis, nous ne trouvons plus de traces du théorème de Ptolémée, qui, après avoir été fort en usage, et connu de tous les géomètres, pendant près de deux cents ans, est resté infructueux, et peut-être même ignoré, pendant plus d'un siècle, jusqu'à ce que Carnot, qui était parvenu de lui-même à ce théorème, parmi plusieurs autres de même nature, concernant le quadrilatère plan, l'eût fait connaître comme l'un des plus utiles et des plus féconds en Géométrie rationnelle. [Chasles, 1837a, 293]

La formulation de ce théorème en terme de transversales apparaît plus cohérente avec la perspective du projet de Carnot d'étudier les corrélations des figures. En effet, de ce point de vue, la configuration formée d'un triangle (ou plus généralement d'un polygone) coupé par une transversale est plus naturelle que les différentes figures d'un quadrilatère simple.

Carnot réunit dans son *Essai sur la théorie des transversales* [Carnot, 1806] la plupart des résultats obtenus dans sa *Géométrie de position* [Carnot, 1803] qui peuvent s'exprimer en termes de transversales. Dans ses travaux précédents, Carnot cherchait à résoudre des problèmes généraux et le résultat précédent concernant les triangles et leurs transversales était présenté comme un lemme technique résolvant la question de déterminer «les douze quantités linéaires qui entrent dans la composition d'un quadrilatère complet considéré sans ses diagonales». Dans l'essai de 1806, l'objectif est de présenter une nouvelle théorie dont l'intérêt ne se limite pas à la résolution des problèmes :

³Chemla [1990, 1998] analyse l'importance de la formulation de ce résultat en termes de triangles et de transversales ; selon Chemla, l'introduction du terme de «transversale» permet à Carnot «de traduire «traduire» en un *seul théorème* «en langage ordinaire» ce qui se donnait, par l'énoncé technique, en *quatre équations*» [Chemla, 1998, 172].

La théorie des transversales est curieuse par elle-même, et fournit souvent des démonstrations et des solutions très-élégantes, dans des questions compliquées. La simplicité et la fécondité de ses principes sembleraient lui donner le droit d'être admises dans les élémens ordinaires de Géométrie. [Carnot, 1806, 63]

Le point de vue adopté par Carnot n'inclut pas explicitement de préoccupation projective⁴; l'importance de l'*Essai sur la théorie des transversales* pour une histoire de la géométrie projective réside dans sa réception par des mathématiciens comme Brianchon [1817] ou Poncelet [1815b, 1832] et plus généralement dans le fait de présenter les propriétés d'incidence comme fondamentales pour la géométrie :

J'appelle *transversale* une ligne droite ou courbe qui traverse d'une manière quelconque un système d'autres lignes, soit droites, soit courbes; ou même un système de plans ou de surfaces courbes. [Carnot, 1806, 65]

L'essai repose sur le résultat précédent puisqu'«s'étend [...] à tous les polygones soit plans, soit gauches et même aux polygones sphériques» [Carnot, 1806, 67]. Carnot en donne une démonstration en terme de triangle et de transversales et précise que la démonstration est valable que la transversale coupe l'aire du triangle ou non. Ce théorème se généralise immédiatement au cas d'une transversale coupant un polygone plan (dont on prolonge les côtés). En effet, il suffit de considérer les triangles formés par les diagonales du polygone et à celui d'une *plan transversal* coupant un polygone gauche. Dans ce dernier cas, Carnot envisage une projection sur plan perpendiculaire au plan transversal et se ramène ainsi au cas précédent.

Après avoir montré que le théorème de la transversale d'un triangle se généralise à diverses classes de polygones, Carnot envisage un autre type d'application de son théorème en envisageant la configuration duale formée par un triangle et un système de transversales issues d'un même point⁵ :

⁴Le seul théorème qui pourrait révéler une certaine sensibilité à ce genre de question est celui dans lequel Carnot étudie la conservation de la propriété d'harmonie de quatre points alignés :

Si une droite quelconque BD est coupée aux points b, d en segments proportionnels, je dis que si d'un autre point quelconque A de l'espace, on mène aux quatre points de division B, D, b, d , quatre droites AB, AD, Ab, Ad , toute autre transversale $B'D'$, menée entre les droites AB, AD , sera coupée, comme la première BD , en segments proportionnels par les droites Ab, Ad . [Carnot, 1806, 76-77]

En fait ce théorème est isolé dans le développement de Carnot et on peut penser que Carnot l'énonce car il l'utilise pour démontrer le théorème du quadrangle complet. Néanmoins, dans ses commentaires, Carnot signale que la démonstration de ce théorème «est composée de deux parties qui forment deux propositions distinctes très-remarquables l'une et l'autre» :

La première est que si une droite BD étant coupée en segments proportionnels aux points b, d , on mène d'un point quelconque de l'espace, les quatre droites AB, AD, Ab, Ad , les angles formés auront la relation suivante :

$$\sin BAb : \sin BAd :: \sin DAb : \sin DAd.$$

La seconde est que réciproquement, si quatre droites partant d'un même point A , et tracées dans un même plan, forment entre elles des angles qui aient la relation dont on vient de parler, toute droite comme BD ou $B'D'$, tirée entre les côtés AB, AD de l'angle BAD , sera coupée par les deux autres Ab, Ad en segments proportionnels. [Carnot, 1806, 77-78]

⁵Chasles [1837a] attribue ce théorème à Ceva.

Si par un point quelconque pris dans le plan d'un triangle, on mène sur chacun des côtés une transversale qui passe par l'angle opposé, on obtiendra sur chacun de ces côtés deux segmens, tels que le produit de trois d'entre eux n'ayant aucune extrémité commune, sera égal au produit des trois autres. [Carnot, 1806, 73]

Si l'on désigne par ABC le triangle et Aa , Bb et Cc les trois transversales issues de D , la démonstration est immédiate en considérant les triangles AaB et AaC et leurs transversales respectives Cc et Bb ; en multipliant entre elles les deux formules obtenues en leur appliquant le théorème de la transversale d'un triangle, on obtient après simplification :

$$Ab.Bc.Ca = Ac.Ba.Cb$$

En considérant un des sommets d'un quadrilatère comme le point d'où sont issues trois transversales (deux côtés et une diagonale) du triangle formé par les trois autres sommets du quadrilatère, Carnot obtient la propriété classique des diagonales d'un quadrilatère complet :

Dans tout quadrilatère complet ayant ses trois diagonales, chacune d'elles est coupée par les deux autres en segmens proportionnels. [Carnot, 1806, 74]

Carnot déduit de la propriété des diagonales d'un quadrilatère complet une variante du théorème connu plus tard comme celui du quadrangle complet⁶ :

Si l'on coupe un quadrilatère simple quelconque par une transversale; la portion de cette transversale interceptée entre les deux diagonales, sera coupée en segmens proportionnels par les deux droites menées du point d'intersection de ces deux diagonales, aux deux points de concours des côtés opposés du quadrilatère. [Carnot, 1806, 79]

La démonstration est intéressante du point de vue de l'histoire de la géométrie projective car elle utilise (non explicitement mais directement) la propriété de conservation de l'harmonicité de quatre points par projection. Carnot désigne par $ABCD$ le quadrilatère simple, par K le point d'intersection des deux diagonales AC et BD , par F celui des côtés opposés AB et CD et par G celui de l'autre paire de côtés opposés BC et AD . mn étant une transversale menée entre les deux diagonales (m désignant le point d'intersection de la transversale et de la diagonale AC et n celui de la transversale et de la diagonale BD), p et q les points d'intersection respectifs de mn et des droites KF et KG . Le problème est donc de montrer

$$mp : mq :: np : nq.$$

Carnot considère le quadrilatère complet $GDAKBCG$. La diagonale AB est donc en reprenant le vocabulaire de Carnot est donc coupée par les deux autres diagonales KG et CD en segments proportionnels. «Donc [...] toute autre transversale, comme mn , comprise entre les deux premières [droites] KA et KB , sera de même divisée par les deux autres KG , KF en segmens proportionnels» [Carnot, 1806, 80].

Carnot propose comme applications de la théorie des transversales la résolution de problèmes *difficiles* comme montrer que les points d'intersection des paires

⁶Le théorème dual de celui du quadrilatère complet.

de côtés opposés d'un hexagone inscrit dans un cercle sont alignés ou que les diagonales d'un hexagone circonscrit à un cercle sont concourantes⁷. Dans son traité *Géométrie de position*, il adoptait un point de vue plus élevé après une discussion dans laquelle il montrait que ses méthodes amélioreraient les principes de la géométrie analytique dans la mesure où celles-ci permettent de traiter plus synthétiquement et plus géométriquement les changements de coordonnées :

Ainsi l'art de découvrir les propriétés des courbes, n'est proprement, comme on l'a déjà dit, que l'art de changer le système des coordonnées. Je me propose d'appliquer ici à quelques exemples, les principes que j'ai exposés ci-dessus, sur les moyens d'opérer ce changement suivant les cas. [Carnot, 1803, 430]

En géométrie analytique, on montre les propriétés géométriques des courbes en comparant plusieurs équations obtenues en considérant différents systèmes de coordonnées. Les méthodes de Carnot permettent de considérer simultanément les différents repères et en multipliant les différentes relations obtenues relativement à ces repères, il obtient ainsi des propositions générales :

Un polygone quelconque $ABCDE$ étant tracé dans le plan d'une courbe quelconque géométrique, et ses côtés indéfiniment prolongés, soient par $(A'B')$, $(B'A')$, les produits des segments interceptés sur la droite AB entre chacun des points A, B respectivement, et les différentes branches de la courbe; par $(B'C')$, $(C'B')$, les produits des segments interceptés sur BC entre chacun des points B, C respectivement, et les différentes branches de la courbe, par $(C'D')$, $(D'C')$, &c., on aura

$$(A'B')(B'C')(C'D')(D'E')(E'A') = (B'A')(C'B')(D'C')(E'D')(A'E').$$

[Carnot, 1806, 437]

Appliquée aux sections coniques, cette proposition générale permet de déduire :

Si dans le plan d'une ligne du second ordre, on décrit un polygone quelconque, dont tous les côtés soient tangents à la courbe, le produit de la moitié des tangentes, c'est-à-dire des segments interceptés sur les côtés du polygone, entre la courbe et les angles de ce polygone, comme facteurs, est égal au produit de toutes les autres, en les prenant alternativement pour chaque produit, c'est-à-dire de manière qu'il n'en entre jamais deux dans le même, qui aient pour extrémités un point commun. [Carnot, 1806, 438-439]

2.5 La réception des travaux de Carnot

2.5.1 La géométrie pratique de Servois

Dans son traité de géométrie pratique, Servois [1804], qui se déclare professeur de mathématiques aux écoles d'artillerie, propose une série de méthodes géométriques qui permettent de résoudre les problèmes d'arpentage :

⁷Carnot signale en faisant référence à Brianchon [1806] que ces propriétés s'étendent aux sections coniques.

Il est utile, sur-tout à la Guerre, de pouvoir exécuter sur le terrain diverses opérations géométriques, telles que, *mesurer des distances, prendre des prolongemens, mener des parallèles*, etc., sans le secours d'Instrumens de prix, qu'on acquiert et qu'on transporte difficilement. C'est donc un travail utile, que de présenter un Recueil de Méthodes où tout est résolu avec de simples *Piquets* ou *Jalons*, avec le *Cordeau* ou la *Chaîne*, ou, tout au plus, avec l'*Equerre* d'*Arpenteur* ; instrument qu'on peut avoir par-tout, parce qu'on peut le fabriquer par-tout. [Servois, 1804, 1]

Il souligne en particulier l'intérêt de ses méthodes car elles vont permettre de diminuer les opérations de mesure (*chaînage*) au profit des *Alignemens* :

[...] dans les opérations sur le terrain, le *chaîner*, s'il est permis de s'exprimer ainsi, exige beaucoup de temps et de soin ; tandis qu'on peut toujours prendre des *Alignemens* avec exactitude et célérité. Il étoit donc intéressant de rechercher si on ne pourroit pas, en multipliant les alignemens, diminuer les *chaînages* qu'entraînent les procédés connus ; c'est en examinant l'objet sous ce point de vue, que j'ai rencontré les Solutions que j'offre ici. [Servois, 1804, 2]

Il se limite aux problèmes linéaires et comme il ne se sert de la chaîne que comme une règle (et jamais comme un compas), il propose de regarder son traité comme un *Essai de Géométrie de la Règle*. Il divise son exposé en deux parties : une première partie théorique dans laquelle il rappelle des théorèmes qui ne figurent pas dans les traités de géométrie élémentaire et une partie pratique dans laquelle il propose et discute l'applications de ces théorèmes à la résolution de problèmes de géométrie pratique. Les théorèmes rappelés par Servois sont ceux de la théorie des transversales. Ses démonstrations sont souvent plus longues que celles de la *Géométrie de position* de Carnot [1803] car elles sont volontairement plus élémentaires conceptuellement. La partie théorique du traité de Servois repose sur le théorème des transversales (concourantes) d'un triangle⁸ :

Si, par un point pris dans le plan d'un triangle, on abaisse, de chaque angle, des droites sur les côtés opposés, on obtiendra sur chaque côté deux segments, tels que le produit de trois segments non contigus est égal au produit des trois autres. [Servois, 1804]

Il en déduit entre autre le théorème de Desargues qu'il exprime sous la forme :

«Si deux triangles sont tellement placés, que les trois lignes qui joignent leurs sommets deux à deux pris de l'un à l'autre, concourent en un même point, les trois points de concours des côtés pris deux à deux dans l'un et l'autre triangle opposés aux sommets adjacens (c'est-à-dire placés sur une des trois droites qui concourent), seront dans une même ligne droite.» On pourroit exprimer ce théorème d'une autre manière : «Si deux quadrilatères (tels que $Abcd$, $Autx$) ont une diagonale et les deux côtés adjacens superposés (tels que Ac , Ad , Ab , superposés sur Ax , At , Au), les autres côtés et diagonales adjacens pris de l'un à l'autre quadrilatères (tels que bc et ux , Dc et tx , Db et tu), se couperont sur une même ligne droite.» [Servois, 1804, 23]

⁸Servois précise que ce théorème est dû à Bernoulli et qu'il est repris par Carnot [1803].

Dans la partie pratique de son mémoire, Servois déduit de cette dernière formulation une des solutions du problème :

Prolonger une ligne au-delà d'un obstacle qui ne permet pas que, placé dans la direction de la ligne, on puisse en apercevoir deux points. [Servois, 1804, 31]

Le principe de la démonstration consiste à appuyer sur la droite à prolonger une configuration de Desargues en considérant P et R comme deux points d'intersections de côtés correspondants et en construisant le troisième point d'intersection Q :

PR est la ligne qu'il faut prolonger : aux points A, b , desquels je puis voir les points P et R . Je place deux Jalons : j'en fixe un troisième en D sur l'alignement bR ; un quatrième aussi à volonté en c sur AP ; puis un cinquième en t sur bP et AD ; un sixième en x sur bc et AR ; enfin un septième en Q , intersection des alignements tx et Dc , et ce point Q est sur la ligne PR . Par le même procédé, on trouvera un second point sur la même ligne, et elle sera prolongée. [Servois, 1804, 35]

Servois précise qu'il insiste sur ce problème car «il est d'un usage fréquent à la guerre» et que sa résolution sans effectuer des «mesures de lignes» sera particulièrement utile «à l'Artilleur, soit en campagne, où il n'y a pas de tir plus avantageux que celui d'enfilade, soit dans les sièges, où il est obligé de battre à ricochet des faces d'ouvrages de fortifications» [Servois, 1804, 39-40]. Il signale aussi les avantages pratiques de ses méthodes : ainsi, il souligne «qu'un seul indicateur peut facilement placer un Jalon au point de concours de deux lignes marquées chacune par deux Jalons». En effet, une fois arrivé près de ce point, «il reculera ou avancera jusqu'à ce qu'il ait découvert le point où les quatre rayons visuels, portés vers les quatre Jalons déterminant les deux lignes, se réduisent à deux : ce point est celui de concours des deux lignes» [Servois, 1804, 36]. De même, il précise qu'«il faut avoir l'attention de placer les Jalons bien verticalement, pour qu'il soit tous parallèles; ce qui facilite et rend plus exacts les alignemens».

2.5.2 L'Application de la théorie des transversales de Brianchon

Dans ses leçons données à l'école d'artillerie de la garde royale en 1818 consacrées à l'*Application de la théorie des transversales*, Brianchon [1818] reprend le même objectif que Servois :

Notre but, dans ce recueil, est de répandre des méthodes, utiles aux Artilleurs, pour effectuer sur le terrain diverses opérations géométriques, telles que, *mesurer des distances, prendre des prolongemens, mener des parallèles*, etc., sans le secours d'instrumens de prix, qu'on a rarement avec soi à la guerre : nos seuls moyens d'exécution sont la *Chaîne* et des *Jalons*. Dans cette vue, nous ne parlerons que des transversales rectilignes, et des systèmes de lignes droites. [Brianchon, 1818]

Le point de départ du traité de Brianchon est le même que celui de Carnot [1806], à savoir le théorème de transversale d'un triangle.

Les trois côtés d'un triangle quelconque étant prolongés indéfiniment, si on mène une transversale qui les coupe tous les trois, on aura, sur chaque côté, deux segments, tels que le produit de trois d'entre eux non contigus, est égal au produit des trois autres. [Brianchon, 1818, 2].

Brianchon en donne la même démonstration que celle de Carnot. Chaque théorème est suivie d'applications pratiques. Brianchon ajoute que les seuls instruments à utiliser dans les applications de la théorie des transversales sont la chaîne d'arpenteur (pour mesurer les distances) et des jalons (qui servent à marquer les points). Il précise que certaines applications ne requiert aucune évaluation de distances et «seront résolus par de simples alignemens, avec des jalons simples sans aucun chaînage». Il précise même que puisque «la mesure des lignes, sur le terrain, exige du temps et du soin» et que «les alignemens se prennent avec plus d'exactitude et de célérité», il cherchera «à multiplier les alignemens, pour diminuer les chaînages» [Brianchon, 1818, 7].

Brianchon propose par exemple comme application du théorème de la transversale d'un triangle le problème pratique suivant :

Une pièce d'artillerie étant placée en A , pour battre le point P ; on demande d'évaluer la distance AP . [Brianchon, 1818, 4]⁹

Il suffit de choisir un point B sur AP et un point R en dehors. Si C est un point de BR , on est ramené en désignant par Q le point d'intersection de AC et PR , on est ramené à la configuration d'un triangle ABC et d'une transversale PQ . Le théorème permet d'affirmer

$$PA.QC.RB = PB.QA.RC$$

et donc :

$$PA = AB \cdot \frac{QA.RC}{QC.RB - QA.RC}.$$

Brianchon montre aussi le théorème des transversales d'un triangle et en déduit divers moyens pratiques pour déterminer les parallèles d'une droite. Comme le problème «diviser une ligne AB en deux segments qui soient entre eux dans un rapport donné» [Brianchon, 1818, 24] admet deux solutions P et P' qui vérifient l'égalité

$$PA : PB :: P'A : P'B, \quad (2.6)$$

il montre que les deux théorèmes fondamentaux qu'il vient de donner permettent de donner une solution du problème : étant donné P, A, B trois points d'une droite, déterminer le point P' de la droite qui vérifie l'équation 2.6. Cette solution est donc en fait une démonstration du théorème du quadrilatère complet ; il suffit de considérer AB comme la base d'un triangle quelconque ABC et une transversale de ce triangle issue de P . Si on désigne par D le point d'intersection de QB et RA , alors la droite CD coupera AB au point P' cherché. En effet, d'après le premier théorème, on a

$$PA.QC.RB = PB.QA.RC$$

⁹Brianchon propose une version moins guerrière de son problème en signalant que l'on mesurerait de la même manière la largeur d'une rivière.

et d'après le second théorème,

$$P'A.QC.RB = P'B.QA.RC,$$

d'où l'on déduit immédiatement l'égalité 2.6.

P et P' ont donc mutuellement une dépendance telle que l'un est connu aussitôt qu'on sait la position de l'autre sur AB ; ainsi, ce sont deux points conjugués, par rapport à AB . [Brianchon, 1818, 26]

Si P et P' sont conjugués par rapport A et B , A et B sont conjugués par rapport à P et P' ; Brianchon propose d'exprimer cette réciprocité en disant que les quatre points sont conjugués.¹⁰ Il étend cette définition à des droites concourantes : si CA et CB sont les arêtes d'un angle C , et si A, B, P, P' sont quatre points conjugués, alors les quatre droites CA, CB, CP et CP' sont quatre droites conjuguées. La pertinence de cette définition, c'est-à-dire son indépendance par rapport au choix de la droite AB qui intersecte les arêtes de l'angle C est une conséquence du théorème des diagonales d'un quadrilatère complet. En effet, Brianchon reprend la notion de quadrilatère complet introduite par Carnot :

Soit $CQDR$ un quadrilatère quelconque, et A, B les points de concours des côtés opposés. Cette figure, formée par quatre lignes arbitraires prolongées jusqu'à leurs rencontres mutuelles, a reçu le nom de *quadrilatère-complet*. [Brianchon, 1818, 28]

Il obtient le théorème des diagonales du quadrilatère est comme une conséquence immédiate des deux théorèmes sur les transversales d'un triangle; il suffit de considérer, en reprenant les notations précédentes, la transversale PQ du triangle ABC et celles issues de D :

Dans tout quadrilatère-complet, chaque diagonale est coupée par les deux autres en segments proportionnel. [Brianchon, 1818, 29]

Brianchon propose de désigner un système de quatre droites conjuguées par le nom de *faisceau*. Il énonce pour résumer sa discussion sur la définition de cette nouvelle notion les deux propositions duales :

La propriété caractéristique du faisceau est, que si on le coupe par une transversale, les quatre points d'intersection résultants sont conjugués.

Réciproquement : si, de quatre points conjugués, on tire, à volonté, quatre droites convergentes, elles formeront un faisceau. [Brianchon, 1818, 46]

Brianchon évoque le cas particulier des points conjugués lorsque l'un d'entre eux P «s'éloigne à l'infini». Dans ce cas, PA et PB «deviennent tous deux infiniment grands et par conséquent, égaux» et donc, la flqq la proportion 2.6 exige qu'on ait, dans ce cas,

$$P'A = P'B.$$

¹⁰Dans son *Mémoire sur les lignes du second ordre* [Brianchon, 1817], il désigne de tels points sous le nom de *points harmoniques* car la relation

$$CB : CD :: AB : AD$$

est équivalente à la proportion harmonique

$$AB - AC : AC - AD :: AB : AD$$

Il en déduit que si l'on trace la parallèle en A à la base BC du triangle ABC , alors la droite conjuguée à cette droite par rapport à AB et AC est la médiane issue de A . Cette propriété permet à Brianchon de donner une solution du problème général : «Ayant les directions des côtés d'un angle, et celle d'une droite issue du sommet» déterminer la conjuguée de cette droite.

Ayant trois droites convergentes CA, CB, CP , si on veut compléter, en construisant la conjuguée de l'une d'elles, de CP , par exemple; tirez, à volonté, une parallèle à l'un, CB , des côtés de l'angle ACB , laquelle coupe CA en a , et CP en p ; prolongez ap d'une quantité $ap' = ap$; Cp' est la conjuguée de Cp . [Brianchon, 1818, 49]

Brianchon poursuit la discussion sur les systèmes de droites concourantes en introduisant la notion d'harmonie. Il considère sur une droite une suite de points b, c, d, e, f, \dots tels que $bc = cd = de = ef = \dots$. A partir d'un point P extérieur à la droite, il trace les droites Pb, Pc, Pd, Pe, \dots . «Toutes ces droites formeront un faisceau-composé, ayant pour limite PA , parallèle à la ligne des parties égales» [Brianchon, 1818, 50]. Lorsque l'on coupe le faisceau-composé par une transversale, en désignant respectivement les points d'intersection par B, C, D, E, F, \dots, A , comme PA et Pc sont conjuguées par rapport à PB et PC , on a :

$$AB : AD :: CB : CD$$

d'où

$$\frac{AB - AC}{AB} = \frac{AC - AD}{AD}$$

Cette relation se généralise et Brianchon énonce une proposition qu'il relie aux propriétés de l'*Échelle fuyante* de la perspective :

[...] la suite de segmens $AB, AC, AD, AE, AF, \dots$ est une progression harmonique.¹¹ [Brianchon, 1818, 52]

Brianchon en déduit que la propriété pour une suite de points alignés d'être harmonique est invariante par perspective et section :

Qu'une suite de segmens $AB, AC, AD, AE, AF, \dots$ comptés d'un même point A , sur le même alignement, et dans le même sens, soient en progression harmonique, et que, d'un point quelconque P , situé hors de la ligne, on mène des droites à leurs extrémités : Si on coupe ce système de droites convergentes par une transversale arbitraire; les segmens de la transversale, comptés de la droite extrême PA , suivront aussi une progression harmonique; et, quand la transversale sera parallèle à cette droite extrême, les différences des segmens consécutifs seront des parties égales bc, cd, de, ef, \dots .

Nous réserverons le nom de *faisceau-composé* pour ce systèmes de droites convergentes qui s'appuient, ou sur des divisions égales, ou sur des segmens harmoniques; chaque droite sera considérée comme un élément du faisceau; la droite extrême, qui est parallèle à la

¹¹Brianchon rappelle en note :

La proportion harmonique règne entre trois quantités, lorsque la première moins la deuxième, est à la deuxième mois la troisième, comme la première est à la troisième. Cette relation fait la base de l'*Échelle diatonique*.

La progression harmonique règne dans une suite lorsque trois termes consécutifs quelconques sont en progression harmonique. [Brianchon, 1818, 52]

ligne des parties égales, est la quatrième conjuguée de trois éléments consécutifs quelconques. [Brianchon, 1818, 52]

2.5.3 L'application à la théorie de la conique de la théorie des transversales par Brianchon

Brianchon s'inscrit dans son *Mémoire sur les lignes du second ordre* [Brianchon, 1817] dans la lignée de la théorie des transversales de Carnot qu'il qualifie d'«un des plus beaux perfectionnements de la géométrie moderne». Son mémoire fait suite à un *Mémoire sur les surfaces courbes du second degré* [Brianchon, 1806] dans lequel il montre que les diagonales d'un hexagone circonscrit dans une conique sont concourantes. Dans sa démonstration, Brianchon [1806] développe un embryon d'une théorie géométrique de la polarité par rapport à une conique sans introduire les termes de *pôle* et de *polaire*; en utilisant un théorème énoncé par Carnot [1803] selon lequel les points d'intersection des paires de côtés opposés d'un hexagone inscrit dans une conique sont alignés¹² Brianchon que si $ABCDEF$ est un hexagone inscrit dans une conique dont les diagonales AD , BE et CF sont concourantes, alors non seulement les points d'intersection H , I , K des paires de côtés opposés sont situés sur une même droite mais aussi les points d'intersection respectifs h , i , k de CE et BF , de AE et BD , de DF et AC sont contenus dans cette même droite. Brianchon considère alors la corde CF comme mobile (autour du point P); par définition, la droite Ii reste fixe et lorsque celle-ci vient à coïncider avec BE , «les droites BF , EC deviendront tangentes à la courbe, et auront leur point de concours h' placé sur Ii ». De plus, lorsque que le point P est situé «hors de l'aire de la section conique, il arrive un instant où les deux extrémités de la corde mobile se réunissent en un seul point T , placé sur le périmètre de la courbe et sur la droite Ii ». La démonstration proprement dite du théorème met en œuvre implicitement la polarité qui existe entre un hexagone circonscrit à une conique et l'hexagone inscrit correspondant :

Soit $abcdef$ un hexagone quelconque circonscrit à une section conique, et B, C, D, E, F, A , les points de contact respectifs des côtés ab, bc, cd, de, ef, fa : 1. Les points de concours H, I, K des côtés opposés de l'hexagone inscrit $ABCDEF$, sont tous trois placés sur une même ligne droite.

2. Si l'on tire la diagonale cf qui rencontre la courbe aux deux points t, t' , les droites Kt, Kt' , seront tangentes en t, t' , respectivement; et il en est de même pour les autres diagonales;

3. Si d'un point quelconque K de la droite HIK , on mène deux tangentes Kt, Kt' à la section conique, la corde tt' , qui joint les deux points de contact, passe constamment par un même point P . Donc

¹²Dans son mémoire de 1817, Brianchon émet l'hypothèse selon laquelle il faut attribuer ce théorème à Pascal :

Le grand géomètre [Pascal] que nous venons de citer, avait, au rapport de *Leibnitz*, donné le nom d'*hexagrammum mysticum* à une certaine figure composée de six lignes droites, dont la propriété remarquable faisait le fonds d'un traité des sections-coniques. Nous pensons que cet hexagramme mystique n'est autre que l'*hexagramme inscrit* dont nous venons de parler. [Brianchon, 1817, 18]

les trois diagonales fc, be, ad , se coupent toutes en un même point
P. [Brianchon, 1806, 300-301]

Dans son *Mémoire sur les lignes du second ordre*, Brianchon [1817] reprend la définition traditionnelle des coniques comme section d'une surface conique à base circulaire. Il met au fondement de sa théorie les notions de *pôle* et *polaire*, celle de *projection* qu'il identifie à celle de *perspective*¹³. L'exposé de Brianchon est systématique et il indique au début de son mémoire les théories (le principe de corrélation des figures, la théorie des lignes harmoniques) et trois théorèmes dont il signale qu'ils forment les principes d'«une théorie des alignemens» :

1. Brianchon déduit de la proposition générale de la théorie des transversales selon laquelle «pour quatre droites fixes, issues d'un même point, sous des angles quelconques, et rencontrées en A, B, C, D par une droite transversale arbitraire,¹⁴

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \text{constante},$$

la propriété de conservation par projection de l'harmonicité :

Si donc on a, sur un même alignemens, quatre points A, B, C, D , tels, que les distances de l'un deux, D , aux trois autres, forment une proportion harmonique

$$\frac{AD - CD}{AD} = \frac{CD - BD}{BD},$$

ou

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD},$$

le même rapport subsistera pour toutes les projections de la figure.¹⁵ [Brianchon, 1817, 8]

2. Le second principe est le théorème de Carnot qui affirme que chaque diagonale d'un quadrilatère complet est coupée harmoniquement par les deux autres.
3. La troisième proposition fondamentale citée par Brianchon est la construction, *à la règle seule*, du quatrième harmonique de trois points alignés à partir d'un quadrilatère complet¹⁶.

Brianchon utilise systématiquement le principe de projection ; en particulier, les figures correspondant aux théorèmes généraux sur les coniques ne font intervenir que des cercles. Une autre particularité du mémoire de Brianchon est l'insistance sur les références historiques ; en effet, il ne se contente pas de renvoyer à la théorie des transversales de Carnot mais donne des indications sur les origines de certains théorèmes ; ses références qu'il réunit dans une petite bibliographie de *géométrie de la règle* font appel aux mathématiques antiques (Pappus, Ptolémée) et surtout aux travaux des mathématiciens du 17^e siècle (Desargues,

¹³Brianchon précise que puisqu'il n'envisage comme surface de projection que des plans, «une conique est la projection d'un cercle» [Brianchon, 1817, 6].

¹⁴Brianchon ne donne pas de désignation particulière à la quantité $\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}$. Steiner la désignera sous le terme de *birapport* [Steiner, 1832, 15-16]. Chasles utilise le terme de *rapport anharmonique* et cite la proposition 129 du 7^e livre de Pappus pour la propriété de conservation par projection de cette quantité.

¹⁵Brianchon signale que ce théorème est «connu» et fait référence à un ouvrage de Grégoire de Saint-Vincent, *Opus geometricum* (1647).

¹⁶Brianchon précise que ce théorème est connu et fait référence à De la Hire, *Sectiones conic{ae}* (1685).

Pascal, Grégoire de Saint-Vincent, Blondel, De La Hire, Schooten). Après avoir posé les principes de sa théorie, Brianchon montre en utilisant la conservation par projection du birapport de quatre points, la propriété de conservation par projection de la relation d'involution entre six points. Il montre en utilisant la similitude des triangles, que les six points A, B, C, D, E, F en lesquels une transversale rencontre les diagonales et les paires de côtés opposés d'un parallélogramme vérifient deux relations (Δ) :

$$\frac{EA.EB}{EC.ED} = \frac{FA.FB}{FC.FD},$$

$$\frac{CA.CB}{CE.CF} = \frac{DA.DB}{DE.DF}.$$

Par projection, ces relations se conservent «pour un quadrilatère quelconque coupé par une transversale arbitraire» et en inversant les rôles des diagonales et d'une paire de côtés, il obtient une troisième relation (Δ) :

$$\frac{AC.AD}{AE.AF} = \frac{BC.BD}{BE.BF}.$$

d'où il tire les quatre relations d'involution¹⁷ (Δ) :

$$AD.CF.EB = AF.CB.ED,$$

$$AC.DE.FB = AE.DB.FC,$$

$$CE.FA.BD = CA.FD.BE,$$

$$EC.BF.DA = EA.BC.DF.$$

Brianchon déduit de la démonstration des formules d'involution que cette propriété est projective :

Lorsque six points d'une droite sont liés entre eux par les relations Δ , leurs projections jouissent de la même propriété. [Brianchon, 1817, 12]

La démonstration du théorème de l'involution des points d'intersection d'une transversale avec une conique et les côtés d'un quadrilatère inscrit dans celle-ci¹⁸ est obtenue en se ramenant par projection au cas où la courbe est un cercle :

Une droite étant menée à volonté dans le plan d'un quadrilatère $UXYZU$ inscrit dans une conique ; soient AB, CD, EF les portions de cette transversale comprises entre les deux branches de la courbe, et entre les deux couples de côtés opposés, respectivement ; les six points A, B, C, D, E, F seront liés entre eux par les équations Δ . [Brianchon, 1817, 12]

En considérant un triangle EFT coupé en six points A, B, U, Z, Y, X par une conique et les points d'intersection D, I, H des paires de côtés opposés de l'hexagone inscrit $ABUZYXA$ et en appliquant le théorème de la transversale d'un triangle (que Brianchon appelle le principe des transversales) au triangle EFT et aux quatre transversales UX, YZ, UB, AX , Brianchon obtient la relation

$$EI.FD.TH = ED.FH.TI$$

¹⁷Brianchon note ces relations par le symbole Δ et n'utilise pas le terme *involution*.

¹⁸Brianchon précise que «Pascal nous a conservé de *Desargues*, qui contient l'énoncé d'un théorème du genre de celui-ci». [Brianchon, 1817, 15]

dont il déduit que les points D, I, H sont alignés. Brianchon retrouve de manière originale le théorème (de l'hexagramme mystique) selon lequel les points d'intersection des paires de côtés opposés d'un hexagone inscrit dans une conique. Il ajoute que ce théorème est à la base de sa théorie de la polarité :

Le *pôle* d'une droite, tracée à volonté dans le plan d'une conique, est le point fixe autour duquel tournent toutes les cordes de contact des paires de tangentes issues des différents points de la droite. – Cette droite, elle-même, est dite la *polaire* du point fixe. [Brianchon, 1817, 1]

Brianchon, outre rappeler la démonstration de son théorème, déduit du théorème de l'hexagramme mystique deux propositions de la théorie des pôles :

Un quadrilatère quelconque ($UXVWU$) étant inscrit dans une conique, si on détermine les points de concours, et des diagonales, et des côtés opposés, chacun de ces trois points (C, K, c) sera le pôle de la droite qui joint les deux autres.

Dans tout quadrilatère-complet circonscrit à une conique, chacune des trois diagonales est la *polaire* du point d'intersection des deux autres. [Brianchon, 1817, 22]

Brianchon déduit des formules d'involution et des théorèmes de polarité des solutions graphiques (*à la règle*) des solutions de problèmes classiques du type : Décrire une conique dont on a cinq points ?

Les formules d'involution (Δ) qui «se prêtent facilement au calcul et fournissent ainsi des solutions très-simples et très-élégantes» [Brianchon, 1817, 29] permettent de déterminer un sixième point. Une solution *à la règle* consistent à construire «un hexagone dont les cinq premiers sommets soient aux cinq points donnés, et dont les côtés opposés concourent sur une même droite» [Brianchon, 1817, 29].¹⁹ De manière duale, Brianchon déduit de son théorème qu'il n'existe qu'une seule conique «qui puisse toucher cinq droites quelconques données de position sur un plan» [Brianchon, 1817, 35] et en donne des constructions.

2.5.4 Les critiques de Poncelet

Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, Poncelet reprend une partie du vocabulaire de Carnot comme les termes de *corrélation*, de *système primitif*, de *système corrélatif*, de *formules explicites* ou *implicites* ... Il considère aussi avec Carnot «vaines et dangereuses toute idée préconçue, toute interprétation a priori des quantités isolées, *positives*, *négatives* et *imaginaires*, quelque séduisante qu'elle puisse paraître» [Poncelet, 1815a, 168]. Dans son mémoire rédigé en 1815 peu après son retour de captivité, *Sur la loi des signes de position en géométrie, la loi et le principe de continuité* [Poncelet, 1815a], il énonce une règle des signes analogue à celle de Carnot associant les variations et les permanence de signes dans les formules aux variations et permanences des positions relatives des éléments de la figure. Il ajoute, en suivant le constat de Carnot :

Il est visible, en outre, que la permanence aura lieu toutes les fois que la distance ne sera devenue ni nulle ni infinie, et que réciproque-

¹⁹Brianchon précise que sa construction reste valable lorsque trois des points donnés sont «inaccessibles».

ment, la variation n'arrivera que dans l'hypothèse contraire. [Poncelet, 1815a, 175]

Cependant, Poncelet consacre une grande partie de son article à réfuter les critiques de Carnot concernant l'analyse algébrique lorsque celui-ci affirme que «l'Analyse algébrique donne tantôt plus, tantôt moins que ce qu'on lui demande, qu'elle peut même *amalgamer* des racines tout à fait insignifiantes ou fausses aux racines véritables des questions [...]» [Poncelet, 1815a, 289] ; au contraire de Carnot qui développe la méthode des tableaux de corrélation pour rendre compte des mutations de signes dans les formules relatives à des figures corrélatives, Poncelet va essayer d'intégrer la règle des signes dans un principe général de permanence des relations mathématiques ou *principe de continuité*. Il établit un tel principe pour les «figures élémentaires» en attribuant aux quantités linéaires et angulaires un sens²⁰ qui est susceptible de changer lors des corrélations de la figure. En décomposant les figures complexes en figures élémentaires, Poncelet étend ce principe et pense avoir ainsi justifié la règle des signes que Carnot ne faisait qu'admettre :

Ainsi, quand M. Carnot admet qu'une quantité géométrique qui, dans un premier système, était la différence de deux quantités dont la plus petite a été retranchée de la plus grande, devient dans le système corrélatif, la différence de deux autres dont la plus grande a été, au contraire retranchée de la plus petite, quand il admet ainsi que cette quantité change de signe dans toutes les équations qui expriment des propriétés du système, il avance précisément ce qu'il fallait prouver, savoir : que les quantités qui changent de signe, changent simultanément de signe dans les relations métriques où elles entrent. [Poncelet, 1815a, 233]

Selon Poncelet, le principe est déjà implicitement utilisé lorsque on applique des techniques algébriques aux questions géométriques. Pour ces raisons, il est en désaccord avec l'opinion de Carnot qui considérait les solutions négatives ou imaginaires données par l'algèbre comme fausses ; au contraire, elles sont pour Poncelet aussi significatives que les solutions positives, satisfont comme ces dernières aux équations de situation du système. Le désaccord fondamental entre Poncelet et Carnot réside dans leur manière de concevoir un problème général : Carnot regarde un problème général comme une juxtaposition de problèmes particuliers relatifs à des figures corrélatives l'une de l'autre. Poncelet envisage un système ou une figure indépendamment de ses situations particulières et l'étudie grâce à son principe de continuité dans sa généralité. Toutes solutions obtenues par la méthode algébrique sont des solutions du système ; les positives s'appliquent aux hypothèses implicites faites lors de la mise en équation, les négatives correspondent à d'autres configurations dans lesquelles certaines

²⁰L'introduction des considérations de sens permet à Poncelet de relativiser son refus des quantités négatives. En effet, s'il continue avec Carnot à affirmer qu'«il n'existe pas de *quantités négatives* absolues et isolées proprement dites», pour autant les *expressions* négatives isolées ne sont pas insignifiantes, ni absurdes :

[Les expressions négatives isolées] ne sont telles, en effet, que quand on prétend les regarder comme des quantités simples et leur appliquer l'idée abstraite de grandeur ; car elles représentent à la fois la grandeur et l'état, la fonction opposée et contraire à celles qu'indiquent les expressions algébriques isolées, positives ou additives. [Poncelet, 1815a, 287]

quantités changent de signe et les imaginaires à des situations dans lesquelles certains éléments ont disparus et révèlent une impossibilité d'une construction :

En Géométrie comme en Analyse algébrique où l'on considère des quantités indéterminées ou variables suivant certaines lois continues, les signes + et -, qui précèdent une grandeur, peuvent aussi représenter le sens direct ou inverse, progressif ou rétrograde, par rapport à l'origine d'où cette grandeur se mesure. A la suite et comme résultat d'un calcul algébrique, elles indiquent une concordance ou une opposition de sens d'une grandeur supposée inconnue algébriquement, par rapport au sens qu'on lui avait d'abord attribué dans les formules, équations ou relations quelconques, considérées comme fondamentales au point de départ.

Dans les figures dont tous les éléments sont soumis à la loi de continuité, il existe un constant accord entre la loi des signes de position et celle qu'indiquent les règles algébriques ; leur désaccord dans les résultats, s'il n'est pas purement apparent, provient toujours d'erreurs de calcul ou de raisonnement, de fausses hypothèses ou d'une cause de discontinuité quelconque inhérente aux données ou aux relations métriques primitives et conditionnelles. [Poncelet, 1815a, 287-288]

Le désaccord est particulièrement éloquent lorsqu'il s'agit d'interpréter les figures non-constructibles ; Poncelet montre à partir d'un exemple simple les différences entre son point de vue et celui de Carnot. Il considère une triangle rectangle en A dont on connaît l'hypothénuse BC et la somme $AB + AC + AD$, AD étant la hauteur issue de A , le problème étant de déterminer cette hauteur. Si l'on pose $BC = a$, $AB + AC + AD = b$, $AC = z$, $AB = y$ et $AD = x$, les données du problème se traduisent par les équations :

$$x + y + z = b, \quad y^2 + z^2 = a^2, \quad yz = ax.$$

On obtient :

$$x = a + b \pm \sqrt{2a(a + b)}.$$

La solution $x = a + b + \sqrt{2a(a + b)}$ est apparemment difficile à interpréter puisqu'elle « donne pour la perpendiculaire AD une longueur qui dépasse $a + b$, ce qui paraît absurde » [Poncelet, 1815a, 282]. L'absurdité est cependant apparente puisque cette valeur correspond à des valeurs imaginaires de y et z . L'analyse ne conduit donc pas à une solution erronée mais simplement à un triangle qui n'est pas constructible. Suivant Carnot, un tel exemple montre que les transformations algébriques ont « amalgamées avec les racines effectives du problème » des racines fausses ; pour Poncelet, toutes les solutions sont des solutions effectives et correspondent à différents états du système, en l'occurrence certaines à des systèmes réalisables, d'autres à des systèmes non-réalisables. Poncelet conclut en défendant l'analyse algébrique tout en montrant que pour autant ce n'est pas une méthode universelle et que lorsqu'on l'applique à des problèmes géométriques, il est nécessaire de revenir à des considérations de géométrie pure :

L'Analyse algébrique exige donc, lorsqu'on l'applique à des questions de Géométrie, de la pénétration d'esprit et du jugement, et l'on a tort de croire qu'on puisse l'employer comme un véritable instrument qui doit même redresser, dans tous les cas possibles, les erreurs et les fausses hypothèses que l'on pourrait commettre. C'est

une arme commode dont tout le monde indistinctement peut se servir ; elle donne toujours des résultats bons en eux-mêmes, mais qui, fort souvent, ne seront applicables à ce qu'on cherche et n'auront de signification véritable, qu'entre les mains de ceux qui savent les lire et les interpréter d'une manière convenable. En un mot, l'Analyse ne doit pas être appelée que comme auxiliaire du raisonnement ordinaire ; elle sert à soulager la mémoire, à symboliser le résultat des premières conceptions géométriques, et à en tirer des conséquences faciles au moyen du mécanisme qui lui est propre ; mais elle ne saurait jamais diriger ni suppléer le jugement et la conception : c'est le *vrai bâton des aveugles*. [Poncelet, 1815a, 294-295]

Chapitre 3

Poncelet et l'étude des propriétés projectives

Poncelet a consacré le début de sa carrière scientifique à l'étude de la géométrie pure. Joseph Bertrand, dans son *Éloge historique de Jean-Victor Poncelet*¹, explique ce choix par l'isolement de ce dernier lors de sa captivité. Réduit à ne travailler qu'à partir de ses souvenirs de ses années de formation élémentaires, Poncelet aurait ainsi poursuivi ses «méditations» sans être détourné vers des sujets plus prestigieux.² Si l'argument de Bertrand n'est guère convaincant, la question est par contre pertinente : pourquoi Poncelet, à la suite de Carnot, Brianchon, Servois, se propose de «perfectionner» et «généraliser»³ la géométrie pure dont il souligne les insuffisances. La première raison avancée par Poncelet concerne la trop grande sophistication des méthodes développées par Monge ; en effet, celles-ci sont des méthodes mixtes qui font usage à la fois de considérations géométriques et analytiques :

[...] Monge [...] avait raison de recommander aux Élèves l'étude de la *Géométrie analytique*, celle-ci étant très-propre à donner aux conceptions géométriques cette extension et cette généralité qui sont essentiellement dans sa nature. [...] Les Leçons de Monge d'ailleurs s'adressaient à des hommes appelés à parcourir les diverses branches des connaissances humaines, dans tout ce qu'elles ont de plus relevé.
[Poncelet, 1822, IX]

Les succès des travaux de Monge et de ses élèves ont permis un changement de perspective en géométrie, de populariser «les idées générales» en géométrie. L'utilisation de la géométrie analytique se justifiait lorsqu'il s'agissait de développer un point de vue nouveau en géométrie et conférait comme le souligne Poncelet aux théorèmes de la géométrie de Monge «toute l'extension de ceux de l'Analyse algébrique»⁴. Mais à partir du moment où les mathématiciens

¹[Bertrand, 1879].

²Belhoste [1998] montre que les cahiers dits *de Saratov* reprennent des réflexions déjà engagées alors que Poncelet était élève à l'École polytechnique.

³[Poncelet, 1822, X].

⁴[Poncelet, 1822, XI].

sont convaincus d'aborder les questions géométriques dans un cadre général dépassant celui de l'étude de figures ou de problèmes particuliers, il convient de déterminer des méthodes purement géométriques qui permettraient «de faire passer dans la Géométrie ordinaire la généralité des conceptions de la l'Analyse algébriques, généralité qui doit nécessairement appartenir à l'essence même de la grandeur figurée, indépendamment de toute manière de raisonner»⁵ :

Agrandir les ressources de la simple Géométrie, en généraliser les conceptions et le langage ordinairement assez restreints, les rapprocher de ceux de la Géométrie analytique, et surtout offrir des moyens propres à démontrer et à faire découvrir, d'une manière facile, cette classe de propriétés dont jouissent les figures quand on les considère d'une manière purement abstraite et indépendamment d'aucune grandeur absolue et déterminée, tel est l'objet qu'on s'est spécialement proposé dans cet Ouvrage. [Poncelet, 1822, XXII]

Un autre argument en faveur d'un traitement purement géométrique utilisé par Poncelet est d'ordre épistémologique et pédagogique ; en n'utilisant pas l'analyse, la géométrie est «réduite à ce qu'elle doit être»⁶ et peut donc être diffusée auprès de publics qui ne maîtrisent pas le calcul analytique. La pureté des méthodes est donc revendiquée comme un objectif de la pratique scientifique et elle implique en même temps une simplicité de conception qui facilite l'apprentissage et la compréhension. En effet, garantir la généralité des théorèmes par des calculs analytiques ne permet pas de se former une intuition géométrique ce qui est particulièrement dommageable pour les applications. Ce dernier argument est d'autant plus convaincant aux yeux de Poncelet que même si la géométrie analytique est sans aucun doute supérieure à la géométrie pure du point de vue de la généralité des méthodes et des théorèmes, celle-ci lorsqu'il s'agit de l'application à des questions particulières, «ne saurait aucunement se passer du secours des considérations de la Géométrie pure, soit pour simplifier l'état de la question en la ramenant à des circonstances plus faciles, soit pour simplifier la marche de ses opérations, soit enfin pour interpréter et traduire géométriquement ses résultats définitifs»⁷

Poncelet propose et étudie deux moyens pour donner à la géométrie pure le même caractère de généralité que celui possédé par la géométrie analytique :

l'un qui consiste à étendre l'objet des conceptions de cette Géométrie à l'aide du principe de continuité, l'autre qui met en usage les principes de la projections pour procéder, par une marche à la fois rapide et exempte d'hésitation, à la recherche des vérités géométriques. [Poncelet, 1822, XXII]

3.1 Le principe de continuité et les éléments imaginaires

Lorsqu'il compare la géométrie pure et la géométrie analytique, le constat de Poncelet est identique à celui de Carnot ; la dernière est indéniablement

⁵[Poncelet, 1818, 297].

⁶[Poncelet, 1822, IX].

⁷citep[305]Ponc1818.

supérieure à la géométrie pure du point de vue de la généralité de ses résultats et de la systématisme de ses méthodes. Leurs programmes de recherche diffèrent pourtant radicalement ; en effet, alors que Carnot avait pour objectif de mettre en œuvre des méthodes qui possèdent certes le même caractère de généralité que celles utilisées en analyse mais qui pour autant ne seraient pas inspirées par celles-ci puisqu'aux yeux de Carnot, les méthodes analytiques considèrent des entités sans fondement (quantités négatives et imaginaires) et peuvent de ce fait être fautives. Au contraire, Poncelet ne voit rien de répréhensible dans l'emploi de quantités négatives ou imaginaires :

L'Algèbre emploie des signes abstraits, elle représente les grandeurs absolues par des caractères qui n'ont aucune valeur par eux-mêmes, et qui laissent à ces grandeurs toute l'indétermination possible ; par suite elle opère et raisonne forcément sur les signes de non-existence comme sur des quantités toujours absolues, toujours réelles : a et b , par exemple, représentant deux quantités quelconques, il est impossible dans le cours des calculs, de se rappeler et de reconnaître quel est l'ordre de leurs grandeurs numériques ; l'on est, malgré soi, entraîné à raisonner sur les expressions $a - b$, $\sqrt{a - b}$, etc., comme si c'étaient des quantités toujours absolues et réelles. Le résultat doit donc lui-même participer de cette généralité, et s'étendre à tous les cas possibles, à toutes les valeurs des lettres qui y entrent ; de là aussi ces formes extraordinaires, ces êtres de raison, qui semblent l'apanage exclusif de l'Algèbre.

Or on est conduit à toutes ces conséquences, non-seulement quand on emploie les signes et les notations de l'Algèbre, mais aussi toutes les fois qu'en raisonnant sur des grandeurs quelconques on fait abstraction de leurs valeurs numériques et absolues ; en un mot, toutes les fois qu'on emploie le raisonnement sur des grandeurs *indéterminées*, c'est-à-dire le *raisonnement* purement *implicite*. [Poncelet, 1822, XI-XII]

Au contraire, selon Poncelet, les principes méthodologiques de la géométrie pure traditionnelle imposent de ne raisonner que sur des grandeurs et des formes «réelles et existantes». On ne peut en quelque sorte quitter des yeux la figure que l'on étudie. «La rigueur est même poussée jusqu'au point de ne pas admettre les conséquences d'un raisonnement, établi dans une certaine disposition générale des objets d'une figure, pour une autre disposition également générale de ces objets, et qui aurait toute l'analogie possible avec la première ; en un mot, dans cette Géométrie restreinte, on est forcé de reprendre toute la série des raisonnements primitifs, dès l'instant où une ligne, un point ont passé de la droite à la gauche d'un autre, etc.»⁸. Avec une telle géométrie, on ne peut obtenir des résultats vraiment généraux ; or, «on ne saurait douter que la généralité des solutions ne soit, le plus souvent, la source de leur élégance et de leur simplicité»⁹. De plus, il est difficile d'organiser le corpus des théorèmes particuliers auxquels on parvient dans un tel cadre en théories qui rendent compte des propriétés les intéressantes des figures géométriques, à savoir celles qui concernent «les relations générales et indéterminées qui leur sont communes ou qui appartiennent

⁸[Poncelet, 1822, XII-XIII].

⁹[Poncelet, 1817-1818, 467].

à leur combinaison mutuelle»¹⁰. Or, ces dernières sont les plus importantes car du fait de l'indétermination des grandeurs qu'elles regardent, elles renferment «implicitement» les propriétés particulières. En se limitant au seul «raisonnement explicite», la géométrie traditionnelle est trop limitée pour répondre aux aspirations des géomètres modernes. Poncelet donne l'exemple du théorème de la puissance d'un point par rapport à un cercle. Pour démontrer un tel théorème, «en suivant la marche rigoureuse de la Géométrie, on se voit obligé de recommencer sur de nouveaux frais, la démonstration»¹¹ selon la position du point à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle.¹²

La corrélation des figures qui précède est simplement indirecte, et il est assez remarquable que la conséquence finale des raisonnements reste la même de part et d'autre sans modification explicite ou apparente; nous avons à dessein choisi cet exemple pour montrer jusqu'à quel point la Géométrie peut être sévère et restreinte dans sa marche et dans les conséquences de ses raisonnements. [Poncelet, 1818, 308]

Ce n'est que sous l'aspect de l'extension des résultats et de l'uniformité des méthodes que la géométrie analytique est supérieure à la géométrie pure traditionnelle. En effet, selon Poncelet, la méthode des coordonnées n'offre pas une conception préférable des problèmes de géométrie et n'en permet pas une meilleure compréhension. Il est même facile de montrer que celle-ci a besoin de considérations de géométrie pure pour ses fondements et pour son application. «[...] sous le point de vue de l'application [...] à des questions particulières, la Géométrie analytique ne saurait aucunement se passer du secours des considérations de la Géométrie pure, soit pour simplifier l'état de la question en la ramenant à des circonstances plus faciles, soit pour simplifier la marche de ses opérations, soit enfin pour interpréter et traduire géométriquement ses résultats définitifs»¹³.

La supériorité de la géométrie analytique réside aux yeux de Poncelet dans la capacité qu'elle a d'envisager dans un même raisonnement une multiplicité de figures corrélatives, c'est-à-dire un ensemble de figures qui ne diffèrent que par un déplacement relatif de certaines parties. La géométrie de Monge qui étend «sans aucun scrupule» un raisonnement de géométrie pure établi à partir d'une figure particulière aux figures corrélatives utilise cette puissance de l'analyse, «en s'appuyant tacitement sur cette conséquence générale de l'Analyse des coordonnées : que *les relations appartenant à une certaine figure demeurent, dans leur forme explicite, applicables à toutes les situations possibles de cette figure*»¹⁴. Poncelet propose d'introduire dans les modes de raisonnements de la géométrie

¹⁰[Poncelet, 1818, 298].

¹¹[Poncelet, 1818, 308].

¹²Dans le chapitre IX consacré aux *Rectangles [...] formés sur les droites qui se rencontrent en un point pris dans le cercle ou hors du cercle* du volume consacré à la géométrie plane de son *Cours complet de mathématiques et de physique*, Guidi [1801] commence par montrer le théorème de la puissance d'un point par rapport à un cercle lorsque le point est intérieur au cercle (en distinguant d'abord le cas où les deux cordes sont deux diamètres se coupant au centre du cercle, le cas où une des cordes est un diamètre coupant l'autre en son milieu, puis le cas où une des cordes est un diamètre coupant obliquement à l'intérieur du cercle une corde quelconque, et enfin le cas général de deux cordes se coupant à l'intérieur d'un cercle). Le théorème lorsque le point de concours des cordes est extérieur au cercle est obtenu ensuite en considérant d'abord le cas où une des droites passe par le centre du cercle et l'autre une tangente.

¹³[Poncelet, 1818, 305].

¹⁴[Poncelet, 1818, 313].

pure ; en effet, il voit dans tous les travaux «où l'on s'attache à une certaine généralité dans les idées et les conceptions»¹⁵ l'influence d'un tel principe. Il cite en particulier le calcul infinitésimal qui étend aux considérations concernant les infiniment petits et les infiniment grands des conceptions relevant des grandeurs «absolues et finies». L'argument de Poncelet fait entre autres allusion aux travaux de Monge et Dupin en géométrie infinitésimale des surfaces qui introduise les notions de courbure et de torsion par des raisonnements de géométrie euclidienne sur les éléments infiniment petits.

Poncelet précise les formes d'utilisation, dans le cadre de la géométrie analytique, d'un tel principe qu'il qualifie de *principe de la continuité ou permanence des relations mathématiques de la grandeur figurée* selon que les propriétés étudiées sont *descriptives* (ou graphiques) ou *métriques*. Les premières ne concernent «aucune espèce de grandeur mesurée, et ne dépendront par conséquent que de la forme générale et explicite des équations qui les expriment»¹⁶. Les propriétés métriques ne concernent que les rapports de grandeur entre parties de la figure. Elles restent «permanentes» dans leur forme générale «mais elles pourront éprouver, dans chaque cas, une variation dans les signes algébriques des lettres ou grandeurs implicites qui y entrent»¹⁷. Poncelet en déduit deux formes particulières du principe de continuité puisque la corrélation des figures n'affecte pas la forme des équations :

Les propriétés graphiques trouvées pour la figure primitive subsistent, sans autres modifications que celles du déplacement des parties, pour toutes les figures corrélatives qui peuvent être censées provenir de la première.

Les propriétés métriques découvertes pour la figure primitive demeurent applicables, sans autres modifications que celles du changement des signes, à toutes les figures corrélatives qui peuvent être censées provenir de la première. [Poncelet, 1818, 318]

Ces principes ne sont pas des conséquences de l'emploi en algèbre des «êtres de raison» que sont les nombres négatifs et imaginaires ; au contraire, leur utilisation est justifiée par l'admission implicite du principe de continuité. L'extension des résultats de l'algèbre n'est fondée en fait que «par le fait d'une longue expérience et la conformité de ses résultats avec ceux du raisonnement explicite ordinaire». Le principe de continuité appliquée en algèbre et en géométrie analytique est donc «une de ces vérités premières qu'il est impossible de ramener à des idées et à des notions plus simples, parce qu'elles ont leur source et leur certitude immédiate dans notre manière de voir autant que dans les faits eux-mêmes, dans la nature des choses»¹⁸. Selon Poncelet, pour assurer aux résultats de la géométrie pure la même extension que ceux de la géométrie analytique, il convient donc d'adopter le principe de continuité dans les raisonnements de la géométrie pure indépendamment de toute justification par l'analyse. Le principe proposé en géométrie pure est identique au principe à l'œuvre en géométrie analytique. Il consiste à considérer que «les propriétés descriptives ou métriques d'une figure donnée demeurent applicables, sauf les variations de signes et de position des parties, à toutes les figures corrélatives»¹⁹. L'adoption d'un tel prin-

¹⁵[Poncelet, 1818, 313].

¹⁶[Poncelet, 1818, 317-318].

¹⁷[Poncelet, 1818, 317-318].

¹⁸[Poncelet, 1818, 336].

¹⁹[Poncelet, 1818, 337].

cipe dans le cadre de la géométrie pure n'est pas moins légitime qu'en analyse ou en géométrie analytique ; Poncelet concède qu'elle peut paraître audacieuse car le principe de continuité, s'il est mal compris, peut apparemment comme en géométrie analytique conduire à des paradoxes liés aux éléments imaginaires. Il suffit, comme Poncelet le précise, de s'assurer que «dans la figure type, celle d'où l'on part et à laquelle on rapporte, au moins tacitement, les autres, les objets et les grandeurs soient tous réels et géométriques»²⁰. En conséquence, une relation donnée qui concernerait un état idéal d'une figure, c'est-à-dire qui ne s'appliquerait pas explicitement à la figure considérée, ne peut être obtenue qu'à partir d'une application du principe de continuité ; une telle relation provient donc de l'extension d'une propriété démontrée explicitement, elle «a nécessairement son origine dans un état antérieur où tout était réel et absolu»²¹. Il n'y a pas de problème tant que tous les éléments restent réels et changent seulement de position relative. Le principe de continuité permet d'affirmer que les propriétés descriptives sont préservées et que les propriétés métriques conservent leur forme et peuvent nécessiter quelques mutations de signes. Le principe de continuité ne prend sa signification que lorsque des éléments deviennent imaginaires et que la propriété n'est plus applicable de manière absolue. Si la propriété concerne des objets ou des quantités imaginaires, Poncelet affirme qu'elle n'en devient pas pour autant fausse ou absurde et qu'elle continue à subsister ; elle «devient purement idéale à l'égard de ces objets»²². On peut donc continuer à l'utiliser pour des raisonnements qui conduisent à des résultats réels²³ :

Nous le répétons encore avant de terminer : en regardant comme générales et applicables à tous les cas les propriétés qui peuvent découler de ces principes, nous n'entendons pas, pour cela, dire qu'elles ont toujours un sens absolu et réel, mais seulement qu'elles ne peuvent, à proprement parler, devenir fausses, ni entraîner par conséquent, dans leur adoption et dans leurs conséquences, à des erreurs véritables, à des absurdités manifestes et contraires aux axiomes incontestables de la raison. Ainsi ces propriétés pourront bien ne conserver, dans certains cas, qu'une signification purement idéale dans ce qu'elles expriment, à cause qu'une ou plusieurs des parties qu'elles concernent auront perdu leur existence absolue et géométrique ; mais elles n'en seront pas moins logiques, et propres, si on les emploie d'une manière convenable, à conduire à des vérités incontestables et rigoureuses, d'ailleurs susceptibles des mêmes limitations et des mêmes restrictions que les premières. [Poncelet, 1822, 68]

Dans son article «philosophique» sur le principe de continuité, Poncelet [1818] montre, en reprenant l'exemple du théorème de la puissance d'un point par rapport à un cercle, comment les propriétés généralisées grâce au principe de continuité continuent à caractériser «la véritable nature du système auquel elles s'appliquent»²⁴. En particulier, Poncelet signale qu'il faut considérer l'ensemble

²⁰[Poncelet, 1818, 337].

²¹citép[337]Ponc1818.

²²[Poncelet, 1822, 66].

²³Poncelet n'envisage pas de développer une théorie géométrique des éléments imaginaires. Ils sont des outils qui permettent de généraliser les raisonnements et les propriétés concernant les éléments réels. En fait, il donne aux éléments imaginaires le même statut que les algébristes du 16^e siècle dans l'algorithme de résolution de l'équation du 3^e degré.

²⁴[Poncelet, 1818, 338].

des relations qui définissent la figure; étant donné deux sécantes réelles SA et SC d'un cercle qui l'intersectent respectivement en A, B et en C, D , le théorème de la puissance d'un point par rapport à un cercle s'exprime par la relation :

$$SA.SB = SC.SD$$

Poncelet affirme alors que «cette relation demeure toujours réelle dans sa forme et son énoncé, même quand l'une SC , des deux sécantes, vient à ne plus rencontrer le cercle»²⁵. Un tel résultat souligne pourrait apparaître en première analyse contradictoire ou absurde. En fait, répond Poncelet, cette relation ne suffit pas à caractériser les points C et D . Il faut une seconde relation que l'on obtient par exemple en considérant la perpendiculaire OK à la sécante SC qui passe par le centre O du cercle. K étant le point d'intersection de la perpendiculaire et de la sécante, on obtient une nouvelle relation

$$2SK = SC + SD$$

qui reste elle aussi réelle en toute circonstance. Dans le cas où la sécante est *réelle* (intersecte le cercle en deux points réels), les deux relations sont compatibles et permettent de définir et de construire les points C et D . Dans le cas où la sécante est *idéale* (intersecte le cercle en deux points imaginaires), les deux relations sont incompatibles; cette incompatibilité montre que l'on ne peut construire les points C et D .

De ce que certaines relations appartenant à une figure donnée sont individuellement réelles, on ne peut donc pas affirmer que les objets auxquels elles correspondent et qu'elles servent à construire, soient eux-mêmes toujours possibles; [...] de ce qu'un objet est actuellement impossible, ce n'est pas une raison pour croire que les relations ou les signes qui en dépendent et qui le construisent doivent par là même cesser d'avoir une existence effective. [Poncelet, 1818, 341-342]

Le principe de continuité sert aussi à Poncelet à introduire la notion d'éléments à l'infini. En considérant deux droites sécantes et en faisant pivoter autour d'un de ses points l'une des deux droites «dans un mouvement progressif et *continu*, toujours dans le même sens et dans le plan primitif»²⁶, le point d'intersection s'éloigne de sa position originale jusqu'à «cesser tout à fait d'être, circonstance qui aura lieu quand ces deux droites seront devenues *parallèles*». Poncelet propose «pour conserver à ce point un signe dans le discours» de dire qu'il est à *l'infini* dans le plan des deux droites. Ainsi, on signale sa non-existence géométrique et on justifie l'expression «si généralement admise» selon laquelle deux droites parallèles se coupent ou convergent à l'infini. Bien entendu, la notion de point à l'infini se généralise aux faisceaux de droites parallèles qui auront leur point de concours en un même point à l'infini. On pourra ainsi en vertu du principe de continuité étendre aux faisceaux de droites parallèles (qui ont leur point d'intersection à l'infini) les considérations développées à propos des faisceaux de droites dont le centre est réel. De plus, deux droites sécantes ne se coupent qu'en un seul point et donc, en raison du principe de continuité, il en est nécessairement de même pour deux droites parallèles. Poncelet en déduit «cette conséquence paradoxale, mais pourtant nécessaire» :

²⁵[Poncelet, 1818, 341].

²⁶[Poncelet, 1818, 346].

Les deux extrémités d'une droite indéfinie se rejoignent et se confondent à l'infini. [Poncelet, 1818, 347]

Si au lieu de droites, on considère des plans sécants, on définit de la même manière la droite à l'infini d'un plan, notion que l'on peut étendre aux faisceaux de plans parallèles. Comme une droite réelle d'un plan peut être transportée à l'infini «d'un mouvement continu et parallèlement à elle-même», il s'ensuit que la droite à l'infini du plan est constituée des points à l'infini du plan et que sa direction est indéterminée :

Tous les points situés à l'infini sur un plan doivent être considérés, d'une manière idéale, comme distribués sur une seule et même ligne droite, dont la direction est indéterminée. [Poncelet, 1818, 348]

La notion de plan à l'infini est aussi une conséquence logique du principe de continuité ; puisque deux plans s'intersectent le long d'une droite, il s'ensuit que l'on doit considérer les points à l'infini de l'espace comme situés dans un même plan :

Tous les points à l'infini de l'espace doivent être considérés, d'une manière idéale, comme distribués sur une seule et unique surface plane située à l'infini, dont la direction est d'ailleurs entièrement indéterminée. [Poncelet, 1818, 348]

Lorsque l'on applique le principe de continuité à une figure, il n'est donc plus question que de déduction. Les conséquences peuvent paraître paradoxales si l'on s'en tient aux représentations habituelles. Poncelet considère que l'usage inhérent à la géométrie pure de représentations visuelles est une des principales raisons de «la répugnance qu'on éprouve [...] à admettre le principe de continuité»²⁷. Il souligne que c'est d'ailleurs dans les situations simples, facilement représentables que cette *répugnance* est la plus manifeste et que dès que les figures se compliquent – en particulier lorsqu'il est question de géométrie dans l'espace – et qu'il est difficile de les imaginer, le recours au principe de continuité est mieux accepté.

3.1.1 La réception du principe de continuité

L'argumentation de Poncelet en faveur de l'adoption d'un principe de permanence des propriétés ne convainc guère les mathématiciens et ne sera pas repris. Dans le deuxième tome des *Applications d'analyse et de géométrie qui ont servi de principal fondement au traité des propriétés projectives des figures*²⁸ dans lequel il réédite ses premiers travaux géométriques, Poncelet publie dans un dossier la correspondance qu'il échange avec Terquem et le rapport rédigé par Cauchy.

Les réactions de Terquem, Servois et Brianchon

Terquem consacre sa lettre du 21 janvier 1819 à la comparaison entre les méthodes analytiques et géométriques et approuve le principe de continuité :

²⁷[Poncelet, 1818, 343].

²⁸[Poncelet, 1864].

Un seul changement de signes suffit à l'Algèbre pour transporter les propriétés du cercle à l'hyperbole équilatère. Au moyen de votre ingénieux système interprétatif, la Géométrie trouvera dans sein de quoi opérer de semblables métamorphoses. [Terquem, 21 janvier 1819, 540]

Dans sa lettre de septembre 1819, Terquem fait part à Poncelet de l'approbation de Brianchon. Il ajoute une objection faite de concert avec Servois concernant les différents types d'impossibilité. Il différencie les impossibilités métriques telles celles relatives à \sqrt{a} lorsque a est négatif et celles algorithmiques qui apparaissent «lorsque les conditions de l'existence sont réglées sur la nature de l'opération»²⁹. Poncelet répond qu'il n'envisage que des impossibilités métriques et qu'il laisse la réponse à la questions des impossibilités algorithmiques telles que les factorielles, différentielles, logarithmes, intégrales à exposants complexes au progrès de «l'algorithmie»³⁰

Le rapport de Cauchy

La principale réaction aux travaux de Poncelet est le rapport de l'Académie des sciences sur l'*Essai sur les propriétés projectives des sections coniques* [Poncelet, 1820] rédigé par Cauchy³¹. La conclusion du rapport est que le mémoire de Poncelet est «digne de l'approbation de l'académie». Cauchy approuve sans réserve l'utilisation des projections pour simplifier les démonstrations de la théorie des coniques et considère légitime que l'on puisse «considérer une ellipse, une hyperbole ou une parabole comme la perspective ou projection centrale d'un cercle quelconque et déduire, des propriétés de ce cercle, celles de la projection»³². Par contre, l'emploi du principe de continuité ne rencontre pas la même approbation. Le principe de continuité n'est, aux yeux de Cauchy, «qu'une forte induction, à l'aide de laquelle on étend des théorèmes établis, d'abord à la faveur de certaines restrictions, aux cas où ces mêmes restrictions n'existent plus»³³. Cauchy reconnaît qu'appliqué aux coniques, comme Poncelet le fait, ce principe conduit à des résultats exacts ; néanmoins, il ne saurait être question de lui accorder «trop de confiance» ni en géométrie, ni en analyse car «on pourrait tomber quelque fois dans des erreurs manifestes». Cauchy donne l'exemple des intégrales qui peuvent n'être définies que dans la mesure où les «valeurs des quantités qu'elles renferment restent comprises entre certaines limites»³⁴. Cauchy juge le principe de continuité à l'aune de son exigence de ne considérer que des séries et des intégrales convergentes et de n'accorder aucun sens à leur somme lorsque celles-ci sont divergentes. Par ailleurs, Cauchy termine son rapport en montrant que la théorie des cordes idéales peut être simplifiée en utilisant des considérations analytiques simples (faisant intervenir les nombres

²⁹[Terquem, septembre 1819, 542].

³⁰[Poncelet, 14 octobre 1819, 548].

³¹Les autres signataires du rapport sont Arago et Poisson.

³²[Cauchy, 1820-1821, 71].

³³[Cauchy, 1820-1821, 72].

Cauchy maintient ses réserves dans un second rapport [Cauchy] consacré au *Mémoire relatif aux propriétés des centres de moyennes harmoniques* [Poncelet, 1828a].

³⁴[Cauchy, 1820-1821, 73].

complexes) et qu'il est donc inutile d'invoquer un principe de permanence des propriétés des figures.³⁵

Dans son livre sur les *Principes de Géométrie*, Darboux [1917] évoque la critique de Cauchy du principe de Poncelet. Il conclut que «de ces deux géomètres, aucun n'avait complètement raison, [...] ni complètement tort»³⁶. Il refuse de voir seulement dans le principe de continuité «une forte induction» car tant que les propriétés dépendent d'expressions algébriques, il suffit de les montrer dans le cas réel pour conclure qu'elles sont vraies dans le cas imaginaire. Darboux justifie donc le principe de Poncelet à partir du principe du prolongement analytique appliqué aux fonctions algébriques. Pour cette raison, il ne suit pas Poncelet d'une part parce qu'il n'est à ses yeux qu'«une conséquence de l'Analyse», d'autre part parce qu'il trouve que l'énoncé de Poncelet est trop général. Darboux a raison lorsqu'il précise que Poncelet utilise son principe uniquement dans des cas où les relations sont rationnelles. Il est clair que Poncelet ne vise que des situations géométriques décrites par des relations algébriques : coniques, courbes algébriques de degré supérieur, surfaces du second degré. Le commentaire de Darboux est mathématiquement juste si l'on considère le principe de continuité de Poncelet comme un principe d'extension aux cas imaginaires de propriétés montrées dans le cas réel, mais il ne rend pas compte des intentions de Poncelet. En effet, l'objectif de Poncelet était différent ; il n'envisageait pas de fonder une géométrie des éléments imaginaires. Il ne considère les éléments imaginaires que comme des outils pour traiter des questions réelles. Leur introduction, de même que celle des éléments à l'infini, permet d'étudier d'un seul et même raisonnement une série de figures corrélatives. De plus, ni Poncelet, ni Cauchy ne pouvait à l'époque (1820) avoir à l'esprit un lien quelconque entre le principe de continuité et celui du prolongement analytique puisqu'il faut attendre les travaux de Weierstrass, près d'un demi-siècle après, pour que l'idée de prolongement analytique émerge.

Poncelet est très désappointé par le rapport de la commission. Il est même vraisemblable que la décision de publier la suite de ses recherches géométriques après le *Traité des propriétés projectives des figures* dans le *Journal de Crelle* n'est pas complètement étrangère aux critiques de Cauchy et au peu de soutien des milieux académiques.³⁷

Dans l'introduction du premier tome du *Traité des propriétés projectives des figures*, Poncelet répond (sans le citer) au commentaire de Cauchy sur le principe de continuité. Après avoir plaidé pour l'adoption de ce principe, il conclut :

Enfin, quel mal pourrait-il en résulter, surtout si l'on se montrait sévère à conclure, si l'on ne se payait jamais de demi-aperçus, si l'on admettait jamais l'*analogie* et l'*induction*, qui sont souvent trompeuses, et qu'il ne faut pas confondre avec le principe de continuité ?

³⁵Voir le paragraphe sur la théorie des polaires (3.3).

³⁶[Darboux, 1917, 6].

³⁷Dans le dossier historique publié (en 1866) à la fin du second tome du *Traité des propriétés projectives*, Poncelet note que Crelle a, dès le début de son entreprise, soutenu son travail :

[...] malgré l'appréhension que devait lui inspirer les critiques et les dénégations de justice d'hommes aussi considérés alors que Gergonne et Cauchy, malgré l'esprit de rivalité qu'il risquait de provoquer dans son propre pays, le bon et loyal Dr. Crelle osa annoncer avec éloge, dès le premier numéro de son recueil, le *Traité des Propriétés projectives des figures*, dans un article bibliographique remarquable sous le rapport du courage scientifique et de l'équité. [Poncelet, 1866, 407]

En effet, l'analogie et l'induction concluent du particulier au général, d'une série de faits isolés, sans liaison nécessaire, en un mot discontinus, à un fait général et constant : la loi de continuité veut, au contraire, que l'on parte d'un état général et en quelque sorte indéterminé du système, c'est-à-dire tel, que les conditions qui le régissent ne soient jamais remplacés par des conditions plus générales encore, et qu'elles subsistent dans une série d'états semblables, provenus les uns des autres par gradation insensible. [Poncelet, 1822, XV]

Poncelet fait une concession en avançant que l'on peut au moins admettre sans restriction le principe de continuité comme «moyen de découverte ou d'invention». Ce serait à ses yeux bien suffisant :

N'est-il pas, pour le moins, aussi nécessaire d'enseigner les ressources employées, à diverses époques, que les efforts pénibles qu'ils ont été ensuite obligés de faire pour les démontrer selon le goût des esprits ou timides ou peu capables de se mettre à leur portée? [Poncelet, 1822, XIV]

La concession est toute relative car en même temps, Poncelet réaffirme que le principe de continuité a été déjà admis dans d'autres disciplines (le calcul algébrique et la géométrie analytique) et n'est pas plus prouvé dans ce cadre qu'il ne l'est en géométrie pure. De plus, dans la conclusion de l'ouvrage, Poncelet que les nombreux exemples d'application du principe de continuité montrent d'une part sa pertinence³⁸ et qu'avec un peu de pratique, «il ne sera jamais possible de se tromper» ; il suffit d'en restreindre l'application aux cas convenables, c'est-à-dire lorsque lorsqu'on l'applique «à tout ce qui est essentiellement continu de sa nature». Poncelet réitère sa conviction qu'ainsi conçu, le principe de continuité «n'est point une simple analogie, une simple hypothèse, ni même une induction quelque forte qu'on veuille bien la supposer» mais qu'au contraire, «elle est une conséquence rigoureuse, immédiate, et de la nature des objets que la Géométrie considère, et de la manière dont il nous est possible de concevoir les lois générales de la grandeur abstraite et figurée»³⁹.

³⁸Gergonne avait dans une note au rapport de Cauchy de 1820 déjà utilisé un tel argument pragmatique en signalant que le mémoire de Poncelet offrait «des exemples remarquables en faveur de ce principe»[Cauchy, 1820-1821, 72]. Gergonne persiste dans son soutien aux méthodes de Poncelet puisqu'il souligne que «ce qu'il y a de plus important et de plus éminemment philosophique [dans les recherches de Poncelet] c'est [...] la possibilité de démontrer, sans aucune sorte de calculs ni de construction, la totalité peut-être des théorèmes qui ne dépendent ni des relations d'angles ni des relations de longueur»[Gergonne, 1826-1827a, 274]. Il ajoute pourtant que Poncelet a eu le tort de vouloir mêler dans son traité, aux «choses très-remarquables», des doctrines «au moins sujettes à controverse». Dans les notes à la *Réclamation de M. Poncelet* [Poncelet, 1827-1828], Gergonne reprend ce reproche plus explicitement en faisant référence au rapport de Cauchy :

Je persiste à penser [...] que M. Poncelet a gravement compromis ses doctrines, en mêlant au *classique*, que tout le monde admet, le *romantique* que, pour ma part, je suis fort loin de repousser, mais sur lequel enfin on dispute encore, et que MM. les commissaires de l'Académie eux-mêmes [...] ont traité assez sévèrement. [Poncelet, 1827-1828, 135]

³⁹[Poncelet, 1822, 408].

Les réticences de Chasles

Dans son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* [Chasles, 1837a], Chasles attribue à Monge l'idée d'un principe de continuité en précisant qu'il préfère la dénomination de *principe des relations contingentes*. Il décrit la méthode de Monge comme permettant de considérer une démonstration valable à tous les cas tant que «les conditions générales de construction de la figure sont restées les mêmes»⁴⁰ Il rappelle que Poncelet a le premier explicitement fondé ses travaux sur un tel principe «qui, n'étant point démontré rigoureusement, n'a pas été considéré par d'autres célèbres académiciens que comme une forte induction, et un moyen précieux pour deviner et pressentir les vérités, mais non pour suppléer aveuglément, et dans tous les cas, à leur démonstration rigoureuse»⁴¹. Chasles considère que l'on ne peut pas légitimer un tel principe par des considérations de pure géométrie et que l'on doit donc, en toute rigueur, justifier *a posteriori* par des raisonnements analytiques son utilisation. Chasles ne nie pas pourtant l'efficacité du principe de continuité puisqu'il précise que les seules exceptions à l'application de ce principe «ne seront autres que celles que rencontrerait l'analyse elle-même». Chasles défend aussi l'idée de doter la géométrie de nouveaux principes qui, tout en satisfaisant les critères de rigueur, permettraient de mettre en œuvre des méthodes générales. Il propose son propre *principe de déformation homographique*⁴² qui, affirme-t-il conduit à une véritable *méthode de généralisation* puisque le mode de déformation des figures impliqué par ce principe «transporte à une figure d'une construction tout-à-fait générale, les propriétés connues d'une figure particulière» alors que la méthode de Poncelet «n'opère que sur une propriété d'une figure de la construction la plus générale, et la transporte à une autre d'une construction non moins générale»⁴³. Chasles reprend la discussion dans l'introduction de son traité de *Géométrie supérieure* [Chasles, 1852]. Il souligne qu'il n'utilisera pas dans son ouvrage le principe de continuité en concédant que «cette manière de procéder [...] peut, dans certaines questions, fournir au géomètre des ressources dont il fait bien de ne pas se passer»⁴⁴. Les raisons qu'invoquent Chasles pour se passer de ce principe sont d'abord qu'en invoquant ce principe en tant qu'axiome, on abandonne la rigueur qui doit caractériser la géométrie. Chasles reproche aussi que l'utilisation du principe de continuité ne donne pas de démonstration générale. En montrant la propriété dans une certaine configuration et en l'étendant aux autres configurations grâce à ce principe, on n'obtient pas une démonstration qui s'applique à tous les cas et c'est, pour Chasles, une facilité inutile et parfois dommageable. Chasles préfère développer un point de vue qui, tout en s'attachant à la rigueur, s'appuie sur des démonstrations valables pour l'ensemble des figures. Un tel point de vue est aux yeux de Chasles beaucoup plus structurant puisqu'il oblige à déterminer quelles sont les propriétés véritablement générales et fondamentales de la figure :

Une étude attentive des différents procédés de démonstration qui peuvent s'appliquer à une même question m'a convaincu qu'à côté d'une démonstration facile, fondée sur quelques propriétés acciden-

⁴⁰[Chasles, 1837a, 198].

⁴¹[Chasles, 1837a, 199].

⁴²Voir le chapitre consacré aux travaux géométriques de Chasles.

⁴³[Chasles, 1837a, 203]

⁴⁴[Chasles, 1852, XVI].

telles ou contingentes d'une figure devaient s'en trouver toujours d'autres, fondées sur des propriétés absolues et subsistantes dans tous les cas que peut présenter la figure en raison de la diversité de position de ses parties; et j'ai éprouvé que la recherche de ces démonstrations complètement rigoureuses est d'autant plus utile, qu'elle met nécessairement sur la voie des propositions les plus importantes, de celles qui établissent tous les liens qui doivent exister entre les différentes parties d'un même sujet. [Chasles, 1852, XVII]

3.2 Qu'est ce qu'une propriété projective ?

Poncelet met en avant deux moyens pour donner à la géométrie pure le caractère de généralité qui lui manque. Le premier était l'adoption du principe de continuité. L'autre «met en usage les principes de la doctrine des projections»⁴⁵. Une des raisons de mettre au centre des préoccupations des géomètres les propriétés projectives des figures est pour Poncelet le fait que la géométrie des coordonnées et la géométrie descriptive de Monge, qui sont à ses yeux les deux domaines où la géométrie a fait le plus de progrès et en particulier des méthodes générales, reposent toutes les deux sur des considérations de projection. La géométrie des coordonnées utilise des projections parallèles. Il propose de remplacer cette condition par celle, «beaucoup plus générale, que toutes ces projetantes aillent concourir vers un point ou *centre* de projection unique du plan de la figure ou de l'espace»⁴⁶. Les propriétés projectives sont définies comme celles qui se conservent dans des figures liées par une projection centrale :

Les relations ou propriétés, soit métriques, soit descriptives, qui subsistent à la fois dans l'une ou l'autre figures, auront nécessairement toute la généralité, toute l'indétermination possible; elles devront être indépendantes de toutes grandeurs absolues et déterminées, telles qu'ouvertures d'angles, distances, paramètres constants, etc. [Poncelet, 1822, XXI]⁴⁷

La construction générale qu'envisage Poncelet est donc celle d'un faisceau de *droites projetantes* issues d'un même point, le *centre de projection*, et passant par tous les points d'une figure. La *projection* de la figure donnée en intersectant le faisceau par une surface dite *surface de projection*. Dans son *Essai sur les propriétés projectives des sections coniques*⁴⁸ ou son *Traité des propriétés projectives des figures*⁴⁹, Poncelet restreint son étude au cas où la figure donnée et la surface de projection sont planes. Poncelet donne comme premier exemple de propriétés projectives la disposition ou le degré des lignes de la figure, et plus généralement, «toute espèce de dépendance graphique entre les parties de cette figure, qui ne concernerait que la direction indéfinie des lignes, leur intersection

⁴⁵[Poncelet, 1822, XXII].

⁴⁶[Poncelet, 1822, XXI]

⁴⁷Poncelet précise en reprenant une terminologie aristotélicienne que de telles propriétés seront des propriétés de genre et non d'espèce comme certaines propriétés de la géométrie de coordonnées.

⁴⁸[Poncelet, 1820].

⁴⁹[Poncelet, 1822].

mutuelle, leur contact, etc.»⁵⁰. Pour prouver que le degré d'une courbe est une propriété projective, il suffit de prouver que si la courbe plane initiale ne peut être intersectée par une droite en plus de m points, il est clair qu'il en sera de même de toutes ses projections planes. Pour mieux faire comprendre quelle sorte de propriétés il vise, Poncelet donne des exemples de propriétés qui ne sont pas projectives comme «la forme, l'espèce particulière de ces mêmes lignes, et, en général, toutes les dépendances qui pourraient concerner des grandeurs absolues et déterminées, telles qu'ouverture d'angles, paramètres constants, etc.»⁵¹. Un des objectifs de Poncelet est de proposer une théorie synthétique des coniques. le point de vue projectif adopté par Poncelet est particulièrement adapté pour reprendre la définition des coniques comme intersection d'un cône à base circulaire. Ainsi, l'étude des coniques pourra se ramener à celle des propriétés du cercle. En particulier, comme le cercle, les coniques sont des courbes du second ordre. Selon que le plan sécant rencontre toutes les arêtes du cône, est parallèle à une ou deux arêtes, la conique aura aucun, un ou deux points à l'infini. Dans le cas de l'hyperbole, les tangentes aux points à l'infini sont les asymptotes et dans celui de la parabole, la tangente au point à l'infini est située «tout entière à l'infini».

Poncelet distingue les propriétés graphiques (ou de disposition) et les propriétés métriques (qui concernent les relations de grandeur). Poncelet précise que reconnaître les propriétés graphiques projectives résulte d'un simple examen de la figure ou même de l'énoncé. Poncelet fait ici essentiellement aux propriétés d'incidence. Par contre, la reconnaissance des propriétés métriques projectives est plus délicate :

[...] rien ne peut indiquer, *a priori*, si elles subsistent dans toutes les projections de la figure à laquelle elles appartiennent : en effet, la relation connue entre les segments des sécantes du cercle, qui ne concerne que des grandeurs indéterminées, n'est pas pour cela une relation projective ; car on sait bien qu'elle ne subsiste pas pour une section conique quelconque, projection de ce cercle, et la raison en est que cette relation dépend implicitement du paramètre ou rayon. [Poncelet, 1822, 5]⁵²

Poncelet conclut que même l'analyse ou la trigonométrie ne permettent pas d'établir une règle simple pour reconnaître les propriétés métriques projectives. Il propose de se restreindre à «une classe particulière, quoique très-étendue, de ces sortes de relations, dont le caractère est aussi remarquable par sa simplicité que facile à vérifier et à reconnaître dans les relations qui en sont douées»⁵³. Ces propriétés résultent d'un théorème de géométrie élémentaire qui affirme que la surface d'un triangle SAB est égale à :

$$\frac{1}{2} \sin \hat{S} SA.SB.$$

⁵⁰[Poncelet, 1822, 4].

⁵¹[Poncelet, 1822, 4].

⁵²Le théorème de la puissance d'un point affirme qu'étant donné un cercle, un point O et deux droites passant par O et intersectant respectivement le cercle en A, B et en C, D , on a l'égalité des produits : $OA.OB = OC.OD$. Le théorème analogue pour une conique affirme que $OA.OA = p.OC.OD$ où p dépend du paramètre de la conique.

⁵³[Poncelet, 1822, 6].

Si l'on désigne par m , $\sin \hat{S}$ et par p la longueur de la hauteur issue de S , on obtient la formule :

$$AB = m \cdot \frac{a \cdot b}{p}.$$

Chaque longueur de segments peut donc être ainsi déterminées en fonction d'un sinus et de certains paramètres. La classe de relations qui intéresse Poncelet est celle pour laquelle «les lettres a, b, p, \dots disparaissent [...] indépendamment de toute relation particulière de grandeur existante entre elles, et en ayant simplement égard à la liaison purement descriptive qui existe entre les points et les distances du système»⁵⁴. Comme il n'est fait aucune hypothèse sur la position des éléments de la figure, toute relation qui vérifie cette propriété est projective; Poncelet pose le principe général :

Si, à partir d'un point quelconque pris pour centre de projection, on dirige un faisceau de lignes droites projetantes vers les différents points d'une figure donnée arbitrairement dans l'espace ou sur un plan, et que les parties de cette figure aient entre elles une ou plusieurs relations métriques projectives, satisfaisant aux conditions prescrites, les mêmes relations auront lieu aussi entre les sinus des angles projetants qui leur correspondent respectivement. [Poncelet, 1822, 10]

Le premier exemple d'une telle propriété donné par Poncelet est celui de la proportion harmonique. Quatre points A, B, C, D alignés qui vérifient la relation

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$$

sont dits *harmoniques*.⁵⁵ En vertu du principe général précédent, Poncelet en déduit que quatre droites quelconques qui projettent quatre points harmoniques constituent un faisceau harmonique et que réciproquement un faisceau harmonique est intersecté par une droite quelconque en quatre points harmoniques⁵⁶. Le second exemple proposé par Poncelet dans le *Traité des propriétés projectives des figures* concerne la théorie des coniques :

Soit ABC un triangle quelconque, situé sur le plan d'une section conique, et dont les côtés AB, BC, AC , ou leurs prolongements, sont rencontrés en P et P' , Q et Q' , R et R' respectivement par cette courbe : je dis qu'on aura

$$AP \cdot AP' \cdot BQ \cdot BQ' \cdot CR \cdot CR' = BP \cdot BP' \cdot CQ \cdot CQ' \cdot AR \cdot AR'.$$

[Poncelet, 1822, 18]

La démonstration de cette relation est la première occasion pour Poncelet de donner une preuve utilisant le principe de projection. Dans le cas d'un cercle, cette propriété est une conséquence évidente du théorème de la puissance d'un

⁵⁴[Poncelet, 1822, 8].

⁵⁵Poncelet précise que le conjugué harmonique du point à l'infini est le milieu du segment formé par les deux autres points ce qui prouve en outre que le rapport de deux quantités infinies qui ne diffère que d'une quantité finie est égal à 1.

⁵⁶Poncelet ne s'attribue pas le mérite des relations qui se déduisent de la proportion harmonique. Par contre, il signale que les recherches des mathématiciens grecs concernant les relations entre les distances de points alignés n'étaient pas organisées autour de principes généraux.

point et se généralise donc à toute conique par projection. Lorsque le triangle est circonscrit à la conique, on obtient :

$$AP.BQ.CR = BP.CQ.AR.$$

A partir de cette relation, Poncelet introduit quelques notions élémentaires de la théorie des coniques. Si le côté BC est parallèle à la corde de contact PQ , le théorème de Thales permet de déduire que $BQ = CQ$ et que Q appartient à la droite AO où O est le milieu de la corde PQ . Poncelet en déduit une propriété fondamentale des diamètres⁵⁷ des coniques :

Les cordes parallèles des sections coniques ont leurs milieux et les points de concours des tangentes qui correspondent à leurs extrémités respectives, distribués sur une même droite appelée *diamètre*.
[Poncelet, 1822, 19]

Ce diamètre est dit conjugué à la direction commune des cordes. Poncelet retrouve une propriété dont il signale qu'elle est due à Apollonius selon laquelle le diamètre conjugué d'une sécante est divisé harmoniquement par le milieu de la sécante et le point de concours des deux tangentes aux extrémités de la sécantes. Il en déduit une caractérisation des ellipses et des hyperboles; en considérant deux cordes parallèles MN et PR et désignant par AB le diamètre conjugué qui passe par les milieux respectifs O et Q des deux cordes, on obtient l'égalité»

$$OM^2 = p.OA.OB,$$

« p étant une quantité constante qui ne varie qu'avec la direction du diamètre AB »⁵⁸. Plus précisément, p est égal au carré du quotient de la longueur du diamètre de la conique parallèle à mn par celle de la longueur du diamètre conjugué.

3.3 La théorie des polaires

3.3.1 Les notions de sécante idéale et de coniques supplémentaires

La théorie des coniques de Poncelet est essentiellement fondée sur la notion de polarité. Étant une droite mn qui intersecte une conique (C) en une sécante MN , le milieu O de cette sécante est située sur le diamètre AB conjugué à la direction de mn et le point O' en lequel concourent les tangentes à la conique en M et N est le conjugué harmonique de O par rapport à A et B . Poncelet commence son raisonnement en remarquant que la détermination des points O et O' reste possible si la droite mn n'intersecte pas la conique. En effet, O est le point d'intersection de la droite mn et de la droite qui prolonge le diamètre conjugué AB .⁵⁹ Pour déterminer O' , il suffit de construire le conjugué harmonique de O par rapport à A et B . Pour cela, il suffit de tracer à partir du point

⁵⁷Un diamètre est une corde qui passe par le centre de la conique.

⁵⁸[Poncelet, 1822, 20].

Lorsque la conique est une parabole, la relation s'écrit $OM^2 = p.OA$.

⁵⁹La notion de diamètre conjugué ne dépend que de la direction de la droite considérée.

O les deux tangentes à la conique. On désigne par M' et N' les points de contact des tangentes. La corde $M'N'$ étant conjuguée à AB par construction, $M'N'$ est parallèle à mn et le point d'intersection O' de $M'N'$ avec le diamètre AB est le conjugué harmonique de O par rapport à A et B . Poncelet en conclut qu'étant donné une droite mn et une conique (C), les points O et O' «subsistent indépendamment de la réalité ou de la non-réalité des intersections M , N de cette droite et de la courbe»⁶⁰. Poncelet rappelle que point O' a reçu le nom de *pôle* de la droite mn et la droite mn celui de *polaire* du point O' . Poncelet préfère dans un premier temps introduire les dénominations de sécantes réelles ou idéales : lorsque la droite intersecte la conique en deux points réels, la sécante (ou la corde) est *réelle* ; lorsque les points d'intersection sont imaginaires, la sécante est dite *idéale* et la corde *imaginaire*. Dans ce cas, la droite est toujours réelle et n'est idéale qu'en tant que sécante.⁶¹ De même, lorsque la droite mn n'intersecte pas la conique, le point O est appelé le *centre idéal* de la corde imaginaire déterminée par mn ; le point O' est appelé le *concours idéal* des tangentes imaginaires qui correspondent aux extrémités (imaginaires) de la corde imaginaire.⁶² L'intérêt de ces dénominations est de permettre de traiter avec le même vocabulaire l'ensemble des positions de la droite par rapport à la conique et même, de considérer la sécante comme réelle dans le raisonnement :

Pour concevoir l'objet de ces définitions, il suffit de supposer que la section conique ne soit pas décrite, mais seulement donnée par certaines conditions, et qu'alors on se propose de rechercher les points où elle est rencontrée par la droite réelle, tracée sur son plan ; car on ignore alors si ces points sont constructibles, et il est naturel de persister, dans tous les cas, à regarder cette ligne droite comme une véritable sécante de la courbe, et par conséquent de la traiter comme telle dans le raisonnement géométrique qui sert à faire découvrir les deux points qu'on cherche. [Poncelet, 1820, 368]

⁶⁰[Poncelet, 1822, 27]

⁶¹Poncelet précise qu'il faut bien distinguer la notion de sécante idéale de celle de droite «entièrement inconstructible, dans son cours et sa direction, laquelle conservera la dénomination [...] de *droite imaginaire*» [Poncelet, 1822, 27].

⁶²Dans son article sur les propriétés projectives des coniques, Poncelet [1820] décrit le comportement réciproque des pôles et polaires en remarquant que lorsque le point O s'approche du centre de la conique, la polaire s'éloigne à l'infini et réciproquement :

Le pôle d'un diamètre quelconque d'une section conique est situé à l'*infini* sur le conjugué à ce diamètre ; les tangentes MP et NP , qui renferment ce pôle, sont de leur côté, devenues parallèles et concourent à l'*infini*. [...] Toute droite située à l'infini sur le plan d'une section conique, a pour pôle le centre de la conique. [Poncelet, 1820, 371]

Dans le cas où la polaire est à l'infini, les points M et N en lesquels celle-ci intersecte la conique sont des points à l'infini réels ou imaginaires selon que la conique est une hyperbole ou une ellipse. Poncelet en déduit une description générale des asymptotes :

Les *asymptotes* d'une section conique ne sont autre chose que des tangentes aux points à l'infini de son cours, elles passent à la fois par son centre, et sont toutes deux *imaginaires* pour l'ellipse et *réelles* pour l'hyperbole. [Poncelet, 1820, 371]

De même, une parabole a une seule tangente à l'infini (ou asymptote). Poncelet ne prétend pas ici à l'originalité, il se contente de signaler qu'il les regroupe «sous un point de vue qui puisse conduire sans peine aux considérations nouvelles qui doivent former la base» de son travail.

Si mn est une sécante idéale et AB le diamètre conjugué à la direction de mn , les deux points M et N définis sur mn par la relation

$$OM^2 = ON^2 = p.OA.OB$$

«identique avec celle qui définit les points M et N » lorsque la sécante est réelle, déterminent une *corde idéale*.⁶³ Si l'on construit l'ensemble des cordes idéales parallèles à mn , «leurs extrémités formeront évidemment une autre section conique, qui aura même diamètre de contact AB , même constante p , et par conséquent même grandeur et même direction de diamètre (réel ou idéal) DE conjugué à AB »⁶⁴. Cette conique est dite *supplémentaire* de la conique donnée par rapport à la droite.⁶⁵ Deux coniques supplémentaires sont tangentes aux extrémités du diamètre de contact. Si la conique originale est une ellipse, les coniques supplémentaires sont des hyperboles et réciproquement. Les coniques supplémentaires d'un cercle sont des hyperboles équilatères et si la conique originale dégénère en un point, les coniques supplémentaires dégénèrent en un système de deux droites sécantes en ce point.⁶⁶

Poncelet illustre l'intérêt de sa théorie des cordes idéales en évoquant un problème où apparemment la solution obtenue en utilisant les techniques de la géométrie pure semble ne pas avoir la généralité de celle obtenue en utilisant les méthodes analytiques : étant donné deux ellipsoïdes de révolution dont les axes sont coplanaires, pour déterminer la courbe d'intersection des deux ellipsoïdes⁶⁷, on s'intéresse à la projection orthogonale de celle-ci sur le plan P qui contient

⁶³Une sécante idéale d'une conique définit deux cordes, l'une imaginaire déterminée par les points d'intersection imaginaires de la droite et de la conique et une corde réelle dite idéale. Ces deux cordes ont même milieu réel.

Dans son rapport sur le mémoire de Poncelet, Cauchy [1820-1821] propose une construction qui lui semble plus naturelle et plus rigoureuse :

Supposons maintenant que l'on cherche, par l'analyse, les points d'intersection [...] d'une droite quelconque avec une courbe du second degré, et la distance de ces deux points, ou, en d'autres termes, la corde qui les unit ; lorsque la droite ne rencontrera plus la courbe, la distance donnée par l'analyse deviendra imaginaire, et sera de la forme $2C\sqrt{-1}$ tandis que le point milieu de la corde conservera des coordonnées réelles. Il devient alors utile de substituer à la corde imaginaire, qui n'existe pas, une corde fictive $2C$, comptée sur la droite proposée, et dont le milieu coïncide avec le point dont nous venons de parler.

C'est à cette corde fictive qu'on pourrait appliquer la dénomination de corde idéale, par laquelle M. Poncelet désigne tantôt la corde imaginaire interceptée par la courbe, puisqu'il appelle centre de la courbe idéale le point réel que l'analyse indique comme étant le milieu de la corde imaginaire. Le sens dans lequel l'auteur emploie le mot idéale se trouverait ainsi modifié de telle manière que les longueurs idéales resteraient des longueurs réelles et constructibles en géométrie. [Cauchy, 1820-1821, 75]

La notion de corde fictive de Cauchy est exactement la même que celle de corde idéale. Cauchy est ici particulièrement de mauvaise foi en laissant entendre que, dans l'exposé de Poncelet, la notion de corde idéale n'est pas conceptuellement bien différenciée de celle de corde imaginaire. Cauchy utilise certes un passage imprécis où Poncelet semble ne pas distinguer les deux notions mais le reste de l'exposé et l'insistance de Poncelet pour préciser que les cordes idéales sont réelles auraient dû être suffisants pour convaincre Cauchy qu'il n'y avait pas besoin de modifier le sens du mot «idéal».

⁶⁴[Poncelet, 1822, 29].

⁶⁵Une corde idéale est donc un corde réelle de la conique supplémentaire par rapport à la direction de la corde.

⁶⁶On définit de la même manière la notion de parabole supplémentaire d'une parabole donnée.

⁶⁷Ce problème est posé par Monge [1799, 85]

les deux axes. Une solution constructive est obtenue en considérant les deux ellipses génératrices dans le plan P et le point d'intersection S de leurs grands axes. En effet, les cercles centrés en S qui intersectent les deux ellipses génératrices définissent deux cordes réelles MN et $M'N'$ dont le point d'intersection I est la projection orthogonale sur le plan P d'un point de la courbe d'intersection des deux ellipsoïdes. Poncelet signale que cette solution «s'applique très bien à tous les points de la courbe qui sont situés entre les limites extrêmes où le cercle cesse de rencontrer les ellipses génératrices»⁶⁸. La courbe des points I ne peut être prolongée. Pourtant, lorsque l'on résout analytiquement le problème, on obtient une courbe qui «s'étend à l'infini par une loi continue». Le paradoxe n'est qu'apparent puisque lorsqu'on considère les points d'intersection des cordes devenues idéales et que l'on prolonge ainsi la courbe obtenue, les deux solutions coïncident. Poncelet tire de cet exemple un programme de généralisation des méthodes géométriques :

On voit, par cet exemple particulier, combien il devient nécessaire d'étendre le langage et les conceptions de la Géométrie ordinaire et de les rapprocher de celles déjà admises dans la Géométrie analytique. Vouloir repousser des expressions fondées sur des rapports exacts et rigoureux, quoique parfois purement figurés, pour y substituer des noms insignifiants et qui ne rappellent que des caractères particuliers ou insolite de l'objet défini ; éviter de se servir dans le raisonnement géométrique des expressions et des notions qui qualifient la non-existence et la rappellent, ce serait véritablement refuser à la Géométrie rationnelle les seuls moyens qu'elle ait de suivre les progrès de l'Analyse algébrique, et d'interpréter d'une manière satisfaisante les conséquences des résultats souvent bizarres, auxquels elle parvient. [Poncelet, 1820, 381]

3.3.2 Sécantes communes réelles et idéales

Pour traiter les systèmes de coniques, Poncelet étend son analyse des sécantes aux sécantes communes à plusieurs coniques. Il reprend la même stratégie en partant du cas réel et en donnant un sens à la notion de corde commune idéale lorsque les coniques ne s'intersectent plus :

Lorsqu'une ligne droite, située dans le plan de deux sections coniques, passe par deux points réels appartenant à la fois aux deux courbes, on dit qu'elle *corde réelle commune* à ces deux courbes. [...] Nous dirons par analogie qu'une ligne droite située sur le plan de deux sections conique sera *corde idéale commune* à ces deux courbes, quand elle sera corde réelle commune aux deux supplémentaires qui lui correspondent à la fois sur le plan de ces mêmes courbes. [Poncelet, 1820, 374]

En étendant au cas où la droite mn ne coupent pas les coniques les propriétés des sécantes communes réelles, Poncelet déduit un critère pour que deux coniques (C) et (C') admettent une droite donnée mn comme corde idéale commune si :

⁶⁸[Poncelet, 1820, 380].

1. les diamètres conjugués AB et $A'B'$ à la direction de mn se coupent sur mn en un point O ;
2. en notant A et B les diamètres conjugués de (C) , A' et B' ceux de (C') , on a :

$$A^2.B'^2 : A'^2.B^2 :: OA.OB : OA'.OB' ;$$

3. la droite mn ne coupe pas les coniques.

Poncelet pose la question de savoir si deux coniques quelconques (C) et (C') admettent des cordes communes idéales. Pour cela, il considère une droite mn , les coniques supplémentaires à (C) et (C') correspondant à mn et les cordes correspondantes MN et $M'N'$. En particulier, mn sera une corde commune idéale à (C) et (C') si les cordes coïncident et donc si les segments MN et $M'N'$ ont une longueur égale. Pour prouver l'existence d'une telle droite, Poncelet utilise la *loi de continuité* pour justifier une sorte de théorème de la valeur intermédiaire géométrique :

[...] considérons [...] les deux coniques supplémentaires qui correspondent à une telle position de la droite mn ; il est évident qu'on aura démontré que le point M se confond, pour une position de mn , avec le point M' , et par conséquent, le point N avec le point N' , si l'on parvient à prouver que, parmi toutes les grandeurs que peut prendre la corde MN , il y en deux telles, que l'une soit plus grande et l'autre plus petite que celle de $M'N'$ qui lui correspond; car, à cause de la *loi de continuité*, il y aura nécessairement une position intermédiaire où ces cordes seront parfaitement égales. [Poncelet, 1820, 377]

La conclusion de Poncelet est de nouveau un principe méthodologique :

Deux sections coniques, situées sur un même plan, ont, en général et pour des situations indéterminées, des cordes et des sécantes idéales communes, tout comme elles ont, pour de semblables situations, des points d'intersection réels et des cordes réelles également communes. [Poncelet, 1822, 33]

3.3.3 Le cas particulier des cercles

Après avoir présenté ces notions dans le cadre général des coniques, Poncelet s'attache à étudier plus précisément le cas particulier des cordes des cercles. Grâce aux principes de projection, beaucoup de propriétés montrées dans le cas d'un cercle pourront se généraliser aux coniques. Poncelet assume de plus à l'étude des cordes des cercles un rôle à la fois pédagogique et heuristique :

Par là [l'étude du cas particulier des cordes des cercles] nous acquerrons des idées nouvelles et précises sur la nature de ces lignes; nous éclairerons l'objet des définitions qui précèdent, et nous pourrions ensuite poursuivre, sans beaucoup de peine, l'examen des sections coniques en général. [Poncelet, 1820, 387]

Les coniques supplémentaires d'un cercle sont des hyperboles équilatères de même centre et de même diamètre que le cercle : étant donnée une droite, l'hyperbole supplémentaire correspondant à cette droite est celle dont le diamètre

de contact est perpendiculaire à cette droite. Poncelet pose le problème de l'existence d'une corde idéale commune à deux cercles. Il montre que puisque, dans le cas des cercles, les diamètres conjugués sont perpendiculaires aux sécantes, une telle corde (si elle existe) est perpendiculaire à la droite joignant les centres dans le cas des cordes réelles. Dans ce cas, les hyperboles supplémentaires aux cercles correspondant seront donc semblables et auront une corde commune à l'infini. Les hyperboles supplémentaires ayant deux points d'intersection à l'infini, elle ne peuvent avoir au plus que deux points d'intersection réels ce qui est le cas lorsque les cercles ne se coupent pas ou deux points d'intersection imaginaires lorsque les cercles se coupent. Un corollaire de ce théorème est que deux cercles ont donc quatre points en commun dont deux sont nécessairement à l'infini. Enfin, la corde idéale commune à deux circonférences de cercle est caractérisée comme le lieu des points (du plan du cercle) à partir desquels les tangentes aux deux cercles sont égales ce qui permet de retrouver une propriété des cordes réelles. En vertu du principe de continuité, lorsque les deux circonférences sont concentriques, leurs deux cordes communes se confondent.

Poncelet poursuit son étude du cas particulier des cercles par une généralisation de la notion de faisceau de cercles en montrant que les ensembles de cercles qui admettent une corde idéale commune ont les mêmes propriétés que les ensembles de cercles qui ont une corde réelle commune.

Les deux séries de cercles qui nous occupent, étant déterminées et construites de la même manière par rapport à la corde réelle ou idéale qui leur est commune, doivent nécessairement jouir des mêmes propriétés. [Poncelet, 1820, 394]

Poncelet illustre sa thèse selon laquelle il n'y a pas lieu de distinguer les notions de cordes réelles et idéales en généralisant le théorème qui affirme que les cordes (réelles) deux à deux communes à trois cercles qui se coupent «de manière réelle» sont concourantes.

Quelle que soit la situation respective de trois cercles sur un même plan, les trois cordes réelles ou idéales, qui leur sont deux à deux communes, vont toujours concourir en un seul et même point. [Poncelet, 1820, 394-395]

Les polaires d'un point A par rapport à un ensemble de cercles admettant une corde (réelle ou idéale) commune concourt en même point A' , appelé le point réciproque de A ,⁶⁹. Inversement, les points réciproques des points d'une droite donnée par rapport à un faisceau quelconque de cercle sont situés «sur une seule et même section conique passant par les deux points réels ou imaginaires, limites des cercles» du faisceau⁷⁰

Poncelet termine l'étude particulière des cercles en examinant la notion de centre de similitude et en montrant une première utilisation du principe de continuité. Etant donné deux cercles, Poncelet rappelle que l'on peut définir deux points, appartenant à la ligne des centres, appelés centre de similitude directe S et centre de similitude indirecte S' respectivement comme les points d'intersection des droites joignant les extrémités des rayons vecteurs de même sens ou de

⁶⁹Poncelet précise que cette propriété est aussi vraie lorsque l'on considère la corde idéale à l'infini «car les polaires d'un point de cette corde deviennent évidemment alors parallèles entre elles et concourent réciproquement à l'infini» [Poncelet, 1820, 399].

⁷⁰[Poncelet, 1820, 401].

La conique ainsi définie est aussi le lieu des pôles de la droite par rapport aux cercles du faisceau.

sens contraire.⁷¹ Ces deux points sont aussi les points d'intersection des tangentes communes aux deux cercles extérieures ou intérieures (lorsque celles-ci sont réelles).

Poncelet signale que la dénomination de centre de similitude lui apparaît «aussi simple que naturelle, puisque deux circonférences de cercle, situées sur un même plan, sont respectivement semblables et semblablement placées à l'égard de chacun de ces points»⁷². Néanmoins, une telle dénomination offre aux yeux de Poncelet l'inconvénient de mettre l'emphasis sur une unique caractéristique de l'objet, applicable uniquement au cercle et

de faire perdre de vue, par conséquent, la dépendance générale et purement graphique qui lie cet objet aux autres parties de la figure : or, le but principal de ces recherches étant de généraliser et d'étendre immédiatement la conception générale des figures, [Poncelet croit] devoir ne pas abandonner entièrement la définition primitive et jusque-là généralement admise, de *point de concours des tangentes communes* ; seulement, pour éviter l'espèce de contradiction qui peut avoir lieu, dans certains cas, entre les termes et les objets qu'ils servent à désigner, [Poncelet continuera] à employer les adjectifs *réel* et *idéal*, qui ne portent que sur la manière d'être de l'objet défini à l'égard des autres qu'on rappelle, et non sur son existence propre, censée toujours réelle. [Il réservera], au reste, le mot imaginaire pour le cas où l'objet en question serait tout à fait impossible. [Poncelet, 1820, 403-404]

Si l'on mène à partir de S ou de S' des sécantes aux deux cercles, les cordes ainsi définies seront dites homologues – homologues directes si ces deux cordes «soustendent, du côté de S , deux arcs de cercle qui opposent à la fois leur concavité ou leur convexité vers ce point»⁷³, homologues inverses dans le cas contraire. Poncelet établit un certain nombre de propriétés des cordes homologues comme le fait deux cordes homologues directes concourent sur la corde idéale à l'infini alors que deux cordes homologues inverses concourent sur l'autre corde commune aux deux cercles. Poncelet précise que ces propriétés subsistent «en vertu de la continuité» lorsque les deux cercles coïncident et que l'on retrouve alors les propriétés des pôles et des polaires.

Poncelet montre que les pôles de deux cordes homologues inverses sont alignés avec le centre S de similitude correspondant. En faisant tendre les deux sécantes qui définissent les cordes l'une vers l'autre, il obtient un théorème sur les pôles des droites passant par S :

Les pôles de toute ligne droite, passant par l'un des points de concours des tangentes à la fois communes à deux circonférences de cercles si-

⁷¹Le théorème qui affirme l'existence de ces points est le premier montré par Poncelet dans le premier cahier (commencé en 1813 à Saratoff) consacré aux systèmes de cercles situés dans un même plan [Poncelet, 1813] :

La droite RR' qui joint les extrémités de deux rayons parallèles et dirigés dans le même sens, appartenant respectivement à deux cercles (C) et (C'), passe par un point O qui ne varie pas quand on fait tourner ces rayons autour des centres C et C' . Ce point invariable est situé sur le prolongement de la ligne des centres. [Poncelet, 1813, 2].

⁷²[Poncelet, 1820, 403]

⁷³[Poncelet, 1820, 405].

tuées sur un même plan, sont rangés sur une nouvelle droite passant réciproquement par ce point. [Poncelet, 1820, 413]

Poncelet explique que ce théorème caractérise les points d'intersection des tangentes communes. La démonstration qu'il propose de cette dernière propriété présuppose que le point que l'on considère soit extérieur aux deux cercles. En effet, le point essentiel de cette démonstration revient à se convaincre que si une transversale aux deux cercles est tangente à l'un des deux, alors elle est aussi tangente au second. Poncelet considère que la démonstration peut s'étendre à tous les cas directement «en invoquant le *principe de continuité*, puisque les systèmes correspondants sont assujettis à la même loi et ne diffèrent que par la transposition des parties»⁷⁴. Il conclut cette partie en insistant de nouveau sur l'intérêt que représente l'utilisation du principe de continuité.

Ainsi, la propriété qui nous occupe appartient à la fois aux six points où peuvent concourir deux à deux les tangentes communes aux deux circonférences de cercle; ces points forment donc séparément autant de systèmes assujettis à la même loi, et il n'y a de différence entre eux que dans la situation respective des lignes et dans la réalité ou la non-réalité des points d'intersection qui leur correspondent.

Nous avons beaucoup insisté sur cet exemple particulier, afin de montrer combien l'admission ouverte du principe de continuité en Géométrie rationnelle, peut abrégé et même faciliter les démonstrations et les recherches. [Poncelet, 1820, 415-416]

Poncelet illustre la fécondité de sa théorie des similitudes en proposant une nouvelle solution du problème classique de déterminer les cercles tangents (c) et (c') à trois autres donnés (C), (C') et (C'').⁷⁵ Il désigne par S , S' et S'' les trois centres de similitude directe. Le point essentiel de la démonstration de Poncelet consiste à montrer qu'un hexagone «dont les sommets s'appuient sur les cercles proposés et soient deux à deux consécutivement homologues inverses à l'égard des cercles et du centre de similitude auxquels ils appartiennent» se referme, que cet hexagone est inscriptible dans un cercle et que les diagonales se coupent sur l'axe de similitude $SS'S''$.

En utilisant le principe de continuité et faisant coïncider les cercles par similitude, Poncelet déduit deux théorèmes (dont celui de l'hexagramme mystique) dans le cas particulier des cercles :⁷⁶

Trois points en ligne droite étant donnés à volonté sur le plan d'une circonférence de cercle, si l'on essaye d'inscrire à cette circonférence un hexagone dont les côtés respectivement opposés concourent aux trois points en question, cet hexagone se refermera de lui-même sur la courbe, quel que soit le sommet ou le côté qu'on ait choisi pour point de départ. [...]

Les mêmes choses étant données, si l'on inscrit, à volonté, dans ce

⁷⁴[Poncelet, 1820, 413].

⁷⁵La solution proposée par Poncelet suppose connus les centres de similitude des cercles pris deux à deux et «jouit de l'avantage de pouvoir être exécutée avec la règle seule».

⁷⁶Poncelet précise que ce n'est pas ces théorèmes en eux-même qui l'intéressent puisqu'il se propose de les établir dans le cadre général des coniques mais que son intention est «de faire voir seulement, par un exemple remarquable, comment l'admission de la continuité en Géométrie peut servir à étendre les conceptions et les idées, et comment aussi elle sert à établir une liaison étroite et intime entre des vérités et des figures en apparence distinctes» [Poncelet, 1820, 421]

cercle, un quadrilatère dont les trois premiers côtés concourent respectivement aux points donnés, le dernier côté, resté libre, ira sans cesse concourir en un quatrième point fixe, situé sur la droite qui renferme les trois autres. [Poncelet, 1820, 421]

L'invention des points cycliques

La théorie des similitudes se généralisent aux coniques. Poncelet énonce un critère pour reconnaître si deux coniques (ellipses ou hyperboles) sont semblables ; il suffit de vérifier que les coniques admettent un système de diamètres conjugués semblables, c'est-à-dire tels que les sections conjuguées aux deux diamètres forment le même angle avec les diamètres et que les rapports des longueurs des diamètres conjugués soient égaux (que les deux coniques aient même paramètre).⁷⁷ Si de plus, les deux systèmes de diamètres conjugués semblables sont parallèles, les deux coniques sont dites *semblablement placées*.

Un système d'hyperboles *semblables et semblablement placées*⁷⁸ ont deux points communs à l'infini puisque les asymptotes des hyperboles sont parallèles. Un tel système admet donc une sécante commune à l'infini. De même, un système d'ellipses s. et s.p. admet une sécante commune idéale à l'infini, la sécante commune à l'infini de leurs coniques supplémentaires par rapport à une même direction. Un tel système d'ellipses admet donc deux points imaginaires communs à l'infini.

Un système quelconque de cercles est nécessairement s. et s.p. ; ils admettent donc une sécante idéale commune à l'infini et deux points imaginaires communs à l'infini.⁷⁹ En conséquence, deux cercles ont en général deux sécantes communes, une à l'infini et une autre réelle ou idéale selon que les cercles se coupent ou non. Deux cercles ont en général quatre points communs, les deux points cycliques et deux autres «réels ou imaginaires [...] situés à distance donnée et finie»⁸⁰. Lorsque les cercles sont concentriques, les deux sécantes communes sont confondues, de même que les deux couples de points. Les deux cercles sont tangents à l'infini, soit dans le vocabulaire de Poncelet, ont «un double contact imaginaire à l'infini».

3.3.4 La théorie des polaires réciproques

Dans un article écrit entre 1823 et 1824⁸¹, Poncelet [1829] développe plus systématiquement la théorie de la polarité. Son intention est d'une part de mettre en évidence et de prouver les propriétés de dualité (ou de réciprocité) des théorèmes de la géométrie, d'autre part d'étendre la théorie de la polarité à

⁷⁷Le même raisonnement montre que deux paraboles quelconques sont semblables.

⁷⁸Poncelet adopte une abréviation : «s. et s.p.».

En langage moderne, on dirait *homothétique*.

⁷⁹Ces deux points recevront plus tard dans le cadre de la géométrie analytique le nom de *points cycliques*.

⁸⁰[Poncelet, 1822, 48].

⁸¹L'article sur la *Théorie générale des polaires réciproques* est soumis à l'approbation de l'Académie des sciences qui mettra quatre années pour publier un rapport, ce qui provoquera l'amertume de Poncelet. Il sera finalement publié en 1829 dans le *Journal de Crelle*.

l'espace et à l'ensemble des propriétés projectives :

[...] la *théorie des polaires réciproques* [est] susceptible d'une extension telle, qu'au simple énoncé d'une proposition suffisamment générale de l'étendue, elle permet d'en assigner sur-le-champ une tout autre toute différente et tout aussi générale, à moins cependant que la proposée ne soit elle-même sa réciproque, ce dont il y a des exemples. [Poncelet, 1829, 1]

La théorie de la polarité permet à partir d'un théorème d'énoncer automatiquement les théorèmes duaux et de les poser sans démonstration. Dans l'analyse de son article sur la *Théorie générale des polaires réciproques* paru dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées*, Poncelet [1826-1827] insiste beaucoup plus explicitement⁸² de sa volonté de justifier ainsi un algorithme de dualité :

Le but principal que je me propose, dans ce mémoire, c'est d'examiner quelle espèce de modification éprouvent une figure donnée et les relations qui lui appartiennent, lorsque l'on passe à celle qui en est la polaire réciproque, et *vice versa*, et de réduire, en quelque sorte, à un pur mécanisme, à une simple substitution de noms et de lettres, écrites à la place les unes des autres, la traduction de toutes les affections, de toutes les propriétés tant soit peu générales qui appartiennent à une figure donnée et à sa réciproque ; enfin de montrer comment on peut, au simple énoncé d'une proposition qui se rapporte soit aux relations projectives, en général, soit aux relations d'angles des figures situées dans un plan ou dans l'espace, comment on peut, dis-je, obtenir sur-le-champ et sans recourir à aucun calcul ou raisonnement, une deux ou trois propositions, tout-à-fait distinctes de la première et néanmoins tout aussi générales. [Poncelet, 1826-1827, 266]

Le théorème fondamental de la théorie de la polarité dans le plan est énoncé à plusieurs reprises par Poncelet.⁸³ Ce théorème qui affirme que la polaire par rapport à une conique d'un point appartenant à une droite passe par le pôle de cette droite. Pour Poncelet, ce théorème permet bien entendu de dualiser les propriétés d'incidence des droites et des points mais aussi de définir plus généralement la polaire d'une courbe en remarquant que l'ensemble des polaires des points d'une courbe enveloppe une autre courbe qui sera dite *la polaire réciproque* de la courbe donnée. Plus généralement, chaque figure admet une figure polaire réciproque qui « sera tellement liée avec elle que, d'après la théorie ordinaire du pôle et de la polaire simple, les *relations descriptives* ou *de situation* de l'une pourront se traduire immédiatement en des relations pareilles de l'autre »⁸⁴. Poncelet explique que pour étendre la théorie ordinaire de la polarité à l'espace, il suffit de remplacer la conique par une surface du second ordre. Il correspondra alors à chaque point, un plan polaire, à chaque plan, un pôle et par conséquent, à chaque droite, une droite polaire. Les propriétés d'incidence

⁸²Le caractère automatique de la dualité est affirmé beaucoup plus nettement dans l'analyse de son article sur la théorie de la polarité que dans les travaux précédent de Poncelet. On peut penser que l'importance de cet aspect de la dualité est apparue à Poncelet plus clairement après la lecture des *Considérations philosophiques sur les éléments de la science de l'étendue* de Gergonne [1825-1826].

⁸³[Poncelet, 1817-1818, 466] & [Poncelet, 1822, 102].

⁸⁴[Poncelet, 1829, 2-3].

des plans, droites et points sont donc aisément dualisables. Poncelet fait appel à la loi de continuité pour étendre aux courbes et aux surfaces⁸⁵ la notion de figure réciproque. Poncelet déduit entre autre de la théorie des figures polaires réciproques dans l'espace que «le degré de la développable réciproque d'une courbe de degré m est, en général et au plus, $m(m-1)$ »⁸⁶. Ce résultat pourrait apparaître comme paradoxal : en effet, les relations de polarité sont involutives ; si un point est le pôle d'une droite, cette droite est la polaire de ce point. Les propriétés de dualité des figures polaires sont donc *a priori* réciproques et la propriété concernant les degrés des courbes polaires réciproques semblent ne pas l'être. Poncelet n'évoque pas explicitement cette difficulté mais y répond en signalant que puisqu'une courbe peut être décrite comme lieu de points ou comme enveloppe de droites, on peut décrire de deux manières la courbe polaire réciproque d'une courbe donnée, «ou comme le lieu des pôles des tangentes de celle dont il s'agit, ou comme l'enveloppe des polaires des points qui lui appartiennent»⁸⁷.

Poncelet ne se contente pas d'étendre la théorie de la polarité à la géométrie spatiale ; il généralise aussi le domaine d'extension de sa théorie en montrant

⁸⁵De telles courbes et surfaces peuvent être vues comme les limites des figures rectilignes et polyédrales.

⁸⁶[Poncelet, 1829, 25].

La démonstration de ce résultat repose sur le fait que l'on peut mener par un point quelconque au plus $m(m-1)$ tangentes à une courbe de degré m . Il est donc aisé d'en déduire que la courbe polaire réciproque d'une courbe de degré m est de degré $m(m-1)$. Poncelet signale que si la courbe donnée possède des points multiples ou plus généralement des points singuliers, le degré de la courbe polaire est inférieur à $m(m-1)$.

⁸⁷[Poncelet, 1829, 10].

La manière de traiter cette difficulté sera un épisode mineur de la polémique entre Gergonne et Poncelet au sujet de la dualité. En effet, en généralisant sa théorie de la dualité aux courbes et surfaces, Gergonne [1826-1827b] n'est pas très prudent lorsqu'il énonce les propriétés de dualité des courbes réciproques : considérant deux figures polaires réciproques (Gergonne reprend le vocabulaire et le point de vue de Poncelet ; la brouille n'a pas eu encore lieu.), il énonce :

Enfin, autant il y aura dans l'une des figures de systèmes de points communs à deux ou à un plus grand nombre de courbes, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de tangentes communes à deux ou à un plus grand nombre de courbes de même ordre.

Enfin, autant il y aura dans l'une des figures de systèmes de tangentes communes à deux ou à un plus grand nombre de courbes, autant on rencontrera dans l'autre de systèmes d'un égal nombre de points communs à deux ou à un plus grand nombre de courbes de même ordre. [Gergonne, 1826-1827b, 216-217]

Dans sa réclamation adressée à Gergonne, Poncelet [1827-1828] ne manque pas de lui signaler son erreur et que les relations de réciprocité fondée sur la théorie de la polarité ne s'applique pas aussi généralement :

Le savant rédacteur des *Annales de mathématiques* a donc méconnu le but véritable de nos recherches ; peut-être même s'en est-il exagéré, à ses propres yeux, l'importance, quand il a prétendu soumettre les propriétés descriptives indistinctement au principe de dualité toutes les propriétés descriptives des figures ; car nos propres méditations nous prouvent que, si cette dualité est exactement appliquée aux lignes et aux surfaces des deux premiers degrés, il s'en faut qu'elle le soit aux lignes et aux surfaces des degrés supérieurs, du moins de la manière dont il l'a entendu dans ses deux derniers mémoires : nous n'oserions, par exemple, affirmer avec lui que, de ce que deux lignes de degrés m et n s'entrecoupent en général sur un plan, en mn points au plus, de pareilles lignes n'ont aussi, en général, que mn tangentes communes, ni que la réciproque polaire d'un ligne d'un certain ordre, soit elle-même de cet ordre, etc. [Poncelet, 1827-1828, 140-141]

Gergonne [1827-1828] rectifie ces énoncés dans un esprit plus conforme avec l'esprit de ses *considérations philosophiques* [Gergonne, 1825-1826], c'est-à-dire en privilégiant la dualité des énoncés sur celle des figures. Il propose de distinguer les notions de *degré* et de *classe* :

comment l'appliquer aux relations métriques et angulaires. Il obtient ainsi un théorème général qui montre comment les relations projectives entre distances se transforment dans la figure polaire réciproque en une relation analogue entre les sinus des angles formés par les polaires des extrémités des distances (et réciproquement) :

S'il existe entre les distances d'une figure plane quelconque une relation métrique projective, la même relation aura lieu encore, dans la réciproque de cette figure prise par rapport à un cercle auxiliaire quelconque de son plan, entre les sinus des angles formés par les polaires des extrémités respectives de ces distances.

Et réciproquement :

S'il existe une certaine relation entre les sinus des angles de certaines droites de la figure primitive, la même relation aura lieu aussi entre les distances de la réciproque dont les extrémités respectives sont les pôles de ces droites, pourvu que cette relation soit, de sa nature, projective quand on l'applique à cette réciproque. [Poncelet, 1829, 54-55]

Poncelet analyse l'exemple d'une conique coupée par les côtés d'un triangle abc , en p et p' par le côté ab , en q et q' par bc , r et r' par ac pour montrer que sa théorie des polaires réciproques permet non seulement de lier des relations métriques et angulaires mais aussi de découvrir de nouvelles relations. En effet, la relation métrique classique

$$\frac{ap.ap'}{bp.bp'} \cdot \frac{bq.bq'}{cq.cq'} \cdot \frac{cr.cr'}{ar.ar'} = 1$$

se traduit dans la figure polaire par rapport à un cercle, c'est-à-dire la figure constituée par «un nouveau triangle ABC dont les sommets seront les pôles respectifs des côtés du premier et vice versa, et une nouvelle section conique pour laquelle les paires de points p, p', q, q', r, r' [...] se seront changés en des paires de tangentes $(p), (p'), (q), (q'), (r), (r')$ issues des sommets respectifs C, A, B du triangle polaire ABC »⁸⁸, en une relation trigonométrique de même forme :

$$\frac{\sin(a, p) \cdot \sin(a, p')}{\sin(b, p) \cdot \sin(b, p')} \cdot \frac{\sin(b, q) \cdot \sin(b, q')}{\sin(c, q) \cdot \sin(c, q')} \cdot \frac{\sin(c, r) \cdot \sin(c, r')}{\sin(a, r) \cdot \sin(a, r')} = 1.$$

Si l'on considère une transversale à la figure polaire et que l'on note a, b, c ses intersections avec les côtés $(a), (b), (c)$ du triangle ABC , p et p' celles avec les tangentes (p) et (p') , etc., on obtient à partir de cette relation trigonométrique une nouvelle relation

$$\frac{ap.ap'}{bp.bp'} \cdot \frac{bq.bq'}{cq.cq'} \cdot \frac{cr.cr'}{ar.ar'} = 1$$

Définition Une courbe plane est dite de m^{ime} degré, lorsqu'elle a avec une même droite m intersections réelles ou idéales.

Définition Une courbe plane est dite de m^{ime} classe, lorsqu'on peut lui mener d'un même point de son plan m tangentes réelles ou idéales. [Gergonne, 1827-1828, 151]

L'énoncé, fautif lorsqu'il énonçait une relation entre deux figures polaires, devient une simple mise en dualité de deux théorèmes :

Deux lignes des m^{ime} et n^{ime} degrés, tracées sur un même plan, ont, en général, mn points communs, réels ou idéaux.

Deux lignes des m^{ime} et n^{ime} classes, tracées sur un même plan, ont, en général, mn tangentes communes, réelles ou idéales. [Gergonne, 1827-1828, 151-152]

⁸⁸[Poncelet, 1829, 58].

qui est «analogue à la première, bien que très-différente dans le fond»⁸⁹

3.3.5 la polémique avec Gergonne

Lorsque Poncelet [1826-1827], répondant à la sollicitation de Gergonne⁹⁰ propose aux lecteurs des *Annales de mathématiques pures et appliquées* une analyse de son mémoire sur la théorie des polaires réciproques⁹¹, il associe ses travaux à ceux développés en 1826 par Gergonne [1825-1826] :

Le but que je me suis principalement proposé, et que je désirerais avoir atteint, est de rendre plus évidente encore, s'il est possible, cette sorte de *dualité* de la géométrie que vous avez vous-même mise en avant et développée d'une manière très philosophique [...] [Poncelet, 1826-1827, 265]

Poncelet admet une proximité avec le point de vue de Gergonne mais même si le propos semble amène – la polémique n'est pas encore déclenchée –, Poncelet renvoie déjà les considérations de Gergonne sur la dualité à la philosophie, c'est-à-dire à une réflexion sur les fondements. Or, pour Poncelet, il n'est nul besoin de considérer la question de la dualité comme relevant des fondements puisque la théorie de la polarité permet de la justifier et d'en montrer les plus larges applications. Dans une lettre adressée au *Bulletin de Ferussac* le 22 janvier 1828⁹², Poncelet exprime beaucoup plus explicitement son refus de voir dans la dualité un point de fondement :

Au surplus, M. Gergonne ne disconvient pas de la priorité de mes recherches sur les siennes, et son système de réplique paraît se borner à la revendication des mots *dualité de situation*, mots, selon moi, vides de sens en philosophie mathématique, et absurdes, qu'on me passe l'expression, lorsqu'on entend en faire le type d'un principe général indépendant de la théorie qui seule les justifie, et ne point en borner l'application aux faits antérieurement connus et rigoureusement démontrés. [Poncelet, 1828b, 371]

Gergonne ne publie pas dans les *Annales* l'annexe qu'adjoint Poncelet à son *Analyse du mémoire sur la théorie des polaires réciproques* dans laquelle ce dernier déplore que Plücker ne le cite pas correctement dans ses articles publiés dans les *Annales* et revendique la priorité pour des théorèmes sur les hexagones inscrits et circonscrits à une conique. Dans cette annexe, Poncelet annonce «plusieurs autres réclamations» et déplore l'usage, repris de Gergonne par Plücker, «de mettre en deux colonnes les propositions de Géométrie de la règle». Dans sa réponse,⁹³ Gergonne choisit de tergiverser en soutenant que les questions de

⁸⁹[Poncelet, 1826-1827, 272].

⁹⁰Gergonne était l'éditeur et le principal rédacteur des *Annales de mathématiques pures et appliquées*. L'histoire de ce journal est étudiée dans l'article de J. Dhombres et M. Otero, *Les Annales de mathématiques pures et appliquées : Le journal d'un homme seul au profit d'une communauté enseignante* [Dhombres and Otero, 1993].

⁹¹D'après la chronologie rappelée par Poncelet, ce mémoire [Poncelet, 1829] est rédigé durant l'hiver 1823-24 et lu devant l'Académie des sciences le 12 avril 1824. La commission d'évaluation nommée par l'Académie et composée de Legendre, Poinsot et Cauchy ne publiera son rapport qu'en 1828. L'analyse de ce mémoire publiée dans les *Annales* est datée du 10 décembre 1826.

⁹²[Poncelet, 1828b].

⁹³[Gergonne, 1826-1827a].

priorité ne sont pas essentielles, puisque «ici le fond est de peu d'importance, et la forme est à peu près tout»⁹⁴. Il associe les travaux de Poncelet à la «révolution» géométrique en cours et retourne les reproches de Poncelet en soulignant l'importance philosophique de ses travaux :

Les esprits superficiels, ceux qui n'étudient les sciences que comme on apprend un métier, et qui n'en comptent pour rien la philosophie, pourront ne voir dans le beau travail de M. Poncelet, que quelques théorèmes nouveaux ajoutés à ceux dont nous sommes déjà en possession, et une manière nouvelle de démontrer des théorèmes déjà connus. Peut-être même des gens incapables de rien inventer eux-mêmes, viendront-ils nous prouver, avec une sorte de triomphe, que quelques-uns des théorèmes donnés pour nouveaux par l'auteur sont implicitement compris dans d'autres théorèmes déjà démontrés, il y a tant ou tant de siècles, par quelque géomètre grec ou latin bien ignoré. [Gergonne, 1826-1827a, 272-273]

L'ironie de Gergonne et l'attribution à celui-ci dans le *Bulletin des sciences de Ferussac* de l'origine des réflexions sur la question de la dualité provoquent une réaction violente de Poncelet : celui rédige une réclamation⁹⁵ véhémente dans laquelle il revendique la priorité sur Gergonne pour ce qui concerne la *dualité* ou la *réciprocité*. Au delà de ces aspects polémiques, la dispute entre Gergonne et Poncelet repose sur une différence radicale de conception de ces notions. En effet, Poncelet établit la réciprocité des figures polaires alors que Gergonne tente de mettre en œuvre un principe de dualité des énoncés de la géométrie dont un des fondements serait la dualité des axiomes de la géométrie.

Les considérations philosophiques sur les éléments de l'étendue

Comme le précise Gergonne et le reproche Poncelet, la théorie exposée dans les *Considérations philosophiques sur les éléments de science de l'étendue*⁹⁶ ne concerne que les propriétés de situation (essentiellement les propriétés d'incidence). Le point de départ de la réflexion de Gergonne est la constatation que les théorèmes de la géométrie de situation sont «doubles, c'est-à-dire que, dans la géométrie plane, à chaque théorème *i* en répond toujours nécessairement un autre qui s'en déduit en y échangeant simplement entre eux les deux mots *points* et *droites* ; tandis que, dans la géométrie de l'espace, ce sont les mots *points* et *plans* qu'il faut échanger entre eux pour passer d'un théorème à son corrélatif»⁹⁷. Gergonne se propose alors de développer une géométrie *en parties doubles* et de justifier cette dualité «dans l'exposé même des premières notions». Pour rendre la dualité des énoncés plus évidente, Gergonne propose «de présenter les théorèmes analogues dans deux colonnes, en regard l'une de l'autre»⁹⁸. Gergonne

⁹⁴[Gergonne, 1826-1827a, 273-274].

⁹⁵[Poncelet, 1827-1828].

⁹⁶[Gergonne, 1825-1826].

Sur la genèse du travail de Gergonne sur la dualité, on peut consulter les article de K. Chemla [1989, 1994]. Le livre de E. Scholz [1989] donne un point de vue plus général sur l'histoire de la dualité au 19^e siècle.

⁹⁷[Gergonne, 1825-1826, 210].

⁹⁸[Gergonne, 1825-1826, 211].

définit les notions préliminaires de la géométrie de l'espace en mettant en regard les axiomes duaux :

- | | |
|--|--|
| <p>1. Deux points, distincts l'un de l'autre, donnés dans l'espace, déterminent une droite indéfinie qui, lorsque ces deux points sont désignés par A et B, peut être elle-même désignée par AB.</p> <p>2. Trois points donnés dans l'espace, ne se confondant pas deux à deux et n'appartenant pas à une même ligne droite, déterminent un plan indéfini qui, lorsque ces trois points sont respectivement désignés par A, B, C, peut être lui-même désigné par ABC.</p> <p>3. Un plan peut aussi être déterminé dans l'espace par une droite et par un point qui ne s'y trouve pas contenu, ou encore par deux droites qui concourent en un même point.</p> | <p>1. Deux plans, non parallèles, donnés dans l'espace, déterminent une droite indéfinie qui, lorsque ces deux plans sont désignés par A et B, peut être elle-même désignée par AB.</p> <p>2. Trois plans, non parallèles deux à deux dans l'espace, et ne passant pas par une même ligne droite, déterminent un point qui, lorsque ces trois plans sont respectivement désignés par A, B, C, peut être lui-même désigné par ABC.</p> <p>3. Un point peut aussi être déterminé dans l'espace par une droite et par un plan dans lequel elle ne se trouve pas située, ou encore par deux droites situées dans un même plan. [Gergonne, 1825-1826, 212-213]</p> |
|--|--|

Les notions duales de polygone et d'angles polyèdre, de polygone circonscrit et d'angle polyèdre inscrit, de polygone inscrit et d'angle polyèdre circonscrit, etc. sont ainsi définies de manière duale.

La question des démonstrations des théorèmes montre que Gergonne ne considère pas que la dualité des axiomes de la théorie suffise à démontrer un théorème dual. Certes, il rappelle qu'il pourrait se «borner à démontrer seulement une moitié» des théorèmes, mais il précise que l'autre moitié serait démontrée à l'aide de la théorie des pôles ! Pour des raisons pédagogiques et de systémativité, il préfère démontrer les théorèmes de chacune des théories ; il aura ainsi «l'occasion de faire remarquer qu'il existe entre les démonstrations de deux théorèmes d'un même couple la même correspondance qu'entre leurs énoncés»⁹⁹.

Gergonne termine son article en évoquant la manière d'étendre ses considérations à la géométrie des courbes et des surfaces courbes¹⁰⁰ et conclut qu'il pense avoir mis «hors de toute contestation ces deux points de philosophie mathématique, savoir 1. qu'il est une partie notable de la géométrie dans laquelle les théorèmes se correspondent exactement deux à deux, ainsi que les raisonnemens qu'il faut faire pour les établir, et cela en vertu de la nature même de l'étendue, 2. que cette partie de la géométrie [...] peut être complètement développée indépendamment du calcul et de la connaissance d'aucune des propriétés métriques des grandeurs que l'on considère»¹⁰¹ Gergonne insiste sur le caractère linguistique de sa théorie de la dualité en précisant qu'il préfère se priver d'un

⁹⁹[Gergonne, 1825-1826, 211].

¹⁰⁰Gergonne développe son point de vue dans ses *Recherches sur quelques lois générales qui régissent les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres* [Gergonne, 1826-1827b].

¹⁰¹[Gergonne, 1825-1826, 230-231].

certain nombre de termes qui n'ont pas d'équivalent et continuer à user de périphrases pour privilégier le parallélisme entre les énoncés¹⁰². Il déplore que la langue mathématique soit trop pauvre pour permettre d'exprimer sans problème l'énoncé dual de certains théorèmes et appelle à une pratique de la définition en géométrie :

Il sera donc nécessaire, pour présenter la nouvelle théorie sous le jour le plus avantageux, de créer d'abord une langue à sa taille, s'il est permis de s'exprimer ainsi ; mais cette langue, nous en convenons, sera difficile à bien faire, et il sera peut-être plus difficile encore, lorsqu'elle sera faite, de lui obtenir un accueil favorable de la part des géomètres. [Gergonne, 1826-1827a, 276]

Pour Poncelet, la dualité des propriétés des figures relèvent de la théorie de la polarité et non pas de «la nature de l'étendue». Dans le préambule¹⁰³ de son analyse du mémoire sur la théorie des polaires réciproques, Poncelet affirme que l'on ne peut parler de dualité qu'en référence à la théorie de la polarité et qu'il lui apparaît comme «très peu philosophique de prétendre que certaines analogies de propriétés soient étrangères aux théories qui y ont conduit»¹⁰⁴.

3.4 Les principes de projection

Poncelet considérait que les deux outils à mettre en œuvre pour rénover la géométrie pure étaient le premier, le principe de continuité et le second, les «principes de la doctrine des projections». Le point de vue projectif adopté par Poncelet lui permet d'une part de caractériser les propriétés projectives définies comme invariantes par projection centrales, d'autre part de définir une série de principes méthodologiques, les *principes de projection* : un problème étant posé à partir d'une figure donnée, l'essentiel de la recherche consistera à déterminer une projection de la figure pour laquelle le problème étudié devient plus simple à résoudre. Ainsi, puisque, de part la définition des points à l'infini, un faisceau de droites parallèles peut être projeté par un faisceau de droites concourant en un point à distance finie, et réciproquement, Poncelet en déduit deux principes généraux de projection :

Une figure plane quelconque, qui renferme un système de droites ayant un point commun d'intersection, peut toujours être regardée comme la projection d'une autre, du même genre ou ordre, dans laquelle le point d'intersection est passé à l'infini et les lignes correspondantes sont devenues parallèles. [...]

Une figure plane qui renferme un système de lignes droites ou courbes, parallèles ou concourantes à l'infini, a en général pour projection, sur un plan quelconque, une figure du même genre, dans laquelle les lignes correspondantes concourent en un point commun à distance finie, projection de celui du premier système. [Poncelet, 1822, 51]

¹⁰²Gergonne n'utilise pas le terme de *diagonale* car il n'existe pas de mot pour désigner les points déterminés par deux côtés non-consécutifs d'un polygone.

¹⁰³Ce préambule n'est pas publié dans un premier temps par Gergonne.

¹⁰⁴[Poncelet, 1866, 325].

De même, la définition de la droite à l'infini donne deux principes qui permettent l'un d'envoyer une droite à l'infini, et l'autre réciproquement de ramener la droite à l'infini en position finie. Ces principes n'invoquent pas de position particulière du centre de projection, seules comptent les positions respectives des plans. Il n'en est pas de même dès que Poncelet aborde la question de projeter une droite et une conique sur la droite à l'infini et un cercle :

Une figure plane quelconque, où entrent une certaine droite et une section conique, peut, en général, être regardée comme la projection d'une autre, pour laquelle la droite est passée entièrement à l'infini, et la section conique est devenue une circonférence de cercle. [Poncelet, 1822, 53]

La démonstration de ce principe revient à résoudre le problème géométrique :

Étant données une section conique (C) et une droite mn , située à volonté sur son plan, trouver un centre et un plan de projection tels, que la droite donnée mn soit projetée à l'infini sur ce plan, et que la section conique y soit en même temps représentée par un cercle. [Poncelet, 1822, 53]

Poncelet propose dans un premier temps une solution constructive du centre et du plan de projection. En notant S le centre inconnu de projection, le plan déterminé par S et mn doit, par hypothèse, être parallèle au plan de projection. Or comme le plan de projection doit couper la surface conique qui admet S comme sommet et (C) comme base le long d'un cercle, il s'ensuit que la droite mn doit être extérieure à la conique (C), soit en utilisant le vocabulaire de Poncelet, mn est une sécante idéale de la conique (C). Sur la droite mn , on considère la corde idéale MN , si O désigne le milieu de MN , AB , le diamètre de (C) conjugué à MN et $A'B'$ le diamètre conjugué à MN d'une autre section (conique) (C') du cône de sommet S et de base (C), alors la propriété pour des coniques d'être des sections d'un même cône se traduit par la relation :

$$OM^2 = p.OA.OB = p'.OA'.OB'$$

où p désigne le paramètre de la conique (C) et p' celui de (C'). Lorsque la conique (C') tend vers le sommet S , on peut regarder cette conique comme «une section infiniment petite, semblable à celle qu'on obtiendrait par un plan quelconque parallèle au sien»¹⁰⁵, c'est-à-dire le plan SMN , la relation précédente devient :

$$p.OA.OB = p'OS^2.$$

Comme le plan SMN est parallèle au plan de projection qui est celui d'une section circulaire du cône, le paramètre p' est égal à 1 et donc :

$$OM^2 = p.OA.OB = OS^2.$$

De plus, comme OS est la direction conjuguée de mn et que le plan SMN est parallèle à un plan d'une section circulaire du cône, les directions conjuguées sont perpendiculaires et donc SO est orthogonale à MN . Poncelet en conclut :

le centre auxiliaire de projection doit se trouver sur une circonférence de cercle, décrite du milieu de la corde idéale qui répond à la droite donnée, comme centre, avec un rayon égal à la moitié de cette corde, et dans un plan qui lui soit perpendiculaire. [Poncelet, 1822, 54]

¹⁰⁵[Poncelet, 1822, 38].

Ce raisonnement n'est valable que lorsque la sécante est idéale; lorsque la sécante est réelle, «la projection de cette courbe, suivant un cercle, devient impossible ou imaginaire»¹⁰⁶. Les propriétés que l'on pourra déduire à partir de ce principe «ne seront elles-mêmes des conséquences absolues et rigoureusement nécessaires»¹⁰⁷ que lorsque la sécante est réelle; elles cesseront de l'être lorsque «la projection correspondante aura elle-même cessé d'exister d'une manière absolue et purement géométrique». Pour autant, les propriétés n'en continuent pas moins à persister en vertu du principe de continuité :

Toutefois on ne doit pas conclure que, l'objet des raisonnements primitifs étant devenu illusoire, la propriété ait par là même cessé de subsister; car les deux séries de positions que l'on considère renferment toutes celles que peut prendre la figure, sans changer les conditions qui la déterminent; et, par hypothèse, ces positions sont telles, qu'on peut regarder, à volonté, les unes comme provenant des autres par le mouvement progressif et continu de certaines parties de cette figure, sans violer la liaison et les lois primitivement établies entre elles. Or, quand deux figures géométriques sont ainsi liées entre elles, les propriétés de l'une sont directement applicables à l'autre, sauf les modifications qui peuvent arriver dans les signes de position, ou dans la réalité et la grandeur absolue des parties. [Poncelet, 1822, 66]

Pour Poncelet, le rapprochement entre principes de projection (seulement démontrés en toute rigueur pour certaines configurations) et principe de continuité suffit pour justifier de considérer comme générales («applicables à tous les cas possibles») les propriétés géométriques qui peuvent être déduites des principes de projection, «quand bien même ces principes pourraient cesser d'avoir lieu géométriquement pour certaines dispositions de la figure, et qu'en conséquence sa projection pût devenir imaginaire»¹⁰⁸. Par exemple, comme «une figure plane quelconque, qui renferme deux sections coniques, peut, en général, être regardée comme la projection d'une autre, pour laquelle les sections coniques sont devenues des circonférences de cercle», Poncelet peut affirmer que toute propriété projective relative à deux cercles peut s'étendre à tout système de deux coniques, même lorsque que celles-ci ont quatre points d'intersection, «circonstance pour laquelle leur projection, suivant des cercles, serait évidemment impossible»¹⁰⁹. C'est en vertu de cette possibilité de généraliser les propriétés montrées à l'aide des principes de projection que ceux-ci sont énoncés en toute généralité, de manière à ne pas rappeler «la restriction dont ils peuvent être susceptibles».¹¹⁰

¹⁰⁶[Poncelet, 1822, 54].

¹⁰⁷[Poncelet, 1822, 66].

¹⁰⁸[Poncelet, 1822, 67].

¹⁰⁹[Poncelet, 1822, 68].

¹¹⁰Poncelet précise que c'est pour cette raison qu'il ajoute «en général» à l'énoncé des principes de projection :

C'est dans ce sens seulement que nous avons entendu dire, dans l'énoncé [des principes de projection], que le principe avait lieu en général : à peu près comme l'on pourrait dire que «d'un point donné sur le plan d'un cercle, on peut, *en général*, mener deux tangentes à ce cercle.» Cette manière de s'exprimer étant universellement admise dans l'Analyse des coordonnées, nous ne croyons pas qu'on puisse la récuser en Géométrie, ni par conséquent avoir des doutes sur le sens que nous lui attribuerons dans ces recherches. [Poncelet, 1822, 54]

3.5 La notion d'homologie

Les principes de continuité, de projection ou de dualité sont pour Poncelet des principes méthodologiques de transformation des figures. Les transformations en jeu dans ces principes sont des outils d'études des figures géométriques et pour l'essentiel des coniques. En aucun cas, la géométrie de Poncelet n'est une géométrie des transformations géométriques. Pourtant, sans en faire le noeud de son étude, Poncelet s'intéresse néanmoins à certaines transformations géométriques comme la similitude et l'*homologie*. Poncelet ne définit pas explicitement la similitude ou l'homologie comme des transformations du plan ou de l'espace ; il présente ces notions comme des propriétés de certaines figures : il définit ce que sont des figures semblables ou homologues. Ainsi, «pour que deux polygones soient *semblables*, il est nécessaire et il suffit qu'on puisse les décrire, l'un et l'autre, sous des données et par des constructions elles-mêmes *semblables*, c'est-à-dire telles, que les parties qui les composent appartiennent à des figures semblables, ce qui exige simplement que les distances homologues y soient proportionnelles et fassent les mêmes angles de part et d'autre»¹¹¹. Dans le cas d'un système de deux cercles, qui sont par définition toujours semblables et semblablement placées (s. et s.p.), le point d'intersection S des deux tangentes communes extérieures et S' celui des tangentes communes intérieures sont respectivement les centres de similitude *directe* et *opposée*.¹¹² La notion de centre de similitude s'étend à tout système composé de deux figures s. et s.p. :

L'existence du centre de similitude n'est point particulière au cas de deux cercles tracés sur un plan, elle a lieu pour deux figures quelconques, s. et s.p., soit sur un plan, soit, en général, dans l'espace. Le centre de similitude n'est autre chose, dans ces divers cas, que le point vers lequel convergent toutes les droites ou *rayons de similitude* qui joignent, deux à deux, les points homologues de l'une et l'autre figure, et qui divise toutes ces droites, ou leurs prolongements, en deux segments proportionnels : c'est d'ailleurs un centre de similitude *directe* ou *opposée*, selon que les deux segments en question sont dirigés dans le *même sens* ou en *sens contraire* par rapport à ce point. [Poncelet, 1822, 123]

Dans le cas d'un système déterminé par deux cercles, Poncelet définit les notions de points *homologues directs* et de points *homologues inverses* : lorsque l'on considère un des centre S de similitude, chaque point A de l'un des cercles définira deux points sur le second, le premier A' sera le point homologue par similitude de centre S de A et le second E' l'autre point d'intersection de SA et de l'autre cercle. A' est l'homologue direct de A tandis que E' est l'homologue inverse. Plus généralement, «deux arcs, deux cordes, deux tangentes, etc., appartenant respectivement à deux cercles, seront, *directement* ou *inversement* homologues, suivant que leurs extrémités ou points de contact seront des points de l'une ou de l'autre espèce»¹¹³ Deux lignes directement homologues sont pa-

¹¹¹[Poncelet, 1822, 21].

¹¹²Dans le cas où les cercles n'admettent pas de tangente commune réelle, les points S et S' restent réels puisque S est le point de concours des extrémités de deux rayons parallèles de même sens et S' celui de deux rayons parallèles de sens opposés. S et S' divisent harmoniquement les deux centres des cercles.

¹¹³[Poncelet, 1822, 125].

rallèles et se coupent sur la sécante commune à l'infini aux deux cercles. Deux lignes inversement homologues se coupent sur la «sécante commune à distance finie». A partir du principe de projection qui affirme qu'«une figure plane quelconque, qui renferme deux sections coniques, peut, en général, être regardée comme la projection d'une autre, pour laquelle les sections coniques sont devenues des circonférences de cercle»¹¹⁴, Poncelet peut généraliser son analyse concernant les systèmes de deux cercles :

Deux sections coniques quelconques, tracées sur un plan, peuvent être regardée, de deux manières différentes, comme étant projection ou perspective l'une de l'autre par rapport à chacun des points de concours de leurs tangentes communes, pris en particulier pour centre de projection. [Poncelet, 1822, 151]

Deux points homologues sont donc situés sur une droite, la *projetante* qui passe par le centre de projection ; deux droites (ou courbes) homologues vont concourir vers l'une des sécantes communes aux deux coniques.

Poncelet ne limite pas la notion de figures homologues aux systèmes de deux coniques ; de la même manière que la notion d'homologie entre deux coniques a été obtenue à partir de considérations de similitude entre deux cercles, la notion générale de figures homologues peut être étendue à tous les systèmes de deux figures qui «peuvent être regardées comme la projection ou perspective de deux autres figures semblables de grandeur et de position sur un plan»¹¹⁵. Le *centre d'homologie* est définie comme le point de concours des droites joignant deux points homologues, et l'*axe d'homologie* comme la droite sur laquelle concourent les lignes homologues.

Les propriétés descriptives vérifiées par des figures s. et s.p. s'étendront immédiatement aux figures homologues de même que les relations découlant de la théorie des transversales.

La donnée du centre d'homologie, de l'axe d'homologie et d'un couple de points homologues ou celle de trois couples de points homologues sont suffisantes pour déterminer complètement l'homologie. La notion d'homologie permet de donner des solutions constructives de certains problèmes :

En général, on pourra résoudre graphiquement, sur la figure non décrite et au moyen de ces seules données, toutes les questions qui ne concerneraient que la direction indéfinie des lignes, leur intersection, leur tangente, etc. : voulant, par exemple, rechercher l'intersection d'une certaine courbe avec une droite donnée, on n'aura qu'à déterminer l'homologue de cette droite, et à projeter ses intersections avec la courbe homologue à la proposée sur la droite donnée ; pareillement, si, d'un point donné, on veut mener des tangentes à une certaine courbe de la figure non décrite, on cherchera l'homologue de ce point, duquel on mènera des tangentes à la courbe correspondante de l'autre figure ; on projettera ensuite les tangentes et les points de contact ainsi obtenus, sur la figure non-décrite, etc. [Poncelet, 1822, 158]

¹¹⁴[Poncelet, 1822, 59].

¹¹⁵[Poncelet, 1822, 154].

Chapitre 4

Les travaux de Steiner

4.1 Introduction

Le titre même du traité de géométrie de Steiner [1832], *Développement systématique de la dépendance mutuelle des figures géométriques eu égard aux travaux des géomètres anciens et contemporains sur les porismes, les méthodes projectives, la géométrie de position, les transversales, la dualité, et la réciprocité*, etc.¹ montre les ambitions de ce travail : exposer et organiser de manière synthétique le corpus de la géométrie ancienne et moderne. Dans la préface, il précise que son travail est organisé autour d'un certain nombre de propriétés fondamentales de l'espace qui renferment à ses yeux le «germe de tous les théorèmes, porismes et problèmes de la géométrie»². Il se propose de trouver un fil directeur et une origine commune à toutes ces théories qui sont séparées les unes des autres. Ainsi, on aura un aperçu général de l'organisation des théorèmes et en même temps, «on pourra porter un regard plus libre sur la particularité de chacun d'eux et sa place par rapport aux autres théorèmes»³. Pour Steiner, il ne s'agit donc pas simplement de rassembler des énoncés sans les organiser ; une telle collection même complète n'aurait pas d'intérêt. Bien au contraire, Steiner affirme en préalable la certitude de l'existence d'un certain nombre de propriétés simples autour desquelles se développeraient les théories géométriques et à partir desquelles les théorèmes seraient déduits.

En s'appropriant convenablement les quelques relations fondamentales, on se rend maître de la totalité du sujet ; l'ordre pénètre dans le chaos, et on voit comment toutes les parties sont naturellement liées entre elles, comment elles s'alignent dans le plus bel ordre et comment celles qui ont des affinités se combinent en des groupes bien

¹ *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität, und Reciprocität, etc.*

² „[...] nach solchen räumlichen Fundamenteigenschaften, die den Keim aller Sätze, Porismen und Aufgaben der Geometrie [...], in sich enthalten.“ [Steiner, 1832, I-3]

³ „[...] ein freierer Blick in das Besondere eines jeden und seiner Stellung zu den übrigen geworfen werden kann.“ [Steiner, 1832, I-3]

délimités.⁴

Pour Steiner, le but de la géométrie, qu'on l'aborde synthétiquement ou analytiquement, est de comprendre les dépendances entre les figures et en même temps de découvrir comment les propriétés se conservent lorsque on envisage des figures de plus en plus complexes. Pour cela, il faut déterminer quels sont les éléments et leurs relations à partir desquels on pourra appréhender la manière de procéder de la «Nature» pour «conférer aux figures une infinité de propriétés le plus économiquement et le plus simplement possible⁵». Steiner poursuit en affirmant que les deux méthodes se complètent, que les résultats qu'il exprime synthétiquement dans son traité peuvent être obtenus en utilisant la méthode analytique, ce qui n'est pas à ses yeux surprenant puisqu'en fait il suit le même chemin que la nature. Une fois les figures fondamentales et leurs relations fondamentales obtenues, les deux approches de la géométrie sont aussi naturelles l'une que l'autre.

Steiner adopte la même position de conciliation des points de vue synthétique et analytique lorsqu'il termine la préface de son traité en faisant allusion à la polémique entre Gergonne et Poncelet au sujet du principe de dualité et de la théorie des polaires réciproques. Steiner considère que le principe de dualité tel qu'il est exprimé par Gergonne est une propriété inhérentes aux figures primitives alors que la théorie des polaires réciproques de Poncelet résulte de l'étude des relations entre figures fondamentales. Même si Steiner juge donc le principe de dualité «comme le plus primitif, le plus proche de la source»⁶, il n'en considère pas moins que la contribution de la théorie des polaires réciproques au progrès de la géométrie synthétique est au moins aussi fondamentale et que cette théorie a reçu avec les travaux de Möbius en particulier une formulation plus complète et plus générale. Les préoccupations de Steiner apparaissent clairement : il est certes importants de déterminer les éléments et les relations fondamentales de la géométrie mais il est plus important de circonscrire des théories autour des relations entre les figure :

Le contenu principal ou l'essentiel de l'ensemble des résultats qui sont obtenus et atteints au cours de ce travail, réside comme cela se laisse déjà pressentir sans risque à partir de l'aperçu précédent : «dans les recherches sur la dépendance entre elles des figures».⁷

⁴„Durch gehörige Aneignung der wenige Grundbeziehungen macht man sich zum Herrn des ganzen Gegenstandes; es tritt Ordnung in der Chaos ein, und man sieht, wie alle Theile naturgemäss in einander greifen, in schönster Ordnung sich in Reihen stellen, und verwandte zu wohlbegrenzten Gruppen sich vereinigen.“ [Steiner, 1832, I-4]

⁵„[...] um mit möglichster Sparsamkeit und auf die einfachste Weise den Figuren unzählige viele Eigenschaften [zu] verleihen [...]“ [Steiner, 1832, I-4]

⁶„als das primitivere, der Quelle näher liegende“ [Steiner, 1832, I-5]

⁷„Der Hauptinhalt, oder das Wesentliche der gesammten Resultate, die durch dieses Werk erzielt und erreicht werden, besteht, wie es sich schon aus der vorstehenden Uebersicht ohngefähr entnehmen lässt : »In Untersuchungen über die Abhängigkeit der Gestalten (Figuren) von einander.«“ [Steiner, 1832, I-10]

4.2 Les notions et les relations primitives de la géométrie

Les éléments primitifs nécessaires à la géométrie sont l'espace, le plan, la droite et le point. Steiner n'essaie pas de définir ces notions ; l'important à ses yeux est de décrire les relations existant entre ces éléments et de déterminer comment certaines compositions entre ceux-ci constituent des formes fondamentales.

La droite (*Gerade*) peut être vue comme le support d'une infinité de points qui, à partir de n'importe lequel d'entre eux, s'entendent à l'infini le long de deux côtés opposés.⁸ Le faisceau plan de rayons (*ebene Strahlbüschel*) est défini comme l'ensemble des droites d'un plan qui passent par un même point. Chaque droite d'un tel faisceau est appelée un rayon (*Strahl*) et le point par lequel passe chacun des rayons est appelé le centre (*Mittelpunkt*). De même, un faisceau de plans (*Ebenenbüschel*) est défini comme l'ensemble des plans qui passent par une même droite. La droite par laquelle passe chacun des plans du faisceau est appelée l'axe (*Axe*) du faisceau. Steiner ne signale en ce qui concerne le plan (*Ebene*) qu'il contient une infinité de points, de droites et de faisceaux de rayons et que chacun de ses points est le centre d'un faisceau de droite situé dans ce plan. Le dernier élément primitif est le faisceau de rayons dans l'espace (*Strahlbüschel im Raume*) que Steiner décrit comme l'ensemble de toutes les droites passant par un point et qu'il associe à l'ensemble de toutes les directions passant par un point. Il signale alors qu'un tel faisceau spatial contient une infinité de droites, une infinité de faisceaux plans de rayons et une infinité de faisceaux de plans.

L'objet premier de la géométrie n'est plus l'étude des propriétés des figures mais celle des relations entre ces formes fondamentales (*Grundgebilde*). La recherche des propriétés des figures est subordonnée tant dans l'exposé général que dans la formulation des problèmes aux relations entre les formes fondamentales. Steiner se propose de faire reposer toutes les recherches sur quatre types de relations fondamentales : a) celles entre les droites et les faisceaux plans de rayons, b) celles entre les faisceaux de plans et les droites ou les faisceaux plans de rayons, c) celles entre les plans et les faisceaux de rayons dans l'espace et d) les relations spatiales. Les droites, les faisceaux plans de rayons et les faisceaux de plans sont ainsi associés de telle manière qu'à chaque élément de l'un correspond un élément de l'autre et donc certains théorèmes concernant les éléments de l'une de ces formes peuvent se traduire en des théorèmes concernant les éléments des autres formes. De même entre les plans et les faisceaux de rayons dans l'espace.

La nature de cette dualité de propriétés et de théorèmes est par conséquent rendue nécessaire de part les formes fondamentales elles-mêmes, c'est-à-dire de part la compréhension des éléments spatiaux. Afin que les fondements de cette dualité apparaissent de manière claire et naturelle et qu'ils puissent se confirmer comme vrais, la réflexion doit être conduite, autant que possible, de telle manière que les formes associées entre elles soient étudiées toujours simultanément, que leurs propriétés correspondantes soient développées

⁸L'imprécision de la définition montre le peu d'intérêt de Steiner pour cette activité. Dans ses leçons sur la géométrie synthétique [Steiner, 1867], il définit une droite comme le support d'une ponctuelle (*Punktreihe*).

simultanément et les théorèmes disposés l'un à côté de l'autre.⁹

4.3 La notion de formes projectives

Steiner introduit les notions de *birapport* et d'*éléments harmoniques* à partir de la perspective entre une droite et un faisceau plan de rayons. Dans un premier temps, lorsque Steiner parle de deux formes projectives, il s'agit d'une droite et d'un faisceau plan de rayons. Dans un second temps, il généralise son analyse au cas de deux ou plusieurs droites projectives et/ou de deux ou plusieurs faisceaux plans de rayons. La construction se termine lorsque dans un dernier geste de généralisation, il étend la notion de formes projectives au cas des faisceaux de plans.

4.3.1 La relation projective entre droite et faisceau plan de rayons

La relation projective entre une droite et un faisceau plan de rayons dont elle intersecte les rayons permet à Steiner d'introduire la notion de points à l'infini et de droites projectives. L'introduction de la notion de point à l'infini d'une droite est justifiée pour Steiner car elle permet de compléter la correspondance entre les rayons du faisceau et les points de la droite. Une fois le point à l'infini introduit, on peut dire que le rayon du faisceau qui est parallèle à la droite coupe la droite au point à l'infini. Lorsque l'on associe à chaque rayon d'un faisceau B , son point d'intersection avec une droite D , on dit que les deux formes sont *projectives* (*projectivisch*) et qu'elles sont en *position perspective* (*perspectivische Lage*). Par contre, si une fois la correspondance entre les éléments de A et B établie, les deux formes changent de position, les formes A et B sont en *position oblique* (*schiefe Lage*).

En considérant des triangles rectangles lorsque la droite A et le faisceau B sont en position perspective, Steiner montre que si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et a, b, c, d sont respectivement quatre points et quatre rayons correspondants, alors :

$$\frac{\alpha\delta}{\beta\delta} : \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} = \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)} : \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} \quad (4.1)$$

Il généralise cette propriété pour les formes projectives qui sont en position oblique. La donnée de quatre points alignés ou de quatre droites passant par un même point définit selon les appariements

$$[(\alpha, \beta), (\gamma, \delta)], [(\alpha, \gamma), (\beta, \delta)], [(\alpha, \delta), (\beta, \gamma)]$$

⁹„Das Wesen dieser Dualität von Eigenschaften und Sätzen ist also durch die Grundgebilde selbst, d.h. durch die umfassende Vordtelling der Raumelemente, nothwendig bedingt. Damit die Begründung dieser Dualität auf naturgemässe, klare Weise hervortrete, und sich als wahr bewähren möge, soll die Betrachtung, so viel es sich thun lässt, so geführt werden, dass die einander entgegenstehenden Gebilde immer zugleich untersucht, ihre entsprechenden Eigenschaften und Sätze zugleich entwickelt und neben einander gestellt werden.“ [Steiner, 1832, I-10]

trois manières de calculer les birapports¹⁰ :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} : \frac{\alpha\delta}{\beta\delta} &= \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)} \\ \frac{\alpha\beta}{\gamma\beta} : \frac{\alpha\delta}{\gamma\delta} &= \frac{\sin(ab)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(cd)} \\ \frac{\alpha\beta}{\delta\beta} : \frac{\alpha\gamma}{\delta\gamma} &= \frac{\sin(ab)}{\sin(db)} : \frac{\sin(ac)}{\sin(dc)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Steiner énonce alors deux théorèmes duaux qui expriment le caractère projectif du birapport et qu'il dispose en vis à vis à la manière de Gergonne; le premier exprime que les birapports que l'on peut définir avec quatre rayons concourants qui intersectent quatre points alignés fixes sont constants. Le second que les birapports définis par les quatre points d'une droite qui intersectent quatre rayons d'un faisceau fixe sont constants.¹¹ Il déduit de la définition du birapport le théorème fondamental de la géométrie projective dans le cas d'une droite et d'un faisceau plan de rayons projectifs¹² :

Le système complet des paires d'éléments correspondants entre eux de deux formes A, B projectives est déterminé dès que trois paires quelconques sont données, c'est-à-dire si trois paires d'éléments [correspondants] sont données, alors au moyen de celles-ci, on peut trouver pour tout quatrième élément de la première forme, l'élément correspondant de la seconde et, si elles sont en position oblique, les formes se laissent ainsi ramener à leur position originale ou perspective.¹³

Réciproquement, si les éléments d'une droite et d'un faisceau plan de rayons sont appariés de telle manière qu'ils vérifient les formules (4.2), les deux formes sont projectives, autrement dit au sens de Steiner, peuvent être ramenées en position perspective. Il obtient donc une définition implicite de la notion de relation projective entre deux formes : deux formes sont projectives si et seulement si leurs éléments correspondants vérifient les formules (4.2).

Quatre éléments d'une droite ou d'un faisceau plan de rayons sont dits *harmoniques* si leur birapport est égal à 1. Steiner introduit ici une notion d'ordre concernant les points harmoniques; ainsi, si

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} : \frac{\alpha\delta}{\beta\delta} = 1$$

¹⁰La définition de Steiner du birapport n'est pas signée. En modifiant l'ordre des points ou des rayons, il ne peut obtenir que trois valeurs du birapport. Par contre, il distingue les appariements selon que les éléments d'une des paires sont séparés par les éléments de l'autre paire. Implicitement, Steiner applique aux points de la droite projective l'ordre cyclique induit par les faisceaux de rayons.

¹¹Steiner précise que le second théorème est dû à Brianchon [1817].

¹²Steiner montre que c'est l'ensemble des formules (4.2) qui permet d'obtenir l'unicité de l'élément défini. En effet, si l'on se contente d'une seule équation, celle-ci déterminera deux points puisque d'après la définition donnée par Steiner, le birapport n'est pas une quantité signée.

¹³„Dass das ganze System der einander entsprechenden Elementenpaare zweier projectivischen Gebilde A, B bestimmt sei, sobald irgend drei Paare gegeben sind, so kann mittelst derselben zu jedem gegebenen vierten Element des einen Gebildes das entsprechende Element des anderen Gebildes gefunden werden, und die Gebilde lassen sich dadurch, wenn sie sich in schiefer Lage befinden, in die ursprüngliche oder perspectivische Lage zurückbringen.“ [Steiner, 1832, I-18]

, Steiner propose de désigner les points $\alpha, \delta, \beta, \gamma$ par l'expression «quatre points harmoniques» et d'appeler les paires (α et β , γ et δ) des «points harmoniques ordonnés».

Steiner déduit que la notion d'harmonicité se conserve lorsqu'on considère deux formes projectives. Par contre, il signale que ce théorème ne peut avoir de réciproque simple¹⁴ car si l'on impose la condition selon laquelle à deux éléments harmoniques ordonnés de la première forme, il doit correspondre deux éléments harmoniques ordonnés de la seconde forme, la correspondance n'est pas définie univoquement. Ainsi, d'après cette condition, il peut correspondre aux quatre points harmoniques $\alpha, \delta, \beta, \gamma$ les quatre rayons dans les ordres suivants :

$$\begin{array}{cccc} adbc & bdac & dacb & cadb \\ acbd & bcad & dbca & cbda. \end{array}$$

Il en déduit le théorème suivant :

Si dans chacune des deux formes A, B , quatre éléments harmoniques sont donnés, et si l'on fait correspondre par paires ces éléments pris dans n'importe quel ordre de telle manière cependant que deux éléments harmoniques ordonnés quelconques de la première forme correspondent à deux éléments harmoniques ordonnés, ce qui peut avoir lieu de huit manières différentes, alors les formes sont du point de vue des quatre paires ordinaires d'éléments projectives.¹⁵

4.3.2 Droites projectives et faisceaux plans projectifs

Steiner généralise alors les notions de formes projectives et de formes en perspective ; ainsi, deux droites qui sont projectives d'un même faisceau plan de rayon sont dites projectives. Si de plus, elles sont toutes les deux en perspective par rapport à ce faisceau, on dit qu'elles sont perspectives et le centre du faisceau est appelé le *point de projection*. Lorsque les deux droites ne sont pas en position perspective, Steiner propose de dire qu'ils sont en position oblique. Lorsque deux droites sont en perspective, les *rayons de projection*, c'est-à-dire les droites qui joignent deux points correspondants, sont concourantes ; lorsque les deux droites sont en position oblique, la théorie de Steiner sur l'engendrement des coniques par des formes projectives montre que les rayons de projection enveloppent une conique.

De manière duale, deux faisceaux plans de rayons sont dits projectifs s'ils sont projectifs d'une même droite et en position perspective s'ils sont en perspective avec une même droite. Deux faisceaux qui sont projectifs sans être en perspective sont dits en position oblique. Les rayons correspondants de deux faisceaux plans de rayons projectifs se coupent sur une même droite. Lorsqu'ils sont projectifs en position oblique, Steiner montrera lorsqu'il expose sa théorie des coniques que deux rayons correspondants se coupent le long d'une conique.

¹⁴Von Staudt définira la notion de relation projective par la conservation de l'harmonicité.

¹⁵„Sind in jedem von zwei Gebilden A, B irgend vier harmonische Elemente gegeben, und man lässt diese Elemente, nach irgend einer Ordnung genommen, einander paarweise entsprechen, jedoch so, dass irgend zwei zugeordneten harmonischen Elementen des einen Gebildes auch zwei zugeordnete harmonische Elemente des anderen Gebildes entsprechen, welches auf acht verschiedene Arten stattfinden kann, so sind die Gebilde, in Ansehung der jesmaligen vier Elementenpaare, projectivisch.“ [Steiner, 1832, I-26]

Ayant obtenu une généralisation de la notion de formes projectives à partir du cas particulier de la perspective entre une droite et un faisceau plan de rayons, Steiner caractérise cette notion à l'aide du birapport en généralisant les formules (refStein2) :

Si (α, α_1) , (β, β_1) , (γ, γ_1) , (δ, δ_1) sont quatre paires de points correspondants de deux droites projectives, alors les birapports que l'on peut calculer à partir de ces points sont égaux. On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} : \frac{\alpha\delta}{\beta\delta} &= \frac{\alpha_1\gamma_1}{\beta_1\gamma_1} : \frac{\alpha_1\delta_1}{\beta_1\delta_1} \\ \frac{\alpha\beta}{\gamma\beta} : \frac{\alpha\delta}{\gamma\delta} &= \frac{\alpha_1\beta_1}{\gamma_1\beta_1} : \frac{\alpha_1\delta_1}{\gamma_1\delta_1} \\ \frac{\alpha\beta}{\delta\beta} : \frac{\alpha\gamma}{\delta\gamma} &= \frac{\alpha_1\beta_1}{\delta_1\beta_1} : \frac{\alpha_1\gamma_1}{\delta_1\gamma_1} \end{aligned} \quad (4.3)$$

De même, si (a, a_1) , (b, b_1) , (c, c_1) , (d, d_1) sont quatre paires de rayons correspondants de deux faisceaux plans projectifs, les birapports que l'on peut calculer à partir des angles formés par ces rayons sont égaux. On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)} &= \frac{\sin(a_1c_1)}{\sin(b_1c_1)} : \frac{\sin(a_1d_1)}{\sin(b_1d_1)} \\ \frac{\sin(ab)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(cd)} &= \frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(c_1b_1)} : \frac{\sin(a_1d_1)}{\sin(c_1d_1)} \\ \frac{\sin(ab)}{\sin(db)} : \frac{\sin(ac)}{\sin(dc)} &= \frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(d_1b_1)} : \frac{\sin(a_1c_1)}{\sin(d_1c_1)} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Steiner réunit les résultats et les définitions concernant les correspondances projectives entre droites, entre droite et faisceau plan de rayons et entre faisceaux plans en un théorème général qui introduit la notion d'ordre des éléments dans la conception de la relation projective entre forme de première espèce (comme elles seront qualifiées un peu plus tard) et qui reprend dans un cadre général le théorème fondamental de la géométrie projective :

- α) Soit deux formes projectives – que ce soient une droite et un faisceau plan de rayons, ou deux droites, ou deux faisceaux plans de rayons ; les birapports déterminés par quatre éléments quelconques de la première forme, sont égaux aux birapports déterminés par les quatre éléments correspondants de la seconde forme ; de plus, la position mutuelle des quatre éléments de la première forme est concordante avec celle des quatre éléments de la seconde forme.
- β) Il s'ensuit que le système complet des paires d'éléments correspondants de deux formes projectives est déterminé si trois telles paires quelconques sont données.
- γ) Les trois paires peuvent même être choisies complètement arbitrairement. Et réciproquement (α) :
- δ) Si les éléments de deux formes sont appariés de telle manière que les birapports définis par quatre éléments quelconques de la première forme soient égaux aux birapports définis par les quatre éléments correspondants de la seconde forme, et qu'ainsi

de manière nécessaire, quatre éléments ordinaires des deux côtés doivent avoir des positions mutuelles concordantes, alors les formes sont, par rapport à toutes ces paires d'éléments, projectives.¹⁶

4.3.3 Incise : le style de démonstration de Steiner

Avant de poursuivre l'analyse des correspondances projectives, il est important de bien voir à partir de deux exemples simples comment cette notion intervient chez Steiner dans sa manière de poser les problèmes et de les résoudre :

Le lieu des centres de projection de deux droites Un corollaire immédiat du théorème fondamental de la géométrie projective est que deux droites projectives A et A_1 dont le point d'intersection se correspond à lui-même sont en perspective. Steiner commence son raisonnement en constatant que l'angle formé par les deux droites n'a pas d'influence sur cette propriété.

L'idée est alors de faire varier cet angle en conservant la droite A fixe et en faisant tourner la seconde A_1 autour du point d'intersection (ϵ, ϵ_1) . Les deux droites restent en perspective et le centre β de projection change de position en même temps que la droites A_1 tourne. La question naturelle est de déterminer la ligne sur laquelle se déplace le point β .

Si l'on désigne par q et r les droites passant par β et respectivement parallèles à A et A_1 , le point d'intersection χ_1 de q et A_1 est le point correspondant du point à l'infini de A et celui η de r et A a pour correspondant le point à l'infini de A_1 . La distance $\epsilon_1\chi_1$ et le point η sont fixés par la donnée que les droites sont projectives ; comme $\epsilon\chi_1\beta\eta$ est un parallélogramme, la distance $\eta\beta$ est invariante et le point β se déplace sur le cercle de centre η et de rayon $\epsilon\chi_1$.

Une propriété des coniques Le second exemple provient d'une note [Steiner, 1828] publiée en 1828 dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées de Gergonne* au moment de la polémique entre Poncelet et Gergonne sur la question de la dualité. La démonstration de Steiner utilise une généralisation justifiée par le principe de projection de Poncelet. D'autre part, même s'il invoque pour obtenir un théorème dual la théorie des polaires réciproques de Poncelet, le point de vue est plus proche de celui proposé par Gergonne.

¹⁶ α) »Bei zwei projectivischen Gebilden – seien es eine Gerade und ein ebener Strahlbüschel, oder zwei Gerade, oder zwei ebene Strahlbüschel – sind die Doppelverhältnisse, welche durch irgend vier Elemente des einen Gebildes bestimmt werden, gleich den Doppelverhältnissen, welche durch die vier entsprechenden Elemente des anderen Gebildes bestimmt werden ; ferner ist die gegenseitigen Lage der vier Elemente des einen Gebildes übereinstimmend mit der der vier Elemente des anderen Gebildes.«

β) »Daher ist das ganze System der entsprechenden Elementenpaare zweier projectivischen Gebilde bestimmt, wenn irgend drei solcher Paare gegeben sind.«

γ) »Und zwar können solche drei Paare ganz nach Willkür angenommen werden.« Und umgekehrt (α) :

δ) »Sind die Elemente zweier Gebilde dergestalt gepaart, dass die durch irgend vier Elemente des einen Gebildes bestimmten Doppelverhältnisse, wobei notwendiger Weise die jedesmaligen beiderseitigen vier Elemente übereinstimmende gegenseitige Lage haben müssen, so sind die Gebilde, in Beziehung auf alle jene Elementenpaare, projectivisch.« [Steiner, 1832, I-38]

Steiner commence par généraliser une proposition classique de la géométrie des triangles : étant donné un triangle ABC et trois A', B', C' situés respectivement sur les droites BC, CA et AB . Alors, si «ceux de ces points qui seront situés sur les côtés mêmes du triangle, et non sur leur prolongement soient en nombre impair»¹⁷, la formule

$$AB'.BC'.CA' = BA'.AC'.CB'$$

est vérifiée si et seulement si les droites AA', BB' et CC' sont concourantes en un point P . Le cercle déterminé par les points A', B' et C' intersecte respectivement en A'', B'' et C'' les droites BC, CA et AB . On déduit immédiatement que la formule

$$AB''.BC''.CA'' = BA''.AC''.CB''$$

est de même vérifiée si et seulement les droites AA'', BB'' et CC'' sont concourantes en un points P' . Steiner poursuit son raisonnement en affirmant que puisque «cette propriété est de nature projective, elle aura lieu également lorsqu'on substituera au cercle une ligne quelconque de second ordre». Puis, il propose une version duale de ce théorème sans autre démonstration qu'un appel à la théorie des polaires réciproques. Il présente à la manière de Gergonne les deux théorèmes et leurs réciproques :

Les trois sommets étant A, B, C et P étant un point quelconque de son plan ; si A', B', C' sont les points où les directions des côtés BC, CA, AB sont respectivement rencontrés par les droites AP, BP, CP et que par ces trois points A', B', C' , on fasse passer une ligne quelconque du second ordre, coupant de nouveau les mêmes côtés respectivement en A'', B'', C'' , les droites AA'', BB'', CC'' concourront aussi toutes trois en un même point P' .

Et réciproquement, deux points P, P' étant pris arbitrairement sur le plan d'un triangle dont les sommets sont A, B, C ; si l'on mène les droites AP et AP', BP et BP', CP et CP' , rencontrant respectivement les directions des côtés BC, CA et AB en A' et A'', B' et B'', C' et C'' , ces six points appartiendront à une même ligne du second ordre.

Les trois côtés d'un triangle étant A, B, C et P étant une droite tracée arbitrairement sur son plan ; si A', B', C' sont les droites qui joignent respectivement les sommets BC, CA, AB aux points AP, BP, CP et qu'on décrive une ligne quelconque du second ordre, touchant les trois droites A', B', C' ; en menant à cette courbe, par les mêmes sommets, les tangentes A'', B'', C'' , les points AA'', BB'', CC'' appartiendront aussi tous trois à une même droite P' . [Steiner, 1828, 2]

Et réciproquement, deux droites P, P' étant tracées arbitrairement sur le plan d'un triangle dont les côtés sont A, B, C ; si l'on joint respectivement les points AP et AP', BP et BP', CP et CP' aux sommets BC, CA, AB par des droites A' et A'', B' et B'', C' et C'' , ces six droites seront tangentes à une même ligne du second ordre. [Steiner, 1828, 2]

¹⁷Dans le cas contraire, les points A', B' et C' sont alignés.

4.3.4 Les éléments harmoniques et les similitudes

Steiner poursuit en s'intéressant à deux cas particuliers : celui des éléments harmoniques et celui de la similitude. Il est immédiat que les éléments correspondants de quatre éléments harmoniques sont aussi harmoniques. Il déduit du théorème (4.3.1) qu'étant donné sur chacune des droites A, A_1 , quatre points quelconques harmoniques $(\alpha, \delta, \beta, \gamma)$ et $(\alpha_1, \delta_1, \beta_1, \gamma_1)$, il y a huit manières différentes d'apparier projectivement les points des droites de manière que les points harmoniques constituent des paires projectives. Il précise que la seule condition est de respecter les points harmoniques ordonnés. Le second cas particulier que Steiner étudie est celui des droites *projectivement semblables* (ou des faisceaux *projectivement égaux*). Deux droites projectives sont dites (projectivement) semblables si leur relation projective conserve les rapports entre segments correspondants, c'est-à-dire que si (α, α_1) , (β, β_1) et (γ, γ_1) sont trois paires de points projectifs alors :

$$\frac{\alpha, \beta}{\alpha_1, \beta_1} = \frac{\alpha, \gamma}{\alpha_1, \gamma_1} = \frac{\gamma, \beta}{\gamma_1, \beta_1} \quad (4.5)$$

La propriété de similitude entre droites projectives est identifiée avec celle d'être projectives de manière que les points à l'infini se correspondent. De plus, une relation de similitude est complètement définie dès que l'on connaît deux paires de points correspondants. Steiner étudie de même les faisceaux plans de rayons projectifs tels que les angles soient conservés. Il appelle de tels faisceaux des faisceaux projectivement égaux.

4.3.5 Les éléments doubles

A partir de là, Steiner développe sa théorie en établissant un certain nombre de théorèmes classiques concernant les éléments doubles des formes projectives. Steiner commence par distinguer les notions de relations projectives directes ou indirectes : deux droites projectives ou deux faisceaux plans projectifs sont de même sens (*gleichliegend*) si, lorsqu'un élément de la première forme se déplace dans une direction, l'élément correspondant se déplace dans la même direction. De manière analogue, deux droites projectives ou deux faisceaux plans projectifs sont de sens opposés (*ungleichliegend*) lorsque deux éléments correspondants se déplacent dans des directions opposées. Steiner ici n'est pas très clair lorsqu'il définit la notion de direction d'une droite, se contentant de référer à une notion de déplacement de la droite vers la gauche, liée à la possibilité de ramener deux droites projectives en situation perspective. Lorsque deux droites projectives sont superposées ou deux faisceaux plans projectifs sont concentriques, il est intéressant de trouver les éléments qui sont leurs propres correspondants (puisque pour déterminer complètement la relation projective, il suffit de trouver trois paires d'éléments correspondants). En désignant par χ le point à l'infini de la première droite et par χ_1 le point de la seconde droite qui lui correspond, de même, par η_1 le point à l'infini de la seconde droite et par η le point auquel il correspond, alors si α, α_1 et β, β_1 sont deux paires de points correspondants, on a immédiatement, en utilisant la propriété de conservation du birapport, la

formule :

$$\alpha\eta.\alpha_1\chi_1 = \beta\eta.\beta_1\chi_1. \quad (4.6)$$

Steiner montre que lorsque l'on considère deux droites superposées de sens opposé, le segment¹⁸ $\eta\chi_1$ ne contient aucun point se correspondant lui-même. Il en déduit, en utilisant la formule (4.6) que dans ce cas que l'équation en ξ

$$\xi\eta.\xi\chi_1 = \alpha\eta.\alpha_1\chi_1 \quad (4.7)$$

possède deux solutions et donc que la relation projective entre les deux droites possèdent deux points se correspondant à eux-mêmes.

Lorsque les segments sont de même sens, un des deux segments $\eta\chi$ et son segment correspondant $\chi_1\eta_1$ ne possède pas de points se correspondant eux-mêmes. Par contre, le segment $\eta\chi_1$ peut contenir des points doubles. Cela dépend d'une équation de la même forme que dans le cas où les droites sont de sens opposés. L'originalité du raisonnement de Steiner est d'expliquer que dans le cas où il n'y a pas de points doubles, comme l'équation qui détermine les points doubles est une équation du second degré, on peut translater une des deux droites le long d'un espace de manière à faire apparaître des points doubles. La conclusion de son analyse est résumée en un théorème qui affirme qu'*en général*, deux droites projectives ont deux points se correspondant eux-mêmes :

Si deux droites projectives A, A_1 sont situées l'une sur l'autre de manière quelconque, alors en général deux paires de points correspondants se confondent, à savoir : a) si les droites sont de même sens, alors il y a un espace déterminé, à l'intérieur duquel deux points correspondants ne se rencontrent pas ; sur les deux frontières de cet espace, une seule paire [...] est confondue et au delà de cette frontière, deux paires de points de points correspondants se confondent toujours ; b) si les droites sont de sens opposés, deux paires de points correspondants coïncident toujours.¹⁹

Steiner ne considère pas les droites superposées comme une même droite. La relation qu'il considère entre les droites associe seulement les points des deux droites mais pas leur position dans le plan ; il peut donc sans affecter la relation projective, modifier la position de l'une des droites. Il obtient un théorème analogue pour des faisceaux plans de rayons concentriques en considérant une section des deux faisceaux et en appliquant le théorème direct. Au début de *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten* [Steiner, 1832], Steiner n'utilise pas la dualité comme moyen de démonstration. Il se sert de la dualité pour exprimer (et disposer) les théorèmes analogues de la géométrie des droites et de celle des faisceaux, mais pour déduire un théorème de

¹⁸Même si Steiner utilise des notions projectives comme celle de point à l'infini et que l'ordre des points de la droite qu'il considère est l'ordre circulaire, les représentations de droites restent affines et deux points définissent le seul segment au sens affine du terme. Il y a un sorte de hiatus entre la conceptualisation implicite et le vocabulaire utilisé. Nous conservons le plus possible le vocabulaire de Steiner.

¹⁹„Werden zwei projectivische Gerade A, A_1 beliebig aufeinander gelegt, so vereinigen sich im Allgemeinen zwei Paar entsprechender Punkte, nämlich : a) Wenn die Geraden gleichliegend sind, so giebt es einen bestimmten Spielraum, innerhalb dessen keine entsprechenden Punkte sich treffen, an beiden Grenzen dieses Raumes vereinigt sich nur ein Paar [...], und über diese Grenzen hinaus vereinigen sich allemal zwei Paar entsprechender Punkte; und b) wenn die Geraden ungleichliegend sind, so treffen allemal zwei Paar entsprechender Punkte zusammen.“ [Steiner, 1832, I-59]

l'autre, il utilise des sections ou des faisceaux.²⁰ Steiner conclut la présentation des formes projectives dans le plan en abordant le cas des relations projectives entre une droite et un faisceau plan. Dans ce cas, une paire d'éléments correspondants qui coïncident est constituée d'un rayon du faisceau qui passe par le point de la droite qui lui correspond. Dans le cas perspectif, tous les points et les rayons correspondants coïncident. Steiner ne signale pas ce cas de même qu'il n'avait pas abordé le cas de l'identité entre droites projectives ou faisceaux projectifs. Dans le cas oblique, une droite et un faisceau plan de rayons projectifs ont «en général» deux éléments correspondants qui coïncident. Il précise son analyse en distinguant le cas où les formes sont de même sens et celui où elles sont de sens opposés : à savoir, si les formes projectives sont de même sens, elles présentent toujours deux paires d'éléments correspondants qui coïncident ; si elles sont de même sens, «1) deux ou 2) une seule ou 3) même aucune paire d'éléments correspondants coïncident» [Steiner, 1832, I-60].

En même temps qu'il développe sa théorie, Steiner n'oublie pas les préoccupations de construction géométrique à la règle (et au compas) qui sont inhérentes à la conception de la géométrie pure. Ainsi, il propose comme application directe des théorèmes précédents une solution constructive de problèmes comme celui de déterminer les éléments correspondants qui coïncident. La solution de Steiner consiste à décomposer la relation projective entre A et A_1 en une similitude (au sens de Steiner) et une perspective. Pour cela, il considère trois paires de points correspondants $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ et γ, γ_1 sur les droites superposées A et A_1 . Le point important de la construction consiste à déterminer le point η de A dont le point correspondant est le point à l'infini de A_1 et le point χ_1 qui correspond au point à l'infini de A . Pour cela, il considère une autre droite A^1 qui passe par γ . Le point γ_1 sur la droite A^1 coïncide avec le point γ . Sur la droite A^1 , on détermine deux points α^1 et β^1 tels que $\alpha^1\gamma^1 = \alpha_1\gamma_1$, $\beta^1\gamma^1 = \beta_1\gamma_1$ et $\alpha^1\beta^1 = \alpha_1\beta_1$. La correspondance projective ainsi définie entre A_1 et A^1 associe au point à l'infini de A_1 celui de A^1 . On trace les droites $\alpha\alpha^1$ et $\beta\beta^1$ qui se coupent en B . Les deux droites A et A^1 sont donc en perspective par la projection de centre B . Par B , on trace les parallèles aux droites A et A^1 qui coupent respectivement les droites A^1 et A en χ^1 et η . Le point η a pour correspondant le point à l'infini de A^1 qui correspond lui-même au point à l'infini de A_1 . Le point χ_1 de A_1 qui vérifie les deux conditions suivantes :

- a) $\chi_1\alpha_1 = \chi^1\alpha^1$
- b) Les deux segments sont de même sens.

est le point de A_1 qui correspond au point à l'infini de A . Les points doubles de la relation projective entre A et A_1 vérifient l'équation

$$\epsilon\eta.\epsilon\chi_1 = \alpha\eta.\alpha_1\chi_1$$

et la construction des deux points qui vérifient cette équation (lorsque celle-ci a des solutions réelles) relève de la géométrie élémentaire.

²⁰Steiner n'a pas *a priori* contre l'utilisation de la notion de dualité comme moyen démonstratif comme le montre les exemples de démonstration exposés plus haut. On peut penser qu'il est ici plus important pour Steiner de montrer, lorsqu'il introduit son étude des relations projectives entre formes, que les «dépendances» entre les figures de la géométrie des droites et celles de la géométrie des formes ne sont pas seulement linguistiques (dues à la dualité des axiomes) mais relèvent de leur construction sans pour autant passer par la théorie des polaires.

4.3.6 Droites, faisceaux plans et faisceaux dans l'espace projectifs

Steiner commence par décrire (sans référer à des figures comme dans l'exposé de la géométrie plane) les positions relatives entre d'une part, un faisceau de plans \mathcal{U} et d'autre part, une droite A ou un autre plan B .

[...] en général, un plan du faisceau \mathcal{U} passe par chaque point de la droite A . Chaque point et le plan qui passe celui-ci seront dits correspondants [...]. Un seul plan est parallèle à la droite A , ou passe par son point à l'infini; il s'appelle le plan parallèle.²¹

Il signale le cas particulier où la droite intersecte l'axe du faisceau de plan; la droite est alors contenue dans un plan du faisceau et intersecte les autres plans en un seul et même point, à savoir le point d'intersection de la droite et de l'axe du faisceau. Le second cas particulier noté par Steiner est celui où la droite est parallèle à l'axe du faisceau. Lorsque les plans du faisceau de plans et les points de la droite sont associés comme dans le cas général, le faisceau de plans et la droites sont dits *projectifs*. Lorsque les points de la droite sont situés dans leur plan correspondant, les deux formes sont *en perspective*, lorsque ce n'est pas le cas, elles sont dites *en position oblique*. Comme dans le cas des droites et des faisceaux plans, deux telles formes sont donc projectives si l'on peut les déplacer de manière à les ramener en position perspective.

De même, l'intersection d'un faisceau de plans \mathcal{U} et d'un plan B est le faisceau plan de rayons constitués des droites d'intersection du plan B et des plans du faisceau. Dans le cas où le plan est parallèle à l'axe du faisceau, le faisceau de rayons obtenus est un faisceau de rayons parallèles (sauf dans le cas où l'axe du faisceau est contenu dans le plan). Lorsque le plan est perpendiculaire à l'axe du faisceau, l'angle dièdre formé par deux plans du faisceau α, β est égal à l'angle plan formé par les rayons correspondants a, b , ce qui sera noté par $(\alpha\beta) = (ab)$. Lorsque les éléments d'un faisceau de plans et d'un faisceau plan de rayons sont ainsi associés, les faisceaux sont dits *projectifs*. De nouveau, Steiner propose de dire qu'ils sont *en perspective* si le rayon est contenu dans son plan correspondant, et *en position oblique* lorsque ce n'est pas le cas. De nouveau, deux formes sont dites projectives lorsque l'on peut les ramener en position perspective en les déplaçant l'une par rapport à l'autre. La notion de relation projective que propose Steiner concerne les formes considérées pour elles-mêmes; il ne s'agit de transformation de figures situées dans un plan ou dans l'espace, comme peut l'être une perspective.

Steiner poursuit en étudiant les relations particulières qu'entretiennent deux droites A et A_1 , deux faisceaux plans de rayons B et B_1 ou une droite A et un faisceau plan de rayons B qui sont perspectifs d'un même faisceau de plans \mathcal{U} :

- a) Deux faisceaux plans perspectifs d'un même faisceau de plans sont eux même en perspective et leur axe de perspective est la droite d'intersection de leurs plans et réciproquement.
- b) Une droite et un faisceau plan de rayons sont projectifs.

²¹ „[...] im Allgemeinen durch jeden Punkt der Geraden A eine Ebene des Ebenenbüschels \mathcal{U} geht. Jeder Punkt und die durch ihn gehende ebene sollen entsprechend heissen [...]. Nur eine Ebene ist mit der Geraden A parallel, oder geht nach ihrem unendlich entfernten Punkte; sie heisse die Parallelebene.“ [Steiner, 1832, I-84]

- c) Deux droites perspectives d'un faisceau de plans sont projectives. Si de plus, elles sont sécantes, elles sont perspectives et leur centre de perspective est situé sur l'axe du faisceau de plans.
- d) Deux droites perspectives d'un même faisceau de plans et qui sont parallèles à un même plan du faisceau sont projectivement semblables. Réciproquement, deux droites perspectives d'un même faisceau de plans qui sont projectivement semblables sont parallèles à un même plan du faisceau.
- e) Deux faisceaux plans de rayons perspectifs d'un même faisceau de plans sont projectivement égaux si soit leurs plans sont parallèles, soit si le plan bissecteur de l'angle dièdre formé par les plans des faisceaux de rayons est perpendiculaire à l'axe du faisceau de plans.

Steiner déduit enfin de la description géométrique des relations entre formes projectives une caractérisation de celles-ci en terme de birapport : si un faisceau de plans \mathcal{U} , un faisceau plan de rayon B et une droite A sont projectifs, et si les plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ du faisceau \mathcal{U} , les rayons a, b, c, d du faisceau de rayons B et les points $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ de la droite A se correspondent respectivement, alors

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\beta\gamma)} : \frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\beta\delta)} &= \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)} = \frac{(\alpha_1\gamma_1)}{(\beta_1\gamma_1)} : \frac{(\alpha_1\delta_1)}{(\beta_1\delta_1)} \\ \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\gamma\beta)} : \frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\gamma\delta)} &= \frac{\sin(ab)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(cd)} = \frac{(\alpha_1\beta_1)}{(\gamma_1\beta_1)} : \frac{(\alpha_1\delta_1)}{(\gamma_1\delta_1)} \\ \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\delta\beta)} : \frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\delta\gamma)} &= \frac{\sin(ab)}{\sin(db)} : \frac{\sin(ac)}{\sin(dc)} = \frac{(\alpha_1\beta_1)}{(\delta_1\beta_1)} : \frac{(\alpha_1\gamma_1)}{(\delta_1\gamma_1)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Réciproquement, «si les éléments de deux formes \mathcal{U} et B ou \mathcal{U} et A , sont considérés comme correspondants entre eux de manière que l'on ait les mêmes birapports entre quatre paires quelconques d'éléments [...], alors les formes sont projectives».²²

Il en déduit qu'une relation projective entre un faisceau de plans d'une part, un faisceau plan de rayons ou une droite d'autre part est définie dès que trois paires d'éléments correspondants sont déterminés. De même, si les trois rayons ou les trois points sont situés à l'intérieur du plan qui leur correspond, les deux formes sont perspectives.

Enfin, Steiner définit deux faisceaux de plans comme projectifs s'ils sont projectifs avec une même droite ou un même faisceaux plans de rayons. Il déduit immédiatement que si deux faisceaux de plans sont projectifs, le birapport est conservé, c'est-à-dire que si $\alpha\alpha_1, \beta\beta_1, \gamma\gamma_1$ et $\delta\delta_1$ sont quatre paires de plans correspondants, on a les trois égalités de birapports suivants :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\beta\gamma)} : \frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\beta\delta)} &= \frac{\sin(\alpha_1\gamma_1)}{\sin(\beta_1\gamma_1)} : \frac{\sin(\alpha_1\delta_1)}{\sin(\beta_1\delta_1)} \\ \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\gamma\beta)} : \frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\gamma\delta)} &= \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\gamma_1\beta_1)} : \frac{\sin(\alpha_1\delta_1)}{\sin(\gamma_1\delta_1)} \\ \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\delta\beta)} : \frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\delta\gamma)} &= \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\delta_1\beta_1)} : \frac{\sin(\alpha_1\gamma_1)}{\sin(\delta_1\gamma_1)} \end{aligned} \quad (4.9)$$

²²„Sind die Elemente zweier Gebilde \mathcal{U} und B oder \mathcal{U} und A , so einander entsprechend angenommen, dass zwischen je vier Elementenpaaren [...] gleiche Doppelverhältnisse stattfinden, [...] so sind die Gebilde projectivisch.“ [Steiner, 1832, I-89-90]

Réciproquement, si les plans de deux faisceaux de plans sont appariés de telle sorte que les birapports formés par quatre paires de plans correspondants soient égaux, alors les deux faisceaux sont projectifs. Il conclut de la même manière que précédemment que la donnée de trois paires de plans correspondants suffit à définir complètement une relation projective entre deux faisceaux de plans, que les plans correspondants de quatre plans harmoniques sont aussi harmoniques. Steiner définit la notion de perspective pour deux faisceaux de plans : deux faisceaux de plans sont en perspective si les droites d'intersection de chaque paire de plans correspondants forment un faisceau plan de rayons. Deux faisceaux de plans sont toujours en perspective soit si deux plans correspondants coïncident, soit si les droites d'intersection de trois paires de plans correspondants sont situés dans un même plan.

Un faisceau de rayons dans l'espace D est défini comme la réunion de tous les faisceaux plans de rayons qui ont un même centre D . Steiner note qu'il se produit entre les faisceaux de plans et les faisceaux plans de rayons qui appartiennent à un même faisceau de rayons des relations analogues à celles que l'on trouve entre les droites projectives et les faisceaux plans de rayons qui sont situés dans un même plan. Ainsi, il pose la question :

Si deux faisceaux plans de rayons projectifs B, B_1 sont en perspective dans un faisceau de rayon D de telle manière deux rayons correspondants e, e_1 sont confondus, et si l'on se représente le premier faisceau comme fixe et le second comme tournant autour de leur rayon commun, la question est quelle surface décrit leur axe de projection \mathcal{U} (c'est-à-dire l'axe du faisceau de plans dans lequel sont situés les deux faisceaux de rayons B, B_1).²³

Steiner répond à cette question en s'appuyant sur le résultat qu'il a montré pour le lieu des centre de projection de deux droites en perspective (4.3.3) :

L'axe de projection décrit donc un cône oblique, qui est intersecté le long d'un cercle par chaque plan qui est perpendiculaire au rayon commun ee_1 des faisceaux de rayons B_1, B_2 .²⁴

4.3.7 Quelques théorèmes et porismes qui se déduisent des relations projectives entre formes

Steiner reprend la définition du quadrilatère complet donnée par Carnot. Il en donne une version duale, celle du quadrangle complet et généralise ces deux

²³„Wenn zwei projectivische ebene Strahlbüschel B_1, B_2 in einem Strahlbüschel D perspectivisch liegen, so dass zwei entsprechende Strahlen e, e_1 vereinigt, und man denkt sich den einen Strahlbüschel fest, während der andere sich um den gemeinschaftlichen Strahl herum bewegt, so ist die Frage, welche Fläche durch die Projectionsaxe \mathcal{U} (d.h. Axe des Ebenenbüschels, in welchem beide Strahlbüschel B, B_1 liegen beschrieben werde. [Steiner, 1832, I-101]

²⁴„Also beschreibt die Projectionsaxe \mathcal{U} eine schiefe Kegelfläche, die von jeder Ebene, welche zu dem gemeinschaftlichen Strahle ee_1 , der Strahlbüschel B_1, B_2 senkrecht ist, in einem Kreise geschnitten ist. [Steiner, 1832, I-102]

définitions avec celles des n -latère complet et n -angle complet²⁵ :

On appelle «*quadrilatère complet*» la réunion de quatre droites quelconques A, B, C, D ; les six points d'intersection des côtés $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \phi$ s'appellent les *sommets* de celui-ci; il possède, par conséquent, trois paires de sommets opposés, à savoir α et ϕ, β et ϵ, γ et δ , et ainsi, il possède trois diagonales $\alpha\phi, \beta\epsilon, \gamma\delta$; et enfin, il contient trois *quadrilatères simples*, à savoir $\alpha\beta\phi\epsilon\alpha, \alpha\gamma\phi\delta\alpha, \beta\gamma\epsilon\delta\beta$.

On appelle «*quadrangle complet*» la réunion de quatre points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; les six droites qui sont déterminées par les points, s'appellent les côtés de celui-ci; il possède par conséquent trois paires de côtés opposés, à savoir $\alpha\beta$ et $\gamma\delta, \alpha\gamma$ et $\beta\delta, \alpha\delta$ et $\beta\gamma$, et ainsi il possède trois intersections ϵ, ϕ, χ de côtés opposés; et enfin, il contient trois *quadrangles simples*, à savoir $\alpha\beta\gamma\delta\alpha, \alpha\gamma\delta\beta\alpha, \alpha\gamma\beta\delta\alpha$. [Steiner, 1832, I-64]

De même, un n -latère complet correspond à la donnée de n droites qui déterminent $\frac{n(n-1)}{2}$ sommets. Un n -angle correspond à la donnée de n points qui déterminent $\frac{n(n-1)}{2}$ côtés. Steiner commence son étude des figures particulières en montrant purement géométriquement ²⁶le théorème du quadrilatère complet²⁷ :

Dans un quadrilatère complet, les points en lesquels les trois diagonales se coupent, sont harmoniquement associés aux sommets conjoints.

Dans un quadrangle complet, les rayons qui joignent les intersections des côtés opposés sont harmoniquement associés aux derniers côtés.

Steiner signale que le théorème concernant le quadrilatère est donné par Carnot et qu'on le trouve déjà dans les *Collections mathématiques de Pappus*. Implicitement, cette reconnaissance signifie que le théorème dual concernant le quadrangle n'était pas connu. Il semble que Steiner ait raison dans sa revendication; il utilise le même mode de revendication en rappelant que la solution du problème de construction du quatrième point harmonique est due à De la Hire ce qui laisse sous-entendre que la solution du problème dual concernant les faisceaux harmoniques est originale.

Steiner illustre alors l'intérêt de sa théorie des perspectives et des formes projectives en montrant qu'il retrouve les théorèmes classiques très facilement. Par

²⁵„*Vollständiges Vierseit*« heissen jede vier Gerade A, B, C, D zusammengefasst; die sechs Durchschnitt $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \phi$ der Seiten heissen *Ecken* desselben; es hat also drei Paar einander gegenüber liegende Ecken, nämlich α und ϕ, β und ϵ, γ und δ , und somit hat es drei Diagonalen $\alpha\phi, \beta\epsilon, \gamma\delta$; und endlich umfasst es drei *einfache Vierseit*, nämlich $\alpha\beta\phi\epsilon\alpha, \alpha\gamma\phi\delta\alpha, \beta\gamma\epsilon\delta\beta$.

»*Vollständiges Viereck*« heissen jede vier Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zusammengefasst; die sechs Geraden, welche durch die Punkte bestimmt werden, heissen Seiten desselben; es hat also drei Paar einander gegenüber liegende Seiten, nämlich $\alpha\beta$ und $\gamma\delta, \alpha\gamma$ und $\beta\delta, \alpha\delta$ und $\beta\gamma$, und somit drei Durchschnitte ϵ, ϕ, χ gegenüber liegender Seiten; und endlich umfasst es drei *einfache Vierecke*, nämlich $\alpha\beta\gamma\delta\alpha, \alpha\gamma\delta\beta\alpha, \alpha\gamma\beta\delta\alpha$.“[Steiner, 1832, I-64]

²⁶Carnot obtient ce théorème comme un corollaire du théorème de la transversale d'un triangle.

²⁷„Im vollständigen Vierseit sind die Punkte, in welchen die drei Diagonalen einander schneiden, zu den zugehörigen Ecken zugeordnete harmonische Punkte.“

Im vollständigen Viereck sind die Strahlen, welche die Durchschnitte der gegenüber liegenden Seitenpaare verbinden, zu den letzteren zugeordnete harmonische Strahlen.“[Steiner, 1832, I-66]

exemple, il pose le problème de tracer en n'utilisant que la règle une droite passant par un point D et intersectant trois droites a_1, b_1, b de manière que les quatre points ainsi déterminés soient harmoniques. Pour cela, il considère la droite d_1 qui joint le point D au point d'intersection B de a_1 et b_1 . Il construit le rayon c_1 , quatrième harmonique de a_1, b_1 et d_1 qui intersecte la troisième droite b en U . La droite UD est évidemment une solution du problème. Steiner signale que l'on peut construire ainsi deux autres droites qui satisfont les exigences du problème et bien entendu donne parallèlement la solution du problème dual.

En considérant le point U dans la construction précédente comme un centre de projection entre les droites a_1 et b_1 de manière que la série de points de $a_1, \alpha, \delta, \beta, \gamma$ correspondent à la série de points de $a_1, \alpha_1, \delta_1, \beta_1, \gamma_1$ et donc implicitement²⁸ en faisant tourner la droite b de la précédente construction autour du point U , il en déduit que si a et a_1 sont des droites en perspective (autrement dit que a et a_1 sont deux droites projectives dont telles que leur point d'intersection se corresponde à lui-même et que les points à l'infini se correspondent entre eux), alors le point d'intersection des droites $\alpha\beta_1$ et $\beta\alpha_1$ (ou $\alpha\delta_1$ et $\delta\alpha_1$) appartient à la quatrième harmonique des droites a_1, b_1 et de la droite UB où B est le point d'intersection de a_1 et b_1 . Les points ainsi construits sont donc alignés sur une droite qui passe par le point d'intersection des droites a_1 et b_1 . De nouveau, Steiner signale que ce théorème est bien connu et qu'il est un cas particulier d'un théorème plus général concernant les formes projectives (le théorème de Pappus). Steiner fait de nouveau ressortir que les théorèmes duaux sont de fait originaux et que sa théorie des perspectives et des formes projectives donnent un éclairage nouveaux sur des résultats connus. Enfin, il met en oeuvre ici (certes implicitement) un mode de démonstration géométrique dans lequel on fait se mouvoir des droites autour de points, des points sur des droites, etc. Il démontre ainsi des théorèmes sur les triangles variables²⁹ :

Si les sommets d'un triangle variable $\alpha\alpha_1\alpha_2$ se déplacent sur trois droites fixes A, A_1, A_2 , qui passent par un point ϵ et si deux de ses côtés, par exemple $\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2$, tournent autour de deux points fixes B, B_1 , alors le troisième côté $\alpha_1\alpha_2$ passe constamment par un troisième point fixe A_2 qui est aligné avec les deux premiers.

Si les côtés d'un triangle variable $\alpha\alpha_1\alpha_2$ tournent autour de trois points fixes B, B_1, B_2 situés sur une même droite d et si deux de ses sommets, par exemple α, α_1 se déplacent sur des droites fixes A, A_1 , alors le troisième sommet se déplace aussi sur une troisième droite A_2 qui coupent les deux premières en seul point.

Steiner déduit les théorèmes précédents comme corollaires immédiats de théorèmes concernant les perspectives entre droites. Il intègre ainsi la théorie des anciens dans son exposé de la géométrie comme une application im-

²⁸Steiner déduit immédiatement le second théorème de la construction sans donner de démonstration.

²⁹Bewegen sich die Ecken eines veränderlichen Dreiecks $\alpha\alpha_1\alpha_2$ in drei festen Geraden A, A_1, A_2 die durch einen Punkt *epsilon* gehen, und drehen sich zwei Seiten desselben, etwa $\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2$, um feste Punkte B, B_1 , so geht auch die dritte Seite $\alpha_1\alpha_2$ beständig durch einen dritten festen Punkt B_2 , der mit jenen beiden in einer Geraden liegt.

Drehen sich die Seiten eines veränderlichen Dreiecks $\alpha\alpha_1\alpha_2$ um drei feste Punkte B, B_1, B_2 , die in einer Geraden d liegen, und bewegen sich zwei Ecken desselben, etwa α, α_1 , in festen Geraden A, A_1 , so bewegt sich auch die dritte Ecke α_2 in einer dritten festen Geraden A_2 , die sich mit jenen beiden in einem Punkte schneidet.“[Steiner, 1832, I-69]

médiate de théorèmes plus généraux concernant les dépendances entre formes. Steiner reprend ici le même type de rhétorique pour valoriser son point de vue : montrer que les théories développées englobe les résultats des anciens et permettent d'avoir un point de vue général sur ceux-ci et en même fournir des démonstrations rigoureuses. Comme Poncelet [1822, 285-286], Steiner présente une généralisation du théorème de gauche précédent énoncée par Pappus dans les *Collections mathématiques* et fait référence à Robert Simson qui a donné une démonstration (dans le cas du triangle et du quadrilatère). Si Poncelet se contentait d'insister sur l'intérêt des différentes preuves qu'il donnait de ce théorème, Steiner quant à lui décompose l'énoncé original de Pappus en deux énoncés duaux ; ainsi le porisme :

Si n droites quelconques tracées dans un plan s'intersectent n'importe comment et si on fixe les $n - 1$ points d'intersection qui appartiennent à l'une d'entre elles, peu importe laquelle, pendant que l'on fait se déplacer toutes les autres respectivement autour de ces points et pendant que $n - 2$ de leur point d'intersection mutuels, parmi lesquels trois d'entre eux n'appartiennent pas à trois droites, quatre d'entre eux n'appartiennent pas à quatre droites, etc., sont astreints à rester sur un nombre égal de droites, prises comme directrices, alors toutes les intersections restantes des droites mobiles, dont le nombre est un nombre triangulaire, décrivent séparément d'autres droites dont les position sont données en même temps que les directrices.³⁰

Steiner sépare cet énoncé en deux énoncés duaux³¹ :

³⁰„Wenn in einer Ebene n beliebig gezogene gerade Linien einander irgend wie durchschneinenden, und man hält die $n - 1$ Durchschnittspunkte fest, die einer von ihnen, gleich viel welcher, angehören, während man alle übrigen beziehentlich um diese Punkte bewegt, und während $n - 2$ von ihren gegenseitigen Durchschnitten, wovon keine drei denselben drei Geraden, keine vier denselben vier Geraden, u. s. w. angehören, gezwungen sind auf einer gleichen Anzahl gegebener Geraden, als Leitlinien genommen, zu bleiben : so werden alle übrigen Durchschnitte der bewegten Geraden, deren Anzahl eine Triangularzahl ist, einzeln andere Gerade beschreiben, die mit jenen Leitlinien zugleich der Lage nach gegeben sein werden.“[Steiner, 1832, 70]

³¹„Bewegen sich die Ecken eines veränderlichen vollständigen n -Ecks in n festen Geraden, die durch einen Punkt gehen, und drehen sich $n - 1$ Seiten desselben, die irgend einem einfachen n Eck angehören, aus welchen das vollständige besteht, um eben so viele feste Punkte : so drehen sich auch die übrigen Seiten, an Zahl $\frac{(n-1)(n-2)}{1,2}$, um andere feste Punkte, die also mit jenen festen Punkten zugleich gegeben sind.

Drehen sich die Seiten eines vollständigen veränderlichen n Seits um n feste , die in einer Geraden liegen, um bewegen sich $n - 1$ Ecken desselben, die irgend einem einfachen n Eck angehören, aus denen das vollständige besteht, in eben so vielen festen Geraden : so bewegen sich auch die übrigen Ecken, an Zahl $\frac{(n-1)(n-2)}{1,2}$, in anderen festen Geraden, die also mit jenen festen Geraden zugleich gegeben sind.“[Steiner, 1832, I-70-71]

Si les sommets d'un n -angle complet variable se déplacent sur n droites qui passent par un même point, et que $n - 1$ côté de celui-ci qui appartiennent à un quelconque des n -angles simples qui constituent le n -angle complet, tournent autour d'autant de points fixes : alors, les autres côtés, au nombre de $\frac{(n-1)(n-2)}{1,2}$, tournent autour d'autres points fixes, qui sont par conséquent donnés en même temps que les premiers points fixes.

Si les côtés d'un n -latère complet variable autour de n points, qui sont situés sur une même droite, et que $n - 1$ sommets de celui-ci qui appartiennent à un quelconque des n -latères simples qui constituent le n -latère complet, se déplacent sur autant de droites fixes : alors les autres sommets, au nombre de $\frac{(n-1)(n-2)}{1,2}$, se déplacent sur d'autres droites fixes qui sont par conséquent donnés en même temps que les droites fixes.

Steiner poursuit son analyse en proposant des théorèmes qui concernent les formes projectives en position oblique tout en insistant que les théorèmes qu'il énonce contiennent les théorèmes ou porismes de la géométrie des anciens. Par exemple, si l'on considère trois droites A, A_1, A_2 telles que A, A_1 soient projectives en position oblique alors qu'elles sont toutes les deux en perspective avec A_2 ,³² Steiner constate immédiatement que si on note par B_1 le centre de projection de A et A_2 , par B_2 celui de A_1 et A_2 , par ϕ le point d'intersection de A et A_2 et par λ celui de A_1 et A_2 , alors la droite B_1B_2 est un rayon de projection des trois relations projectives, et si on considère la relation projective induite sur le faisceau de centre B_1 par celle entre A et A_1 , le rayon $B_2\phi$ est un rayon double (de même si on considère la relation projective induite sur le faisceau de centre B_2 par celle entre A et A_1 , le rayon $B_1\lambda$ est un rayon double). Steiner reprend alors cette situation géométrique en insistant sur les relations projectives induites par celle entre les droites projectives A et A_1 : pour cela, il considère un rayon projectif b joignant deux points correspondants β et β_1 de deux droites projectives en situation oblique A et A_1 . Sur ce rayon projectif, il considère deux points B_1 et B_2 qui seront les centre de projection de deux faisceaux de rayons respectivement perspectifs de A et A_1 . Les deux faisceaux sont ainsi projectifs entre eux – les rayons $a_1, b_1, c_1, d_1, \dots$ du faisceau B_1 , qui passent par $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ de la droite A , sont projectivement reliés avec les rayons $a_2, b_2, c_2, d_2, \dots$ du faisceau B_2 qui passent par les points correspondants $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \dots$ de la droite A_1 . Comme les rayons b_1 et b_2 coïncident avec le rayon b , les deux faisceaux sont en fait perspectifs et la droite A_2 sur laquelle se coupent les paires de rayons projectifs des faisceaux B et B_1 est en perspective avec A et A_1 , les deux perspectives ayant respectivement B_1 et B_2 comme centre. Steiner vient de montrer qu'une relation projective entre deux droites différentes peut se décomposer en deux perspectives.

Il étudie alors le cas particulier dans lequel le point B_1 du rayon projectif b et le point β_1 de la droite A_1 sont confondus de même que les point B_2 et β . Les points d'intersection des rayons $B_1\alpha$ et $B_2\alpha_1$, $B_1\gamma$ et $B_2\gamma_1$, $B_1\delta$ et $B_2\delta_1$ sont donc alignés sur une droite A_2 comme dans le cas général. De plus, dans ce cas, le rayon e_1 du faisceau B_1 qui correspond au point d'intersection de A et A_1 est confondu avec la droite A_1 et le rayon d_2 du faisceau B_2 qui correspond au même point est confondu avec la droite A . La droite A_2 passe donc nécessairement par

³²Steiner admet sans le préciser que la relation projective entre A et A_1 est la composée des deux perspectives.

le point de A_1 qui correspond au point d'intersection de A et A_1 et par le point de A auquel correspond ce même point d'intersection. La droite A_2 ne dépend donc pas du choix de la paire de points correspondants B_1 et B_2 . Steiner retrouve donc ainsi par des considérations de géométrie pure (au sens où il l'entend, c'est-à-dire l'étude des dépendances projectives entre formes) le théorème de Pappus dont il donne aussi une démonstration du théorème dual³³ :

Etant donné deux droites projectives B, B_1 en situation oblique, les intersections $\alpha_2, \gamma_2, \phi_2, \dots$ des différentes paires de droites ($\alpha\beta_1$ et $\beta\alpha_1, \beta\gamma_1$ et $\gamma\beta_1, \alpha, \gamma_1$ et $\gamma\alpha_1, \dots$), qui joignent de manière opposée deux paires quelconques de points correspondants, sont situées sur une droite déterminée A_2 qui rencontre en effet les deux droites données A et A_2 en deux points δ, ϵ_1 dont les correspondants δ_1, ϵ sont confondus avec l'intersection de celles-ci.

De la même manière, il montre les réciproques de ces théorèmes qui lui permettront de déduire immédiatement le *théorème de l'hexagramme mystique* et celui dual de Brianchon de sa nouvelle description des coniques³⁴ :

Etant donné un hexagone $B_1B_2\phi\alpha\alpha_1\lambda_1B_1$ qui a comme côtés deux droites projectives A, A_1 en position oblique et quatre rayons de projections quelconques a, b, l, k , alors les trois diagonales $B_1\alpha, B_2\alpha_1, \phi\lambda$, qui joignent les sommets opposés sont concourantes en un point a_2 .

Etant donné deux faisceaux de rayons projectifs B, B_1 en situation oblique, les droites a_2, c_2, f_2, \dots qui passent par les différentes paire de points (α_1 et α_2, γ_1 et γ_2, ϕ_1 et ϕ_2, \dots) en lesquels se coupent de manière opposée deux paires quelconques de rayons correspondants, se rencontrent en un point déterminés B_2 , qui en effet est relié aux centres B, B_1 par deux rayons d, e_1 dont les correspondants d_1, e sont confondus avec l'axe de ceux-ci.

Etant donné un hexagone $B\alpha B_1\lambda\beta\phi B$, qui a pour sommets les centres B, B_1 de deux faisceaux de rayons en position oblique et les quatre intersections $\alpha, \beta, \lambda, \phi$ de rayons correspondants, alors les trois intersections α_1, B_2, α_2 des trois paires de côtés opposés sont situés sur une droite.

³³„Bei zwei schief liegenden projectivischen Geraden A, A_1 liegen die Durchschnitte $\alpha_2, \gamma_2, \phi_2, \dots$ der verschiedenen Paar Geraden ($\alpha\beta_1$ et $\beta\alpha_1, \beta\gamma_1$ et $\gamma\beta_1, \alpha, \gamma_1$ et $\gamma\alpha_1, \dots$), welche je zwei Paar entsprechender Punkte wechselseitig verbinden, in einer bestimmten Geraden A_2 , die nämlich den gegebenen Geraden A, A_1 in denjenigen zwei Punkten δ, ϵ_1 , begegnet, deren entsprechende δ_1, ϵ in ihrem Durchschnitte vereinigt sind.“

³⁴„Bei jedem Sechseck $B_1B_2\phi\alpha\alpha_1\lambda_1B_1$, welches zwei schief liegende projectivische Gerade A, A_1 und irgend vier Projectionstrahlen a, b, l, k derselben zu Seiten hat, treffen die drei Diagonalen $B_1\alpha, B_2\alpha_1, \phi\lambda$, welche die gegenüber liegenden Ecken verbinden, in irgend einem Punkte a_2 zusammen.“

Bei zwei schief liegenden projectivischen Strahlbüscheln B, B_1 treffen die Geraden a_2, c_2, f_2, \dots durch die verschiedenen Punktenpaare ($\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1$ et γ_2, ϕ_1 et ϕ_2, \dots) in welchen je zwei Paar entsprechender Strahlen sich wechselseitig schneiden, in einem bestimmten Punkte B_2 zusammen, der nämlich mit den Mittelpunkten B, B_1 der Strahlbüschel durch diejenigen zwei Strahlen d, e_1 verbunden ist, deren entsprechende d_1, e in ihrer Axe vereinigt sind., [Steiner, 1832, I-77]

Bei jedem Sechseck $B\alpha B_1\lambda\beta\phi B$, welches die Mittelpunkte B, B_1 zweier schief liegenden Strahlbüschel und irgend vier Durchschnitte $\alpha, \beta, \lambda, \phi$ entsprechender Strahlen zu Ecken hat, liegen die drei Durchschnitte α_1, B_2, α_2 der drei Paare gegenüber liegenden Seiten, in irgend einer Geraden a_2 .“ [Steiner, 1832, I-77]

Steiner conclut son exposé en montrant que ces méthodes permettent de donner une solution du problème apparemment difficile de tracer un n -latère qui soit à la fois inscrit et circonscrit à deux autres n -latères donnés.

4.4 La théorie des coniques et des surfaces du second ordre

Avec la seconde partie de son traité, Steiner aborde les chapitres essentiels à ses yeux de sa théorie : le point essentiel est de donner un nouveau point de vue sur les coniques et les surfaces du second ordre et d'étudier l'engendrement de ces courbes et surfaces par des formes projectives. Pour cela, Steiner se propose d'étudier «les lois auxquelles sont soumis, dans le cas de deux droites [projectives en situation oblique] A, A_1 , les rayons de projections, dans le cas de deux faisceaux plans de rayons [projectifs en situation oblique] B, B_1 , la ligne d'intersection de deux rayons correspondants ou les plans déterminés par les paires de rayons correspondants (si par exemple, B et B_1 sont situés dans un faisceau de droites D) et, dans le cas de deux faisceaux de plans $\mathcal{U}, \mathcal{U}_\infty$, la droite d'intersection d'une paire de plans correspondants»³⁵. Steiner annonce que les propriétés vérifiées par ces ensembles de droites vont permettre de développer d'une manière à la fois facile, intuitive et générale la théorie des coniques (et celle des surfaces du second degré) tout en exhibant en même temps un «magnifique double engendrement de celles-ci par des formes projectives»³⁶.

4.4.1 La description des coniques à partir d'un cône

Steiner reprend la présentation classique des coniques comme intersection d'un cône et d'un plan. Il définit un cône comme l'ensemble des rayons d'un faisceau de rayons D qui passent par un cercle.³⁷ Le point D est le centre du cône.³⁸ les plans passant par le centre du cône sont classés selon qu'ils ont aucun, un ou deux rayons en commun avec le cône. Steiner considère alors l'intersection d'un cône et d'un plan ne passant pas par le centre du cône :

- I. Si le plan est parallèle à un plan passant par le centre n'ayant aucun rayon commun avec le cône, il ne coupe qu'une des deux parties M, M_1 du

³⁵„[...] das Gesetz welchen bei zwei Geraden A, A_1 die Projektionsstrahlen, bei zwei ebenen Strahlbüscheln B, B_1 die Durchschnitte der entsprechenden Strahlenpaare, oder die durch entsprechende Strahlenpaare bestimmten Ebenen (wenn z.B. B, B_1 im Strahlbüschel D liegen, und bei zwei Ebenenbüscheln $\mathcal{U}, \mathcal{U}_\infty$ die Durchschnittslinien der entsprechenden Ebenenpaare unterworfen sind [...]“ [Steiner, 1832, II-3]

³⁶„[...] eine sehr merkwürdige doppelte Erzeugung derselben durch projectivische Gebilde.“ [Steiner, 1832, II-3]

³⁷Steiner ajoute que comme le cercle est coupé par une droite en au plus deux points, le cône peut être qualifié «de deuxième degré».

³⁸Steiner précise qu'il considère les rayons comme non-limités par le point D ou par le cercle. Le cône considéré par Steiner est donc infini et composé de deux parties M, M_1 . Il définit en même temps la notion de plan tangent (*Berührungsebene*) au cône comme un plan passant par le centre D du cône et par une tangente A au cercle qui sert à définir le cône. Il justifie sa dénomination en signalant qu'un seul rayon du cône est contenu dans un tel plan.

cône et son intersection avec le cône est, «comme l'intuition immédiate la représente,»³⁹ est une courbe fermée, appelée *ellipse*.

- II. Si le plan est parallèle à un plan tangent au cône, le plan ne coupe qu'une des deux parties M , M_1 du cône; «comme on le voit sur la représentation».⁴⁰ L'intersection est une courbe, appelée *parabole*, dont les deux branches se rejoignent au point à l'infini du rayon tangent. Les droites d'intersection des plans tangents et du plan sécant sont les tangentes à la parabole, celle du plan sécant et du plan tangent qui est parallèle au plan sécant est la tangente à l'infini de la parabole.
- III. Si le plan est parallèle à un plan par le centre du cône et intersectant ce cône le long de deux rayons, le plan coupe les deux parties du cône et coupe chaque rayon du cône en deux points. L'intersection est «comme on le voit»⁴¹ comprend deux courbes qui se prolongent à l'infini. Les branches à l'infini d'une des courbes rejoignent à l'infini les branches à l'infini de l'autre. La courbe ainsi constituée s'appelle une *hyperbole* et chaque plan tangent engendre une tangente de l'hyperbole (l'intersection du plan tangent et du plan sécant). Les deux plans tangents le long des rayons communs au cône et au plan parallèle au plan sécant engendrent deux tangentes à l'infini, les *asymptote*.

La description des coniques que propose Steiner est donc très classique et ne servira pas directement dans la suite de l'exposé. Elle n'a pas pour fonction que de montrer que les courbes engendrées par les formes projectives sont identiques aux coniques. L'insistance de Steiner pour montrer que cette présentation fait appel aux représentations et à l'intuition géométrique lui permet de faire ressortir le caractère intrinsèque de sa théorie. La référence à la théorie des coniques classiques permet aussi de justifier que la théorie des formes projectives permet de passer des coniques aux cônes et réciproquement :

[...] si des propriétés d'une conique provient des formes projectives, alors celles-ci doivent aussi avoir lieu de manière correspondante pour les cônes et par conséquent aussi pour chaque autre conique de telle manière que, si par exemple, une conique peut être engendrée par des formes projectives, alors le cône et chaque autre conique doit aussi provenir de formes projectives et réciproquement. Par conséquent, dans de nombreux cas, pour chercher de telles propriétés, on peut s'en tenir seulement au cercle, la plus connue et la simple des coniques (et ce à l'exception des cas limites mentionnés).⁴²

³⁹,[...] wie er sich der unmittelbaren Anschauung darstellt [...]“ [Steiner, 1832, II-6].

En fait, Steiner ne se satisfait pas complètement d'un tel appel à l'intuition immédiate. Il avait annoncé auparavant que la présentation des coniques comme intersection de plans et de cônes relevait d'une seconde partie de son traité qui ne sera jamais publiée. Dans ses *Vorlesungen über synthetische Geometrie* [Steiner, 1867], il définit directement les coniques à partir de la théorie des formes projectives.

⁴⁰,[...] wie man in der Vorstellung sieht [...]“ [Steiner, 1832, II-7]

⁴¹,[...] wie man sieht, [...]“ [Steiner, 1832, II-7]

⁴²,[...] wenn Eigenschaften irgend eines Kegelschnitts aus projectivischen Gebilden entspringen, dieselben alsdann auch auf entsprechende Weise bei der Kegelfläche und also auch bei jedem anderen Kegelschnitt statt haben müssen, so dass, wenn z.B. ein Kegelschnitt durch projectivische Gebilde erzeugt werden kann, dann auch die Kegelfläche und jeder andere Kegelschnitt aus projectivischen Gebilden entspringen muss, und auch umgekehrt. Daher kann man, zur Erforschung solcher Eigenschaften, in vielen Fällen sich nur an den Kreis, den bekanntesten und einfachsten Kegelschnitt (ausser den erwähnten Grenzfällen) [...]“ [Steiner, 1832,

4.4.2 L'engendrement des coniques par les formes projectives

Conformément au principe qu'il vient de poser, Steiner fonde sa théorie de l'engendrement des coniques par les formes projectives sur deux propriétés des cercles provenant de la géométrie élémentaire : soit deux points B, B_1 sur un cercle; il est bien connu que si deux angles de sommets B, B_1 intersectent le même arc du cercle, les deux angles sont égaux. Steiner en déduit immédiatement que si deux rayons des faisceaux sont associés lorsqu'ils s'intersectent en un point du cercle, les deux faisceaux sont projectifs en position oblique et de même sens. De manière duale, si l'on considère deux tangentes A, A_1 d'un cercle M . La relation qui associe deux à deux les points d'intersection α, α_1 de ces tangentes avec une autre tangente du cercle est projective.⁴³

Steiner en déduit des théorèmes analogues pour les cônes et les autres sections coniques. Ainsi il construit une relation projective entre les faisceaux plans de rayons centrés au sommet du cône et situés sur les plans tangents du cône, et de manière duale entre les faisceaux de plans dont les axes sont les rayons d'un cône⁴⁴ :

On trouve dans deux plans tangents d'un cône du second degré deux faisceaux plans de rayons projectifs, dont les paires de rayons correspondants sont situés sur les autres plans tangents; en particulier, les rayons (d, e_1) qui coïncident avec l'intersection de ces plans correspondent aux rayons (d_1, e) en lesquels ces plans sont tangents au cône.

Deux rayons quelconques d'un cône du second degré sont les axes de deux faisceaux de plans projectifs, dont les paires de plans correspondants se coupent sur les autres rayons; en particulier, les plans (δ, ϵ_1) qui coïncident avec le plan de ces rayons correspondent aux plans (δ_1, ϵ) qui sont tangents au cône le long de ces rayons.

Réciproquement, Steiner affirme sans démonstration que deux faisceaux plans de rayons projectifs en position oblique situés dans un même faisceau de rayons engendrent un cône du second degré, à savoir le cône enveloppé par l'ensemble des plans définis par les paires de rayons correspondants. De manière duale, deux faisceaux de plans projectifs en position oblique situés dans un même faisceau de rayons engendrent aussi un cône du second degré, à savoir le cône formé par droites d'intersection des plans correspondants.

Ces théorèmes et leur réciproques permettent d'une part d'induire un lien intrinsèque entre la notion de relation projective et les coniques, d'autre part de déduire réciproquement la définition des coniques comme le lieu d'intersection

II-8]

⁴³Steiner précise que cette propriété a été établie par Brianchon [1817] en toute généralité pour les coniques.

⁴⁴„In irgend zwei Berührungsebenen eines Kegels zweiten Grades befinden sich zwei projectivische ebene Strahl büschel, deren entsprechende Strahlpaare nämlich in den übrigen Berührungsebenen liegen, und insbesondere entsprechen den im Durchschnitte jener Ebenen vereinigten Strahlen (d, e_1) diejenigen Strahlen (d_1, e) in welchen dieselben den Kegel berühren.“

Irgend zwei Strahlen einer Kegelfläche zweiten Grades sind die Axen zweier projectivischen Ebenenbüschel, deren entsprechende Ebenenpaare sich in den übrigen Strahlen schneiden, und insbesondere entsprechen den in der Ebene jener Strahlen vereinigten Ebenen (δ, ϵ_1) diejenigen Ebenen (δ_1, ϵ) welche den Kegel in denselben berühren.“ [Steiner, 1832, II-11]

des rayons de deux faisceaux plans de rayons projectifs ou comme enveloppée par les rayons de projection de deux droites projectives. Steiner énonce alors les «théorèmes remarquables» suivants ⁴⁵ :

Deux tangentes quelconques A, A_1 d'une conique sont par rapport aux paires de points en lesquels elles sont coupées par les autres tangentes, projectives; de plus les points (β, ϵ_1) qui coïncident avec l'intersection de A et A_1 correspondent à leur points de tangence réciproques (β_1, ϵ) .

Deux points quelconques B, B_1 d'une conique sont les centres de faisceaux plans de rayons projectifs, dont les rayons correspondants se coupent sur les autres points de la conique; de plus les rayons (d, e_1) qui coïncident correspondent réciproquement avec les tangentes (d_1, e) en (B_1, B) .

Les réciproques de ces deux théorèmes vont constituer une première caractérisation vraiment projective (fondée sur la notion de relation projective entre deux formes) des coniques comme l'enveloppe des rayons de projections de deux droites projectives ou de manière duale comme le lieu d'intersection des rayons correspondants de deux faisceaux plans de rayons projectifs ⁴⁶ :

Deux droites [projectives] A, A_1 en position oblique dans un même plan engendrent un conique qui leur est tangente, c'est-à-dire celles-ci et tous leurs rayons de projection sont les tangentes d'une conique déterminée; de plus, la conique touche les droites en les points (ϵ, δ_1) dont les points correspondants (ϵ_1, δ) sont confondus avec l'intersection de celles-ci.

Deux faisceaux (plans) de rayons projectifs B, B_1 en position oblique dans un même plan engendrent un conique qui passe par leur centre, c'est-à-dire ces derniers et les intersections des paires de rayons correspondants sont les points d'une conique déterminée; de plus, celle-ci touche en les centres les rayons (e, d_1) dont les rayons correspondants (e_1, d) sont confondus.

Steiner souligne la nouveauté et l'importance à ses yeux de ces théorèmes. On peut même penser que l'ensemble de la théorie de Steiner a pour objectif cette nouvelle définition des coniques. En effet, le point de vue de Steiner permet de

⁴⁵„Jede zwei Tangenten A, A_1 eines Kegelschnitts sind in Auschung der Punktenpaare, in welchen sie von übrigen Tangenten geschnitten werden, projectivisch, und zwar entsprechen den in ihrem Durchschnitt vereinigten Punkten (β, ϵ_1) ihre wechselseitigen Berührungspunkte (β_1, ϵ) .“

⁴⁶„Jede zwei in einer Ebene schiefliegende Gerade A, A_1 erzeugen einen Kegelschnitt, der sie berührt, d.h., sie und alle ihre Projektionsstrahlen sind die gesammten Tangenten eines bestimmten Kegelschnitts, und zwar berührt dieser die Geraden in denjenigen Punkten (ϵ, δ_1) , deren entsprechende (ϵ_1, δ) in ihrem Durchschnitt vereinigt sind.“

Jede zwei Punkte B, B_1 eines Kegelschnitts sind die Mittelpunkte zweier projectivischen ebenen Strahlbündel, deren entsprechende Strahlen sich in den übrigen Punkten desselben schneiden, und zwar entsprechen den vereinigten Strahlen (d, e_1) die Tangenten (d_1, e) in den gegenseitigen Mittelpunkten (B_1, B) .“ [Steiner, 1832, II-12]

Jede zwei in einer Ebene schiefliegende projectivische (ebene) Strahlbüschel B, B_1 erzeugen einen Kegelschnitt, der durch ihre Mittelpunkte geht, d.h., diese und die Durchschnitte der entsprechenden Strahlenpaare sind die gesammten Punkte eines bestimmten Kegelschnitts, und zwar wird dieser in jenen Mittelpunkten von denjenigen Strahlen (e, d_1) berührt, deren entsprechende (e_1, d) vereinigt sind.“ [Steiner, 1832, II-12]

pallier les difficultés de la présentation classique et est adaptée pour comprendre les nouvelles théories comme celle de l'involution ou des polaires réciproques⁴⁷ :

Les nouveaux théorèmes établis ci-dessus sur les cônes du second degré et leurs sections sont plus importants pour l'étude de ces figures que tous les théorèmes connus auparavant sur celles-ci car ils sont les théorèmes véritablement authentiques, puisqu'ils sont en effet si universels que presque toutes les autres propriétés de ces figures se déduisent de ceux-ci de la manière la plus simple et la plus claire et aussi parce que la méthode suivant laquelle ils sont dérivés l'emporte en simplicité et en commodité sur les autres points de vue.⁴⁸

⁴⁷Dans la préface de l'édition des *Vorlesungen über synthetische Geometrie* [Steiner, 1867], l'éditeur, H. Schröter, cite un commentaire de Steiner datant de 1833/34 particulièrement explicite sur cette question. Après avoir rappelé qu'il utilise l'ancienne manière de déduire la définition des coniques à partir des cônes à base circulaire, il ajoute :

Bien que, déjà à l'époque, je sentisse nettement l'inadéquation de ce procédé, je croyais alors devoir le suivre pour ne pas trop m'écarter du chemin habituel. Mais le fait d'être contraint d'affirmer la réciproque d'un théorème qui ne peut pas être démontré de manière satisfaisante par la géométrie élémentaire – à savoir le théorème selon lequel tout cône du second ordre peut être coupé par un plan le long d'un cercle – montrait la nécessité d'abandonner cette manière de présenter les choses et d'en trouver une plus appropriée aux circonstances. En révélant l'engendrement des coniques par des droites et des faisceaux projectifs comme une manière de présentation immédiate et systématiquement nécessaire et en s'effectuant purement synthétiquement le simplement possible, celle qui suit ici satisfait au plus haut point cette exigence. La nature véritable de l'involution et de la théorie des polaires réciproques est aussi révélée par des propriétés particulière des formes projectives en question puisque la nécessité de leur genèse est de manière surprenante, mise en évidence à partir de ces propriétés alors que leur cohérence interne se manifeste [...].

„Obwohl ich die Unzweckmässigkeit dieses Verfahrens schon damals deutlich fühlte, so glaubte ich doch, um nicht zu sehr von dem gewöhnlichen Gange abzuweichen, demselben folgen zu müssen. Allein der Umstand, dass man gezwungen ist, die Umkehrung eines Satzes zu behaupten, der sich durch die Elementargeometrie nicht befriedigend beweisen lässt – nämlich des Satzes, dass jeder Kegel zweiten Grades von einer Ebene in einem Kreise geschnitten werden kann – zeigte die Nothwendigkeit, jene Darstellungsweise zu verlassen und eine dem Gegenstande angemessenere aufzufinden. Die hier folgende genügt dieser Forderung im höchsten Grade, indem sie die Erzeugung der Kegelschnitte durch projektivische Gerade und Strahlbüschel als eine unmittelbare, systematisch nothwendige offenbart und dieselbe rein synthetisch auf die möglichst einfache Weise bewerkstelligt. Ebenso wird das wahre Wesen der Involution und der theorie des polaires réciproques durch besondere Eigenschaften der genannten projektivischen Gebilde geoffenbart, indem ihre nothwendige Entstehung auf überraschende Weise aus diesen Eigenschaften sich nachweisen lässt und zugleich ihr inniger Zusammenhang sich kund giebt [...].“ [Steiner, 1867, vi-vii]

⁴⁸„Die so eben aufgestellten neuen Sätze über den Kegel zweiten Grades und dessen Schnitte sind für die Untersuchung dieser Figuren wichtiger, als alle bisher bekannten Sätze über dieselben, denn sie sind die eigentlichen wahren Fundamentalsätze, weil sie nämlich so umfassend sind, dass fast alle übrigen Eigenschaften jener Figuren auf die leichteste und klarste Weise aus ihnen folgen, und weil auch die Methode, nach der sie daraus hergeleitet werden, jede bisherige Betrachtungsweise an Einfachheit und Bequemlichkeit übertrifft.“ [Steiner, 1832, II-12-13]

4.4.3 Les propriétés des coniques

Steiner montre alors que les propriétés classiques des coniques se déduisent de ses théorèmes. Ainsi comme une relation projective entre deux droites ou deux faisceaux plans est déterminée dès que trois paires d'éléments correspondants, le problème de déterminer une conique par cinq tangentes ou cinq points se déduit immédiatement des théorèmes d'engendrement des coniques (4.4.2). En effet, la donnée des deux droites A, A_1 et de trois rayons de projection a, b, c équivaut à la donnée de deux droites projectives.⁴⁹ Comme la donnée de cinq éléments (tangentes ou points) d'une conique est suffisante pour la déterminer, Steiner en déduit qu'il doit exister entre six éléments d'une conique une relation qu'il exprime sous la forme du *théorème de l'hexagramme mystique* de Pascal et de son dual montré récemment par Brianchon [1817, 17]. la démonstration de ces théorèmes découlent de la définition des coniques à partir de deux formes projectives (4.4.2) et des théorèmes sur les hexagones obtenus lors de l'étude des figures à partir de la notion de relation projective (4.3.7)⁵⁰ :

Etant donné un hexagone circonscrit à une conique quelconque (c'est-à-dire dont les côtés sont des tangentes à la coniques), alors les trois diagonales principales, à savoir celles qui joignent les sommets opposés, se rencontrent en un point.

Si les trois diagonales principales d'un hexagone se rencontre en un point, alors une conique déterminée touche ses côtés.

Etant donné un hexagone inscrit dans une conique quelconque (c'est-à-dire dont les sommets sont situés sur la conique), alors les points d'intersection des paires de côtés opposés sont toujours situés sur une droite.

Si les trois intersections des paires de côtés opposés d'un hexagone sont situées sur une droite, alors ses sommets sont situés sur une conique.

Steiner souligne que ces théorèmes ont été étudiés par de nombreux mathématiciens comme Gergonne, Poncelet, Chasles, Sturm, Brianchon, Sturm, Möbius, Plücker ou Dandelin qui comme Brianchon les considéraient comme les théorèmes fondamentaux pour l'étude des coniques. Il insiste sur le fait que sa théorie montre qu'ils ne sont pas «les fondements véritables de l'étude des coniques» puisqu'ils découlent en fait, comme la plupart des propriétés des coniques, d'une «source universelle, à savoir les relations des formes projectives». Après avoir montré que le nouveau point de vue sur les coniques permet de retrouver la plupart des propriétés de celles-ci et de leurs tangentes, Steiner re-

⁴⁹L'unicité résulte du fait que les droites sont elles-mêmes des rayons de projection. De plus, Steiner précise que dans le cas où quatre des droites sont concourantes ou quatre des points sont alignés, alors la conique n'est pas complètement déterminée.

⁵⁰„Bei jedem einem Kegelschnitte umschriebenen Sechseck (d.h. dessen Seiten Tangenten des Kegelschnitts sind) treffen die drei Hauptdiagonalen, welche nämlich die gegenüber stehenden Ecken verbinden, in irgend einem Punkte zusammen.“

„Treffen die drei Hauptdiagonalen eines Sechsecks in irgend einem Punkte zusammen, so werden seine Seiten von irgend einem bestimmten Kegelschnitte berührt.“

Bei jedem einem Kegelschnitte eingeschriebenen Sechsecks (d.h. dessen Ecken im Kegelschnitte liegen) liegen die drei Durchschnittspunkte der einander gegenüber stehenden Seitenpaare allemal in irgend einer Geraden.“ [Steiner, 1832, II-20]

Liegen die drei Durchschnitte der gegenüber stehenden Seitenpaare eines Sechsecks in irgend einer Geraden, so liegen seine Ecken in irgend einem Kegelschnitte.“ [Steiner, 1832, II-20]

prend la propriété d'engendrement des coniques par des formes projectives en utilisant la définition de la notion de relation projective par la conservation du birapport. Ainsi, le birapport des points d'intersection de quatre tangentes données d'une conique avec une autre tangente de celle-ci est constant. De manière duale, le birapport des rayons qui joignent quatre points donnés d'une conique à un point quelconque de celle-ci est aussi constant. Réciproquement, ces deux propriétés caractérisent les tangentes ou les points d'une conique. Dans le cas particulier où le birapport est égal à 1, Steiner propose de dire que les quatre tangentes données de la conique sont *quatre tangentes harmoniques* et que les quatre points donnés du théorème dual sont *quatre points harmoniques*. Réciproquement les droites caractérisées par la propriété que leurs points d'intersection avec les quatre côtés d'un quadrilatère (simple) sont harmoniques enveloppent la *conique harmoniquement inscrite dans le quadrilatère*. De même, les points caractérisés par la propriété que les rayons issus de ces points et joignant les sommets d'un quadrangle, déterminent la *conique harmoniquement circonscrite au quadrangle*. De plus, deux tangentes quelconques d'une conique sont harmoniquement associées à une infinité d'autres paires de tangentes à la conique et deux points quelconques de la conique sont harmoniquement associés à une infinité d'autres paires de points de la conique. Steiner déduit de ces théorèmes deux propriétés duales des coniques⁵¹ qui vont lui permettre de définir les notions de *pôle* et de *polaire*.⁵²

Si une droite qui coupe une conique tourne autour d'un point fixe (situé sur celle-ci), alors α) le lieu des points qui sont les quatrièmes harmoniques (en fait les derniers ainsi associés) des deux points intersections et du point fixe, est une droite déterminée; et β) l'intersection des deux tangentes, par les points de contact desquelles passe la droite sécante mobile, se déplacent sur cette droite.

Si un point se déplace sur une droite située dans le plan d'une conique, alors α) les droites qui passent par ce point et qui sont les quatrièmes (les dernières associées) harmoniques des tangentes passant par ce point et de la droite fixe, passent par un point déterminé et β) la droite qui passe par les deux points de contact des deux tangentes tourne en même temps autour de ce point.

Steiner propose d'appeler la droite définie dans le premier théorème *l'harmonique du point* et le point défini dans le second *le pôle harmonique de la droite*.⁵³ Il précise sans donner de définition des notions d'*intérieur* et d'*extérieur* d'une

⁵¹Steiner attribue ces propriétés à Monge.

⁵²„Dreht sich eine Gerade, die einen Kegelschnitt schneidet, um irgend einen (in ihr liegenden) festen Punkt : α) so ist der Ort desjenigen Punkts, welcher zu den zwei Durchschnittspunkten und dem festen Punkte der vierte, und zwar dem letzteren zugeordnete, harmonische Punkt ist, eine bestimmte Gerade; und β) in dieser Geraden bewegt sich zugleich der Durchschnitt derjenigen zwei Tangenten, durch deren Berührungspunkte jene bewegliche schneidende Gerade geht.“

bewegt sich ein Punkt in einer festen Geraden in der Ebene eines Kegelschnitts : α) so geht diejenige Gerade, welche zu den Punkt gehenden Tangenten und der festen Geraden die vierte, der letzteren zugeordnete, harmonische Gerade (Strahl) ist, durch einen bestimmten Punkt und β) um diesen Punkt dreht sich zugleich diejenige Gerade, welche durch die Berührungspunkte der jedesmaligen zwei Tangenten geht.“ [Steiner, 1832, II-29-30]

⁵³Steiner signale en note que les mathématiciens français appelle cette droite la *polaire* et le point le *pôle*.

conique que selon que le pôle est à l'intérieur ou à l'extérieur de la conique, la polaire ne coupe pas ou coupe la conique. Il montre par contre que si une droite passe par un point, alors l'harmonique (polaire) de ce point passe par le pôle de la droite et que si un point est situé sur une droite, l'harmonique (polaire) de celui-ci passe par le pôle de ce point. Steiner désigne par *deux droites harmoniquement associées* deux droites qui passent respectivement par le pôle de l'autre, de même, *deux points harmoniquement associés* sont deux points situés respectivement sur la polaire de l'autre. De la même manière, il appelle *trois droites harmoniquement associées* trois droites qui passent respectivement par les pôles des deux autres et *trois points harmoniquement associés* trois points qui sont respectivement les intersections des polaires des deux autres. Il déduit du théorème du quadrilatère complet que les trois diagonales et leur trois points d'intersection d'un quadrilatère complet inscrit dans une conique forment trois droites et trois points associés harmoniquement. De manière duale, les points d'intersection des côtés opposés d'un quadrangle circonscrit à une conique et les droites qui passent par ces points forment aussi trois points et trois droites harmoniquement associés. Ce théorème fournit une manière de déterminer à la règle la polaire d'un point quelconque et le pôle d'une droite quelconque. Par exemple, il suffit de tracer deux sécantes à la conique passant par le point choisi, de compléter le quadrangle défini par les points d'intersection de ces sécantes avec la conique et de joindre les deux sommets ainsi définis. Steiner montre alors qu'il peut retrouver les théorèmes obtenus par Brianchon ou ceux de la théorie des polaires réciproques : si on considère six tangentes a, b, c, d, e, f , d'une conique K et leurs pôles respectifs $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \phi$, alors les diagonales du 6-latère $abcdef$ qui joignent les sommets opposés⁵⁴ sont concourantes et les points d'intersection des côtés opposés du 6-angle $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\phi$ ⁵⁵ sont alignés puisqu'ils sont les pôles des diagonales de $abcdef$ ⁵⁶. Le 6-angle $abcdef$ ⁵⁷ est donc inscrit dans une conique K_2 et en considérant la tangente f comme mobile, la conique K_2 peut être vue comme le lieu des pôles d'une conique K_1 . On obtient donc le théorème fondamental de la théorie des polaires réciproques⁵⁸ :

Si deux coniques quelconques K et K_1 se trouvent dans un plan, alors les pôles harmoniques $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ par rapport à la première conique K des tangentes a, b, c, \dots de la seconde conique K_1 sont situés sur une troisième conique déterminée K_2 , et les polaires a_1, b_1, c_1, \dots des points $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots$ de la deuxième conique K_1 touchent une troisième et même conique K_2 et même de telle manière qu'un point déterminé α de la troisième conique K_2 et sa tangente associée correspondent à chaque tangente a de la deuxième conique K_1 et son point de contact α_1 .⁵⁹

⁵⁴Si on choisit comme sommets ab, bc, cd, de, ef, fa , alors les trois diagonales principales sont celles qui joignent ab et de , bc et ef , cd et fa .

⁵⁵Les trois paires de côtés opposés sont $(\alpha\beta, \epsilon\delta)$, $(\beta\gamma, \phi\alpha)$, $(\gamma\delta, \phi\alpha)$.

⁵⁶Le point d'intersection de $\alpha\beta$ et $\epsilon\delta$ est le pôle de la diagonale qui joint ab et ef puisque $\alpha\beta$ est la polaire de ab et $\epsilon\delta$ celle de de .

⁵⁷Le 6-angle défini par les points ab, bc, cd, de, ef et fa .

⁵⁸Ce théorème servira de fondements à la théorie des coniques de von Staudt.

⁵⁹„Wenn in einer Ebene sich irgend zwei kegelschnitte K, K_1 befinden, so liegen die den Tangenten a, b, c, \dots des zweiten K_1 , in Beziehung auf den ersten K , entsprechenden harmonischen Pole $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ in irgend einem bestimmten dritten Kegelschnitt K_2 , und es berühren die den Punkten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots$ des zweiten K_1 entsprechenden Harmonischen a_1, b_1, c_1, \dots einen und denselben dritten Kegelschnitt K_2 und zwar solcher Gestalt, dass jeder Tangenten a

4.4.4 La théorie des surfaces du second degré

Après avoir montré qu'il pouvait retrouver la théorie des coniques à partir de considérations sur les formes projectives, Steiner reprend le même programme dans l'espace pour les surfaces du second degré. Steiner commence par montrer que les rayons de projection de deux droites projectives en situation oblique dans l'espace ou les droites d'intersection de deux plans correspondants dans deux faisceaux de plans dans l'espace forment un système (*Schaar*) de droites qui est intersecté par un autre système (infini) de droites. Il en déduit que deux droites quelconques d'un des systèmes sont projectives et que leurs rayons de projection sont les droites de l'autre système. Ces deux systèmes de droites forment un *hyperboloïde à une nappe* :⁶⁰

Deux droites quelconques projectives en situation oblique dans l'espace A, A_1 engendrent un hyperboloïde à une nappe, c'est-à-dire elles et tous leurs rayons de projection, ainsi que le système des droites qui coupent ceux-ci, sont situées dans un hyperboloïde à une nappe.

Deux faisceaux de plans quelconques projectifs en situation oblique dans l'espace A, A_1 engendrent un hyperboloïde à une nappe, c'est-à-dire les droites d'intersections de leurs plans correspondants, ainsi que le système de droites qui coupent celles-ci, sont situées dans un hyperboloïde à une nappe.

Dans le cas particulier où les deux droites sont semblables ou si les faisceaux de plans sont en position propre (c'est-à-dire si leurs plans correspondants sont parallèles), les deux systèmes de droites engendrés par les formes projectives contiennent chacun une droite à l'infini ; dans ce cas la figure engendrée s'appelle un *paraboloïde hyperbolique*.

4.4.5 Généralisation de la notion de relation projective

Les deux manières d'engendrer l'hyperboloïde simple permettent à Steiner de développer une théorie des dépendances projectives de certaines figures dans le plan et l'espace. Il commence par étudier les propriétés qui découlent de la double conception des droites : comme «contenant un ensemble infini de points»⁶¹ et comme axe d'un faisceau de plans. Ainsi, étant donné deux droites⁶² \mathcal{U} et \mathcal{U}_1 envisagées soit ponctuellement, soit et en tant que faisceaux, Steiner considère l'ensemble des rayons le long desquels les plans des faisceaux s'intersectent et celui des rayons qui joignent deux à deux les points des deux droites. Ces deux systèmes de rayons sont identiques. Par un point quelconque de l'espace (qui

und ihren Berührungspunkte α_1 des zweiten Kegelschnitts K_1 , ein bestimmter Punkt α und dessen zugehörige Tangente a_1 im dritten Kegelschnitt K_2 entspricht.“ [Steiner, 1832, II-34]

⁶⁰ „Irgend zwei im Raume beliebig schief liegende projectivische Gerade A, A_1 erzeugen ein einfaches Hyperboloïd, d.h. sie und alle ihre Projectionsstrahlen, nebst der Schaar Gerader, welche die letzteren schneiden, liegen in einem einfachen Hyperboloïd.“

Irgend zwei im Raume beliebig schief liegende projectivische Ebenenbüschel A, A_1 erzeugen ein einfaches Hyperboloïd, d.h. die Durchschnittslinien ihrer entsprechenden Ebenen, nebst der Schaar Gerader, welche dieselben schneiden, liegen in einem Hyperboloïd.“ [Steiner, 1832, II-52]

⁶¹ „als eine unendliche Menge Punkte enthaltend“. [Steiner, 1832, II-95]

⁶² Steiner suppose implicitement) que les deux droites ne sont pas coplanaires.

n'est pas situé sur une des droites), il ne passe qu'un rayon de ce type; de même, chaque plan qui ne passe par aucune des deux droites contient un seul de ces rayons. Si E et E_1 sont deux plans quelconques, on peut au moyen de l'ensemble des rayons définis par \mathcal{U} et \mathcal{U}_1 associer à chaque point a de E un point a_1 de E_1 que Steiner appelle la *projection oblique* de a . On note par ee_1 la droite d'intersection de E et E_1 , par r, s et z_1, y_1 les points d'intersection des droites \mathcal{U} et \mathcal{U}_1 avec les plans E et E_1 ($x = rs$ et $t_1 = z_1y_1$ sont des rayons des systèmes définis par les droites \mathcal{U} et \mathcal{U}_1). Enfin, on désigne par t et x_1 les points d'intersection de t_1 et x avec E et E_1 . Les deux triangles rst et $z_1y_1x_1$ sont appelés par Steiner les *triangles principaux* des plans E et E_1 . Steiner déduit de sa théorie des coniques le théorème suivant :

L'ensemble des droites d'un des deux plans E et E_1 , à l'exception des rayons des trois faisceaux de rayons (r, s, t ou z_1, y_1, x_1), dont les centres sont les sommets des triangles principaux, correspond dans l'autre plan à l'ensemble des coniques qui peuvent être circonscrites au triangle principaux et réciproquement.⁶³

Les rayons qui appartiennent aux faisceaux de rayons dont les centres sont les sommets des triangles principaux se correspondent deux à deux de telle sorte que les faisceaux r et z_1, s et y_1, t et x_1 sont projectifs. Steiner décrit géométriquement la correspondance entre les droites d'un des plans et les coniques de l'autres. Par exemple, les tangentes de la conique A_1 de E_1 qui correspond à la droite A de E correspondent à des coniques de E tangentes à la droite A et les deux points de contact sont associés dans la correspondance originale entre E et E_1 . Si on note $[R]$ la conique de E qui correspond à la droite à l'infini de E_1 , alors la conique de E_1 qui correspond à une droite A de E est soit une hyperbole, soit une parabole, soit une ellipse selon que la droite A coupe, est tangente ou ne rencontre pas la conique $[R]$.

Steiner développe de la même manière la relation qu'induit pour deux faisceaux de rayons D et D_1 dans l'espace la donnée de deux droites \mathcal{U} et \mathcal{U}_1 . A chaque rayon de D , il correspond (en général) le rayon de D_1 qui appartient à l'unique plan défini par D et le système de rayons de \mathcal{U} et \mathcal{U}_1 . A chaque plan de D correspond un plan de D_1 . Steiner définit alors la notion de *trièdre principal* de manière analogue (duale) à celle de triangle principal. Les faces du trièdre principal sont appelés les *plans principaux*. Les plans d'un faisceau de plans A contenu dans D correspondent alors aux plans tangents d'une surface conique du second degré qui est inscrit dans le trièdre principal et réciproquement. Lorsque l'on considère deux plans sécants \mathcal{E} et \mathcal{E}_1 de D et D_1 respectivement, on obtient une relation entre les éléments de \mathcal{E} et \mathcal{E}_1 telle qu'à tout rayon de \mathcal{E} correspond un rayon de \mathcal{E}_1 , à chaque point qui n'est pas situé sur une droite principale, une conique inscrite dans le triangle principal. Steiner ajoute qu'à deux rayons a et b correspondent deux rayons a_1 et b_1 tangents à la conique incrite dans le triangle principal correspondant au point d'intersection de a et b . De même, il correspond à la conique définie par les droites principales et les deux rayons a et b , le point d'intersection de a_1 et b_1 . Steiner décrit ainsi ce qui sera appelé par ses successeurs *homographie*.

⁶³„Den gesammten Geraden in einer der zwei Ebenen E, E_1 , ausgenommen die Strahlen der drei Strahlbüschel (r, s, t oder z_1, y_1, x_1), deren Mittelpunkte die Spitzen des Hauptdreiecks sind, entsprechen in der andern Ebene die gesammten Kegelschnitte, welche dem Hauptdreieck umschrieben werden können, und auch umgekehrt.“ [Steiner, 1832, II-100]

La relation entre un plan E et un faisceau de rayons D_1 dans l'espace induite par la donnée de deux droites \mathcal{U} et \mathcal{U}_1 associe (en général) à chaque point de E le plan de D_1 qui contient l'unique rayon du système défini par \mathcal{U} et \mathcal{U}_1 . Cette relation entre E et D_1 induit entre E et tout plan sécant \mathcal{E}_1 au faisceau D_1 une relation qui à tout point α de E une droite α_1 de \mathcal{E}_1 . De plus, à une droite de E qui ne passe pas par les points principaux (les sommets du triangle principal), il correspond une conique inscrite dans le triangle principal et à une droite qui passe par un des points principaux, un faisceau de rayons dont le centre est situé sur une droite principale.

Steiner reprend alors son approche en déplaçant les droites \mathcal{U} et \mathcal{U}_1 de manière qu'elles soient situées dans un même plan et se coupent donc. Dans ce cas, le système de rayons engendrés par les deux droites constitue si l'on envisage les deux droites comme des ensembles ponctuels l'ensemble des droites du plan E_2 et si l'on envisage les deux droites comme des faisceaux, le faisceau de rayons dans l'espace dont le sommet est l'intersection D_2 des droites \mathcal{U} et \mathcal{U}_1 . Steiner désigne par R le premier système de rayons défini par les droites \mathcal{U} et \mathcal{U}_1 avant qu'elles soient déplacées. Trois systèmes de rayons sont donc associés aux droites \mathcal{U} et \mathcal{U}_1 : le système original R lorsque les droites ne sont pas coplanaires et les deux systèmes D_2 et E_2 lorsqu'elles sont déplacées de manière à être coplanaires. Ainsi, un rayon de R qui joint les points α et α_1 de \mathcal{U} et \mathcal{U}_1 correspond au rayon $\alpha\alpha_1$ de E_2 et à la droite d'intersection des deux plans a et a_1 des faisceaux \mathcal{U} et \mathcal{U}_1 qui contiennent le rayon. Steiner déduit alors une première relation entre les éléments et les figures de E_2 et de R qui associe à chaque rayon de E_2 un rayon de R et à chaque point de E_2 considéré comme le centre d'un faisceau plan de rayon un hyperboloïde simple qui passe par les droites \mathcal{U} et \mathcal{U}_1 . De même, entre les éléments et les figures de E_2 et de D_2 , la relation induite par les droites \mathcal{U} et \mathcal{U}_1 associe à chaque rayon de E_2 un rayon de D_2 et à chaque point de E_2 et à chaque point (faisceau plan de rayons) de E_2 un plan (faisceau plan de rayons) de D_2 . Enfin, si l'on intersecte D_2 par un plan \mathcal{E}_2 , cette dernière relation induit entre les éléments et les figures de E_2 et \mathcal{E}_2 une relation qui sera appelée ultérieurement une *polarité*. Les points de E_2 correspondent aux droites de \mathcal{E}_2 et les droites de E_2 correspondent à des points de \mathcal{E}_2 . De plus, à un point de E_2 situé sur une droite de E_2 , il correspond une droite de \mathcal{E}_2 qui contient le point correspondant à la droite de E_2 .

4.5 Conclusion

Steiner propose donc une théorie des coniques et des surfaces du second degré qui s'appuie sur une pratique purement géométrique ; certes, il fonde sa définition de relation projective sur la notion métrique de birapport mais une fois cette définition établie, Steiner ne raisonne qu'à partir de considérations sur les dépendances projectives entre formes. De plus, les théorèmes généraux concernent les formes (droites et faisceaux) ; avec la théorie de Steiner, la figure géométrique n'est plus au centre des préoccupations du géomètre, elle est remplacée par les relations projectives entre formes. Les théorèmes emblématiques de ce point de vue sont les théorèmes d'engendrement des coniques par des formes projectives. Dans l'introduction de son traité de géométrie projective, Hankel [1875] ne s'y trompe pas. Si, comme on l'a vu, il souligne l'importance

des travaux de Monge, Carnot et Poncelet pour l'introduction d'une nouvelle pratique de la géométrie et s'il apprécie à leur juste mesure les résultats de Möbius et Plücker sans que leur orientation essentiellement analytique ne le satisfasse complètement, il devient par contre lyrique lorsqu'il évoque les travaux de Steiner qu'il compare à ceux d'Apollonius. Il reprend un longue citation de la préface du traité de Steiner [1832],

En réalité, l'œuvre de Steiner «a révélé l'organisation par laquelle les plus divers phénomènes du monde spatial sont liés les uns aux autres. Il y a un faible nombre de relations fondamentales toutes simples par lesquels s'exprime le schématisme suivant lequel l'ensemble des autres théorèmes se déduit et se développe sans aucune difficulté. En assimilant convenablement le nombre réduit de relations fondamentales, on maîtrise l'ensemble du sujet ; L'ordre pénètre dans le chaos et l'on voit comment toutes les parties se lient naturellement entre elles, comment elles se disposent chacune à leur tour dans un ordre parfait, et comment celles analogues se combinent en groupes bien délimités. On parvient de cette manière pour ainsi dire à la possession des éléments desquels la nature procède, pour pouvoir, avec le plus d'économie possible et de la manière la plus simple, prêter aux figures d'innombrables propriétés». ⁶⁴

Hankel considère qu'avec les travaux de Steiner, la théorie des coniques et des surfaces du second ordre est à peu près terminée et que son œuvre signe le commencement de la seconde période de la nouvelle géométrie, celle de l'étude des courbes et des surfaces algébriques – les méthodes synthétiques de Steiner et celles analytiques de Plücker permettant des avancées significatives.

⁶⁴In der That hat Steiner's Schrift „den Organismus aufgedeckt, durch welchen die verschiedenartigsten Erscheinungen in der Raumwelt mit einander verbunden sind. Es gibt eine geringe Zahl von ganz einfachen Fundamentalbeziehungen, worin sich der Schematismus ausspricht, nach welchem sich die übrige Masse von Sätzen folgerecht und ohne alle Schwierigkeit entwickelt. Durch gehörige Aneignung der wenigen Grundbeziehungen macht man sich zum Herrn des ganzen Gegenstandes; es tritt Ordnung in das Chaos ein, und man sieht, wie alle Theile naturgemäss in einander greifen, in schönster Ordnung sich in Reihen stellen, und verwandte zu wohlbegrenzten Gruppen sich vereinigen. Man gelangt auf diese Weise gleichsam in den Besitz der Elemente, von welchen die Natur ausgeht, um mit möglichster Sparsamkeit und auf die einfachste Weise den Figuren unzählige viele Eigenschaften verleihen zu können“. [Hankel, 1875, 26] & [Steiner, 1832, 3-4]

Chapitre 5

Le radicalisme synthétique de von Staudt

5.1 Introduction

L'œuvre mathématique de Karl Georg Christian von Staudt¹ est essentiellement consacrée à la géométrie et à l'arithmétique. L'essentiel de ses travaux consacrés à la géométrie synthétique est réuni dans ses deux ouvrages, *Geometrie der Lage* [Staudt, 1847] et *Beitrage zur Geometrie der Lage* [Staudt, 1856]. L'ambition affichée par von Staudt dès la préface de *Geometrie der Lage* est de proposer une exposition de la géométrie sans faire appel à la moindre considération métrique.

J'ai cherché dans ce travail à obtenir la géométrie de position comme une science autonome dans laquelle il n'y aurait pas besoin de la mesure.²

S'il reconnaît que ses prédécesseurs ont œuvré à bien différencier la géométrie de position et la géométrie métrique, il regrette néanmoins que «des théorèmes, dans lesquels il n'est pas question de grandeur, soient démontrés habituellement par des considérations de rapports».³ La manière adoptée par Steiner de définir la notion de relation projective entre formes à partir de la conservation du birapport est ici implicitement visée ; Von Staudt proposera de définir la notion d'harmonicité de manière purement projective à partir de la propriété fondamentale du quadrilatère (quadrangle) complet. La notion de correspondance projective entre formes sera alors définie sans faire intervenir la moindre notion de mesure d'un segment ou d'un angle par la propriété de conserver l'harmonicité.

¹Pour une biographie de von Staudt, on peut consulter l'excellent article de Rudolf Fritsch (référence).

²„Ich habe in dieser Schriefft versucht, die Geometrie der Lage zu einer selbstständigen Wissenschaft zu machen, welche des Messens nicht bedarf.“ [Staudt, 1847, III]

³„[...] Sätze, in welchen von keiner Grösse die Rede ist, gewöhnlich durch Betrachtung von Verhältnissen bewiesen“ [Staudt, 1847, III]

La volonté de développer la géométrie pure sans faire appel aux notions métriques participe d'un projet d'organisation des disciplines géométriques. Il s'agit d'énoncer les principes généraux de la géométrie avant de s'intéresser aux considérations particulières que sont les questions de congruence ou de similitude. De la même manière que chez Steiner, l'étude des propriétés des figures est subordonnée à celle des correspondances des *systèmes plans* ou *spatiaux*. Dans la hiérarchie des disciplines géométriques, la géométrie de position de part sa généralité est antérieure à la géométrie métrique. Aux yeux de von Staudt, cette antériorité devrait se traduire aussi dans l'enseignement de la géométrie :

Tout enseignement de géométrie doit procéder de considérations générales qui familiarisent l'élève avec les différents types de formes géométriques et qui exercent sa capacité d'intuition. [...] Peut-être, ce traité incitera quelques enseignants à placer l'essentiel de la géométrie de position avant leur enseignement de la géométrie métrique afin de donner à leurs élèves, dès le début de cet enseignement, un aperçu d'ensemble de la science sans laquelle la compréhension correcte des théorèmes particuliers et de leurs relations avec le reste n'est guère possible.⁴

5.2 Les formes géométriques

5.2.1 Les formes fondamentales

Dans les premiers paragraphes de *Geometrie der Lage*, von Staudt adopte un point de vue d'exposition très classique. Il reprend sans insister le vocabulaire de la géométrie euclidienne : espace, solide, surface ligne, point. Les relations entre ces objets fondamentaux sont décrites à la fois de manière cinématique ; ainsi, un point qui se déplace décrit une ligne, une ligne qui se déplace engendre une surface. Von Staudt insiste sur des questions d'ordre en signalant qu'un point peut parcourir une ligne fermée dans deux sens. Comme on le verra dans ce qui suit, von Staudt adoptera assez souvent un style de démonstration *cinématique* en considérant le mouvement de certains éléments d'une figure. La droite est une ligne particulière «qui lorsqu'elle est attachée à deux points, ne peut changée de position»⁵. La première forme, la *ponctuelle* est définie comme l'ensemble de tous les points qui composent une droite. Von Staudt reprend une idée de Steiner en précisant que l'«on peut admettre que la position de chaque point dans la droite reste fixe, même si celle-ci bouche»⁶. Une droite lorsqu'elle considérée comme un élément d'un système est appelé *rayon*. Etant donné deux points A et B , le

⁴„Jeder geometrische Unterricht muss von allgemeinen Betrachtungen ausgehen, welche den Schüler mit den verschiedenen Arten von geometrischen Gebilden bekannt machen und sein Anschauungsvermögen üben. [...] Vielleicht wird diese Schrift einige Lehrer bestimmen, ihrem Unterrichte in der Geometrie des Masses das Wesentliche aus der Geometrie der Lage voranschicken, damit ihre Schüler gleich Anfangs denjenigen Ueberblick über die Wissenschaft gewinnen, ohne welchen das rechte Verständniss der einzelnen Sätze und ihrer Beziehung zum Ganzen nicht wohl möglich ist.“ [Staudt, 1847, III-IV]

⁵„Eine Linie, welche, sie in zwei Punkten festgehalten ist, ihre Lage nicht ändern kann, heisst gerade.“ [Staudt, 1847, 3]

⁶„[...] Punkten [...] von welchen man annehmen kann, dass jeder seine Stelle in der Geraden, auch wenn diese bewegt wird, unverrückt beibehalte.“ [Staudt, 1847, 3]

point B sera projeté à partir du point A par le rayon AB qui passe par les deux points. Von Staudt définit alors une seconde forme, la *gerbe de rayons*⁷ comme l'ensemble de tous les rayons qui passent par un même point, appelé *centre*. Von Staudt envisage aussi la notion de *gerbe de demi-rayons* (composée de demi-rayons) ; il définit ainsi les *espaces angulaires simples* comme des parties de gerbe de demi-rayons. Une surface composée de demi-rayons ayant même sommet est appelée *surface angulaire simple* ou *surface conique*. Cette notion permet à von Staudt de souligner l'importance de l'ordre cyclique des demi-rayons d'une surface angulaire simple fermée :

Chaque demi-rayon d'une surface angulaire simple fermée peut être considéré comme le début et la fin de celle-ci, et par conséquent parmi quatre éléments d'une telle surface, seulement deux paires d'entres eux seulement sont séparées.⁸

De la même manière, un *espace angulaire complet* est une partie d'une gerbe de rayon ; un espace angulaire complet est délimité par une *surface angulaire complète*. Il distingue alors les surface angulaire d'*ordre pair* et d'*ordre impair* :

Une surface angulaire complète est dite d'ordre pair si elle est composée de deux surfaces angulaires simples fermées (surfaces opposées) et si ainsi un rayon qui décrit la surface revient finalement à sa position initiale ; – d'ordre impair, si elle peut aussi être considérée comme une surface angulaire simple et si ainsi, un rayon qui décrit la surface revient finalement dans une position inversée par rapport à la position initiale, c'est-à-dire subit une inversion de ses moitiés par rapport à la position originale.⁹

Von Staudt décrit alors un plan comme une surface angulaire complète d'ordre impair dans laquelle chaque point peut être considéré comme un centre. Un plan qui relie une droite a et un point A qui n'est pas situé sur celle-ci projette le point A à partir de l'axe a ou projette la droite a à partir du centre A . Von Staudt définit alors les faisceaux de rayons et les faisceaux de plans. Il distingue les différentes espèces de formes fondamentales et insiste sur les relations entre les différents éléments fondamentaux :

Les ponctuelles, les faisceaux de rayons (ou de demi-rayons) et les faisceaux de plans (ou de demi-plans) sont appelés formes fondamentales de première espèce. Le point apparaît comme élément dans la ponctuelle et le plan dans le faisceau de plans. La droite que l'on

⁷ *Strahlbündel*.

Von Staudt distingue la notion de gerbe (*Bündel*) de celle de faisceau (*Büschel*).

⁸ „Jeder Halbstrahl in einer geschlossenen einfachen Winckelfläche kann als Anfang und Ende derselben betrachtet werden, daher unter vier Elementen einer solchen Fläche nur zwei Paar getrennte sind.“ [Staudt, 1847, 4]

Von Staudt ne définit pas la notion de séparation pour les paires de demi-rayons. Deux demi-rayons définissent sur la surface angulaire simple fermée deux surfaces angulaires simples. Si deux autres demi-rayons n'appartiennent pas à la même de ces surfaces angulaires, on dit qu'ils séparent les deux premiers demi-rayons.

⁹ „Eine vollkommene Winckelfläche heisst von parer Ordnung, wenn sie aus zwei geschlossenen einfachen Winckelflächen (Scheitelflächen) besteht, und also ein Strahl, welcher die Fläche beschreibt, zuletzt wieder in seine anfängliche Lage kommt ; – von unparer Ordnung aber, wenn sie zugleich als eine einfache Winckelfläche betrachtet werden kann, und also ein Strahl, welcher die Fläche beschreibt, zuletzt in eine der anfänglichen entgegengesetzte Lage kommt, nämlich mit Verwechslung seiner beiden Hälften die ursprüngliche Stelle wieder einnimmt.“ [Staudt, 1847, 6]

peut en quelque sorte considérer entre le point et le plan, apparaît comme élément dans le faisceau de rayons alors qu'elle est le support des points dans la ponctuelle et qu'elle est la ligne d'intersection des plans dans le faisceau de plans. [...]

Etant donné que dans une gerbe de rayons, il y a une infinité de faisceaux de rayons ou de plans et que tous les plans qui ont en commun un rayon, forment un faisceau de plans, ce ne sont pas seulement les rayons qui apparaissent comme élément dans une gerbe de rayons mais aussi les plans [...].

Un plan, dans la mesure où il contient une infinité de ponctuelles et de faisceaux de rayons, s'appellera un système plan. Les systèmes plans et les gerbes de rayons (ainsi que les gerbes de demi-rayons) sont des formes fondamentales de deuxième espèce. Il leur correspond deux parties particulières de la géométrie, à savoir la géométrie du plan et celle de la gerbe de rayons. Les faisceaux de rayons apparaissent dans les systèmes plans comme l'ensemble de toutes les droites qui passent par un même point alors que dans les gerbes de rayons, ils apparaissent comme l'ensemble de toutes les droites qui sont situées dans un plan particulier.

La forme fondamentale de troisième espèce est le système espace ou l'espace illimité, dans lequel est concevable une infinité de formes fondamentales de première et deuxième espèce.¹⁰

La distinction entre espèce des formes fondamentales ne reposent pas chez von Staudt sur une notion implicite de paramètres dont dépendrait la définition des formes mais plus simplement sur le nombre de types d'éléments contenus dans une forme. Une forme fondamentale de première espèce ne contient qu'une sorte d'élément (le point pour la ponctuelle, le rayon pour le faisceau de rayons, le plan pour le faisceau de plans), une forme fondamentale de second espèce, deux sortes d'éléments (points et droites pour le système plan, rayons et plans pour la gerbe) et les formes fondamentales de troisième espèce contiennent trois sortes d'éléments (points, droites et plans). Il est important pour von Staudt de bien distinguer les différentes espèces de formes fondamentales ; en effet, il va non seulement développer une théorie des correspondances projectives entre

¹⁰ „Das gerade Gebilde, der Strahlenbüschel (oder auch Halbstrahlenbüschel) und der Ebenenbüschel (oder auch Halbebenenbüschel) sollen die einförmigen Grundgebilde oder die Grundgebilde der ersten Stufe heissen. Der Punkt kommt im geraden Gebilde, die Ebene aber im Ebenenbüschel als Element vor. Die Gerade, welche zwischen Punkt und Ebene gleichsam die Mitte hält, erscheint im Strahlenbüschel als Element, während sie am geraden Gebilde der Träger von Punkten und am Ebenenbüschel die Schnittlinie von Ebenen ist. [...]

Da in einem Strahlenbündel unendlich viele Strahlenbüschel oder Ebenen enthalten sind, alle Ebenen aber, welche einen Strahl mit einander gemein haben, einen Ebenenbüschel bilden, so erscheinen in einem Strahlenbündel nicht nur Strahlen sondern auch Ebenen als Elemente [...].

Eine Ebene soll, in so ferne unendlich viele gerade Gebilde und Strahlenbüschel in ihr enthalten sind, auch ein ebenes System heissen. Das ebene System und der Strahlenbündel (oder auch Halbstrahlenbündel) sind die Grundgebilde der zweiten Stufe. Es entsprechen ihnen zwei besondere Theile der Geometrie, nämlich die Geometrie der Ebene und die des Strahlenbündels. Der Strahlenbüschel erscheint im ebenen Systeme als der Inbegriff von allen Geraden, welche durch einen und denselben Punkt gehen, im Strahlenbündel aber als der Inbegriff von allen Geraden, welche in einerlei Ebene liegen.

Das Grundgebilde der dritten Stufe ist das räumliche System oder der unbegrenzte Raum, in welchem unendlich viele Grundgebilde der ersten und zweiten Stufe denkbar sind.“ [Staudt, 1847, 11-12]

formes fondamentales de première espèce, mais il en déduira aussi une théorie des correspondances projectives entre formes fondamentales de seconde espèce et de troisième espèce à partir desquelles il proposera sa définition des coniques et des surfaces du second ordre. Auparavant, von Staudt règle la question des éléments à l'infini et introduit le principe de dualité.

5.2.2 Les éléments à l'infini et la généralisation de la définition des formes fondamentales

Von Staudt associe aux notions de droites parallèles et de plans parallèles celles de *direction*¹¹ d'une droite et de *position*¹² d'un plan. Si une droite est parallèle à un plan, la direction de la droite est contenue dans la position du plan de sorte que deux directions déterminent une position qui les contient et deux positions déterminent une direction contenue dans celles-ci. Von Staudt n'insiste pas encore explicitement sur l'analogie entre les relations liant les points et les droites et celles liant les directions et les positions. Il définit seulement les notions de *faisceau de droites parallèles*, de *faisceau de plans parallèles* et de *gerbe de rayons parallèles* :

L'ensemble de toutes les droites, qui sont situées dans un même plan suivant une direction unique s'appelle un faisceau de rayons parallèles, l'ensemble de tous les plans qui ont même position s'appelle un faisceau de plans parallèles. Les faisceaux de rayons parallèles sont à considérer comme une catégorie particulière de faisceaux de rayons, les faisceaux de plans parallèles sont à considérer comme une catégorie particulière de faisceaux de plans. Un faisceau de rayons a, d'après cela, soit un centre, soit une direction déterminée, un faisceau de plans, soit un axe, soit une position déterminée.

L'ensemble de toutes les droites concevables ayant une même direction s'appellera une gerbe de rayons parallèles. Une gerbe de rayons parallèles contient non seulement une infinité de faisceaux de rayons parallèles mais aussi une infinité de faisceaux de plans parallèles. En effet, un plan appartient à toutes les gerbes de rayons dont il contient le centre ou la direction.¹³

Les notions de faisceaux et de gerbes ayant été ainsi généralisées, von Staudt étend aussi celle de projection : ainsi, une ponctuelle sera projetée suivant une direction différente de la sienne par un faisceau de droites parallèles ou suivant

¹¹„Richtung“.

¹²„Stellung“.

¹³„Der Inbegriff von allen Geraden, welche nach einerlei Richtung in einer und derselben Ebene liegen, heisst ein Parallelstrahlenbüschel, der Inbegriff von aller Ebenen aber, welche einerlei Stellung haben, ein Parallelebenenbüschel. Der Parallelstrahlenbüschel ist als eine besondere Art von Strahlenbüschel, der Parallelebenenbüschel als eine besondere Art von Ebenenbüschel zu betrachten. Ein Strahlenbüschel hat hiernach entweder einen Mittelpunkt oder eine bestimmte Richtung, ein Ebenenbüschel aber entweder eine Axe oder eine bestimmte Stellung.“

Der Inbegriff von allen nur denkbaren Geraden, welche eine und dieselbe Richtung haben, soll ein Parallelstrahlenbündel heissen. In einem Parallelstrahlenbündel sind also nicht nur unendlich viele Parallelstrahlenbüschel, sondern auch unendlich viele gewöhnliche Ebenenbüschel und Parallelebenenbüschel enthalten. Eine Ebene gehört nämlich jedem Strahlenbündel an, dessen Mittelpunkt oder Richtung sie enthält.“ [Staudt, 1847, 17]

une position qui ne contient pas sa direction par un faisceau de plans parallèles. De même, un système plan sera projeté suivant une direction qui n'est contenue dans celui-ci par une gerbe de rayons parallèles dont le plan sera une section. Seulement après avoir montré que les théorèmes concernant les faisceaux ou gerbes habituels se généralisent aux faisceaux de rayons ou plans parallèles et gerbes de rayons parallèles, von Staudt envisage pour des raisons de commodité linguistique d'introduire le vocabulaire des éléments à l'infini. A ses yeux, les objets fondamentaux de sa théorie sont les formes fondamentales ; de plus, en n'introduisant les éléments à l'infini pour rendre plus aisé l'énoncé des théorèmes, il évite toute discussion de type ontologique et surtout toute connotation métrique.

On peut conclure des théorèmes du [...] dernier paragraphe que dans de nombreux cas, un point sera remplacé par une direction, un plan par une position et donc que la direction d'une droite fait encore partie de ses éléments, que la position d'un plan ainsi que toutes les directions qu'il contient font encore partie de ses éléments. Deux droites qui sont situées dans un même plan ont, soit un point commun, soit même direction. Deux plans ont, soit une droite commune, soit même position. Un plan contient, soit un point, soit la direction d'une droite qui n'est pas située sur lui. En conséquence, il ne sera pas inapproprié d'introduire à la place de direction et de position d'autres expressions qui rappellent immédiatement celles qu'elles remplacent, et des théorèmes qui soient non seulement des modifications particulières des autres théorèmes mais aussi se présentent de la même manière.¹⁴

Von Staudt reprend alors l'exemple de la droite sécante à une autre droite qui tourne autour d'un point jusqu'à lui devenir parallèle, pour justifier l'appellation de *point à l'infini*. Il souligne alors en reprenant cet exemple que si l'on adjoint à une droite un point à l'infini, celle-ci apparaît comme une ligne fermée et que l'ordre des points est cyclique, c'est-à-dire que «parmi quatre points de celle-ci, seulement deux paires d'entre eux sont séparées»¹⁵. De plus, deux points *A* et *B* définissent sur la droite ainsi complétée qu'ils déterminent deux segments que von Staudt propose de noter *AB* et *B*A*.

Les termes de droites à l'infini et de plan à l'infini sont justifiées de la même manière : l'ensemble des points à l'infini d'un plan constitue une ligne (impropre) qui doit être appelée une droite puisque chaque droite du plan coupe cette ligne en un seul point, de même, la surface (impropre) constituée dans l'espace par les points à l'infini doit être appelée un plan. Von Staudt insiste alors sur l'intérêt de son point de vue pour l'énoncé des théorèmes ; la généralisation linguistique qu'il propose va permettre de réunir des théorèmes qui a priori sont différents :

¹⁴ „Aus den Sätzen des [...] letzten §. ist zu ersehen, dass in vielen Fällen ein Punkt durch eine Richtung, eine Gerade aber durch eine Stellung vertreten wird, und dass also zu den Elementen einer Geraden auch noch ihre Richtung, zu den Elementen einer Ebene aber auch noch ihre Stellung und alle in derselben enthalten Richtungen gehören. Zwei Gerade, welche in einerlei Ebene liegen, haben entweder einen Punkt gemein oder einerlei Richtung. Zwei Ebenen haben entweder einen Punkt gemein oder einerlei Stellung. Eine Ebene enthält von einer nicht in ihr liegenden Geraden entweder nur einen Punkt oder nur die Richtung. Es wird hiernach nicht unzuweckmässig seyn für Richtung und Stellung noch andere Ausdrücke einzuführen, welche an das, was sie vertreten, unmittelbar erinnern und Sätze, welche nur besondere Modificationen von andern sind, auch als solche bezeichnen.“ [Staudt, 1847, 23]

¹⁵ „[...]unter vier Punkten in ihr nur zwei Paar getrennte sind.“ [Staudt, 1847, 24]

Selon le point de vue présenté dans ce paragraphe, que l'on qualifiera, par opposition au point de vue habituel, de perspectif, des théorèmes souvent apparemment complètement différents seront rassemblés ; de plus, les exceptions qui font fréquemment obstacle à l'établissement des principes généraux, seront écartées.¹⁶

Une fois généralisées les définitions des formes fondamentales et celles de points, droites ou plans par l'introduction des expressions *point à l'infini*, *droite à l'infini* et *plan à l'infini*, von Staudt s'intéresse aux manières de rapporter une forme à une autre. Il adopte un point de vue très général en définissant une correspondance entre formes comme une application entre les éléments des formes et en envisageant des correspondances non seulement entre formes de première espèce mais aussi entre formes de seconde et de troisième espèce :

Deux formes fondamentales sont dites rapportées l'une à l'autre si, à chaque élément d'une des formes, est assigné un élément de l'autre forme, que l'on appellera son correspondant. Si la seconde d'un nombre quelconque de formes fondamentales est rapportée à la première, et si ainsi de suite, chaque forme est rapportée à une des précédentes, alors elles sont toutes rapportées les unes aux autres.¹⁷

A partir de maintenant, l'étude de la géométrie selon von Staudt est centrée autour de l'étude des correspondances entre formes. Toutes les notions, les nouveaux objets seront définis en utilisant la théorie des correspondances entre formes. Les premiers exemples de correspondances entre formes fondamentales évoqués par von Staudt sont ceux des sections et des projections, c'est-à-dire relève de la théorie de l'incidence : une ponctuelle qui est une section d'un faisceau de rayons, un faisceau de rayons qui est une section d'un faisceau de plans, deux faisceaux de rayons qui ont une même ponctuelle comme section, un système plan qui est une section d'une gerbe de rayons avec comme cas particulier, deux gerbes de rayons dont on associe les rayons qui ont même direction. La projection d'un point sur une droite (*droite de projection*) à partir d'une droite non coplanaire (*axe*) est définie comme le point d'intersection de la droite de projection avec le plan défini par le point et l'axe. De même, la projection d'une forme sur un plan (*plan de projection*) à partir d'un point extérieur à ce plan (*centre de projection*) est défini comme l'intersection du plan de projection et de l'image de la forme à partir du centre.

5.2.3 La dualité

Von Staudt aborde la question de la dualité (qu'il appelle *réciprocité*) par une simple constatation :

Les premiers théorèmes de la géométrie font déjà apparaître un certain principe de réciprocité ou de dualité selon lequel, dans l'espace,

¹⁶ „Durch die in diesem §. aufgestellte Ansicht, welche im Gegensatz zur gewöhnlichen die perspektivische heißen soll, werden oft anscheinend ganz verschiedene Sätze in eine Aussage zusammengefasst und die Ausnahmen beseitigt, welche ausserdem der Aufstellung allgemeiner Gesetze häufig im Wege stehen würden.“ [Staudt, 1847, 25]

¹⁷ „Zwei Grundgebilde heißen auf einander bezogen, wenn jedem Elemente eines jeden ein Element des andern zugewiesen ist, welches jenem entsprechend heisst. Wenn also von beliebig vielen Gebilden das zweite auf das erste und jedes folgende auf eines der vorgehenden bezogen ist, so sind alle auf einander bezogen.“ [Staudt, 1847, 25]

le point et le plan se présentent comme éléments réciproques (sont des concepts réciproques) ; chaque théorème dans lequel il n'ait fait aucune différence entre éléments propres et impropres donne naissance à un autre théorème qui résulte du premier en permutant les points et les plans (et par conséquent les ponctuelles et les faisceaux de plans, les segments et les angles dièdres, etc). On place ces théorèmes l'un en face de l'autre comme les deux parties d'un théorème unique.¹⁸

Von Staudt reprend comme Steiner les notations de Gergonne et écrit donc les théorèmes duaux sur deux colonnes. Les problèmes aussi peuvent s'énoncer de manière duale :¹⁹

Tracer par un point donné, une droite qui coupe deux droites données qui ne passent pas par le point donné et qui ne sont pas, toutes les deux, situées dans un même plan que le point donné.

Tracer dans un plan donné, une droite qui coupe deux droites données qui ne sont pas situées dans le plan donné et qui n'ont pas, toutes les deux, un point commun avec le plan.

Le principe de dualité est donc inhérent aux premières propriétés de l'incidence et se transporte donc naturellement aux propriétés des sections et projections. Comme toute sa théorie relève de celle de l'incidence, Von Staudt énoncera dans la suite de ces traités les théorèmes duaux en même temps. Souvent, il n'en démontrera qu'un sans préciser dans un premier temps si à ses yeux le principe de dualité implique que la démonstration de l'autre est identique et s'écrit simplement de manière duale ou si la déduction du théorème dual est une conséquence de ce principe. Le fait qu'il appelle «principe» cette propriété et la manière purement linguistique avec laquelle il a généralisé les définitions des formes fondamentales ou introduit les éléments à l'infini pourraient nous incliner à penser que pour von Staudt, le recours au principe de dualité est un argument démonstratif. Le fait qu'au début pour retrouver certains théorèmes classiques, il donne en parallèle des indications de démonstrations nous convaincrat plutôt que von Staudt veuille nous signifier qu'il développe deux théories parallèles. Peut-être ne faut-il y voir qu'une démarche pédagogique : habituer le lecteur à la dualité que von Staudt considérait comme particulièrement motivant :

Chaque enseignant qui attire l'attention de ses élèves sur le principe de dualité, fait l'expérience du fait que ce principe est, pour l'élève sensible à la géométrie, plus stimulant que n'importe quel théorème

¹⁸„Schon die ersten Sätze der Geometrie lassen ein gewissen Gesetz der Reciprocität oder Dualität erkennen, nach welchem im Raum der Punkt und die Ebene einander gegenüberstehen (reciproke Begriffe sind), und jeder Satz, in welchem zwischen eigentlichen und uneigentlichen Elementen kein Unterschied gemacht wird, seine Ergänzung in einem andern findet, der aus dem erstern hervorgeht, wenn man Punkt und Ebene (also auch gerades Gebilde und Ebenenbüschel, Strecke und Flächenwinkel u.s.w.) mit einander vertauscht.“ [Staudt, 1847, 30]

¹⁹„Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche zwei gegebene Gerade, von welchen keine durch den gegebenen Punkt geht, und welche auch nicht beide mit ihm in einer und derselben Ebene liegen, schneide.

In einer gegebenen Ebene eine Gerade zu ziehen, welche zwei gegebene Gerade, von welchen keine in der gegebenen Ebene liegt, und welche auch nicht beide mit ihr einen und denselben Punkt gemein haben, schneide.“ [Staudt, 1847, 32]

particulier.²⁰

Von Staudt considérera comme définitivement justifié le principe de dualité en tant que principe de démonstration après avoir défini les correspondances projectives réciproques (corrélatives) entre formes fondamentales de troisième espèce. Ainsi, il obtient dans un même mouvement démonstratif les théorèmes de Desargues :

Si deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$ rapportés l'un à l'autre sont situés dans un même plan et n'ont aucun élément en commun, et si²¹

les trois points en lesquels deux côtés homologues se coupent, sont situés sur une même droite u , qui n'est pas le côté d'un des deux triangles, alors les deux triangles sont en perspective et donc les trois droites qui joignent deux sommets homologues, se coupent en un même point. – En effet, si on projette le triangle ABC sur n'importe quel autre plan passant par la droite u , alors on obtient un troisième triangle $A_2B_2C_2$ qui est aussi [...] une projection du triangle $A_1B_1C_1$.

les trois droites qui joignent deux sommets homologues, se coupent en même point S , qui n'est pas le sommet d'un des deux triangles, alors les deux triangles sont en perspective et donc, les trois en lesquels se coupent deux côtés homologues, sont situés sur une même ligne. – En effet, si on projette le triangle ABC à partir de n'importe quel point M , et le triangle $A_1B_1C_1$ à partir d'un autre point de la droite MS , alors on obtient deux 3-arêtes, qui [...] sont l'image d'un même troisième triangle $A_2B_2C_2$.

²⁰„Dass aber das Gesetz der Reciprocität jeden für die Geometrie empfänglichen Schüler mehr anrege, als irgend ein einzelner Satz, wird jeder Lehrer erfahren, der seine Schüler auf dasselbe aufmerksam macht.“ [Staudt, 1847, IV]

²¹„Wenn zwei auf einander bezogene Dreiecke ABC , $A_1B_1C_1$ in einerlei Ebene liegen, aber kein Element mit einander gemein haben, und die drei Punkte, in deren jedem ein Paar homologe Seiten sich schneiden, in einer und derselben Geraden u liegen, welche von keinem der beiden Dreiecke eine Seite ist, so liegen die Dreiecke perspektivisch, daher auch die drei Geraden, deren jede ein Paar homologe Eckpunkte verbindet, in einem Punkte sich schneiden. – Projicirt man nämlich das Dreieck ABC auf irgend eine andere durch die Gerade u gehende Ebene, so erhält man ein drittes Dreieck $A_2B_2C_2$, von welchem [...] auch das Dreieck $A_1B_1C_1$ eine Projektion ist.

die drei Geraden, deren jede ein Paar homologe Eckpunkte verbindet, in einem und demselben Punkte S sich schneiden, welcher von keinem der beiden Dreiecke ein Eckpunkt ist, so liegen die Dreiecke perspektivisch, daher auch die drei Punkte, in deren jedem ein Paar homologe Seiten sich schneiden, in einer Geraden liegen. – Projicirt man nämlich das Dreieck ABC aus irgend einem Punkte M und das Dreieck $A_1B_1C_1$ aus einem andern Punkte M_1 der Gerade MS , so erhält man zwei Dreiecke, welche Scheine eines und deselben dritten Dreiecks $A_2B_2C_2$ sind.“ [Staudt, 1847, 41]

Il déduit de la même manière les deux théorèmes duaux du quadrangle complet et du quadrilatère complet :²²

91. Si deux quadrangles complets rapportés l'un à l'autre sont situés dans un même plan et si les points, en lesquels une droite u , qui ne passe par aucun des sommets, est coupée par cinq côtés d'un des quadrangles, sont les mêmes que ceux en lesquels les cinq côtés homologues de l'autre triangle la coupent, alors les quadrangles sont en perspective et donc, les côtés restants coupent aussi la droite en un même point, etc.

Si deux quadrilatères complets rapportés l'un à l'autre sont situés dans un même plan et si les rayons qui projettent cinq sommets d'un des quadrilatères à partir d'un point S qui n'est situé sur aucun des côtés, sont les mêmes qui projettent à partir du même point les cinq sommets homologues de l'autre triangle, alors les quadrilatères sont en perspective et donc, les deux sommets restants sont aussi projetés à partir de ce point par un même rayon, etc.

5.3 Une théorie purement géométrique des correspondances projectives entre formes fondamentales de première espèce

5.3.1 Les formes harmoniques

Von Staudt introduit la notion d'harmonicité à partir du théorème du quadrangle complet ; étant donné trois points A, B, C alignés sur une droite d , si on construit un quadrilatère tel que deux côtés opposés coupent la droite d en A et C et qu'une diagonale passe par B , alors l'autre diagonale coupe la droite d en un point D indépendant du quadrilatère (qui ne dépend que de A, B, C). De plus les points A, C séparent les points B, D . Les points A, B, C, D constituent une *ponctuelle harmonique* et propose de dire que AC séparent harmoniquement BD . Une ponctuelle harmonique est projetée à partir d'un point S en un *faisceau de rayons harmoniques* et toute section d'un faisceau de rayons harmoniques est une ponctuelle harmonique. De même, une ponctuelle harmonique est projetée à partir d'un axe ou une faisceau de rayons harmoniques à partir d'un point en un *faisceau de plans harmoniques* dont les sections par une droite sont une ponctuelle harmonique et celles par un plan un faisceau de rayons harmoniques. Von Staudt montre donc que la notion d'harmonicité concerne toutes les formes fondamentales de première espèce et qu'elle est conservée par projec-

²²„Wenn zwei auf einander bezogene vollständige Vierecke in einerlei Ebene liegen, und eine Gerade u , welche durch keinen ihrer Eckpunkte geht, von fünf Seiten des einen Vierecks in denselben Punkten geschnitten wird, in welchen die homologen Seiten des andern sie schneiden, so liegen die Vierecke perspektivisch, daher auch ihrer beiden übrigen Seiten jene Gerade in einem und demselben Punkte schneiden u.s.w.“

Wenn zwei auf einander bezogene vollständige Vierecke in einerlei Ebene liegen, und aus einem Punkte S , welcher in keiner ihrer Seiten liegt, fünf Eckpunkte des einen Vierecks durch dieselben Strahlen projicirt werden, welche aus ihm die homologen Eckpunkte des andern projiciren, so liegen die Vierecke perspektivisch, daher auch ihre beiden übrigen Eckpunkte aus jenem Punkte durch einen und denselben Strahl projicirt werden u.s.w.“ [Staudt, 1847, 42]

tion et section. La méthode de construction du quatrième harmonique permet immédiatement de déduire que si $ABCD$ est une forme harmonique alors de même $BCDA$, $CDAB$, $CDAB$, $DABC$, $DCBA$, $CBAD$, $BADC$ et $ADCB$ sont aussi des formes harmoniques.

5.3.2 Les correspondances projectives entre formes univoques

Von Staudt propose alors une nouvelle définition des correspondances projectives à partir de la propriété de conservation des formes harmoniques ; il introduit en même temps le signe $\overline{\wedge}$:

Deux formes fondamentales univoques sont dites projectives ($\overline{\wedge}$) entre elles si elles sont rapportées l'une à l'autre de telle manière qu'à toute forme harmonique de l'une corresponde une forme harmonique de l'autre.

Si parmi un certain nombre de formes, la seconde est projective de l'autre, chaque suivante de la précédente, alors elles sont toutes projectives entre elles.²³

Von Staudt signale alors que la notion de projectivité est plus générale que celle de perspective. Deux formes sont perspectives si l'une est section ou la projection de l'autre ou si elles sont sections ou projections d'une même troisième. En particulier, il en déduit le théorème suivant qui donne en même temps un premier exemple de formes fondamentales projectives qui ne sont pas perspectives et signale la possibilité pour une correspondance projective d'une forme fondamentale sur elle-même d'avoir un ou deux éléments invariants (*éléments correspondants communs*) : Si on projette dans un plan²⁴

²³ „Zwei einförmige Grundgebilde heissen zu einander projektivisch ($\overline{\wedge}$), wenn sie so auf einander bezogen sind, dass jedem harmonischen Gebilde in dem einen ein harmonisches Gebilde im andern entspricht.

Wenn von beliebig vielen Gebilden das zweite dem ersten, jedes folgende einem der vorhergehenden projektivisch ist, so sind alle zu einander projektivisch.“ [Staudt, 1847, 49]

²⁴ „Projicirt man in einer Ebene

ein gerades Gebilde u aus zwei Punkten S_1, S_2 auf eine und dieselbe andere Gerade v , so erhält man zwei zu einander projektivische gerade Gebilde u_1, u_2 , welche in einer und derselben Geraden v liegen und einen oder zwei Punkte entsprechend gemein haben, je nachdem die Geraden u, v, S_1S_2 in einem Punkte oder in drei Punkten sich schneiden.

zwei gerade Gebilde, welche Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels sind, aus einem und demselben andern Punkte, so erhält man zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel, welche concentrisch sind und einen oder zwei Strahlen entsprechend gemein haben, je nachdem der Schittpunkt der geraden Gebilde mit den beiden Mittelpunkten der drei Büschel in einer oder nicht in einer und derselben Geraden liegt.“ [Staudt, 1847, 50]

une ponctuelle u sur une autre droite v à partir de deux points S_1, S_2 , on obtient deux ponctuelles projectives u_1, u_2 qui sont situées sur une même droite v et qui ont un ou deux points correspondants communs, selon que les droites u, v, S_1S_2 se coupent en un point ou en trois points.

à partir d'un même point, deux ponctuelles, qui sont des sections d'un même faisceau de rayons, on obtient deux faisceaux projectifs de rayons, qui sont concentriques et qui ont un ou deux rayons correspondants communs, selon que le point d'intersection des ponctuelles est ou n'est pas situé sur une même droite que les deux centres des trois faisceaux.

Von Staudt propose alors une démonstration adaptée à la définition des correspondances projectives qu'il vient de donner du théorème fondamental de la géométrie projective. Cette démonstration est incomplète et provoquera une discussion initiée par Klein sur la question de la continuité de la droite (et des formes fondamentales). Vue l'importance de cette discussion pour l'histoire des fondements de la géométrie projective, nous citons intégralement la démonstration de von Staudt :

Si deux formes fondamentales uniformes projectives ont trois éléments correspondants communs, alors tous leurs points sont correspondants communs.

Il est suffisant de considérer deux ponctuelles situées sur une même droite. Si les ponctuelles ont comme points correspondants communs, les points A, B ainsi que tous les points du segment AB , elles auront aussi (103) comme point correspondant, tout point qui est séparé harmoniquement d'un point du segment AB par les points A, B , c'est-à-dire tous les points du segment B^*A . Si les ponctuelles n'ont aucune suite continue d'éléments correspondants communs et ont pourtant plus de deux éléments correspondants communs, alors si A, B sont deux éléments correspondants communs successifs, le premier des deux segments AB, B^*A ne contiendra aucun élément correspondant commun et l'autre en contiendra au moins un, P ; ce qui est une contradiction, puisque il y a dans le segment AB , un point Q qui est séparé harmoniquement du point P par les points A, B . Si tous les éléments de l'une ne coïncident pas avec leur élément homologue de l'autre, deux formes fondamentales uniformes projectives ne peuvent avoir qu'au plus deux éléments correspondants communs.²⁵

S. 51

²⁵„Wenn zwei projektivische einförmige Gebilde drei Elemente entsprechend gemein haben, so haben sie alle ihre Elemente entsprechend gemein.“

Es ist hinreichend, zwei projektivische gerade Gebilde zu betrachten, welche in einer und derselben Geraden liegen. Haben nun die Gebilde die Punkte A, B und jeden Punkt der Strecke AB entsprechend gemein, so haben sie auch jeden Punkt, welcher von einem Punkte dieser Strecke durch die Punkte A, B harmonisch getrennt ist, nämlich jeden Punkt der Strecke B^*A entsprechend gemein. Würden aber die Gebilde keine stetige Aufeinanderfolge von Elementen, jedoch mehr als zwei einzelne Elemente entsprechend gemein haben, so würde, wenn A, B aufeinanderfolgende sind, die eine von den beiden Strecken AB, B^*A gar kein, die andere aber wenigstens ein sich selbst entsprechendes Element P enthalten, was auf einen Widerspruch führt, da es in der Strecke AB einen Punkt Q giebt, welcher vom Punkte P durch die Punkte A, B harmonisch getrennt ist. Zwei projektivische einförmige Gebilde können also, wenn nicht jedes Element des einen mit dem homologen Elemente des andern zusammenfallen

Von Staudt prouve que si deux ponctuelles projectives ayant même support ont trois points invariants, alors tout segment borné par des points invariants contient au moins un point invariant intérieur. Pour obtenir alors le théorème qu'il souhaite il faut alors montrer que la suite harmonique déterminée par trois points (c'est-à-dire la suite de points que l'on obtient en déterminant successivement les quatrièmes harmoniques des points de la suite) est dense dans l'ensemble des points de la droite et que les correspondances projectives sont continues en tant que transformation ponctuelle. Dans les années 1870-80, de nombreux mathématiciens comme Klein, Lüroth, Zeuthen, Darboux, Schur ... tenteront de sauver cette démonstration (et par là le point de vue purement synthétique de von Staudt). Cette discussion sera étudiée dans le chapitre **réf-érence**). Von Staudt était peut-être conscient du caractère lacunaire de sa démonstration; en effet, après avoir montré que les correspondances projectives entre ponctuelles pouvaient se décomposer en produit de projections, il signale qu'«on justifie ainsi non seulement le terme de *projectif*, mais on montre en même temps qu'à une suite continue d'éléments de la première forme uniforme correspond une suite continue d'éléments de l'autre»²⁶. La projection (à partir d'un centre) d'un segment sur une droite étant un segment, le correspondant projectif d'un segment est donc aussi un segment. Bien entendu, cette remarque est circulaire puisqu'elle utilise le théorème fondamental de la géométrie projective. Cependant, il n'en reste pas moins qu'en général, von Staudt considère comme évident toutes les questions relevant du continu géométrique, de la continuité des déplacements des points sur les lignes ou des droites le long d'une ligne alors qu'il prend de donner en incise une justification a posteriori de la continuité des correspondances projectives.

Von Staudt déduit immédiatement de ce premier théorème que pour rapporter projectivement deux formes fondamentales uniformes, il suffit de déterminer trois paires d'éléments correspondants et qu'une relation projective entre deux ponctuelles n'ayant pas un même support peut être considérée comme la composition de trois projections. Si les ponctuelles projectives ont même support, la décomposition de la correspondance projective s'effectue au moyen de quatre projections. Une fois effectuée cette réduction, von Staudt peut considérer qu'il a accompli une première étape de son programme, il a non seulement défini la notion de correspondance projective entre forme fondamentale uniforme sans faire la moindre référence à la mesure des segments ou des angles, mais il a démontré le théorème fondamental de la géométrie projective et surtout grâce à la décomposition des correspondances projectives en produit de projection, il est sûr et convainc son lecteur qu'il retrouve les mêmes correspondances que ces prédécesseurs.

La remarque sur la continuité des correspondances projectives permet à von Staudt de justifier que si deux éléments homologues parcourt deux formes projectives en restant homologues alors lorsque le premier élément parcourt la première forme, le second décrit la seconde. Si les formes ont même support, il distingue alors les correspondances directement projectives et indirectement projectives selon que le mouvement des éléments homologues est de même sens ou de sens contraire. Il

soll, höchstens zwei Elemente entsprechend gemein haben.“ [Staudt, 1847, 50-51]

²⁶ „Es ist hierdurch nicht nur der Ausdruck *projektivisch* erklärt, sondern zugleich bewiesen, dass jeder stetigen Aufeinanderfolge von Elementen in dem einen von zwei zu einander projektivischen einförmigen Gebilden eine stetige Aufeinanderfolge von Elementen im andern entspricht.“ [Staudt, 1847, 55]

en déduit que deux formes indirectement projectives ont deux points invariants qui séparent harmoniquement chaque paire de points correspondants.

Enfin, Von Staudt étend le vocabulaire des correspondances projectives aux formes quelconques :

Dire que deux formes G, G_1 composées d'éléments isolés, sont projectives, ne signifie rien d'autre que deux formes fondamentales peuvent être projectives de telle manière que la forme G dans la première correspondance à la forme G_2 dans la seconde.²⁷

En particulier, toute pontuelle constituée de quatre éléments est projective avec ses permutations qui sont obtenues en permutant ses éléments deux à deux ; ainsi

$$ABCD \bar{\wedge} BADC \bar{\wedge} CDAB \bar{\wedge} DCBA.$$

5.3.3 Les relations projectives entre formes fondamentales de seconde espèce et entre système-espace

Von Staudt généralise la notion de correspondances projectives aux formes de seconde et troisième espèce. Il définit en utilisant seulement les notions d'incidence les nouvelles relations. Par exemple, deux systèmes plans seront *colinéaires*²⁸ si il correspond à tout point P et toute droite d tels que P soit situé sur d du premier système plan, un point P_1 et une droite d_1 tels que le point P_1 soit situé sur la droite d_1 . Plus généralement, «deux formes fondamentales de deuxième espèce ou encore deux systèmes-espace sont dits colinéaires s'ils sont rapportés l'un à l'autre de telle manière que deux éléments P, q d'espèces différentes du premier système tels que le premier appartiennent au second correspondent à deux éléments P_1, q_1 d'espèce différentes du second système, tels que le premier P_1 soit également situé sur le second».²⁹

De manière similaire, deux systèmes plans seront *réciproques*³⁰ si il correspond à tout point P et toute droite d tels que P soit situé sur d du premier système plan, une droite P_1 et un point d_1 tels que la droite P_1 passe par le point d_1 . Plus généralement, «deux formes fondamentales de deuxième espèce ou encore deux systèmes-espace sont dits réciroques s'ils sont rapportés l'un à l'autre de telle manière que deux éléments P, q d'espèces différentes du premier système tels que le premier appartiennent au second correspondent à deux éléments P_1, q_1 d'espèce différentes du second système, tels que le premier P_1 passe par le second».³¹

²⁷„Werden zwei Gebilde G, G_1 , von welchen etwa jedes nur aus einzelnen Elementen besteht, projektivisch genannt, so heisst diess nicht anderes, als dass zwei Grundgebilde projektivisch so aufeinander bezogen werden können, dass dem Gebilde G in dem einen das Gebilde G_1 im andern entspricht.“ [Staudt, 1847, 57]

²⁸Les *colinéations* de von Staudt correspondent aux *homographies* de Chasles.

²⁹„Zwei Grundgebilde der zweiten Stufe oder auch zwei räumliche Systeme heissen collinear, wenn sie so aufeinander bezogen sind, dass je zwei ungleichartigen Elementen P, q des einen Systems, von welchen das erstere P im letztern liegt, zwei ungleichartige Elemente P_1, q_1 des andern entsprechen, von welchen das erstere P_1 ebenfalls im letztern liegt.“ [Staudt, 1847, 60]

³⁰Les *réciprocités* de von Staudt correspondent aux *corrélations* de Chasles.

³¹„Zwei Grundgebilde der zweiten Stufe oder auch zwei räumliche Systeme heissen reciprok, wenn sie so aufeinander bezogen sind, dass je zwei ungleichartigen Elementen P, q des einen Systems, von welchen das erstere P im letztern liegt, zwei ungleichartige Elemente P_1, q_1 des andern entsprechen, von welchen das erstere P_1 durch das letztere geht.“ [Staudt, 1847, 60]

Comme deux systèmes réciproques d'un même troisième sont colinéaires, la théorie des systèmes colinéaires est contenue dans celle des systèmes réciproques. D'autre part, pour les formes fondamentales de seconde espèce, il suffit de considérer les systèmes plans puisque pour étudier les gerbes en tant que formes fondamentales, on peut toujours se ramener à des sections de celles-ci.

Von Staudt considère que l'on peut déduire immédiatement des définitions que «deux systèmes, qui sont soit colinéaires, soit réciproques, sont aussi dits projectifs entre eux, puisque dans les deux cas, à chaque forme harmonique du premier système correspond une forme harmonique de l'autre, et donc deux quelconques formes uniformes homologues sont projectives»³². Pour Von Staudt, cette propriété est évidente puisque la notion d'harmonicité a été définie par des considérations d'incidence. Dans le cas emblématique des systèmes plans réciproques, la forme correspondant à un quadrilatère complet est la forme duale soit un quadrangle complet et il correspond donc à une ponctuelle harmonique un faisceau de rayons harmoniques. Von Staudt adopte ici le style pédagogique qu'il affectionne et qu'il utilise très souvent : en effet, il ne donne pas de démonstration explicite de cette propriété ; par contre, les exemples qu'il donne permettent au lecteur de la trouver par lui-même sans difficulté.

Von Staudt déduit de cette propriété que si deux formes fondamentales colinéaires de seconde espèce admettent quatre éléments de même espèce invariants tels que trois d'entre eux ne soient pas situés sur une même forme fondamentale de première espèce, alors tous les éléments sont invariants. De même, si deux systèmes-espace colinéaires ont cinq points invariants tels que quatre d'entre eux ne soit pas situés dans un même plan ou cinq plans invariants dont quatre d'entre eux ne passent pas par un même point.

Von Staudt en déduit deux manières de construire des correspondances projectives entre formes fondamentales de seconde espèce : la première consiste à rapporter deux formes uniformes de la première forme à deux formes uniformes de la seconde de manière que leurs éléments communs se correspondent. La seconde consiste à mettre en correspondance quatre éléments de même espèce de la première forme dont trois d'entre eux n'appartiennent pas à une même forme uniforme avec quatre éléments de même espèce de la seconde forme disposés de même. Ainsi, un quadrangle plan complet et un quadrilatère complet sont toujours réciproques. De même, il suffit pour obtenir deux systèmes-espace réciproques, il suffit de mettre en correspondance cinq points du premier système-espace dont quatre quelconques d'entre eux ne sont pas situés dans un même plan et cinq plans du second système-espace tels que quatre quelconques d'entre eux ne passent pas par un même point. Von Staudt en conclut que le principe de réciprocité est donc prouvé puisque l'on peut toujours considérer deux systèmes-espace comme réciproques. Il est donc suffisant de prouver un seul de deux théorèmes duaux.

Von Staudt conclut le chapitre dans lequel il introduit les correspondances projectives entre formes de seconde ou de troisième espèce par une remarque d'ordre épistémologique. En effet, en même temps qu'il développe de manière purement géométrique les différentes notions fondamentales de la géométrie, Von Staudt essaie d'organiser le corpus des théorèmes ; ainsi, il situait dès la préface son

³² „Zwei Systeme, welche entweder collinear oder reciprok sind, heissen auch zu einander projektivisch, weil in beiden Fällen jedem harmonischen Gebilde in dem eine Systeme ein harmonisches Gebilde im andern entspricht, und also je zwei homologe einförmige Gebilde zu einander projektivisch sind.“ [Staudt, 1847, 61]

entreprise en amont de l'exposé de la géométrie métrique, il concluait que la géométrie du plan et celle de la gerbe étaient deux parties autonomes de la géométrie dont les théorèmes sont liés par le principe de dualité; de la même manière, il subordonne le point de vue affine au point de vue projectif en définissant deux systèmes affines comme deux systèmes colinéaires dont les éléments à l'infini se correspondent.

Si l'on considère deux systèmes plans réciproques, il correspond à une droite un faisceau de rayons, plus généralement à une ligne une «suite continue de droites». Von Staudt propose d'étendre la notion de faisceau à ces systèmes de droites :

Si on entend la notion de faisceau dans un sens plus large, alors on peut appeler chaque suite continue de droites, qui sont situées dans un même plan, un faisceau de droites et chaque suite continue de plans, un faisceau de plans. Alors, dans deux systèmes plans réciproques, il correspond à chaque ligne (suite continue de points), un faisceau de rayons et dans deux systèmes-espaces réciproques, il correspond à chaque ligne, un faisceau de plans, à chaque surface conique, un faisceau de rayons et en général, à chaque suite continue de droites, une autre suite continue de droites. [...]

Si on fait tourner dans le premier de deux systèmes plans réciproques, deux rayons autour de deux points fixes A , B , de telle manière que leur point d'intersection décrive une ligne s , alors la droite correspondant à ce point dans l'autre système décrit, en même temps que ses traces sur deux droites fixes A_1 , B_1 se déplacent, le faisceau de rayons s_1 qui correspond à la ligne s et qui, si celle-ci est fermée, se ferme lui-même.³³

Von Staudt généralise de même la notion de gerbe : étant donné deux systèmes espaces réciproques, il correspond à chaque surface du premier système une *gerbe de plans* « qui est l'ensemble de tous les plans correspondant chacun à un point de la surface »³⁴. Avant d'exposer sa théorie des coniques, von Staudt tente de donner une caractérisation géométrique d'une propriété de régularité pour les courbes, à savoir ne posséder en chaque point qu'une seule tangente; en fait, la méthode utilisée par von Staudt montre qu'il ne considère que des courbes régulières par morceaux. Il admet que tout point (intérieur) d'une courbe peut être considéré comme l'extrémité d'une partie AB de la courbe et le point initial d'une partie BC de la courbe qui ne sont coupées par tout plan passant par B en plus de deux points lorsque la courbe est gauche ou qui ne sont coupées par

³³„Nimmt man den Begriff Büschel im weitern Sinne, so kann man jede stetige Aufeinanderfolge von Geraden, welche in einerlei Ebene liegen, einen Strahlenbüschel und jede stetige Aufeinanderfolge von Ebenen einen Ebenenbüschel nennen. Es entspricht alsdann in zwei reciproken ebenen Systemen jeder Linie (stetigen Aufeinanderfolge von Punkten) ein Strahlenbüschel, in zwei reciproken räumlichen Systemen aber jeder Linie ein Ebenenbüschel, jeder Kegelfläche ein Strahlenbüschel und überhaupt jeder stetigen Aufeinanderfolge von Geraden wieder eine stetige Aufeinanderfolge von Geraden. [...]

Lässt man in dem einen von zwei reciproken ebenen Systemen zwei Strahlen um zwei feste Punkte A , B sich drehen, so dass ihr Schnittpunkt irgend eine Linie s beschreibt, so beschreibt die diesem Punkte entsprechende Gerade des andern Systems, indem ihre Spure in zwei festen Geraden A_1 , B_1 sich bewegen, den Strahlenbüschel s_1 , welcher der Linie s entspricht, und, wenn diese geschlossen ist, ebenfalls sich schliesst.“ [Staudt, 1847, 72-73]

³⁴„[...] ein Ebenenbündel, welcher der Inbegriff von allen den Ebenen ist, deren jede einem Punkte jener Fläche entspricht.“ [Staudt, 1847, 73]

toute droite passant par B en plus de deux points lorsque la courbe est plane. Cette hypothèse exclut bien entendu les courbes continues non-différentiables.³⁵ En projetant à partir du centre B sur un tel plan, les courbes AB et BC , on obtient deux angles plans dont l'extrémité du premier et le côté initial du second passent par le point B . Von Staudt propose de dire que ces droites *s'appliquent* sur la courbe ou qu'elles projettent à partir du point B le point qui coïncide avec le point B .³⁶ Une *asymptote* est une droite qui s'applique en un point à l'infini d'une courbe. Il définit de même les plans qui s'appliquent sur une courbe gauche comme les plans extrémaux des angles dièdres qui projette la courbe à partir de la droite qui s'applique sur la courbe en B . Von Staudt ne considérera alors que des courbes telles qu'il n'y ait «qu'une seule droite et un seul plan qui s'appliquent sur la courbe en chaque point de la courbe par lequel celle-ci ne passe qu'une fois³⁷ ce qui lui permet de définir la surface réglée qui s'applique sur une courbe gauche ou le faisceau de rayons qui s'appliquent sur une courbe plane comme «la suite continue des droites» qui s'appliquent sur cette courbe; le faisceau de plans qui s'applique sur une courbe gauche ou une surface conique est défini comme la suite des plans qui s'appliquent sur celles-ci. Chacun de ces systèmes sont intrinsèquement liés mais aussi constitue des entités qui peuvent être étudiées pour elles-mêmes :

Si on désigne une courbe gauche par s , il faudra entendre par la surface réglée s , la surface réglée s'appliquant sur la surface s et par le faisceau de plans s , le faisceau de plans s'appliquant sur la surface réglée s (ou sur la courbe s). Les trois éléments connexes B des trois formes s sont un point B de la courbe s , la droite B qui s'applique sur la courbe en ce point et le plan B qui s'applique sur la surface réglée le long de cette droite (et par conséquent, sur la courbe s au point B). Le point B est à considérer comme le centre de la droite B , et cette droite comme l'axe du plan B . Si trois éléments connexes P se déplacent de telle manière que le point P décrive la courbe s , et donc que la droite P décrivent la surface réglée et le plan P , le faisceau de plans s , alors le point P se déplace sur la droite P , tandis que la droite P tourne dans le plan P autour du point P et que le plan P tourne autour de la droite P .

Si s est une courbe plane (tous les plans du faisceau de plans s coïncident), et que le point P décrive la courbe s et que par conséquent, la droite P décrive le faisceau de rayons s , alors le point P se déplace sur la droite P tandis que la droite P tourne dans le plan fixe s autour de ce point.³⁸

³⁵En 1847, cette imprécision est relativement normale puisque la réflexion sur les fonctions continues nulle part différentiables ne faisait que commencer. A fortiori, en géométrie, il n'était guère envisageable à cette époque d'imaginer des courbes continues que l'on ne pouvait pas dessiner.

³⁶Von Staudt n'utilise que très rarement le terme «tangente» et uniquement lorsqu'il étudie les courbes et les surfaces du second ordre.

³⁷L'hypothèse de von Staudt n'exclut pas complètement la possibilité que les courbes présentent des points singuliers; on peut penser qu'il en est conscient puisqu'il consacra un chapitre à caractériser les points de rebroussement des courbes.

³⁸„Wird eine gewundene Curve durch s bezeichnet, so ist unter der Regelfläche s die der Curve s sich anschmiegende Regelfläche und unter dem Ebenenbüschel s der der Regelfläche s (oder der Curve s) sich anschmiegende Ebenenbüschel zu verstehen. Drei zusammengehörige Elemente B der drei Gebilde s sind ein Punkt B der Curve s , die in diesem Punkte der

Von Staudt montre alors que ces systèmes associés à une courbe (régulière) se correspondent dans deux systèmes réciproques ; ainsi, dans deux systèmes plans réciproques, une courbe ABC a pour correspondant un faisceau de rayons $A_1B_1C_1$ qui s'applique sur une courbe $A_1B_1C_1$ correspondant elle-même au faisceau de rayons ABC qui s'applique sur ABC . De même, si un système plan et une gerbe de rayons sont réciproques, un faisceau de plans correspond à toute courbe du plan et la surface conique sur laquelle s'applique ce faisceau de plan correspond au faisceau de rayons qui s'applique sur la surface. Si l'on considère deux systèmes espaces réciproques, chaque courbe gauche ABC correspond à un faisceau de plans $A_1B_1C_1$ qui s'applique sur une surface réglée $A_1B_1C_1$ qui en tant qu'ensemble de droites correspond à la surface réglée qui s'applique sur la courbe ABC et qui en tant qu'ensemble ponctuel correspond au faisceau de plans qui s'applique sur la courbe ABC .

5.4 La théorie des coniques et des surfaces du second ordre de von Staudt

L'étude des systèmes réciproques va permettre à von Staudt de développer une théorie générale des coniques et des surfaces du second ordre fondée sur les propriétés de correspondances projectives particulières : les *polarités*. Cette théorie dont on déduit immédiatement celle de Steiner a l'avantage sur celle-ci de lier l'étude des coniques et celle des systèmes polaires.

5.4.1 Les involutions

Le premier pas du programme de von Staudt est la définition de la notion d'involution. Von Staudt propose de dire que deux éléments P, P_1 de deux formes fondamentales projectives de même nature (et donc superposables) se correspondent doublement «s'il correspond à l'élément P de la première forme l'élément P_1 de la seconde et s'il correspond à l'élément P_1 de la première, l'élément P de la seconde»³⁹ ; von Staudt introduit à cette occasion le signe $\bar{\lambda}$. Deux formes fondamentales projective sont dites en *situation involutive* si tous leurs éléments se correspondent doublement. Plus généralement, deux formes projectives de même espèce mais de nature différente (une ponctuelle et un

Curve sich anschmiegende Gerade B und die in dieser Gerade der Regelfläche s (also im Punkte B der Curve s) sich anschmiegende Ebene B . Der Punkte B ist als der Mittelpunkt der Geraden B , diese Gerade aber als die Axe der Ebene B zu betrachten. Bewegen sich drei zusammengehörige Element P , so dass der Punkt P die Curve s , also die Gerade P die Regelfläche s und die Ebene P den Ebenenbüschel s beschreibt, so bewegt sich der Punkt P in der Geraden P , während die Gerade P in der Ebene P um den Punkt P und die Ebene P die Gerade P sich dreht.

Wenn s eine ebene Curve ist (alle Ebenen des Ebenenbüschel s in einander fallen), und der Punkt P die Curve s , also die Gerade P den Strahlenbüschel s beschreibt, so bewegt sich der Punkt P in der Geraden P , während diese Gerade in der festen Ebene s um jenen Punkt sich dreht.“ [Staudt, 1847, 75-76]

³⁹„[...] nämlich dem Elemente P des einen Gebildes das Elemente P_1 des andern und dem Elemente P_1 des erstern das Elemente des letztern entspricht.“ [Staudt, 1847, 118]

faisceau de rayons, un système plan et une gerbe) seront dit en situation involutive si l'une des deux est en situation involutive avec une section de l'autre. Deux formes fondamentales de première espèce projectives dont deux éléments se correspondent doublement, alors les formes sont en situation involutive. En effet, si A, A_1 se correspondent doublement, alors pour toute paire d'éléments correspondants B, B_1 , on a $AA_1BB_1 \bar{\wedge} A_1AB_1B$. Von Staudt en déduit immédiatement que le nombre d'éléments doubles d'une forme fondamentale de première espèce involutive est zéro ou deux :

Soit une forme uniforme involutive (215) ne contient aucun élément qui coïncide avec son élément correspondant, soit elle contient deux éléments (éléments doubles) qui sont, chacun, leur propre correspondant, selon que deux éléments correspondants sont ou ne sont pas séparés par deux autres éléments analogues. Dans le dernier cas, les éléments doubles M, N sont harmoniquement séparés par deux éléments correspondants quelconques, puisque $MNPP_1 \bar{\wedge} MNP_1P$.⁴⁰

Une *involution* est l'ensemble d'au moins trois paires d'éléments correspondants d'une forme de première espèce involutive. Von Staudt retrouve la notion classique de *points en involution*.⁴¹ Von Staudt montre alors le théorème classique de l'involution des points d'intersection d'une droite avec les côtés d'un quadrangle :⁴²

Les côtés d'un quadrangle plan complet $EFGH$ sont coupés (221), par une droite située dans le même plan, mais qui ne passe par aucun des sommets du quadrangle, en une involution, à savoir, deux côtés opposés sont coupés en deux points associés.

Les sommets d'un quadrilatère complet sont projetés à partir d'un point situé dans le même plan mais qui n'est pas situé sur un des côtés du quadrilatère, par une involution, à savoir deux points opposés sont projetés en deux rayons associés.

⁴⁰ „Ein involutorisches einformiges Gebilde enthält entweder gar kein Element, welches mit dem ihm zugeordneten Elemente zusammenfällt, oder zwei Elemente (Ordnungselemente), deren jedes sich selbst zugeordnet ist, je nachdem nämlich zwei einander zugeordnete Elemente durch zwei andere solche Elemente getrennt oder nicht getrennt sind. Im letztern Falle sind die Ordnungselemente M, N durch je zwei einander zugeordnete Elemente P, P_1 , da $MNPP_1 \bar{\wedge} MNP_1P$.“ [Staudt, 1847, 119]

⁴¹ Par exemple, dans son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Chasles [1837a] définit en utilisant des relations métriques la notion d'involution :

Quand six points, situés en ligne droite, et se correspondant deux à deux, tels que A et A' , B et B' , C et C' , font entre eux de tels segments que l'on ait la relation

$$\frac{CA.CA'}{CB.CB'} = \frac{C'A.C'A'}{C'B.C'B'}$$

on dit que les six points sont en *involution*, et les points qui se correspondent sont dits *conjugués*. [Chasles, 1837a, 309]

⁴² „Die Seiten eines vollständigen ebenen Vierecks $EFGH$ werden, welche mit ihm in einerlei Ebene liegt, aber durch keiner seiner Eckpunkte geht, in einer Involution, nämlich je zwei Gegenseiten in zwei einander zugeordneten Punkten geschnitten.

Die Eckpunkte eines vollständigen Vierecks werden aus jedem Punkte, welcher mit ihm in einerlei Ebene, aber in keiner seiner Seiten liegt, durch eine Involution, nämlich je zwei Gegenpunkte durch zwei einander zugeordnete Strahlen projicirt.“ [Staudt, 1847, 122]

5.4.2 Les systèmes involutifs et les systèmes polaires

Von Staudt distingue parmi les formes fondamentales de seconde et de troisième espèce en situation involutive les *systèmes involutifs* et les *systèmes polaires* selon que les formes sont colinéaires ou réciproques.

Deux systèmes involutifs ont une infinité d'éléments doubles (correspondants communs) puisque la donnée d'une paire d'éléments correspondants déterminent un élément double (par exemple, si les points A, A_1 de deux systèmes plans involutifs se correspondent, la droite AA_1 est un élément double). Ayant une infinité d'éléments doubles, ils sont donc en perspective. De plus, il suffit pour considérer un système plan comme un système involutif, il suffit de choisir dans ce plan une droite comme droite double et un point extérieur à cette droite comme point double, puis «puis de considérer dans chaque droite qui passe par le point double, le point en lequel elle coupe la droite double, comme l'autre point double, et dans un faisceau de rayons dont le centre est situé sur la droite double, le rayon qui passe par le point double, comme l'autre rayon double»⁴³. La théorie des systèmes polaires permet de retrouver et de généraliser de manière purement géométrique celle des polaires réciproques de Poncelet. En particulier, les notions de *pôle* et *polaire* ne dépendent pas de la théorie des coniques ; elles apparaissent comme de simples définitions découlant de la définition des systèmes plans polaires :

Dans un système polaire plan, chaque point est appelé le pôle de la droite qui lui est associée, et chaque droite, la polaire du point qui lui est associé, de telle sorte que les pôles de toutes les droites qui se coupent en un même point, sont situés sur la polaire de ce point et que les polaires de tous les points qui appartiennent à une même droite, se coupent au pôle de cette droite. Si un point est situé sur sa polaire, alors tout autre point de cette droite est situé à l'extérieur de sa polaire.⁴⁴

Soient deux points d'un système polaire plan, si l'un des points est situé sur la polaire de l'autre et donc si le second point est situé sur la polaire du premier, alors les deux points (et les deux droites contenant chacune le pôle de l'autre) sont dits *conjugués entre eux*. Un point situé sur sa polaire est dit *conjugué à lui-même*. Etant donné deux systèmes réciproques situés dans un même plan, un triangle polaire est un triangle ABC dont les côtés sont associés au sommets opposés. Un système polaire plan possède une infinité de triangles polaires et si deux systèmes plans réciproques possèdent un triangle polaire alors ils constituent un système polaire. La donnée d'un triangle polaire et d'un point non situé sur un côté du triangle associé à une droite ne passant pas par un sommet

⁴³„[...] und alsdann in jeder Geraden, welche durch den Ordnungspunkt geht, den Punkt, in welchen sie die Ordnungslinie schneidet, als den andern Ordnungspunkt, in jedem Strahlenbüschel, aber, dessen Mittelpunkt in der Ordnungslinie liegt, den Strahl, welcher durch den Ordnungspunkt geht, als den andern Ordnungstrahl betrachten.“

⁴⁴„In einem ebenen Polarsysteme heisst jeder Punkt der Pol der ihm zugeordneten Geraden und jede Gerade die Polare des ihr zugeordneten Punktes, so dass also die Pole von allen Geraden, welche in einem un demselben Punkte sich schneiden, in der Polare dieses Punktes liegen und die Polaren von allen Punkten, welche einer und derselben Gerade angehören, in dem Pole dieser Gerade sich schneiden. Liegt ein Punkt in seiner Polare, so liegt jeder andere Punkt dieser Geraden ausserhalb seiner Polare.“ [Staudt, 1847, 131-132]

du triangle suffit à définir un système polaire.⁴⁵ Une ponctuelle P qui ne passe pas par son pôle P_1 est en situation involutive avec le faisceau de rayons P_1 . De plus, la droite P contient soit aucun, soit deux points situés sur leur polaire selon que la relation projective entre la ponctuelle P et le faisceau de rayons P_1 est indirecte ou directe. Von Staudt en déduit que «si un point P_1 est situé sur sa polaire P , alors, [...] il y a sur une autre droite qui passe par le point P_1 , un autre point qui est situé sur sa polaire, et de même, dans tout faisceau de droites dont le centre est un point de la droite P différent de P_1 , il y a une autre droite qui passe par son pôle».⁴⁶

5.4.3 Les coniques et les surfaces du second ordre

Cette propriété permet à von Staudt de donner une nouvelle définition des coniques comme le lieu des éléments conjugués à eux-même d'un système plan polaire. En effet, si un point P_1 est situé sur sa polaire (est conjugué à lui-même), alors tout rayon du faisceau de rayons P_1 contient un autre point conjugué à lui-même.

Dans un système polaire plan, soit il n'y a aucun élément qui est conjugué à lui-même, soit il y a une courbe s d'ordre pair associée au faisceau de rayons qui s'applique sur elle de telle manière que chacun de ses points est situé sur sa polaire qui s'applique sur la courbe en ce point, et que chaque point qui n'appartient pas à cette courbe (la courbe double du système polaire), est situé à l'extérieur de sa polaire. La courbe n'a avec aucune droite plus de deux points communs; elle est touchée en tout point situé sur celle-ci par la polaire de ce point et est coupée par toute droite passant par ce point, en ce point et en un autre point.⁴⁷

Von Staudt alors la définition des courbes et des surfaces coniques du second degré comme courbe double d'un système polaire plan ou surface double d'une gerbe considérée comme un système polaire :

Chaque courbe plane (respectivement surface conique) fermée qui est une courbe (resp. surface) double d'un système polaire, ou, ce qui revient au même, qui est projective du faisceau qui s'applique sur elle, de telle manière qu'il corresponde à chaque point de la courbe

⁴⁵En effet, la donnée de quatre points dont trois ne sont pas alignés associés à quatre droites à quatre droites dont trois d'entre elles ne sont pas concourantes suffit à définir une relation projective du plan.

⁴⁶„Liegt ein Punkt P_1 in seiner Polare P , so giebt es [...] in jeder andern Geraden, welche durch den Punkt P_1 geht, noch einen Punkt, welcher in seiner Polare liegt, und eben so in jedem Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt ein von P_1 verschiedener Punkt der Geraden P ist, noch eine Gerade, welche durch ihren Pol geht.“ [Staudt, 1847, 132]

⁴⁷„In einem ebenen Polarsysteme giebt entweder gar kein Element, welches sich selbst conjugirt ist oder es giebt eine Curve s parer Ordnung, welche dem ihr sich anschmiegenden Strahlenbüschel zugeordnet ist, so dass nämlich jeder Punkt, welcher der Curve angehört, in seiner Polare liegt, die in ihm der Curve sich anschmiegt, jeder Punkt aber, welcher jener Curve (der Ordnungcurve des Polarsysteme) nicht angehört, ausserhalb seiner Polare liegt. Die Curve hat mit keiner Gerade mehr als zwei Punkte gemein und wird in jedem in ihr befindlichen Punkte von der Polare dieses Punktes berührt, von jeder andern durch denselben Punkt gehenden Geraden aber in ihm und in noch einem Punkte geschnitten.“ [Staudt, 1847, 137]

(resp. rayon de la surface), l'élément du faisceau qui s'applique en celui-ci, est appelée une courbe (surface conique) du second ordre.⁴⁸

Un faisceau de rayons qui s'applique sur une courbe du second ordre est aussi du second ordre. La définition des coniques de von Staudt unifie les deux points de vue duaux concernant les courbes : les coniques sont définies en même temps comme ensemble ponctuel et comme enveloppées par un faisceau de rayons. De plus, les deux points déterminés par une droite qui coupe la conique séparent harmoniquement chaque paire de points de la droite conjugués entre eux (se correspondant par la relation projective induite sur la droite par le système polaire). De même, toute droite qui coupe la conique en deux points est associée dans le système polaire à un faisceau de rayons qui a deux rayons en commun avec le faisceau de rayons enveloppant la conique (courbe double) du système polaire. Ces deux rayons séparent harmoniquement toute paire de rayons conjugués entre eux du faisceau.

Les courbes et surfaces du second ordre sont reliées projectivement : toute projection d'une conique à partir d'un point extérieur à celle-ci est une surface conique du second ordre. Réciproquement, toute section d'une surface conique du second ordre par un plan ne passant par son sommet est une conique. Von Staudt retrouve donc la définition traditionnelle des coniques. Il précise qu'avec cette définition, on peut même considérer des courbes du second ordre à l'infini comme intersection d'une surface conique du second ordre avec le plan à l'infini, ce que sa définition initiale n'envisageait pas. De plus, dans deux systèmes plans réciproques, il correspond à toute courbe du second degré s du premier système un faisceau de rayon du second ordre s_1 du second système qui s'applique sur une courbe du second ordre s_1 correspondant au faisceau de rayons s . Von Staudt distingue les coniques selon le nombre de points communs avec la droite à l'infini : une conique qui n'a aucun point commun avec la droite à l'infini est appelée une *ellipse*, un point commun avec la droite à l'infini, une *parabole*, et deux points commun avec la droite à l'infini, une *hyperbole*.

Von Staudt retrouve aussi la définition de Steiner des coniques. Un raisonnement simple⁴⁹ sur les polarités permet de montrer que deux faisceaux de rayons dont les centres sont situés sur une courbe du second ordre et qui projettent cette conique sont projectifs ou que dualement, deux ponctuelles tangentes à une courbe du second ordre qui projettent le faisceau de rayons qui s'applique sur celle-ci sont projectives. Les théorèmes de Pascal et de Brianchon s'obtiennent

⁴⁸„Jede geschlossene ebene Curve (bzw. Kegelfläche), welche die Ordnungcurve (bzw. Ordnungsfläche) eines Polarsystems oder, was dasselbe ist, dem ihr sich anschmiegenden Büschel projektivisch ist, so dass jedem Punkte der Curve (bzw. Strahle der Fläche) das ihr in demselben sich anschmiegende Element des Büschels entspricht, heisst eine Curve (bzw. Kegelfläche) zweiter Ordnung.“ [Staudt, 1847, 137-138]

⁴⁹Etant donné un triangle ABC inscrit dans une conique, il suffit de montrer que toute droite conjuguée à AB coupe les droites AC et BC en deux points conjugués. Les points A et D en lesquels la polaire a de A coupe les droites AB et BC sont conjugués. De même pour les points B et E en lesquels la polaire b de B coupe AB et BC . Si l'on associe à chaque point de a le point de b qui lui est conjugué (l'intersection de b et de la polaire du point), a et b sont projectives et en perspective. Le point d'intersection de a et b (qui est le pôle de AB) est donc le centre de cette perspective et donc toute droite passant par ce point coupe AB et BC en des points conjugués.

comme de simples corollaires de ces théorèmes fondamentaux :⁵⁰

Les trois points en lesquels chaque paire de côtés opposés d'un 6-angle $ABCDEF$ inscrit dans une courbe du II. ordre se coupent, sont situés sur une même droite.

Les trois diagonales qui joignent chaque paire de sommets opposés d'un 6-angle circonscrit à une courbe du II. ordre, se coupent en un même point.

En effet, les faisceaux $D(BECA)$ et $F(BECA)$ sont donc projectifs et donc leur section respective par les côtés AB et BC .

Réciproquement :⁵¹

Deux faisceaux de rayons A, B projectifs non concentriques qui sont situés dans un même plan sans être en perspective, engendrent une courbe du II. ordre contenant tout point en lequel un rayon du premier faisceau est coupé par le rayon homologue de l'autre. Les rayons a, b qui correspondent aux rayons communs aux deux faisceaux, touchent la courbe aux points A, B .

Deux ponctuelles projectives a, b qui se coupent mais ne sont pas en perspective, engendrent un faisceau de rayons du II. ordre contenant chaque droite qui joint un point de la première ponctuelle au point homologue de l'autre. Les points A, B qui correspondent au point d'intersection des deux ponctuelles sont les pôles des droites a, b .

Un 5-angle plan détermine donc deux courbes du second ordre : une circonscrite et une autre inscrite dans le 5-angle. De plus «si on considère les sommets [...] du 5-angle comme les pôles de leurs côtés opposés, on obtient un système polaire dans lequel chacune des deux courbes est associée au faisceau de rayons s'appliquant sur l'autre».⁵²

Dans deux systèmes plans colinéaires, toute courbe du second degré a pour correspondant une courbe du second degré. Cette propriété permet à von Staudt de généraliser la notion de relation projective aux courbes du second degré :

Pour rapporter projectivement deux courbes du II. ordre s, s_1 , on peut choisir arbitrairement dans la seconde courbe les points A_1, B_1, C_1

⁵⁰„Die drei Punkte, in deren jedem ein Paar Gegenseiten eines in eine Curve II. Ordnung beschriebenen Sechsecks $ABCDEF$ sich scheiden, liegen in einer und derselben Geraden.“

⁵¹„Zwei projektivische nicht concentrische Strahlenbüschel A, B , welche in einerlei Ebene, aber nicht perspektivisch liegen, erzeugen eine Curve II. Ordnung, der nämlich jeder Punkt angehört, in welchem ein Strahl des einen Büschels von dem homologen Strahle des andern geschnitten wird. Die Strahlen a, b , welche dem gemeinschaftlichen Strahle der beide Büschel entsprechen, berühren die Curve in den Punkten A, B .“

⁵²„Betrachtet man die Eckpunkte [...] des Fünfecks als die Pole der ihnen gegenüberliegenden Seiten, so erhält man ein Polarsystem, in welchem jeder von den beiden Curven der der andern sich anschmiegende Strahlenbüschel zugeordnet ist.“ [Staudt, 1847, 144]

Die drei Diagonalen, deren jede ein Paar Gegenpunkte eines um eine Curve II. Ordnung beschriebenen Sechsecks verbindet, schneiden sich in einem und demselben Punkte.“ [Staudt, 1847, 143]

Zwei projektivische gerade Gebilde a, b , welche sich schneiden, aber nicht perspektivisch liegen, erzeugen einen Strahlenbüschel II. Ordnung, dem nämlich jede Gerade angehört, welche einen Punkt des einen geraden Gebildes mit dem homologen Punkte des andern verbindet. Die Punkte A, B , welche dem Schnittpunkte der beiden geraden Gebilde entsprechen, sind die Pole der Geraden a, b .“ [Staudt, 1847, 143]

homologues à trois points A, B, C de la première; on associe alors au moyen de ceux-ci, à chaque point de la première courbe, un point de la seconde.⁵³

Von Staudt étudie à partir de la notion de relation projective entre courbe du II. ordre, les relations projectives entre deux systèmes plans (situés dans un même plan) qui admettent une conique double. Il en déduit en particulier la définition des coniques supplémentaires introduites par Poncelet.⁵⁴

Une courbe du II. ordre s et deux points H, P , dont le second n'est situé ni sur la courbe, ni sur la polaire du premier, ni sur une même tangente à la courbe que le premier, déterminent une autre courbe du II. ordre k qui passe par le second point et satisfait la condition que les pôles par rapport aux deux courbes, de toute droite passant par le premier point coïncident.

Une courbe du II. ordre et deux droites h, p , dont la seconde ne touche pas la courbe, ne passe pas par le pôle de la première droite et ne coupe pas la première droite en un point de la courbe, déterminent une autre courbe du II. ordre k qui est touchée par la seconde droite et satisfait la condition que les polaires par rapport aux deux courbes de tout point situé sur la première droite, coïncident.

En particulier, si une courbe du second ordre est un élément correspondant commun de deux systèmes plans colinéaires (la courbe est invariante dans son ensemble), alors les systèmes admettent aussi comme élément correspondant commun la droite h formée par les points d'intersection de chaque paire de droites PQ_1, P_1Q telles que la première joint deux points quelconques non-homologues de la courbe et la seconde les points correspondant à ceux-ci. Von Staudt obtient alors comme corollaire de cette dernière propriété une généralisation des théorèmes de Pascal et Brianchon; en effet, il étend ces théorèmes à tous les $4n + 2$ -angles inscrits ($4n + 2$ -latères circonscrits) à une conique.⁵⁵

⁵³„Will man zwei gegebene Curven II. Ordnung s, s_1 projektivisch aufeinander beziehen, so kann man zu drei Punkten A, B, C der einen die homologen Punkte A_1, B_1, C_1 in der andern nach Belieben annehmen, wodurch aber alsdann jedem Punkte der einen ein Punkt der andern zugewiesen ist.“ [Staudt, 1847, 149]

⁵⁴„Durch eine Curve II. Ordnung s und zwei Punkte H, P , von welchen der letztere weder in der Curve noch in der Polare des erstern noch mit dem erstern in einer und derselben Tangente der Curve liegt, ist eine andere Curve II. Ordnung k bestimmt, welche durch den letztern Punkt geht und die Bedingung erfüllt, dass der Pol einer jeden durch den erstern Punkt gehenden Geraden in Hinsicht auf beide Curven derselbe sei.“

⁵⁵„Wenn von den $n + 1$ Punkten, in deren jedem ein Paar Gegenseiten eines in eine Curve II. Ordnung beschriebenen $(4n + 2)$ Ecks sich schneiden, n in einer und derselben Geraden h liegen, so liegt auch der letzte in dieser Geraden.“ [Staudt, 1847, 160]

Durch eine Curve II. Ordnung s und zwei Gerade h, p , von welchen die letztere weder die Curve berührt noch durch den Pol der erstern geht, noch die erstere in einem Punkte der Curve schneidet, ist eine andere Curve II. Ordnung k bestimmt, welche die letztere Gerade berührt und die Bedingung erfüllt, dass die Polare eines jeden in der erstern Geraden befindlichen Punktes in Hinsicht auf beide Curven dieselbe sei.“ [Staudt, 1847, 161-162]

Wenn von den $n + 1$ Diagonalen, deren jede ein Paar Gegenpunkte eines um eine Curve II. Ordnung beschriebenen $(4n + 2)$ Seits verbindet, n in einem und demselben Punkte sich schneiden, so geht auch die letzte durch diesen Punkt.

Si $2n$ des $2n + 1$ points en lesquels se coupent chaque paire de côtés opposés d'un $(4n + 2)$ -angle inscrit dans une courbe du II. ordre, sont situés sur une même droite, alors le dernier point est aussi situé sur cette droite.

Si $2n$ des $2n + 1$ diagonales qui joignent, chacune, une paire de sommets opposés d'un $(4n + 2)$ -latère circonscrit à une courbe du II. ordre, se coupent en un même point, alors la dernière passe aussi par ce point.

Von Staudt montre le théorème dans le cas d'un 10-angle $AB_1CD_1EA_1BC_1DE_1$. Sa démonstration consiste à considérer deux systèmes plans rapportés colinéairement de telle manière qu'ils admettent la courbe comme élément double et que les points A_1, B_1, C_1 du second système correspondent aux points A, B, C du premier système. Si on désigne par h la droite sur laquelle sont situés les points d'intersection des côtés opposés du 10-angle, AB_1 et A_1B , B_1C et BC_1 , CD_1 et C_1D , D_1E et DE_1 , les points D_1 et E_1 correspondent aux points D et E et les droites EA_1 et E_1A se coupent sur la droite h d'après la propriété précédente.

Avant de montrer que sa théorie permet de résoudre la plupart des problèmes du second degré⁵⁶ que Theodor Reye définit comme ceux «qui admettent en général deux solutions, qui par suite ne peuvent pas se résoudre en employant seulement des constructions linéaires, mais qui exigent qu'on ait recours à une formes du second ordre»⁵⁷, von Staudt généralise la définition de courbe du second ordre de manière à unifier l'énoncé et la solution de ces problèmes :

Par ligne du II. ordre, on entend, soit une courbe du II. ordre, soit la réunion de deux droites situées dans un même plan. Le dual d'une telle ligne est un faisceau de rayons du II. ordre dans le plan, qui, soit s'applique sur une courbe du II. ordre, soit est la réunion de deux faisceaux de rayons du I. ordre.⁵⁸

Avec cette définition, von Staudt peut en particulier unifier les énoncés des théorèmes sans tenir compte du fait que les formes sont en perspective ou non. Par exemple, von Staudt unifie les deux énoncés selon lesquels deux faisceaux de rayons projectifs non concentriques définissent deux droites ou une courbe du second ordre selon que les faisceaux sont perspectifs ou non en un théorème général :

Deux faisceaux de rayons projectifs entre eux, mais non-concentriques, déterminent une ligne du II. ordre à laquelle appartient tout point qu'un rayon du premier faisceau a en commun avec le rayon homologue du second faisceau. Si les faisceaux de rayons sont en perspective, alors la ligne du II. ordre se compose de deux droites dont l'une joint les centres des deux faisceaux.⁵⁹

⁵⁶ „Aufgaben zweiten Grades“.

Von Staudt ne donne pas de définitions de ce qu'il appelle un problème du second degré.

⁵⁷ „[...] welche im Allgemeinen, zwei Lösungen zulassen, und nicht mit alleiniger Anwendung linearer Constructionen gelöst werden können, sondern die Benutzung eines Gebildes zweiter Ordnung verlangen.“ [Reye, 1866, 166]

Reye donne comme exemple de problèmes du second degré, *Construire les points correspondants à deux ponctuelles projectives situées sur la même droite.*

⁵⁸ „Unter einer Linie II. Ordnung versteht man entweder eine Curve II. Ordnung oder der Inbegriff von zwei in einerlei Ebene liegenden Geraden. Das Reciproke hievon ist in der Ebene ein Strahlenbüschel II. Ordnung, welcher nämlich entweder einer Curve II. Ordnung sich anschmiegt, oder der Inbegriff von zwei Strahlenbüscheln I. Ordnung ist.“ [Staudt, 1847, 172]

⁵⁹ „Durch zwei zu einander projektivische Strahlenbüschel, welche in einerlei Ebene liegen,

5.5 Les formes élémentaires et les involutions

Von Staudt généralise la notion de formes fondamentales de première espèce en introduisant celle de forme élémentaire. Les formes élémentaires réunissent les formes uniformes, les courbes du II. ordre et les systèmes réglés. De la même manière que les ponctuelles, les faisceaux de droites et de plans sont vus par von Staudt comme des déploiements d'un élément géométrique (un point, une droite ou un plan), les formes élémentaires sont elles-aussi définies comme des ensembles d'éléments de même catégorie. De plus, la notion de perspective entre formes élémentaires généralise celle entre formes uniformes ; par exemple, une courbe du II. ordre et un faisceau de rayons situés dans le même plan sont mis en perspective lorsque le centre S du faisceau est situé sur la courbe en mettant en correspondance chaque point A de la courbe avec le rayon SA . La généralisation de la notion de perspective est définie de manière que deux formes uniformes perspectives d'une même forme élémentaire soient projectives entre elles ; cette propriété permet de généraliser aux formes élémentaires la notion de forme harmonique et de définir celle de formes élémentaires projectives. Ainsi, quatre éléments d'une forme élémentaire sont situés harmoniquement si leurs éléments correspondants dans une forme uniforme qui est perspective à la forme élémentaire le sont. De même, la notion de correspondance projective entre formes élémentaires est définie comme une généralisation de celle entre formes uniformes :

De la même manière que pour deux formes uniformes, on dira en général que deux formes élémentaires sont projectives entre elles si elles sont reliées entre elles de telle manière que quatre éléments de la première forme situés harmoniquement correspondent toujours à quatre éléments de la seconde forme situés harmoniquement.⁶⁰

Le théorème fondamental de la géométrie projective s'étend immédiatement aux formes élémentaires ; pour définir une correspondance projective entre deux formes élémentaires, il suffit de déterminer trois paires d'éléments correspondants et ainsi «il sera assigné à chaque élément de la première forme un élément de la seconde».⁶¹ Une fois définie les correspondances projectives entre formes élémentaires, von Staudt généralise de la même manière la notion d'involutions comme le cas particulier de correspondance projective entre deux formes élémentaires ayant même support pour laquelle les éléments se correspondent double-

aber nicht concentrisch sind, ist eine Linie II. Ordnung bestimmt, der nämlich jeder Punkt angehört, welchen ein Strahl des einen Büschels mit dem homologen Strahle des andern gemein hat. Liegen die Strahlenbüschel perspektivisch, so besteht die Linie II. Ordnung aus zwei Geraden, von welchen die eine die Mittelpunkte der beiden Büschel verbindet.“ [Staudt, 1847, 173]

⁶⁰ „Gleichwie zwei einförmige Gebilde, so sollen überhaupt zwei Elementargebilde zu einander projektivisch heissen, wenn sie so auf einander bezogen sind, dass je vier harmonisch liegenden Elementen in dem einen Gebilde vier harmonisch liegende Elemente im andern entsprechen.“ [Staudt, 1856, 5]

⁶¹ Von Staudt ne donne aucune démonstration explicite de la généralisation du théorème fondamental. Il suffit de considérer deux formes uniformes respectivement en perspective avec une des formes élémentaires. La donnée de trois paires éléments correspondants sur les formes élémentaires définit trois paires d'éléments correspondants sur les formes uniformes et donc une correspondance projective entre les formes uniformes. Comme deux formes uniformes perspectives d'une même forme élémentaire sont projectives, la correspondance induite sur les formes élémentaires est donc définie de manière unique.

ment (Si le correspondant d'un élément A est l'élément B alors le correspondant de B est A) :

Si dans deux formes élémentaires projectives entre elles qui sont situées l'une sur l'autre, deux quelconques éléments et par conséquent chaque paire d'éléments homologues se correspondent alternativement, on dit que les formes sont en situation involutive [...]. Habituellement, deux telles formes sont considérées comme une seule forme dont les éléments sont appariés involutivement.⁶²

Pour qu'une correspondance projective entre deux formes élémentaires ayant même support soient une involution, il suffit qu'un couple d'éléments A et A_1 se correspondent doublement. Si les couples d'éléments (A, A_1) , (B, B_1) , (C, C_1) , ... se correspondent doublement dans une involution, von Staudt note l'involution $AA_1.BB_1.CC_1$. Il énonce une série de propriétés des involutions des formes élémentaires qui généralisent celles des involutions des formes uniformes; ainsi, les involutions sont conservées par les correspondances projectives :

Si deux formes élémentaires $ABC\dots, abc\dots$ sont projectives entre elles, alors il correspond à chaque involution $AA_1.BB_1.CC_1$ de la première une involution $aa_1.bb_1.cc_1$ de la seconde.⁶³

Le théorème fondamental de la géométrie projective prouve qu'une correspondance projective (autre que la correspondance identique) d'une forme sur elle-même possède au plus deux éléments doubles (qui sont leur propre correspondant). Le nombre d'éléments doubles des involutions dépend de leur comportement global. Von Staudt distingue à partir de la notion de sens d'une forme élémentaire fermée les involutions directes et celles indirectes. Trois éléments A, B, C d'une forme fermée constituée d'une suite continue de points, de droites ou de plans déterminent une partie de celle-ci qui débute en A , contient B et se termine en C . On détermine ainsi le sens ABC de la forme. La notion de sens est implicitement associée par Von Staudt à celle de sens de parcours de la forme. Il précise que lorsque les points A, B, C se déplacent, le sens ABC ne change pas tant que deux des points ne coïncident pas et que le sens ABC est identique aux sens BCA et CAB et contraire aux sens CBA, BAC et ACB . Dans une involution, les sens sont, soit tous conservés, soit au contraire tous inversés. Dans le premier cas, la forme est divisée par deux éléments correspondants dans l'involution en deux parties associées. De plus, chaque paire d'éléments correspondants est séparée par chaque autre paire d'éléments correspondants et aucun élément n'est associé à lui-même. Dans le second cas, aucune paire d'éléments associés ne séparent une autre paire d'éléments associés et la forme contient deux éléments associés à eux-mêmes (éléments doubles) qui séparent harmoniquement chaque paire d'éléments associés. En conclusion, soit une forme involutive ne possède aucun élément double, soit elle en possède deux. Dans le dernier cas, les deux éléments doubles séparent harmoniquement chaque paire de points homologues, autrement dit, en reprenant les notations de von Staudt, $MM.NN.AB$ signifie

⁶²„Wenn in zwei zu einander projektivischen Elementargebilden, welche in einander liegen, irgend zwei und mithin je zwei homologe Elemente einander abwechselnd entsprechen, so heissen die Gebilde involutorisch liegend, [...]. Gewöhnlich wird aber von zwei solchen Gebilden nur wie von einem Gebilde gesprochen, dessen Elemente involutorisch gepaart seien.“[Staudt, 1856, 44]

⁶³„Sind zwei Elementargebilde $ABC\dots, abc\dots$ zu einander projektivisch, so entspricht jeder Involution $AA_1.BB_1.CC_1$ in dem einen eine Involution $aa_1.bb_1.cc_1$ im andern.“[Staudt, 1856, 45]

que M, A, N, B est une forme harmonique.

Une courbe du second ordre (conique) est intersectée par un faisceau de rayons S (dont le sommet S n'est pas situé sur la courbe) en une involution. Le faisceau des tangentes est lui-aussi involutif. De plus chaque paire de tangentes homologues se coupent sur la polaire s de S par rapport à la conique. S'il passe par S deux tangentes à la courbe, l'involution induite par le faisceau S possède deux points doubles (qui sont les points de contact des deux tangentes), sinon l'involution n'a pas de point double.

Von Staudt déduit de l'étude des points doubles des involutions un théorème qui est l'élément technique fondamental de l'algèbre des jets :

Si M, A, B, A_1, B_1 sont cinq éléments d'une même forme [élémentaire]⁶⁴, alors soit $MM.AB_1.A_1B$ est une involution, soit il existe un élément N différent de M tel que $MN.AB_1.A_1B$ est une involution. Dans le premier cas, les formes $MAN \dots$, $MA_1B_1 \dots$ ont comme élément double le point M tandis que dans le second, [...] le point N est aussi un point double.⁶⁵

En particulier, si M, A, A_1, A_2 sont quatre éléments d'une forme uniforme, alors

1. soit M, A, A_1, A_2 est une forme harmonique, $MM.AA_2.A_1A_1$ est une involution et les formes projectives $MAA_1 \dots$, $MA_1A_2 \dots$ n'ont qu'un seul élément double.
2. soit il existe un élément N différent de M tel que $MN.A_1A_1$ soit une involution et les formes projectives $MAA_1 \dots$, $MA_1A_2 \dots$ admettent aussi le point N comme élément double.

5.6 Le calcul des jets

5.6.1 Les jets

Von Staudt définit la notion de jet comme la donnée de quatre éléments ordonnés d'une même forme élémentaire. Il précise que cette définition est relative à une forme élémentaire :

L'ensemble de quatre éléments A, B, C, D d'une même forme élémentaire, en tenant compte à la fois de l'ordre dans lequel ils sont situés dans celle-ci et de la forme élémentaire elle-même s'appellera un jet. Il conviendra donc de distinguer non seulement le jet $ABCD$ du jet $ABDC$ mais aussi dans le cas où deux formes élémentaires qui ne sont pas superposées ont en commun les éléments A, B, C, D , le jet $ABCD$ dans la première forme du jet $ABCD$ dans la seconde forme.⁶⁶

⁶⁴Von Staudt établit d'abord ce théorème pour les formes uniformes, puis le généralise aux formes élémentaires.

⁶⁵„Wenn M, A, B, A_1, B_1 fünf Elemente eines und desselben einförmigen Gebildes sind, so ist entweder $MM.AB_1.A_1B$ eine Involution oder es gibt ein von M verschiedenes Element N , so dass $MN.AB_1.A_1B$ eine Involution ist. Im erstern Falle haben die zu einander projektivischen Gebilde $MAB \dots$, $MA_1B_1 \dots$ nur das Element M , in letztern aber, [...] auch noch das Element N entsprechend gemein.“ [Staudt, 1857, 145]

⁶⁶„Der Inbegriff von vier Elementen A, B, C, D eines und desselben Elementargebildes, mit

Von Staudt définit une notion d'égalité entre jets : deux jets $ABCD$ et $A_1B_1C_1D_1$ situés dans deux formes élémentaires sont dits projectifs si les deux formes élémentaires sont reliées projectivement de telle manière que les éléments A, B, C, D de la première forme correspondent respectivement aux éléments A_1, B_1, C_1, D_1 de la seconde. Deux jets projectifs sont par la suite considérés comme égaux. Von Staudt en déduit que si A, B, C, D sont quatre éléments quelconque d'une forme élémentaire, alors

$$ABCD = BADC$$

puisque il existe une correspondance projective de la forme élémentaire avec elle-même telle que les éléments A, B, C, D correspondent aux éléments B, A, D, C . De même,

$$ABCD = CDAB = DCBA.$$

Un jet $ABCD$ est dit harmonique si A, B, C, D est une forme harmonique. Deux jets harmoniques sont donc égaux. Etant donné un jet U et trois éléments A, B, C d'une même forme élémentaire, alors il existe un élément D de cette forme telle que $U = ABCD$.

Von Staudt distingue les jets propres et impropres. Si A, B, C, D sont des éléments différents d'une forme élémentaire, $ABCD$ est un jet propre. Trois éléments différents d'une même forme élémentaire définissent plusieurs espèces de jet impropre : $ABCA$ ou $BAAC$ sont des jets impropres de première espèce. De tels jets seront désignés par le signe 0.⁶⁷ $ABCB$ ou $BABC$ sont des jets impropres de seconde espèce. De tels jets sont désignés par le signe 1. Enfin, les jets impropres $ABCC$ ou $CCAB$ sont dits de troisième espèce et seront désignés par le signe ∞ . Les signes 0, 1, ∞ ne sont que des désignations arbitraires ; ils ne représentent en aucune manière des valeurs numériques. Par contre, von Staudt montrera la pertinence du choix de ces signes lorsque il montrera leur fonction dans le calcul algébrique des jets qu'il va développer et lorsque plus tard, il associera à chaque jet une valeur numérique.

5.6.2 L'addition des jets

Von Staudt définit alors géométriquement une opération sur les jets qu'il désigne comme une addition. Etant donné deux jets U et U_1 et A, B, C trois éléments d'une même forme élémentaire. Soit D, D_1 les éléments de la forme tels que $ABCD = U$ et $ABCD_1 = U_1$ et S le point défini comme correspondant à A dans l'involution $CC.DD_1$. Par définition, le jet $ABCS$ est défini comme la somme des jets U et U_1 :

$$ABCS = ABCD + ABCD_1 = U + U_1.$$

Comme les involutions sont conservées par les correspondances projectives, la définition de la somme $U + U_1$ ne dépend donc ni du choix des éléments A, B, C ,

Rücksicht auf die Ordnung, in der dieselben angeschrieben, und mit Rücksicht auf das Elementargebilde selbst, soll ein Wurf heissen. Es ist hiernach nicht nur der Wurf $ABCD$ von dem Wurf $ABDC$ sondern auch, im Falle zwei nicht in einander liegende Elementargebilde die Elemente $ABCD$ mit einander gemein haben, der Wurf $ABCD$ in dem einen von dem Wurf $ABCD$ in den andern zu unterscheiden., [Staudt, 1856, 15]

⁶⁷ Von Staudt précise que les jets $ABCA$ et $BAAC$ bien que non projectifs doivent quand même être considérés comme égaux.

ni de la forme élémentaire.

Von Staudt montre alors que l'opération ainsi définie vérifie les mêmes propriétés que l'addition des nombres. Toutes les démonstrations reposent sur les propriétés des involutions. Ainsi, il déduit immédiatement de la définition de l'addition des jets que

$$U + U_1 = U_1 + U.$$

De même, si l'élément D coïncide avec l'élément A , alors par construction l'élément S coïncide avec l'élément D et «donc, si l'un des deux jets est $= 0$, alors leur somme est égale à l'autre jet»⁶⁸. La somme de m jets est définie comme le résultat de $m - 1$ sommes successives de deux jets :

Si on remplace deux quelconques jets parmi les m jets $U, U_1, U_2, \dots, U_{m-1}$ par leur somme, on a un jet de moins qu'auparavant. Si on poursuit jusqu'à ce que l'on ait plus qu'un jet, alors celui-ci est la somme des m jets.⁶⁹

Bien entendu, cette définition amène von Staudt à montrer que la notion de somme de jets ne dépend pas de l'ordre de sommation ou des permutations entre les jets ; le cas général des sommes de m jets se déduit immédiatement de l'égalité :

$$(U + U_1) + U_2 = (U + U_2) + U_1.$$

Von Staudt montre que si un des trois jets est impropre de première espèce ($= 0$) ou si $U_1 = U_2$, l'égalité précédente est évidente. Le cas général (lorsque les trois jets ne sont pas impropres de première espèce et sont tous différents les uns des autres) en considérant les éléments A, B, C, D_1, D_2, P, Q d'une forme élémentaire tels que :

$$ABCD = U, ABCD_1 = U_1, ABCD_2 = U_2$$

$$ABCP = U + U_1, ABCQ = U + U_2.$$

La relation projective entre $CD_1P \dots$ et $CD_2Q \dots$ est la composée des deux involutions $CC.DD_1.AP$ et $CC.DD_2.AQ$ et n'a donc qu'un seul point double C . En effet, si elle admettait un autre point double F , les deux involutions s'écriraient $CC.DD_1.FG$ et $CC.DD_2.FG$ et donc D_1 et D_2 seraient confondus. Or si la relation projective entre $CD_1P \dots$ et $CD_2Q \dots$ n'a qu'un seul point double, alors d'après la propriété générale des involutions (p. 138), $CC.D_1Q.D_2P$ est une involution, d'où :

$$ABCQ + ABCD_1 = ABCP + ABCD_2$$

soit

$$(U + U_2) + U_1 = (U + U_1) + U_2.$$

Von Staudt poursuit l'étude de l'addition des nombres en montrant qu'elle admet une opération inverse : deux jets U et U_1 définissent un troisième jet U_2 tel que $U = U_1 + U_2$. De même, l'addition possède une propriété de régularité, à savoir

⁶⁸„Wenn also der eine von zwei Würfeln $= 0$ ist, so ist ihre Summe dem andern gleich.“ [Staudt, 1857, 167]

⁶⁹Setzt man für irgend zwei von m Würfeln $U, U_1, U_2, \dots, U_{m-1}$ ihre Summe, so hat man einen Wurf weniger als vorher. Fährt man so fort, bis man nur noch einen Wurf hat, so ist dieser die Summe der m Würfe. [Staudt, 1857, 168]

que si $U_1 + U_2 = V_1 + V_2$ et $U_1 = V_1$, alors $U_2 = V_2$.

Lorsque l'on considère l'involution $CC.AB.DE$, il est clair que $ABCE = BACD$ et que d'après la définition de l'addition des jets, $ABCD + ABCE = ABCB = 1$; la somme $ABCD + BACD$ est donc égale à un jet de seconde espèce.

La démonstration des propriétés des jets opposés et des jets harmoniques repose sur un lemme général : soit une involution $CC.BD.AE$ et soit P un élément quelconque de la même forme élémentaire, alors

$$ABCP + EDCP = ABCE = EDCA$$

$$ABCP = DECP + ABCD = DECP + EDCB.$$

La seconde égalité s'obtient en utilisant le fait que la relation projective entre $CAB\dots$ et $CDE\dots$ n'a qu'un seul point double (puisque $CC.BD.AE$ est une involution). Si l'on désigne par N l'homologue de P dans cette correspondance projective, il est évident que la correspondance projective entre $ACN\dots$ et $DCP\dots$ n'a aussi qu'un seul point double et donc que $CC.AP.ND$ est une involution.⁷⁰ Il s'ensuit d'après la définition de l'addition des jets que

$$ABCD + ABCN = ABCP = ABCD + DECP.$$

Deux éléments dont la somme est égale à un jet de première espèce sont dits opposés. Cette dénomination est consistante avec le choix du signe 0 pour désigner les jets de première espèce. Lorsque l'on considère une involution $CC.BD.AE$ sur une forme élémentaire, il vient en appliquant le lemme précédent dans le cas $P = A$

$$ABCA = 0 = DECA + EDCB.$$

En particulier si les jets U, V sont respectivement opposés aux jets U_1, V_1 et si $U + V = W$, alors $U = W + V_1$ et $V = W + U_1$.

Lorsque $ABCD$ est un jet harmonique (c'est-à-dire en termes d'involution $CC.BD.AA$) et P un élément quelconque de la forme élémentaire, une application immédiate du lemme général précédent donne :

$$ABCA = 0 = ABCP + ADCP.$$

Cette dernière égalité dans le cas où l'élément P coïncide avec D montre que $ABCD + ADCD = 0$ et donc qu'un jet harmonique est opposé au jet impropre de seconde espèce.

Von Staudt déduit des propriétés de l'addition des jets la notion de multiplication d'un jet par un nombre entier naturel : la somme de m jets égaux au jet U sera notée mU . Cette nouvelle opération vérifie immédiatement les propriétés de distributivité que l'on attend :

$$m(U + U_1) = mU + mU_1, \quad (m + n)U = mU + nU.$$

De plus, si $U = U_1$, alors $mU = mU_1$, si $U = 0$, alors $mU = 0$ et si U et U_1 sont opposés, alors mU et mU_1 le sont aussi.

La donnée de trois éléments d'une même forme élémentaire définit sur celle-ci

⁷⁰Tous ces arguments reposent encore sur la propriété fondamentale des involutions (p. 138).

une suite d'éléments qui représente la suite des entiers⁷¹ ; étant donné trois éléments (réels) C, A, A_1 d'une forme élémentaire (réelle), on définit la suite d'éléments $C, A, A_1, A_2, A_3, A_4 \dots$ en posant que $CAA_1A_2, CA_1A_2A_3, CA_2A_3A_4$, etc. sont des jets harmoniques. Par construction, la relation projective entre $CAA_1 \dots$ et $CA_1A_2 \dots$ associe à l'élément A_k l'élément A_{k+1} . La suite $CAA_1A_2A_3 \dots A_{r-1}A_r$ correspond donc à la suite $CA_1A_2A_3A_4 \dots A_rA_{r+1}$; comme C, A, A_1, A_2 est une forme harmonique, la relation projective $CAA_1 \dots, CA_1A_2 \dots$ qui est identique à la relation $CAA_r \dots, CA_1A_{r+1} \dots$ n'a qu'un seul point double et $CC.A_{r+1}A.A_1A_r$ est une involution. On en déduit donc, B étant un élément différent de A ,

$$ABCA_{r+1} = ABCA_1 + ABCA_r$$

et plus généralement,

$$ABCA_m = m(ABCA_1).$$

En particulier, le jet AA_1CA_m est égal à m fois le jet impropre 1, et réciproquement le jet impropre 1 est égal à m fois le jet AA_mCA_1 .

L'addition des jets est définie à partir d'un cas particulier de relations projectives, les involutions ; von Staudt montre que la notion d'addition des jets permet de définir des relations projectives : étant donné trois éléments E, D, C d'une forme élémentaire g et trois éléments A_1, B_1, C_1 d'une forme élémentaire g_1 . Soit U un jet, von Staudt définit une relation entre g et g_1 en posant que l'élément P de g correspond à l'élément P_1 de g_1 si

$$EDCP + A_1B_1C_1P_1 = U.$$

Pour montrer que cette relation est projective, on définit l'élément A tel que $EDCA = U$; l'élément A correspond donc à l'élément A_1 . Si B est l'élément correspondant de D dans l'involution $CC.AE \dots$, on obtient d'après la première égalité du lemme général, P étant un élément quelconque de g :

$$ABCP + EDCP = ABCE = EDCA = U.$$

On en déduit que $ABCP = A_1B_1C_1P_1$ ce qui montre que la relation est projective.⁷²

5.6.3 La multiplication des jets

Von Staudt définit une seconde opération sur les jets qu'il va appeler la multiplication des jets. La première définition de cette nouvelle opération que donne von Staudt peut être qualifiée d'algorithmique : soit M, A, N, A_1, A_2 des éléments d'une forme élémentaire, deux jets U, U_1 (dont aucun n'est un jet de première ou de troisième espèce) tels que $MANA_1 = U$ et $MA_1NA_2 = U_1$. «Le jet $MANA_2$ ainsi défini par les jets U, U_1 s'appellera le produit de ceux-ci et sera

⁷¹Comme on le verra dans ce qui suit, la plupart des propriétés de l'addition des jets s'étendent aux éléments imaginaires d'une forme réelle et même aux éléments d'une forme élémentaire imaginaire. Von Staudt n'établit cette propriété que dans le cas des éléments réels d'une forme élémentaire réelle.

⁷²Von Staudt suppose implicitement que la relation qu'il définit associe les éléments C et C_1 .

désigné par UU_1 »⁷³. Une seconde définition géométrique suivra : si $MN.AD.BC$ est une involution alors

$$(MANB)(MANC) = MAND.$$

Les deux définitions sont équivalentes ; en effet, $MANC = NDMB = MBND$, d'où $(MANB)(MANC) = (MANB)(MBND) = MAND$ par définition.

Von Staudt utilisera alternativement ces deux définitions pour prouver les propriétés de cette nouvelle opération.

La multiplication des jets est indépendante des représentants choisis et ne dépend pas de l'ordre des jets ; en effet, $MANA_1 = U = NA_1MA$ et $MA_1NA_2 = U_1 = NA_2MA_1$ et donc,

$$U_1U = (NA_2MA_1)(NA_1MA) = NA_2MA = MANA_2 = UU_1.$$

La définition de la multiplication des jets entraîne que si un des deux jets est de seconde espèce ($=1$), alors le produit est égal au second jet, ce qui justifie implicitement le choix du signe 1 pour désigner les jets de seconde espèce.

La notion de produit peut s'étendre à m jets : en effet, la donnée de trois éléments M, A, N d'une forme élémentaire et celle de m jets $U, U_1, U_2, \dots, U_{m-1} (\neq 0, \infty)$ définissent sur la forme m éléments A_1, A_2, \dots, A_m tels que

$$MANA_1 = U \quad \text{et pour tout } k, \quad MA_kNA_{k+1} = U_k.$$

«Le jet $MANA_m$ ainsi défini par la donnée des jets s'appellera le produit de ceux-ci.»⁷⁴ Von Staudt résoud alors la question de l'ordre dans lequel on effectue les produits deux à deux lorsque l'on considère un tel produit généralisé :

Si on remplace deux quelconques des m jets par leur produit, on a un jet de moins qu'auparavant. Si on poursuit jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'un jet, alors celui-ci est le produit de l'ensemble des jets. [...] le produit des jets donnés reste le même si on remplace deux facteurs successifs quelconques par leur produit.⁷⁵

Pour cela, il suffit de se convaincre que pour tout k ,

$$MANA_{r+2} = (MANA_r)(MA_rNA_{r+2}).$$

Une fois les premières propriétés du produit établies, von Staudt s'intéresse au comportement des jets impropres par rapport à la nouvelle opération. Il continue à exclure de son étude les jets de troisième espèce ($=\infty$) ; par contre, si un des facteurs d'un produit de jets est un jet impropre de première espèce ($=0$), alors le produit doit être lui aussi considéré comme égal à un tel jet. En effet, si $U = MANA_1$ et $U_1 = MA_1NM = 0$, alors $UU_1 = MANM = 0$. Enfin si le produit de deux jets est égal à un jet impropre de seconde espèce ($=1$), ceux-ci seront dits inverses. En particulier, si $U = MANA_1$, alors son inverse est égal à

⁷³ „Der Wurf $MANA_2$, welcher auf diese Weise durch die Würfe U, U_1 bestimmt, soll das Produkt aus demselben heißen und durch UU_1 bezeichnet werden.“ [Staudt, 1857, 171-172]

⁷⁴ „Der Wurf $MANA_m$, welcher auf dieser Weise durch die gegebenen Würfe bestimmt ist, soll das Produkt aus denselben heißen.“ [Staudt, 1857, 172]

⁷⁵ „Setzt man für irgend zwei der m Würfe ihr Produkt, so hat man einen Wurf weniger als vorher. Fährt man so fort, bis man nur einen Wurf hat, so ist dieser das Produkt aus den sämtlichen Würfeln. [...] das Produkt aus den gegebenen Würfeln dasselbe bleibt, wenn man für irgend zwei auf einander folgender Faktoren ihr Produkt setzt.“ [Staudt, 1857, 172]

$MA_1NA = NAMA_1$. De plus si un jet est égal à son inverse, soit il est impropre de seconde espèce, soit il est harmonique. En effet, si $MANA_1 = MA_1NA$ soit $A = A_1$ et le jet est de seconde espèce, soit M, A, N, A_1 est une forme harmonique. Cette remarque justifiera plus tard, lorsque von Staudt associera aux jets une valeur numérique, la valeur -1 attribuée aux jets harmoniques.

La notion d'inverse permet d'énoncer une série de propriétés de la multiplication des jets ; ainsi si V_1 est l'inverse de U_1 , V_2 celui de U_2 et si on désigne par U le produit U_1U_2 , on a $UV_1 = U_2$ et $UV_2 = U_1$. Von Staudt précise que l'on doit ici supposer que aucun des deux jets U_1 et U_2 n'est impropre de première espèce ($= 0$) puisque «l'inverse d'un tel élément ne pourrait être qu'un jet de troisième espèce»⁷⁶ qui sont exclus de l'analyse. De même, deux jets U, U_1 dont le second n'est pas un jet impropre de première espèce définissent un troisième jet U_2 tel que $U = U_1U_2$. Le produit d'un jet U par un jet harmonique est égal au jet opposé à U . La multiplication des jets est aussi régulière ; si le jet U_1 qui n'est pas impropre de première espèce est égal au jet W_1 et si le jet U_1U_2 est égal au jet W_1W_2 alors $U_2 = W_2$.

La multiplication des jets vérifie une propriété de distributivité par rapport à l'addition des jets : ainsi, si U, V, V_1 sont des jets quelconques (différents d'un jet impropre de troisième espèce),

$$U(V + V_1) = UV + UV_1.$$

En effet, si $U = ABCD$, $V = ADCE$ et $V_1 = ADCE_1$, alors par définition, $UV = ABCE$ et $UV_1 = ABCE_1$. Si P est l'élément correspondant de A dans l'involution $CC.EE_1$, alors par définition de l'addition, $V + V_1 = ADCP$ et $UV + UV_1 = ABCP$; or $ABCP = (ABCD)(ADCP) = U(V + V_1)$. Plus généralement, si U, V, U_1, V_1 sont des jets quelconques,

$$(U + U_1)(V + V_1) = UV + UV_1 + U_1V + U_1V_1.$$

La multiplication est aussi cohérente avec la multiplication des jets par des entiers : si $ABCA_m = mABCA_1$, alors $(ABCA_1)(AA_1CA_m) = ABCA_m$ où $AA_1CA_m = mAA_1CA_1 = m1$.

De même, que la notion d'addition des jets permettaient de définir des relations projectives, von Staudt montre que l'on peut aussi utiliser la multiplication des jets pour définir des relations projectives : soit C, D, A des éléments d'une forme élémentaire g , A_1, B_1, C_1 des éléments d'une forme élémentaire g_1 et soit $U = ABCD$ un jet différent d'un jet impropre de première espèce, alors la relation qui associe l'élément P de g et l'élément P_1 de g_1 tels que $(CDAP)(A_1B_1C_1P_1) = U$ est projective. L'égalité qui définit la relation peut s'écrire de manière équivalente $(A_1B_1C_1P_1) = U(ADCP)$; on a donc

$$A_1B_1C_1P_1 = (ABCP)(ADCP) = ABCP.$$

Von Staudt conclut de cette égalité que la relation est projective.⁷⁷

Von Staudt termine son étude des rapports entre les deux opérations d'addition

⁷⁶„[...] weil das Umgekehrte von einem solchen Wurfe nur ein uneigentlicher Wurf III. Art sein könnte.“ [Staudt, 1857, 173]

⁷⁷Les démonstrations proposées par von Staudt sont toujours très elliptiques mais en général facilement reconstituables. Dans ce cas, comme dans celui de la définition d'une relation projective grâce à l'addition, von Staudt utilise implicitement le fait qu'une relation qui conserve les jets est projective. Von Staudt n'aborde pas cette question et semble considérer que la

et de multiplication de jets en montrant que l'on peut résoudre géométriquement des équations du second degré lorsqu'elles sont données sous forme d'un système d'équation :

Deux jets U, V déterminent deux jets $ABCP, ABCQ$ dont la somme est égale au premier des jets donnés et dont le produit est égal au second.⁷⁸

On suppose que la forme élémentaire est une courbe du second ordre et soit $U = ABCD, V = ABCE$; on désigne par F l'intersection de la tangente en C et de AD , et par G celle de AC et BE . La droite FG coupe la courbe en deux points P et Q . Par construction, P et Q sont associés dans l'involution $CC.AD$ et donc

$$ABCP + ABCQ = ABCD = U.$$

De même, P et Q sont associés dans l'involution $AC.BE$ et donc

$$(ABCP)(ABCQ) = ABCE = V.$$

5.7 La valeur numérique des jets et la déduction des coordonnées

5.7.1 La notion de valeur d'un jet

De la même manière que dans *Geometrie der Lage* [Staudt, 1847], l'analyse des propriétés métriques et focales des coniques était reportée en fin de livre comme une annexe puisque cette partie de la théorie supposait la notion de grandeur, von Staudt précise dans une note en dessous de la table des matières du tome II des *Beiträge zur der Geometrie der Lage* [Staudt, 1857] que les paragraphes concernant la valeur des jets et la notion d'abscisse doivent être aussi considérés comme des annexes pour la même raison. En effet, la notion de valeur associée à un jet dépend de la grandeur AB , A et B étant deux points d'une droite et des opérations que l'on peut effectuer sur celle-ci. Etant donné un jet U , deux points propres réels A et B d'une droite, C le point à l'infini de la droite AB et D , le point de cette droite tel que $U = ABCD$, von Staudt définit comme positif ou négatif le quotient AD/AB selon que les segments finis AB et AD sont de même sens ou de sens contraire⁷⁹. La valeur ainsi signée du quotient AD/AB est définie comme la valeur du jet $ABCD = U$. Si $ABCD$ est un jet propre (neutre), sa valeur est donc négative lorsque AC est séparé par BD (en effet dans ce cas puisque C est le point à l'infini, les segments finis

définition de l'égalité des jets à partir de la notion de relation projective suffit.

Cette propriété s'obtient assez facilement comme un corollaire du théorème fondamental de la géométrie projective. Soit une relation telle que $ABCP = A_1B_1C_1P_1$; il est clair que A et A_1 , B et B_1 ainsi que C et C_1 sont associés par cette relation, ce qui prouve qu'elle est identique à la relation projective qui associe A et A_1 , B et B_1 , C et C_1 puisque les jets $ABCP$ et $A_1B_1C_1P_1$ sont égaux.

⁷⁸„Durch zwei Würfe U, V sind zwei Würfe $ABCP, ABCQ$ bestimmt, deren Summe dem ersten und deren Produkt dem letzten der gegebenen Würfe gleich ist.“ [Staudt, 1857, 175]

⁷⁹Les segments finis AB et AD sont de même sens ou de sens contraire selon que ABC et ADC définissent un même sens ou des sens contraires.

AB et AD sont de sens opposés), comprise entre 0 et 1 lorsque AB est séparé par DC et supérieure à 1 lorsque AD est séparé par BC . Von Staudt précise de plus que si le jet $ABCD$ est impropre de première espèce, c'est-à-dire si A et D sont confondus, alors sa valeur sera égale à 0. De même, si le jet $ABCD$ est impropre de seconde espèce, c'est-à-dire si B et D sont confondus, sa valeur est alors égale à 1 et si le jet $ABCD$ est impropre de troisième espèce ou si C et D sont confondus, sa valeur est égale ∞ . Von Staudt n'utilise certes pas de dessin mais use ici d'une interprétation géométrique des valeurs des jets : si C est le point à l'infini et si les points A et B sont fixes, la valeur du jet $ABCD$ parcourt l'ensemble des nombres réels au fur et à mesure que D parcourt la droite (dans le sens ABC).

Le premier point important pour von Staudt est de montrer que la définition de la valeur d'un jet ne dépend pas du représentant choisi. Soit A_1, B_1, C_1, D_1 quatre points d'une droite tels que A_1, B_1 sont des points propres réels, C_1 est le point à l'infini de la droite; si $A_1B_1C_1D_1 = ABCD$, la relation projective entre les deux droites qui associe A et A_1 , B et B_1 , C et C_1 , D et D_1 est une similitude puisqu'elle associe les points à l'infini des deux droites.⁸⁰ Il en déduit donc que le rapport de deux segments d'une des droites est égal au rapport des segments correspondants de l'autre droite et ainsi :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{A_1D_1}{A_1B_1}.$$

Von Staudt montre ensuite que la notion de valeur d'un jet est cohérente avec celle de notion d'égalité entre jets et avec les opérations d'addition et de multiplication des jets :

Deux jets propres neutres⁸¹ ont des valeurs égales ou différentes selon qu'ils sont ou ne sont pas projectifs entre eux. Si un jet est la somme de deux jets neutres, alors on obtient sa valeur en additionnant la valeur des termes de la somme. Si un jet est le produit de jets neutres, alors on obtient sa valeur en multipliant la valeur des facteurs.⁸²

Étant donné deux jets U et U_1 , on considère sur une droite deux points (propres) A et B , le point à l'infini C et les points D et D_1 tels que :

$$U = ABCD \quad U_1 = ABCD_1.$$

Si S est le point correspondant à A dans l'involution $CC.DD_1$, par définition de la somme, on a $ABCS = U + U_1$ et pour montrer la propriété de cohérence entre

⁸⁰Cette définition est posée dans l'annexe de *Geometrie der Lage* :

De la même manière qu'une affinité est un cas particulier de transformation colinéaire, la similitude est un cas particulier d'affinité, et la congruence, un cas particulier de similitude.

„Gleichwie Affinität ein besonderer Fall von collineärer Verwandtschaft ist, so ist Aehnlichkeit ein besonderer Fall von Affinität und Congruenz ein besonderer Fall von Aehnlichkeit.“ [Staudt, 1847, 203]

⁸¹Un jet neutre est un jet qui admet une représentation avec des éléments réels d'une forme élémentaire. (voir le paragraphe suivant)

⁸²„Zwei neutrale eigentliche Würfe haben gleiche oder un gleiche Werthe, je nachdem sie projektivisch oder nicht projektivisch zu einander sind. Ist ein Wurf die Summe von neutralen Würfen, so erhält man auch seinen Werth, wenn man die Werthe der Summanden zu einander addirt. Ist ein Wurf das Produkt aus neutralen Würfen, so erhält man seinen Werth, wenn man die Werthe der Faktoren mit einander multiplicirt.“ [Staudt, 1857, 257]

les opérations de somme des jets et de somme de valeurs de jets, il faut donc se convaincre que $AD + AD_1 = AS$. Puisque l'involution $CC.DD_1$ admet le point à l'infini comme point double, cette correspondance est donc une congruence et $AD = D_1S$. Von Staudt en déduit donc en utilisant implicitement une relation analogue à celle de Chasles :⁸³

$$AS = AD_1 + D_1S = AD + AD_1.$$

De la même manière, la valeur d'un jet harmonique est égale à $\frac{1}{2}$. Enfin, si la valeur d'un jet U est égal à u , alors celle du jet opposé $-U$ (qui est aussi égal au produit du jet U par un jet harmonique) est égale à $-u$.

Von Staudt généralise alors la définition de la valeur d'un jet en retrouvant la définition du birapport.⁸⁴ Le point de départ de Steiner est ainsi réduit à la notion de valeur d'un jet et donc subordonné à la théorie purement géométrique des jets :

Soit A, B, C, D quatre points propres réels situés sur une même droite, alors

$$\frac{AD}{AB} \cdot \frac{CB}{CD}$$

est la valeur du jet $ABCD$.⁸⁵

Si E désigne le point à l'infini de la droite considérée, les jets $ABED$ et $CDEB$ auront respectivement comme valeur AD/AB et CB/CD . Il suffit alors pour obtenir une définition plus générale de la valeur d'un jet de remarquer $ABCD = BADC = (BADE)(BEDC)$.⁸⁶ Von Staudt identifie sa notion de valeur d'un jet avec celle de birapport utilisée par les autres géomètres. Si les points A, C séparent les points B, D , les conventions adoptées sur le signe des quotients entraînent que l'un des quotients est positif alors que l'autre est négatif et donc la valeur du jet $ABCD$ est négative. La notion de birapport apparaît donc dans une annexe destinée à montrer que la notion de coordonnée projective peut se déduire à partir de la pure géométrie. La notion de birapport est accessoire pour von Staudt et ne saurait en aucun être un fondement de la géométrie projective. La notion de valeur d'un jet se généralise aux jets définis par les droites d'un faisceau de droites. Si l'on considère quatre droites réelles a, b, c, d concourantes en un point réel S , alors la valeur du jet $abcd$ est égale à

$$\pm \frac{\sin(ad) \cdot \sin(cb)}{\sin(ab) \cdot \sin(cd)}$$

selon que les droites a, c sont ou ne sont pas séparées par les droites b, d . Pour justifier cette formule, il suffit de considérer une sécante aux quatre droites qui coupe la droite c au point à l'infini.

⁸³Von Staudt n'évoque jamais lorsqu'il étudie la notion de sens, la question de l'addition des quantités signées.

⁸⁴Von Staudt n'utilise pas le terme de birapport.

⁸⁵„Wenn A, B, C, D vier reelle eigentliche Punkte sind, welche in einer und derselben Geraden liegen, so ist $\frac{AD}{AB} \cdot \frac{CB}{CD}$ der Werth des Wurfes $ABCD$.“ [Staudt, 1857, 257]

⁸⁶Si un des points est situé à l'infini, le théorème reste valable. Par exemple, si B est à l'infini, $\frac{AD}{CD}$ est la valeur du jet $DCBA = ABCD$.

5.7.2 La déduction des coordonnées

Von Staudt déduit à partir de la notion de valeur numérique des jets celle d'abscisse d'un élément dans une forme élémentaire : étant donné A, B, C trois éléments d'une forme élémentaire défini comme un système d'abscisses⁸⁷, l'abscisse d'un élément quelconque P de la forme sera définie comme la valeur du jet $ABCP$. Les abscisses respectives de A, B, C sont respectivement $0, 1, \infty$.

Von Staudt déduit immédiatement de cette définition que si x est l'abscisse d'un élément P par rapport au système d'abscisses (A, B, C) , alors l'abscisse de cet élément par rapport au système d'abscisses (B, C, A) est $1 - x$ et que celle par rapport au système d'abscisses (C, B, A) est $1/x$. En effet, comme

$$BACP + ABCP = 1,$$

la valeur de $BACP$ est égale à $1 - x$. De même, comme il a été montré que le jet $CBAP$ est l'inverse du jet $ABCP$, la valeur de $CBAP$ est égale à $1/x$.

Inversement, la connaissance des abscisses x, x_1, x_2, x_3 par rapport à un même système d'abscisses de quatre éléments P, P_1, P_2, P_3 permet de calculer la valeur du jet $PP_1P_2P_3$ est égale à :

$$\frac{x - x_3}{x - x_1} \cdot \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_3}.$$

La démonstration de cette formule repose sur la cohérence parfaite⁸⁸ entre les opérations définies sur les jets et les opérations numériques. En effet, comme $ABCP \cdot APCP_3 = ABCP_3$, il s'ensuit que la valeur de $APCP_3$ est x_3/x et donc celle de $PACP_3$ est égale à

$$1 - \frac{x_3}{x}, \quad \text{soit} \quad \frac{x - x_3}{x}.$$

De même, la valeur de $PACP_1$ est égale à $(x - x_1)/x$ et comme $PACP_3 = PACP_1 \cdot PP_1CP_3$, on déduit que la valeur de PP_1CP_3 est égale à

$$\frac{x - x_3}{x - x_1}.$$

De la même manière, $P_2P_3CP_1 = CP_1P_2P_3$ a pour valeur

$$\frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_3};$$

la formule se déduit immédiatement de l'égalité $PP_1P_2P_3 = PP_1CP_3 \cdot CP_1P_2P_3$.

Von Staudt termine son analyse de la notion d'abscisse en étudiant les effets d'un changement de système d'abscisses et en déduisant une expression analytique des correspondances projectives entre formes élémentaires.

Soit deux systèmes d'abscisses (A, B, C) et (E, F, G) d'une même forme élémentaire. On désigne par x l'abscisse d'un élément P par rapport au système A, B, C , par y l'abscisse du même point P par rapport à (E, F, G) , par e, f, g les abscisses respectives de E, F, G par rapport au système (A, B, C) et par

⁸⁷„Abscienssystem“.

⁸⁸Si l'on ne craignait pas l'anachronisme, il faudrait dire l'*isomorphisme*.

a, b, c celles de A, B, C par rapport au système (E, F, G) . Von Staudt obtient alors les formules suivantes comme corrolaire immédiat de la formule générale précédente :

$$y = \frac{f-g}{f-e} \cdot \frac{x-e}{x-g} \quad x = \frac{b-c}{b-a} \cdot \frac{y-a}{y-c}.$$

En particulier, puisque $x = ABCA = 0$, la valeur a de $EFGA$ est égale à :

$$\frac{f-g}{f-e} \cdot \frac{e}{f};$$

De même, les valeurs b de $EFGB$ et c de $EFGC$ sont respectivement égales à :

$$\frac{f-g}{f-e} \cdot \frac{1-e}{1-f} \quad \text{et} \quad \frac{f-g}{f-e}.$$

Plus généralement, trois éléments E, F, G d'une forme élémentaire et trois nombres e, f, g définissent un système d'abscisses par rapport auquel les abscisses respectives de E, F, G sont e, f, g . L'abscisse x par rapport à ce système d'abscisses d'un élément quelconque P de la forme élémentaire et la valeur y de $EFGP$ vérifient les formules :

$$y = \frac{f-g}{f-e} \cdot \frac{x-e}{x-g} \quad \text{et} \quad x = \frac{gy(f-e) - e(f-g)}{(f-e)y - (f-g)}.$$

Von Staudt déduit de ces formules une équation définissant les relations projectives entre formes élémentaires; soit A, B, C un système d'abscisses d'une forme élémentaire g et E_1, F_1, G_1 un système d'abscisses d'une seconde forme élémentaire g . Soit x l'abscisse d'un élément P de la première forme g et x_1 celle d'un élément P_1 de la forme g_1 . Si l'on considère comme correspondants deux éléments P et P_1 dont les abscisses x et x_1 de ces deux éléments vérifient l'équation

$$\alpha x x_1 - \beta x - \gamma x_1 - \delta = 0,$$

alors, lorsque $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, la relation entre les éléments des deux formes est projective. Il suffit de considérer les éléments A_1, B_1, C_1 de la seconde forme dont les abscisses respectives sont respectivement égales à

$$\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\beta - \delta}{\alpha - \gamma}, \frac{\beta}{\alpha}.$$

On déduit immédiatement des formules précédentes que la valeur du jet $A_1 B_1 C_1 P_1$ est égale à

$$\frac{\gamma x_1 - \delta}{\alpha x_1 - \beta} = x$$

et la correspondance qui associe P à P_1 est donc projective. Réciproquement, toute correspondance projective entre deux formes peut être décrite par une équation du type précédent.

5.8 Les éléments imaginaires et le calcul des jets

5.8.1 Les différentes catégories d'éléments imaginaires

Avant même l'exposé de la théorie des jets, l'objectif principal des *Beiträge zur Geometrie der Lage* est indéniablement de produire une théorie des éléments imaginaires fondées sur le même principe que celui adopté dans *Geometrie der Lage*, à savoir tout déduire de la notion de correspondance projective entre formes.⁸⁹ Dans *Geometrie der Lage*, von Staudt avait déjà évoqué très brièvement l'intérêt d'introduire la notion de points doubles imaginaires pour les formes involutives n'ayant pas de points doubles réels :

Si dans un théorème, deux éléments apparaissent comme des éléments doubles d'une forme en involution, alors en règle générale, le théorème peut être interprété plus généralement en faisant abstraction de l'hypothèse selon laquelle le système a deux éléments doubles. Pour s'en souvenir, on dit d'une forme uniforme en involution dans lequel aucun élément (réel) n'est associé à lui-même, que ses éléments doubles sont imaginaires.⁹⁰

Dans les *Beiträge*, von Staudt présente une théorie systématique des éléments imaginaires en proposant une manière de désigner les éléments doubles d'une forme involutive : la donnée une forme uniforme involutive, $AA_1.BB_1\dots$ qui n'a pas d'élément double (réel) et à laquelle on associe le sens ABA_1 définit un élément imaginaire de première espèce noté ABA_1B_1 ⁹¹ S'il est question d'un élément imaginaire ABA_1B_1 d'une forme, on doit donc simplement comprendre que l'on considère quatre éléments réels A, B, A_1, B_1 de la forme tels que A, A_1 soient séparés par B, B_1 puisque l'involution $AA_1.BB_1\dots$ n'admet pas de point double réel. L'élément imaginaire ABA_1B_1 est un point imaginaire si la forme involutive est une ponctuelle, une droite imaginaire de I. espèce si la forme est un faisceau de rayons et un plan imaginaire si la forme est un faisceau de plans. Si la forme involutive $EE_1.FF_1$ coïncide avec la forme involutive $AA_1.BB_1$ et si les sens ABA_1 et EFE_1 sont identiques, alors ABA_1B_1 et EFE_1F_1 désignent le même élément imaginaire. Puisque les formes involutives $AA_1.BB_1\dots$ et $A_1A.B_1B\dots$ coïncident de même que les sens ABA_1 et A_1B_1A ⁹², ABA_1B_1 et A_1B_1AB désignent le même élément imaginaire. On comprend alors pourquoi malgré le risque de confusion avec celle des jets, la notation adoptée par von Staudt pour désigner les éléments imaginaires est pertinente ; en effet, d'une part, la donnée de deux paires d'éléments correspondants est une donnée minimale qui d'une part spécifie l'involution et le sens, et qui d'autre part, est invariante par l'involution. Von Staudt obtient donc ainsi une définition des

⁸⁹Pour une synthèse sur la question des éléments imaginaires en géométrie, on peut consulter l'article de D. Rowe [1998], *In search of Steiner's Ghosts : Imaginary elements in nineteenth-century geometry*.

⁹⁰Wenn in einem Satze zwei Elemente als Ordnungselemente eines involutorischen Gebildes erscheinen, so kann derselbe in der Regel dadurch allgemeiner aufgefasst werden, dass man von der Voraussetzung, das involutorische Gebilde habe zwei Ordnungselemente, abstrahirt. Um hieran zu erinnern, sagt man von einem involutorischen einförmigen Gebilde, sagt man von einem involutorischen einförmigen Gebilde, in welchem kein (reelles) Element sich selbst zugeordnet ist, dass seine Ordnungselemente imaginär seien. [Staudt, 1847, 186]

⁹¹Il ne s'agit pas ici d'un jet mais d'une simple notation désignant un élément imaginaire.

⁹²Les sens coïncident car la paire A, A_1 sépare la paire B, B_1 .

éléments imaginaires en évitant toute considération métaphysique et en n'introduisant qu'une notation héritée de sa théorie des involutions.

ABA_1B_1 désigne aussi le même élément que BA_1B_1A et B_1ABA_1 . Les notations qui correspondent à la même forme involutive mais au sens opposé désignent l'élément imaginaire conjugué; A_1BAB_1 , BAB_1A_1 , AB_1A_1B ou B_1A_1BA désignent l'élément conjugué à ABA_1B_1 .

La considération des systèmes réglés en involution (hyperboloïdes à une nappe) permet à von Staudt d'étendre sa définition des éléments imaginaires : un système réglé en involution $aa_1.bb_1$ et le sens aba_1 définissent une droite imaginaire de seconde espèce que l'on désignera par aba_1b_1 . De même que pour les éléments de I. espèce, aba_1b_1 , a_1b_1ab , ba_1b_1a et b_1aba_1 désignent la même droite imaginaire de II. espèce et a_1bab_1 , bab_1a_1 , ab_1a_1b et b_1a_1ba désignent la droite imaginaire conjuguée.

Une fois définis les éléments imaginaires, von Staudt étend à ceux-ci les propriétés d'incidence. On ne peut pourtant pas qualifier cette géométrie de complexe puisque les éléments imaginaires sont définis par paire d'éléments conjugués. Un élément imaginaire ABA_1B_1 est situé sur un élément réel u si les éléments réels A, B, A_1, B_1 sont situés sur u . De manière duale, un élément imaginaire ABA_1B_1 passe par l'élément réel s si les éléments réels A, B, A_1, B_1 passent par s . Un point imaginaire est donc situé sur la droite réelle qui est le support de l'involution qui le définit, il est aussi situé dans chaque plan qui contient cette droite. De même, une droite imaginaire de I. espèce est située dans un plan réel, celui qui contient le faisceau involutif qui définit la droite; elle passe aussi par un point réel, le centre de ce même faisceau. Par contre, une droite imaginaire de II. espèce n'est pas située dans un plan réel et ne passe par aucun point réel. En particulier, un élément réel qui passe par un élément imaginaire passe aussi par l'élément imaginaire conjugué et de manière duale, un élément réel situé dans un élément imaginaire est aussi contenu dans l'élément imaginaire conjugué.

Une fois établies les règles d'incidence entre un élément réel et un élément imaginaire, von Staudt énonce les règles d'incidence entre éléments imaginaires ce qui lui permet d'étendre aux éléments imaginaires les notions de projection (à partir d'un élément réel) ou de section (par un élément réel); par exemple, un point imaginaire ABA_1B_1 sera dit situé dans un plan imaginaire EFE_1F_1 si

1. le support réel u du point imaginaire coïncide avec l'axe réel s du plan (c'est-à-dire l'axe du faisceau involutif de plans qui définit le plan imaginaire) ou
2. la ponctuelle involutive $AA_1.BB_1...$ et le faisceau de plans $EE_1.FF_1...$ sont en perspective et si de plus les sens ABA_1 et EFE_1 coïncident.

A partir de ces relations, on peut définir la projection d'un point imaginaire à partir d'une droite réelle : le point imaginaire ABA_1B_1 est projeté à partir d'une droite réelle s (qui n'est pas située dans un même plan réel que le point imaginaire) par le plan imaginaire $s(A)s(B)s(A_1)s(B_1)$ où $s(A)$ désigne le plan qui projette le point réel A à partir de la droite réelle s . De manière duale, un plan imaginaire EFE_1F_1 sera intersecté par une droite réelle u qui n'a pas de point réel commun avec le plan au point imaginaire $u(E)u(F)u(E_1)u(F_1)$ où $u(E)$ désigne le point d'intersection du plan E et de la droite u ⁹³. Von Staudt définit de manière analogue les relations d'incidence entre points imaginaires et

⁹³Von Staudt note le plan imaginaire qui projette le point ABA_1B_1 à partir de la droite s , $s(ABA_1B_1)$ et le point d'intersection de EFE_1F_1 et de la droite u , $u(EFE_1F_1)$.

droites imaginaires de I. espèce, ainsi que les notions de projection d'un point (ou d'une droite de I. espèce) imaginaire à partir d'un point réel et d'intersection d'un plan (ou d'une droite de I. espèce) avec un plan réel.

De même, une droite imaginaire ghg_1h_1 de II. espèce passe par le point imaginaire ABA_1B_1 si la ponctuelle involutive $AA_1.BB_1...$ est contenue dans le système involutif $gg_1.hh_1...$ et si les sens ABA_1 et ghg_1 coïncident.⁹⁴ De même, la droite imaginaire ghg_1h_1 de II. espèce sera située dans le plan imaginaire EFE_1F_1 si le faisceau involutif de plans $EE_1.FF_1...$ est contenu dans le système involutif $gg_1.hh_1...$ ⁹⁵

Von Staudt termine l'exposé de la géométrie des éléments imaginaires en étendant à ceux-ci les considérations d'incidence. Ainsi, deux points imaginaires définissent une droite imaginaire de I. espèce ou de II. espèce selon qu'ils appartiennent à un même plan réel ou non. Comme la définition des formes élémentaires et la théorie de l'involution sont des conséquences des propriétés d'incidence des éléments, celles-ci s'étendent aux éléments imaginaires.

5.8.2 La généralisation de la définition des jets et des opérations sur les jets

La définition des jets s'étend aux éléments imaginaires. Von Staudt qualifie de *neutres* les jets qui admettent une représentation réelle (par des éléments réels).⁹⁶ En particulier, étant donné trois éléments réels A, B, C d'une forme élémentaire, le jet $ABCD$ est neutre si et seulement si D est réel. Si D_1 est l'élément imaginaire conjugué de D , les jets $ABCD$ et $ABCD_1$ sont dits conjugués entre eux. La définition des opérations sur les jets et l'essentiel de leurs propriétés se généralisent aux jets imaginaires. De plus, si U et V sont conjugués aux jets U_1 et V_1 , alors la somme $U + V$ est conjuguée de la somme $U_1 + V_1$; de même pour les produits UV et U_1V_1 . En particulier, la somme et le produit de deux jets conjugués entre eux est un jet neutre. La somme et le produit de deux jets neutres est un jet neutre; le produit d'un jet neutre ($\neq 0$) par un jet non-neutre est un jet non-neutre.

Von Staudt construit l'algèbre des jets en soulignant l'analogie avec celle des

⁹⁴Un hyperboloïde à une nappe (un système réglé) est engendré par deux systèmes de droites. Chaque droite d'un système coupe chaque droite de l'autre. Le système involutif $gg_1.hh_1...$ est constitué par un de ces deux systèmes. La droite qui supporte la ponctuelle involutive $AA_1.BB_1...$ appartient donc à l'autre. Si l'on désigne respectivement par a, b, a_1, b_1 les quatre droites du premier système qui passent par les points A, B, A_1, B_1 , dire que la droite ghg_1h_1 passe par le point ABA_1B_1 signifie donc que $gg_1.hh_1...$ et $aa_1.bb_1...$ désignent la même involution.

⁹⁵Étant donné un hyperboloïde à une nappe, chaque plan qui passe par une droite d'un des systèmes de droites qui engendrent l'hyperboloïde passe aussi par une droite de l'autre système et est tangent à l'hyperboloïde au point d'intersection de ces deux droites. L'axe du faisceau involutif $EE_1.FF_1$ est une droite de l'autre système que celui qui constitue le système involutif $gg_1.hh_1...$. Si on note e, e_1, f, f_1 les droites de ce système contenues dans les plans E, E_1, F, F_1 , dire que la droite ghg_1h_1 est située dans le plan EFE_1F_1 signifie donc que $gg_1.hh_1...$ et $ee_1.f.f_1$ désignent la même involution.

⁹⁶Von Staudt utilise de temps en temps le qualificatif de *non-neutre* pour désigner les jets qui n'admettent aucune représentation réelle et réserve celui d'*imaginaire* aux jets définis à l'aide d'éléments imaginaires. Un jet défini par des éléments imaginaires peut être neutre. En effet, un tel jet peut admettre une représentation réelle. Von Staudt montre par exemple que si $ABCD$ est un jet harmonique et si A_1, B_1, C_1, D_1 sont les éléments conjugués de A, B, C, D le jet $A_1B_1C_1D_1$ est aussi harmonique.

nombres complexes. Ainsi, il établit que si U, V, U_1, V_1 sont des jets neutres, J un jet non-neutre et si $U + VJ = U_1 + V_1J$, alors $U = U_1$ et $V = V_1$. La démonstration repose sur les propriétés de régularité de l'addition des jets et est donc similaire à la preuve de la proposition analogue des nombres complexes; soit V_2 le jet neutre vérifiant $V = V_1 + V_2$, comme $U + V_1J + V_2J = U_1 + V_1J$, $U + V_2J = U_1$ et donc V_2J est un jet neutre; comme V_2 est neutre et J non-neutre, il s'ensuit que $V_2 = 0$. Réciproquement, la donnée d'un jet non-neutre J et d'un jet quelconque W définit deux jets neutres U, V tels que $W = U + VJ$.

5.8.3 Puissances de jets et l'introduction des nombres complexes

Von Staudt définit la puissance m^e du jet U comme le produit de m jets tous égaux à U . Toute puissance d'un jet neutre est un neutre et les puissances de deux jets conjugués sont conjuguées. Une puissance d'un jet harmonique est soit un jet harmonique, soit un jet impropre de seconde espèce ($= 1$) selon que la puissance est impaire ou paire. En effet, si $MANB$ est harmonique, $MN.AA.BB$ est une involution. Comme $MANB = MBNA$, $(MANB)^2 = (MANB)(MBNA) = MANA$ ce qui montre que $(MANB)^2 = 1$. Von Staudt généralise cette propriété en en déduisant que les puissances de deux jets opposés sont des jets égaux ou opposés selon que la puissance est paire ou impaire. Si une puissance d'un jet U est un jet impropre de seconde espèce ($= 1$), alors le jet inverse et le jet conjugué de U possèdent aussi cette propriété.

Après avoir établi ces propriétés qui illustrent l'identité de l'algèbre des jets et de celle des nombres, von Staudt montre qu'«un jet $MANC$ qui n'est pas égal à 0 détermine deux jets opposés entre eux $MANB, MANB_1$ tels que $(MANB)^2 = (MANB_1)^2 = MANC$ »⁹⁷. La démonstration s'appuie de nouveau sur les propriétés des éléments doubles d'une involution; en effet si $(MANP)^2 = MANC$, comme $MANP = MPNC = NCMP$, P est un élément double de l'involution $MN.AC\dots$. Réciproquement, les éléments doubles B, B_1 de cette involution vérifient $(MANB)^2 = (MANB_1)^2 = MANC$. De plus, comme $MANB_1 = (MANB)(MBNB_1)$ et que $MBNB_1$ est un jet harmonique, les deux jets $MANB$ et $MANB_1$ sont opposés. Lorsque $MNAC = 1$, c'est-à-dire lorsque A et C coïncident, l'un des deux jets ainsi définis est $= 1$ et l'autre harmonique; si $MANC$ est un jet neutre et si les éléments M, N ne sont pas séparés par les éléments A, C , les deux jets $MANB$ et $MANB_1$ sont neutres. Si au contraire, $MANC$ est non-neutre ou si $MANC$ est neutre et M, N sont séparés par A, C , les deux jets $MANB$ et $MANB_1$ sont non-neutres.

Von Staudt propose de désigner par $+i$ et $-i$ les jets dont le carré est un jet harmonique. Plus généralement, si v est un nombre réel quelconque, vi désigne le jet obtenu par la multiplication du jet dont la valeur est égale à v par celui désigné par $+i$. De même, tout jet W ($\neq \infty$) détermine deux jets U, V tels que $W = U + Vi$. Cette propriété permet à von Staudt de définir la valeur d'un jet non-neutre. Si u est la valeur du jet U et v celle de V , alors $u + vi$ est la valeur du jet W . Cette définition est compatible avec l'égalité, l'addition et la

⁹⁷„Durch jeden Wurf $MANC$, welche nicht $= 0$ ist, sind zwei einander entgegengesetzte Würfe $MANB, MANB_1$ bestimmt, so dass $(MANB)^2 = (MANB_1)^2 = MANC$ ist.“ [Staudt, 1857, 177]

multiplication des jets.

Von Staudt donne une interprétation géométrique de la définition de la valeur des jets à l'aide des points cycliques. Cette interprétation lui permet d'introduire la notation trigonométrique des nombres complexes :

Soit B, Q, R trois points réels d'un cercle, M celui des deux points imaginaires en lequel le cercle coupe la droite à l'infini du plan qui est situé dans le sens BQR et N celui qui est situé dans le sens BRQ . Si on désigne par ϕ l'arc BQ qui est une partie de l'arc BQR , alors $\cos\phi + i\sin\phi$ est la valeur du jet $MBNQ$.⁹⁸

5.9 La réception de la théorie des jets

Les méthodes géométriques de von Staudt ont eu une réception assez faible ; ses livres n'ont connu que très peu de traductions⁹⁹. Même si de nombreux auteurs font référence à son projet d'exposer la géométrie sans faire appel à la mesure, la plupart signale la difficulté du texte et du style d'exposition de von Staudt. Hankel y voit les raisons de la faible diffusion des travaux de von Staudt :

Son petit *Geometrie der Lage* 1847 est un chef d'œuvre classique dont la reconnaissance et la diffusion ont été malheureusement tellement retardées par la brièveté de l'exposé, par le manque d'explications complémentaires et par le caractère extrêmement abstrait de ses méthodes que l'auteur, mort en 1867, n'était plus là pour assister à la véritable période de sa gloire.¹⁰⁰

Theodor Reye dont une des ambitions est d'exposer la théorie de von Staudt de manière pédagogique pour des ingénieurs précise dans l'introduction de son traité *Die Geometrie der Lage* [Reye, 1866] que le livre de von Staudt n'est pas destiné aux débutants et que le style d'exposition de von Staudt est très elliptique :

Cela se signale spécialement par la concision de la formulation et par un exposé très serré, presque laconique ; seul, le nécessaire est dit, un mot d'explication est rarement ajouté et il reste au lecteur abandonné à lui-même à se former des exemples plus facilement intelligibles que les théorèmes posés dans la plus grande généralité.¹⁰¹

⁹⁸„Wenn B, Q, R drei reelle Punkte eines Kreises sind, so liegt der eine M von den beiden imaginären Punkten, in welchen der Kreis die unendliche ferne Gerade der Ebene schneidet, im Sinne BQR und der andere N im Sinne BRQ . Bezeichnet man nun den Bogen BQ , welcher von dem Bogen BQR ein Theil ist, durch ϕ , so ist $\cos\phi + i\sin\phi$ der Werth des Wurfes $MBNQ$.“ [Staudt, 1857, 260-261]

⁹⁹La *Geometrie der Lage* est traduite en 1889 en italien par M. Pieri avec une introduction de C. Segre.

¹⁰⁰Seine kleine „Geometrie der Lage“ 1847 ist ein klassisches Meisterwerk, dessen Anerkennung und Verbreitung durch die grosse Kürze des Vortrages, durch den Mangel aller erläuternden Zusätze und durch den äusserst abstracten Charakter seiner Methode sich leider so sehr verzögerte, dass der 1867 verstorbene Verfasser die eigentliche Periode seines Ruhmes nicht mehr erlebt hat. [Hankel, 1875, 29]

¹⁰¹„Es zeichnet sich namentlich aus durch eine merwürdige Knappheit des Ausdrucks und eine sehr gedrängte, beinahe wortkarge Darsellung ; nur das Nothwendige wird gesagt, selten ein erläuterndes Wort hinzugefügt, und dem Leser bleibt es überlassen, zu den in ihrer ganzen

Néanmoins, peu après la discussion initiée par Klein [1873] au sujet de la démonstration du théorème fondamental de la géométrie, une série d'articles de Lüroth [1873, 1875, 1876], Sturm [1875] et Schröder [1876] reprend et approfondit la théorie des jets. Après avoir souligné l'analogie entre le calcul des jets et celui des nombres, Lüroth annonce les développements qu'il donne à la théorie des jets, entre autre l'introduction de la notion de jets positifs et négatifs et la preuve d'un analogue du théorème fondamental de l'algèbre :

Je me propose dans la suite d'exposer rapidement comment grâce à l'introduction appropriée de nouveaux concepts, cette analogie peut être poursuivie plus loin jusqu'à la démonstration du théorème : une fonction entière de degré n d'un jet s'annulent pour n jets. Comme cette démonstration est donnée sans introduire la notion de mesure et celle de nombre (à l'exception des nombres entiers positifs et de la fraction $\frac{1}{2}$ comme coefficients et exposants), elle peut donner les fondements d'une théorie purement géométrique des courbes et des surfaces algébriques.¹⁰²

Une des améliorations apportées par Lüroth à la théorie des jets de von Staudt est l'introduction d'une notion d'ordre ; il motive l'introduction de la notion de jets positifs et négatifs par l'analogie avec les nombres. Un jet $(abcd)$ composé de quatre éléments réels sera appelé *négatif* si les éléments ac sont séparés par les éléments bd et *positif* dans le cas contraire.

Par rapport aux changements de ces déterminations dans les calculs, les jets se comportent comme les nombres positifs ou négatifs. Ainsi, le produit de deux jets négatifs est un jet positif.¹⁰³

De la même manière, le produit d'un jet négatif et d'un jet positif est un jet négatif, celui de deux jets positifs est positif ; l'addition des jets vérifie les propriétés attendues : la somme de deux jets positifs est un jet positif ; Lüroth précise aussi que la somme de deux jets négatifs ou de deux jets positifs ne peut être un jet nul. La démonstration de ces propriétés justifie la pertinence des dénominations de jet positif ou négatif et renforce la compréhension de l'isomorphisme entre l'algèbre des jets et celle des nombres. Par contre, alors que dans son article *Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfeln* [Lüroth, 1875], il reprend et précise la théorie des éléments imaginaires de von Staudt, Lüroth ne précise pas qu'avec ses appellations, les jets racines carrées d'un jet négatif sont des jets non-neutres et que ceux d'un jet positif sont neutres, ni qu'un des jets racines carrées d'un jet neutre est positif et l'autre négatif.¹⁰⁴ Il montre en admettant explicitement l'axiome de continuité de la droite (et en faisant référence à Dedekind [1872]) que en divisant successivement par 2 un jet positif,

Allgemeinheit aufgestellten Sätzen sich leichter fassliche Beispiele selbst zu bilden.“ [Reye, 1866, VII-VIII]

¹⁰²„Ich erlaube mir im Folgenden kurz darzulegen, wie durch passende Einführung neuer Begriffe diese Analogie sich weiter fortsetzen lässt bis zum Beweise des Satzes, dass eine ganze Function n . Grades eines Wurfes für n Würfe verschwindet. Da dieser Beweis ohne Einführung von Maass- und Zahlbegriffen (positive ganze Zahlen und den Bruch $\frac{1}{2}$, als Coefficienten und Exponenten, ausgenommen) geführt ist, so kann er die Grundlage abgeben zur rein geometrischen Theorie der algebraischen Curven und Flächen.“ [Lüroth, 1873, 767]

¹⁰³„In Bezug auf die Veränderungen dieser Bestimmungen beim Rechnen verhalten sich nun die Würfe wie positive oder negative Zahlen. So ist das Product von zwei negativen Würfeln ein positiver Wurf.“ [Lüroth, 1873, 768]

¹⁰⁴C'est d'autant plus surprenant que le résultat est explicitement exprimé par von Staudt (voir [5.8.3]).

on peut obtenir un jet aussi petit que l'on veut.¹⁰⁵

Il introduit la notion d'ordre sur les jets en posant que le jet u est plus grand que le jet u_1 si le jet $u - u_1$ est positif. Avant d'étudier les fonctions entières de jets, Lüroth précise que le produit d'un jet non-neutre w par le jet conjugué est égal au carré d'un jet positif qu'il appelle la valeur absolue de w . Il précise que si I vérifie $I^2 = -1$, alors tout jet w définit deux jets neutres u et v tels que :

$$w = u + vI \quad \text{et} \quad ww' = u^2 + v^2$$

où w' est le jet conjugué à w .

Comme son ambition est de développer une théorie purement géométrique des courbes algébriques, Lüroth reprend et développe la théorie des jets de von Staudt en montrant systématiquement que l'on peut définir dans l'algèbre des jets les mêmes concepts que ceux de l'analyse. Il obtient ainsi la notion de fonction entière de jets définies à l'aide d'une série :

Après avoir établi les notions d'addition et de multiplication de jets, la notion de fonction entière d'un jet peut être posée sans avoir besoin d'explications supplémentaires. Puisque les mêmes principes sont valables pour l'addition et la multiplication des jets que pour les opérations numériques correspondantes, on peut mettre, comme avec les nombres, toute fonction entière d'un jet indéterminé x sous la même forme normale, à savoir

$$w_0x^n + w_1x^{n-1} + w_2x^{n-2} + \dots + w_n,$$

où w_0, w_1, \dots, w_n sont des jets donnés.¹⁰⁶

Un autre type de réception de la théorie des jets s'effectue dans le cadre des discussions autour de l'axiomatisation de la géométrie projective ([Hessenberg, 1905a], [Veblen and Young, 1908]). Hessenberg propose un calcul géométrique avec les points d'une droite à partir des deux axiomes d'incidence classiques entre points et droites dans le plan auxquels il ajoute le théorème de Desargues. Il signale que son calcul géométrique est intimement lié à celui de von Staudt ainsi qu'au calcul des segments de Hilbert.

Le calcul développé à partir de ces axiomes est en étroite relation avec deux autres méthodes de calcul géométrique. La première a été introduite par Staudt et poursuivie par M. Lüroth. M. Hilbert a donné la seconde.¹⁰⁷

Hessenberg considère les intersections d'une droite a avec les six côtés d'un quadrilatère complet. Il nomme un tel système de points la *combinaison du*

¹⁰⁵[Lüroth, 1875, 197].

¹⁰⁶„Nachdem die Begriffe der Addition und Multiplication der Würfe festgestellt sind, kann der Begriff einer ganzen Function eines Wurfes aufgestellt werden, der weiter keiner Erläuterung bedarf. Da für Addition und Multiplication von Würfen dieselben Gesetze wie für die betreffenden Zahlenoperationen, so wird man auch jede ganze Function des unbestimmten Wurfes x in dieselbe Normalform bringen können wie bei den Zahlen, nämlich in die

$$w_0x^n + w_1x^{n-1} + w_2x^{n-2} + \dots + w_n,$$

wo w_0, w_1, \dots, w_n gegebene Würfe sind.“ [Lüroth, 1875, 200-201]

¹⁰⁷„Der aus diesen Sätzen zu entwickelnde Calcül steht in enger Beziehung zu zwei anderen geometrischen Rechenverfahren. Das erste ist von Staudt begonnen und von Herrn Lüroth durchgeführt worden. Das zweite Herr Hilbert angegeben.“ [Hessenberg, 1905a, 1-2]

quadrilatère et montre que ses axiomes suffisent à prouver que la donnée de cinq points d'une telle combinaison détermine le sixième. Cette proposition est en fait le théorème classique de l'involution. L'intérêt de cette présentation est qu'elle n'utilise pas le théorème fondamental de la géométrie projective¹⁰⁸ et ne nécessite donc pas d'introduire un axiome de continuité. Si $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ désignent les trois paires de côtés opposés du quadrilatère complet, et $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ les six points d'intersection de ces droites avec la droite a , alors lorsqu'on fixe les points A_1, A_2, B_1 , la donnée des deux points C_1, C_2 détermine le point B_2 . Hessenberg note ce résultat sous la forme d'une opération :

$$B_2 = (C_1 C_2).$$

Lorsque X parcourt la droite, les points $Y = (CX)$ et $Y' = (XC)$ parcourt aussi la droite. Les éléments A_1 et A_2 se correspondent et si X coïncide avec B_1 , alors Y et Y' coïncident avec C . Cette opération est associative. Par contre, la commutativité est équivalente au théorème de Pascal¹⁰⁹. Comme les trois axiomes posés par Hessenberg ne sont suffisants pour montrer le théorème de Pascal¹¹⁰, l'opération définie par Hessenberg n'est donc pas commutative. Hessenberg précise que dans un cas particulier, lorsque A_1 et A_2 coïncident, l'opération devient immédiatement commutative puisque la propriété pour un système de points d'être une combinaison du quadrilatère se conserve lorsque on effectue deux permutations.

A partir de ces considérations générales, Hessenberg définit deux opérations sur les points d'une droite ; la première lorsque A_1 et A_2 sont distincts, notée $P = AB$, associative et non commutative sera la multiplication des points ; la seconde, lorsque A_1 et A_2 coïncident, notée $S = A + B$, associative et commutative, sera l'addition. Ces deux opérations sont bien entendu identiques à celles définies par von Staudt.

Veblen and Young [1908] reprennent essentiellement le point de vue développé par Hessenberg. Ils reprennent la notion de *combinaison du quadrilatère* et la désignent par *ensemble quadrangulaire* :

L'ensemble des points en lesquels les côtés d'un quadrangle complet rencontrent une droite est appelé un *ensemble quadrangulaire* ; il est noté par le symbole $Q(A, B, C; D, E, F)$, ce qui implique que $A, D; B, E; C, F$ sont les intersections des paires de côtés opposés du quadrangle et que A, B, C sont les intersections de AB avec trois côtés concourants du quadrangle.¹¹¹

¹⁰⁸Hessenberg précise dans l'introduction de son article que pour prouver les propriétés d'associativité, de commutativité et de distributivité des opérations, von Staudt et Lüroth ont besoin du théorème fondamental de la géométrie projective. En fait, la notion d'involution à partir de laquelle ils définissent les opérations sur les jets dépend du théorème de la géométrie projective. Le commentaire de Hessenberg est juste mathématiquement – on peut définir les opérations sur les jets sans faire référence au théorème fondamental – mais inexact historiquement.

¹⁰⁹Le théorème de Pascal affirme que si A_1, A_2, A_3 sont trois points d'une droite d et A'_1, A'_2, A'_3 trois points d'une droite d' , alors les points d'intersection de $A_1 A'_2$ et $A_2 A'_1$, $A_2 A'_3$ et $A_3 A'_2$, $A_3 A'_1$ et $A_1 A'_3$ sont alignés. Ce théorème est souvent appelé dans les exposés contemporains théorème de Pappus.

¹¹⁰Hessenberg a montré dans un travail précédent que l'on peut montrer le théorème fondamental de la géométrie projective à partir du théorème de Desargues et de celui de Pascal. ([Hessenberg, 1904])

¹¹¹"The set of points in which the sides of a complete quadrangle meet a line is called

Veblen et Young introduisent à partir de la notion d'ensemble quadrangulaire l'algèbre des points. Ils considèrent sur une droite trois points fixes distincts, notés P_0, P_1, P_∞ et appelés les *points fondamentaux*. Les points fondamentaux déterminent sur la droite l'échelle (P_0, P_1, P_∞) . La donnée d'une échelle sur une droite permet de définir deux opérations sur les points de la droite :

Le point P_{x+y} déterminé par la relation $Q(P_\infty, P_x, P_0; P_\infty, P_y, P_{x+y})$ est appelé la *somme* des deux points P_x et P_y (en symboles $P_x + P_y = P_{x+y}$) dans l'échelle (P_0, P_1, P_∞) sur l . Le point P_{xy} déterminé par la relation $Q(P_0, P_1, P_x; P_\infty, P_{xy}, P_y)$ est appelé le *produit* de P_x par P_y (en symboles $P_x \cdot P_y = P_{xy}$) dans l'échelle (P_0, P_1, P_∞) sur l .¹¹²

En fondant l'algèbre des points d'une droite sur la configuration du quadrilatère complet, Hessenberg d'une part, Veblen et Young d'autre part en proposent une présentation très géométrique et très élémentaire qui ne repose que sur les propriétés immédiates de cette configuration. Au contraire de von Staudt qui introduit la notion d'involution comme un cas particulier de transformation projective, leurs démonstrations, au moins dans les préliminaires, n'utilisent pas la notion de transformation projective puisqu'ils subordonnent la notion d'involution à la considération des quadrilatères complets.

a *quadrangular set*; it is denoted by the symbol $Q(A, B, C; D, E, F)$, which implies that $A, D; B, E; C, F$ are the intersections of pairs of opposite sides of the quadrangle with AB and that A, B, C are the intersections with AB of three concurrent sides of the quadrangle." [Veblen and Young, 1908, 351]

¹¹²" The point P_{x+y} determined by the relation $Q(P_\infty, P_x, P_0; P_\infty, P_y, P_{x+y})$ is called the *sum* of the two points P_x and P_y (in symbols $P_x + P_y = P_{x+y}$) in the scale (P_0, P_1, P_∞) on l . The point P_{xy} determined by the relation $Q(P_0, P_1, P_x; P_\infty, P_{xy}, P_y)$ is called the *product* of P_x by P_y (in symbols $P_x \cdot P_y = P_{xy}$) in the scale (P_0, P_1, P_∞) on l ." [Veblen and Young, 1908, 353]

Chapitre 6

La Géométrie supérieure de Chasles

Dans son *Discours d'inauguration du cours de géométrie supérieure de la faculté des sciences de Paris*¹ par lequel il ouvre la chaire de géométrie supérieure spécialement créée à son intention, Michel Chasles définit la géométrie comme la science *de la mesure et des propriétés de l'étendue*. Un sujet d'étude aussi vaste justifie donc aux yeux de Chasles la place de la géométrie dans les programmes d'enseignement :

Il semblerait donc que l'étude de la Géométrie dût occuper une grande place dans l'enseignement public, et cette opinion se fortifie quand on considère que cette science, indépendamment de son application à tous les arts de construction, est réputée le fondement des Sciences mathématiques, et que les meilleurs penseurs, dans tous les temps, l'ont regardée comme un excellent exercice de logique, emminemment propre à former de bons esprits. [Chasles, 1846, 547]

Chasles considère comme un signe encourageant le fait que depuis le début du 19^e siècle, les universités d'Allemagne, d'Angleterre et donc récemment de France considèrent comme indispensable de dispenser des enseignements de *haute*² géométrie. La tâche, souligne Chasles, est difficile car il ne s'agit pas d'expliquer les travaux des géomètres des siècles précédents car ceux-ci «ne forment pas un ensemble de méthodes qu'on puisse réunir dans un corps de doctrine»³. Au contraire, à la suite des théories les plus récentes, l'objectif d'un cours de géométrie supérieure est d'organiser le corpus des théories anciennes et nouvelles en une théorie conséquente et logique :

C'est dans quelques Ouvrages modernes, dans des Mémoires épars dans les Recueils scientifiques, qu'il faut chercher le germe et les éléments des théories et des méthodes propres à former le corps de doctrine que nous avons en vue. Ces théories et ces méthodes une fois déterminées, il faudra les coordonner entre elles et les soumettre

¹[Chasles, 1846].

²[Chasles, 1846, 549].

³[Chasles, 1846, 549].

à l'enchaînement logique, qui est le caractère propre des Sciences mathématiques, et plus particulièrement de la Géométrie. C'est donc une œuvre toute nouvelle à accomplir. [Chasles, 1846, 549]

Pour réunir le corpus qu'il convient de coordonner, l'inspection historique est nécessaire; Chasles consacre l'essentiel de son discours à un aperçu rapide historique qui résume son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*⁴. Chasles a constamment été soucieux de replacer ses travaux de recherche et son enseignement dans une perspective historique. L'*Aperçu* est une introduction historique qui justifie l'introduction en géométrie des principes de dualité et d'homographie⁵ en montrant la généralité; ces deux principes sont en effet présentés par Chasles comme susceptibles d'unifier et d'étendre les diverses méthodes apparues en géométrie. L'analyse historique a aussi pour objectif de justifier la place de la géométrie supérieure dans l'enseignement. Chasles précise que la géométrie des grecs était divisée en trois parties : la géométrie élémentaire qui fait l'objet des *Éléments*, la géométrie pratique ou *Géodésie* et la géométrie supérieure dont Chasles affirme que les grecs la désignaient par le terme de *Lieu résolu* et qu'ils «distinguaient essentiellement des *Éléments*. Chasles défend l'idée que le modèle grec à suivre n'est pas tant la présentation adoptée dans les *Éléments* d'Euclide que celui des livres de porismes ou les traités d'Apollonius dans lesquels on apprend l'art de résoudre les problèmes.

Chasles revient sur une autre division de la géométrie entre les travaux qui s'occupent de la *mesure* et ceux qui s'intéressent plutôt aux *propriétés de l'étendue figurée*. Chasles rattache à la première partie les questions qui se présentent dans les sciences physico-mathématiques et qu'«on traite aujourd'hui par les méthodes infinitésimales»⁶ L'autre partie fait l'objet du projet géométrique de Chasles :

Les autres recherches mathématiques ont pour objet les propriétés résultantes des formes et des positions relatives des figures, propriétés qui comprennent aussi des relations de grandeur, mais qui sont en général, simplement des relations de segments rectilignes ou d'angles et qui n'exigent pas l'emploi du calcul infinitésimal. C'est à cette partie de la Géométrie que se rapportent les ouvrages d'Apollonius, tels que son grand *Traité des coniques*, et en général, les Traités sur le *Lieu résolu* ou *Analyse géométrique* des anciens. Cette partie est vaste; c'est celle qui doit aujourd'hui constituer spécialement la Géométrie considérée dans l'ensemble des méthodes qui lui sont propres. [Chasles, 1846, 557]

Pour autant, les deux parties de la géométrie ne sont pas complètement séparées; en particulier la géométrie des mesures fait un usage constant des résultats de la géométrie des propriétés des figures. Pour pouvoir appliquer à des problèmes de géométrie des techniques analytiques, il est besoin de faire usage des résultats de la géométrie pure pour choisir convenablement les variables et mettre en équation les données du problème :

On conçoit donc bien comment cette partie de la Géométrie, qui se rapporte plus spécialement aux propriétés des figures, est aussi celle

⁴[Chasles, 1837a].

⁵[Chasles, 1837b].

⁶[Chasles, 1846, 557].

qui doit conduire aux calculs de leurs mesures, et l'on comprend que, bien qu'il y ait lieu de distinguer ces deux genres de questions, elles n'en rentrent pas moins, les unes et les autres, dans le domaine d'une science unique qui constitue la Géométrie générale. [Chasles, 1846, 558]

Dans son exposé historique, Chasles insiste sur l'importance des travaux de Desargues pour l'émergence des méthodes projectives pour démontrer les propriétés des coniques. Mais à ses yeux, les méthodes et les principes autour desquels la géométrie doit se structurer sont le résultat des recherches plus récentes de Carnot, Monge et Poncelet. À Monge, on doit la prise en compte de certains principes de projection. Chasles insiste sur la fécondité de ces principes en affirmant que les principes géométriques qui fondaient la *Géométrie descriptive*⁷ de Monge simplifiaient les opérations graphiques des constructeurs et en facilitaient l'étude, «qu'elle mettait à la portée de tous, tandis que les ouvrages savants [...] auxquels manquait cette base première, n'étaient accessibles qu'aux géomètres et aux ingénieurs»⁸. Selon Chasles, il ne faut d'ailleurs pas réduire l'ouvrage de Monge à un simple traité à usage pratique. Les méthodes générales qui y sont développées en font au contraire un ouvrage majeur de *géométrie rationnelle*, la géométrie qui fait «connaître les propriétés», au contraire de la géométrie descriptive, géométrie pratique qui n'est «qu'instrument dont l'ingénieur se sert pour traduire sa pensée et exécuter sur le papier les opérations que la [...] Géométrie générale lui indique»⁹. L'autre grands inspirateur des méthodes géométriques modernes est Carnot dans la mesure où celui-ci a cherché à «traiter directement les questions dans leur sens le plus général»¹⁰ en utilisant entre autres le principe de corrélation des figures. Si, comme on va le voir, Chasles n'adopte pas les méthodes de Carnot, il reprend très tôt l'idée de fonder les méthodes géométriques sur quelques principes généraux. Ainsi, dès 1830, dans son *Mémoire de géométrie pure sur les propriétés générales des cônes du second degré*¹¹, il revendique de «traiter directement des propriétés générales des cônes du second degré» en s'appuyant sur les seules propriétés, qu'il pose en principe :

Dans tout cône du second degré, il existe trois axes conjugués rectangulaires ; et deux séries de sections circulaires situées dans des plans parallèles à deux plans fixes. [Chasles, 1830, 1-2]

Chasles affirme alors que les théorèmes qu'il va énoncer sont des déductions de ce principe.¹² De même, en 1837, il affirme que son projet initial était d'organiser autour des théories de Monge et Carnot, les diverses méthodes développées par les géomètres (anciens et modernes) qui sont à ses yeux «encore éparses dans les mémoires des géomètres [...] et dont la lecture, à cause du très-grand nombre des résultats nouveaux qu'ils contiennent, peut paraître longue et pé-

⁷[Monge, 1799].

⁸[Chasles, 1846, 577].

⁹[Chasles, 1846, 578].

¹⁰[Chasles, 1846, 581].

¹¹Chas1830.

¹²Chasles précise que l'on pourrait démontrer les théorèmes qu'il obtient par le biais de l'analyse mais du fait de la simplicité de sa méthode qui consiste à se ramener par le biais de projection à des sections circulaires, la méthode analytique «qui offre en général de si grands avantages, les perd tous dans cette question, parce qu'elle exige des calculs souvent longs, et qu'elle n'établit aucun enchaînement entre les diverses propositions ; de sorte qu'elle ne peut servir qu'à vérifier celles qui seraient déjà connues, ou devinées par d'autres considérations» [Chasles, 1830, 2].

nible»¹³. À cette époque, il avoue que la tâche était en fait trop vaste¹⁴ et qu'il se contente de «mettre au jour [...] deux principes généraux de l'étendue, [...] qui constituent deux doctrines générales de *déformation* et de *transformation* des figures»¹⁵. Chasles s'attache à montrer que les principes de dualité et d'homographie qu'il propose s'appliquent aux propriétés descriptives et métriques des figures, et permettent entre autres de rendre compte de la théorie de la polarité des surfaces du second degré, de celle des polaires réciproques, de celle des figures homologues, de la question des bas-reliefs, des propriétés du centre des moyennes harmoniques, etc., autant de théories développées par Poncelet.

6.1 Les principes méthodologiques de la *Géométrie supérieure*

Chasles s'appuie pour présenter son point de vue sur le constat récurrent chez les géomètres de la supériorité des méthodes analytiques sur celles de la géométrie pure. Il indique dans la préface de son *Traité de géométrie supérieure*¹⁶ que les méthodes de démonstration qu'il propose dans son ouvrage «participent aux avantages propres à l'Analyse». Il poursuit en insistant sur le fait que les résultats de sa géométrie supérieure sont empreints de la même généralité que ceux de la géométrie analytique «où l'on ne fait acception ni des *différences de positions relatives* des diverses parties d'une figure, ni des circonstances de réalité ou d'*imaginarité* des parties, qui, dans la construction générale de la figure, peuvent être indifféremment réelles ou imaginaires»¹⁷. En 1837, dans son *Aperçu historique sur l'origine et le développement de la géométrie*¹⁸ expliquait déjà que la supériorité des méthodes de la géométrie analytique provenait de la capacité de transformer les formules obtenues en utilisant l'algèbre :

Mais au surplus, en réfléchissant sur les procédés de l'algèbre, et en recherchant la cause des avantages immenses qu'elle apporte dans la Géométrie, ne s'aperçoit-on pas qu'elle doit une partie de ces avantages à la facilité des transformations que l'on fait subir aux expressions qu'on y introduit d'abord ? Transformations dont le secret et le mécanisme font la véritable science, et l'objet constant des recherches de l'analyste. N'était-il pas naturel de chercher à introduire pareillement dans la Géométrie pure des transformations analogues, portant directement sur les figures proposées, et sur leurs propriétés ? [Chasles, 1837a, 196]

Si en 1837, avec ses principes de dualité et d'homographie, Chasles s'inscrit dans la même perspective que Carnot et Poncelet de justifier les nouvelles méthodes générales de la géométrie par des principes de transformation des figures (principe de corrélation chez Carnot, principes de continuité et de projection chez

¹³[Chasles, 1837a, 253].

¹⁴Chasles présente son *Traité de géométrie supérieure* [Chasles, 1852] comme l'ouvrage dont son *Aperçu historique* était la préparation.

¹⁵[Chasles, 1837a, 254].

¹⁶[Chasles, 1852].

¹⁷[Chasles, 1852, vi].

¹⁸[Chasles, 1837a].

Poncelet), il n'en est plus de même en 1852, année où il publie son traité de *Géométrie supérieure* :

Aussi nous n'avons pas été obligé de recourir aux méthodes de transformation des figures, lesquelles sont parfois fort utiles, mais ne satisfont pas complètement aux besoins de la science, même quand elles sont applicables, et ne peuvent suppléer à des démonstrations directes. [Chasles, 1852, xix]

Tout en reconnaissant l'utilité du principe de continuité de Poncelet, Chasles refuse de l'utiliser pour plusieurs raisons : il reprend d'abord la discussion de la justification de ce principe et note que si l'on ne veut pas le considérer comme une conséquence de l'analyse (et donc subordonner la géométrie pure à la géométrie analytique), «*ce principe de continuité n'étant pas démontré a priori, en l'invoquant comme une sorte d'axiome ou de postulatum, on s'écarte de l'exactitude rigoureuse qui constitue le caractère principal, et l'on peut dire la supériorité, des sciences mathématiques en général, mais surtout de la Géométrie*»¹⁹. Chasles continue sa réflexion sur ce principe en indiquant que l'utilisation du principe de continuité ne fournit pas une démonstration complètement satisfaisante : en effet, on démontre la propriété effectivement dans une configuration particulière des éléments et on étend la validité des propriétés à un ensemble de figures corrélatives grâce au principe de continuité. L'énoncé obtenu est certes général mais la démonstration ne l'est point. De plus, restreindre la partie démonstrative à des configurations particulières empêche la recherche de propriétés réellement générales dont l'énoncé et la démonstration ne dépendent pas des positions relatives des éléments des figures.

Mais il est une autre considération plus puissante qui m'a déterminé à ne pas profiter, dans ce Volume destiné à poser les bases de méthodes générales, des facilités qu'aurait pu offrir souvent le principe de continuité. Une étude attentive des différents procédés de démonstration qui peuvent s'appliquer à une même question m'a convaincu qu'à côté d'une démonstration facile, fondée sur quelques propriétés accidentelles ou contingentes d'une figure, devaient s'en trouver toujours d'autres, fondées sur des propriétés absolues et subsistantes dans tous les cas que peut présenter la figure en raison de la diversité de position de ses parties ; et j'ai éprouvé que la recherche de ces démonstrations complètement rigoureuses est d'autant plus utile, qu'elle met nécessairement sur la voie des propositions les plus importantes, de celles qui établissent tous les liens qui doivent exister entre les différentes parties d'un même sujet. [Chasles, 1852, xvii]

En conclusion, l'utilisation du principe de continuité, au delà des problèmes de justification qu'il pose, ne favorise pas l'organisation des théories. Les démonstrations qui invoquent ce principe ne peuvent être complètement explicatives et structurantes puisqu'une configuration particulière, celle pour laquelle la démonstration est la plus aisée, est en quelque sorte privilégiée de manière artificielle. La facilité apportée par l'utilisation du principe de continuité se fait au détriment de la recherche des propriétés et des démonstrations les plus générales !

Chasles fonde son point de vue géométrique sur l'adoption du principe des signes.

¹⁹[Chasles, 1852, xvi].

Un des avantages de ce principe est la possibilité d'unifier les différents cas en une formule unique et ainsi les formules peuvent exprimer «complètement» les propriétés. Avec les méthodes développée dans son traité de *Géométrie supérieure*, Chasles revendique une complète généralité tant dans l'expression des énoncés, que dans les démonstrations.

[Le principe des signes] apporte dans les démonstrations une facilité qui rapproche les conceptions de la géométrie de celles de l'Analyse, car on sait qu'une démonstration est d'ordinaire plus pénible quand on est obligé de subordonner le raisonnement à l'état d'une figure particulière que quand on peut raisonner d'une manière générale, comme en Analyse, sans tenir compte des positions relatives, accidentelles, des diverses parties de la figure. [...] Le principe des signes étend même son influence sur l'énoncé des propositions; car, lorsqu'elles ne se compliquent pas de conditions de situation, elles prennent une forme à la fois plus générale et plus concise, qui présente à l'esprit une idée plus nette et se prête mieux au raisonnement. [Chasles, 1852, xi-xii]

La théorie des quantités directes et inverses de Carnot et le principe de corrélation des figures introduisait déjà la possibilité de changer des signes dans une relation pour l'adapter à une figure corrélatrice. Chasles reconnaît que la théorie de Carnot est un progrès puisqu'elle permet d'étendre à des figures corrélatrices un résultat montré pour une figure primitive. Cependant, le principe de corrélation n'est pas démontré et les justifications qu'en donne Carnot ne sont que «de puissantes inductions qui ne constituent pas une démonstration primordiale, absolue»²⁰. De plus, avec la théorie de Carnot, on ne manipule avec la théorie de Carnot que des relations numériques qui s'appliquent à une figure particulière :

[...] *les propositions dans lesquelles on ne fait pas entrer le principe des signes sont, en général, incomplètes; en n'y considérant que les valeurs numériques des segments, on néglige une partie essentielle des propriétés de la figure, que ces propositions auraient exprimées au moyen des signes.* [Chasles, 1852, viii]

Chasles illustre son propos à partir de l'exemple de l'involution de six points. Lorsque les quantités de la relation $ab'.bc'.ca' = ac'.cb'.ba'$ ne sont que numériques et non-signées ne peut servir à déterminer par exemple la courbe conique circonscrite au quadrilatère. Avec cet exemple, Chasles montre que si l'on veut obtenir en géométrie pure des relations qui est la même puissance d'expression que les équations de la géométrie analytique, il est nécessaire d'ajouter aux relations numériques liées à la longueur des segments des considérations de direction. Un autre avantage de ce principe est d'affranchir le géomètre du rapport aux figures et d'introduire en géométrie la possibilité de raisonner en toute généralité, c'est-à-dire pour Chasles, de raisonner abstraitement en combinant logiquement des formules :

[Ce principe] apporte dans les démonstrations une facilité qui rapproche les conceptions de la Géométrie de celles de l'Analyse, car on sait qu'une démonstration est d'ordinaire plus pénible quand on est obligé de subordonner le raisonnement à l'état d'une figure particulière que quand on peut raisonner d'une manière générale, comme en

²⁰[Chasles, 1852, viii].

Analyse, sans tenir compte des positions relatives, accidentelles, des diverses parties de la figure. Dans le premier cas on cherche péniblement dans les détails de la figure les éléments de la démonstration, et dans le second on combine logiquement des propositions abstraites, sans aucune entrave. [Chasles, 1852, xi]

Carnot et Poncelet cherchaient à donner aux théorèmes de la géométrie un caractère de généralité et ont développé des stratégies de généralisation des preuves. Avec son principe des signes, Chasles généralise directement les situations géométriques et en même généralise les preuves. En ce sens, le point de vue de Chasles est beaucoup plus proche du paradigme analytique que ceux de Carnot et Poncelet.

Chasles souligne que sa théorie des quantités signées «donnent lieu aussi à certaines équations du second degré, qui permettent d'introduire, naturellement et dans un sens parfaitement déterminé, les imaginaires dans les spéculations géométriques»²¹ Il précise que, même s'ils reçoivent en un sens une définition explicite, les objets imaginaires n'interviennent pas explicitement dans les démonstrations mais toujours par le biais d'éléments toujours réels :

Je me suis donc proposé d'introduire dans cet Ouvrage, avec la notion explicite des imaginaires, des démonstrations aussi rigoureuses et aussi générales que celle de la Géométrie analytique.

Ces démonstrations deviennent aussi facile que les premières quand on en a préparé la voie par de recherche de quelque propositions d'une certaine nature, savoir de propositions reposant sur les propriétés *absolues* ou *permanentes* de la figure que l'on considère, et non simplement sur ses propriétés *contingentes*. Ces propriétés se distinguent par ce caractère spécial que les objets susceptibles de devenir imaginaires n'y entrent pas sous forme explicite, mais s'y trouvent représentés par des *éléments* réels, de même que les racines d'une équation n'entrent pas en elles-mêmes dans les calculs de la Géométrie analytique et y sont représentées collectivement par les coefficients de l'équation. [Chasles, 1852, xvii]

Cette manière de considérer les éléments imaginaires par le biais d'équations dont les coefficients sont réels est «tout à fait conforme à ce qu'on fait en Géométrie analytique». Chasles souligne qu'il récupère par sa présentation toute la puissance du calcul algébrique mais il obtient en plus que «les équations sont formées avec les données mêmes de la question, ce qui est le plus haut point de simplicité que l'on puisse désirer.»²² Ainsi, le détour par les coordonnées devient inutile puisque l'on peut manipuler dans les mêmes conditions des quantités géométriques comme les longueurs ou les sinus d'angles qui ont le mérite d'exprimer directement les hypothèses du problème.

²¹[Chasles, 1852, xiv].

²²[Chasles, 1852, xxviii].

6.2 Le principe des signes et le rapport anharmonique

La première partie de son traité consiste à développer à partir de son principe des signes la théorie du rapport anharmonique, puis celles des homographies et de l'involution. Techniquement, le principe des signes consiste à affecter de manière conventionnelle une direction (et donc un signe) aux segments d'une droite. Si a, b, c sont trois points quelconques d'une droite, on aura :

$$ab + bc + ca = 0.$$

Cette relation permet d'unifier en une formule toutes les situations relatives des trois points. Le milieu d'un segment vérifie les relations suivantes :

Étant donnés deux points a, a' et leur point milieu α , et étant pris sur la même droite un point quelconque m , on a toujours

$$m\alpha = \frac{ma + ma'}{2} \quad \text{et} \quad ma.ma' = m\alpha^2 - \alpha a^2.$$

23

Le rapport anharmonique de quatre points alignés a, b, c, d est défini comme la quantité numérique signée :

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}.$$

Celui d'un faisceau de quatre droites A, B, C, D par l'expression

$$\frac{\sin(A, C)}{\sin(A, D)} : \frac{\sin(B, C)}{\sin(B, D)}.$$

De même, si quatre plans A, B, C, D passent par une même droite, l'expression

$$\frac{\sin(A, C)}{\sin(A, D)} : \frac{\sin(B, C)}{\sin(B, D)}.$$

est le rapport anharmonique des quatre plans. La donnée de trois points a, b, c et de la valeur λ du rapport anharmonique de a, b, c, d détermine le point d et la construction géométrique du point d est toujours possible. La dualité entre points et droites dans un plan résulte de la propriété du birapport selon laquelle si l'on mène par quatre points alignés un faisceau de quatre droites concourantes, les rapports anharmoniques des points et des droites sont égaux. De même, lorsque une transversale coupe quatre plans passant par une même droite, les birapports des points d'intersection et des quatre plans sont égaux.

Chasles montre comment l'utilisation du point à l'infini peut simplifier la démonstration des propriétés du rapport anharmonique ; étant donné trois points a, b, c alignés qui vérifient donc $ab + bc + ca = 0$. On en déduit immédiatement que

$$\frac{ac}{ab} + \frac{cb}{ab} = 1.$$

²³[Chasles, 1852, 4].

En introduisant dans cette formule les rapports $\frac{dc}{db}$ et $\frac{ad}{cd}$ tous deux égaux à l'unité lorsque d est le point à l'infini, on obtient une équation entre rapport anharmoniques :

$$\frac{ac}{ab} : \frac{dc}{db} + \frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb} := 1.$$

Cette équation aura donc lieu aussi entre les sinus des angles formés par quatre droites issues d'un même point et passant par les points a, b, c, d et donc les points d'intersection de ces quatre droites avec une transversale quelconque vérifieront aussi cette relation. Chasles en déduit que cette relation est donc vérifiée par quatre points quelconques alignés et en déduit que :

Étant donnés quatre points a, b, c, d en ligne droite, on a toujours entre les six segments que ces points déterminent deux à deux la relation

$$ab.cd + ac.db + ad.bc = 0,$$

dans laquelle on observe, relativement aux segments, la règle générale des signes. [Chasles, 1852, 16]

L'analogue de cette formule pour les droites permet à Chasles de déduire les formules de trigonométrie.

L'affectation d'un signe aux segments et aux angles assure d'une certaine manière l'unification des cas correspondant aux corrélations directes et indirectes au sens de Carnot ou de Poncelet. Pour rendre compte des éléments imaginaires, Chasles reprend en la systématisant l'analyse de Poncelet. Une point M étant fixé sur une droite, deux points a et a' sont déterminés par la donnée de leur milieu α et du produit v de leurs distances à l'origine M . En effet, on a

$$v = Ma.Ma' = M\alpha^2 - \alpha a^2$$

, d'où

$$Ma = M\alpha + \sqrt{M\alpha^2 - v} \quad \text{et} \quad Ma' = M\alpha - \sqrt{M\alpha^2 - v}.$$

Tant que $M\alpha^2$ est plus grand que v , les deux points a et a' sont déterminés mais lorsque $M\alpha^2$ est plus petit que v , «les deux points cherchés n'existent plus. On dit alors qu'ils sont *imaginaires*».²⁴ Deux point conjugués réels ou imaginaires peuvent être représentés par une seule équation ; en effet, les distances de a et de a' à M sont les racines de l'équation :

$$x^2 - 2M\alpha.x + v = 0.$$

Lorsque les racines de cette équation sont imaginaires, les points déterminés a et a' sont eux-aussi dits *imaginaires*. Chasles précise alors que si les éléments imaginaires sont parfaitement définis, pour autant les démonstrations concerneront des éléments réels qui donnent lieu à une équation du second degré qui admet deux racines imaginaires conjuguées :

Ainsi l'on conçoit bien ce que nous entendrons par *deux points imaginaires* sur une droite ; cela signifiera que les deux *données* ou *éléments* qui servent à la détermination des deux points, savoir, leur point milieu et le rectangle de leurs distances à une expression *imaginaire* des distances de ces points à l'origine, ou bien que l'équation

²⁴[Chasles, 1852, 55].

du second degré qui suffit pour représenter les deux points à ses racines *imaginaires*.

Quand nous parlerons de deux points *imaginaires*, il sera question de deux points *conjugués* déterminés comme il vient d'être dit, lesquels peuvent avoir, avec une figure donnée, certaines relations au moyen de leurs *éléments*, et il ne s'agira pas de deux points quelconques indépendants l'un de l'autre [...]. [Chasles, 1852, 55-56]

On peut étendre les relations montrées pour les éléments réels aux éléments imaginaires car le calcul permet d'obtenir des formules dans lequel n'interviennent que les deux éléments réels (le milieu α du segment aa' et la valeur v du rectangle $Ma.Ma'$) qui définissent les éléments imaginaires. Ainsi, si les points a et a' sont deux points imaginaires conjugués, la relation d'harmonicité entre les quatre points a, a', e, f ,

$$\frac{2}{ef} = \frac{1}{ea} + \frac{1}{ea'}$$

n'a plus de sens si elle est prise isolément. Par contre, après calculs, elle peut s'écrire sous la forme

$$ef.e\alpha = ea.ea',$$

 quation dans laquelle «n'entrent que les deux éléments des deux points imaginaires, savoir leur point milieu α et le rectangle $ea.ea'$ de leurs distances au point e »²⁵ Un raisonnement analogue à celui qui conduit à la notion de point imaginaire permet de définir la notion de droite imaginaire et celle de plan imaginaire :

On peut donc dire que deux droites sont d termin es simultanément quand on connaît le produit des cotangentes de leurs inclinaisons sur un axe fixe et la droite conjugu e harmonique de cet axe par rapport aux deux droites cherch es. Cette *droite* et le *produit* des cotangentes des inclinaisons peuvent être consid r es comme les * l ments* propres à la détermination des deux droites.

Les deux droites, nonobstant la réalité de ces deux éléments, peuvent être *imaginaires*. Ainsi l'on voit ce que nous entendrons par droites *imaginaires* repr sent es par deux * l ments* réels, comme le sont deux droites réelles. [Chasles, 1852, 63]

L'introduction des éléments imaginaires permet d'unifier les situations et de pouvoir utiliser les formules établies dans le cadre des éléments réels sans se préoccuper de la situation des éléments puisque de toute manière on peut se ramener en dernière instance à la considération d'éléments réels. En ce sens, Chasles n'utilise pas de principe de transformation de figures ; il unifie les situations pour pouvoir les traiter ensemble en toute généralité.

6.3 La théorie des homographies

Si Chasles refuse d'utiliser des principes de transformation des figures comme principe de démonstration, l'idée de transformation géométrique n'est pas pour

²⁵[Chasles, 1852, 61].

autant absente dans ses travaux ; au contraire, la notion d'homographie apparaît dans son exposé comme un objet fondamental d'étude et comme un outil essentiel :

Les trois théories successives auxquelles donne lieu cette fonction [le rapport anharmonique], que l'on considère dans un ou plusieurs système soit de quatre points, soit de quatre droites, peuvent être dites théories du *rapport anharmonique*, des *divisions* et *faisceaux homographiques* et de l'*involution*.

Ces théories forment la base de nos procédés de démonstration. Chacune des propositions dont elles se composent s'y trouve comme un anneau nécessaire à leur enchaînement continu, et toutes sont susceptibles d'applications ultérieures très-diverses. [Chasles, 1852, xix-xx]

Une *division homographique* entre deux droites est définie comme une application ponctuelle entre les deux droites qui conservent les birapports. De même, lorsque deux faisceaux dont les droites se correspondent bijectivement sont «tels que quatre points quelconques du premier aient leur rapport anharmonique égal à celui des quatre droites correspondantes du second, nous dirons que les deux faisceaux sont homographiques»²⁶. Plus généralement, deux figures seront dites homographiques si les points et les droites de la première figure correspondent à des points et des droites de la seconde de telle manière que «quatre points en ligne droite dans une figure aient leur rapport anharmonique égal à celui des quatre points correspondants de la seconde figure, et que quatre droites issues d'un même point dans la première figure aient leur rapport anharmonique égal à celui des quatre droites correspondantes de la seconde figure»²⁷.

En expliquant comment construire des divisions homographiques, Chasles montre de la même manière que Steiner que la connaissance de trois paires de points correspondants suffit à déterminer complètement les deux divisions homographiques. En effet, étant donné deux droites L et L' et la donnée arbitraire de trois paires de points correspondants a, a', b, b', c, c' , le point correspondant d' de tout point d de L sera déterminé grâce à l'équation qui traduit que le rapport anharmonique de a, b, c, d est égal à celui de a', b', c', d' :

$$\frac{ab}{ac} \frac{db}{dc} = \frac{a'b'}{a'c'} \frac{d'b'}{d'c'}$$

Chasles affirme que les divisions ainsi construites sont homographiques puisque en transportant «la droite $a'b'$, de manière à faire coïncider le point a' avec le point a , la droite $a'b'$ faisant avec ab un angle quelconque, les deux droites bb', cc' concourront en un point S , et chacune des droites dd', ee', \dots passera par ce point. Il s'ensuit que quatre quelconques des points a, b, c, d, e, f, \dots ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre points correspondants $a', b', c', d', e', f', \dots$, et par conséquent les deux droites sont divisées *homographiquement*»²⁸.

²⁶[Chasles, 1852, 64].

²⁷[Chasles, 1852, 337].

²⁸[Chasles, 1852, 65].

Chasles adopte la même définition que Steiner pour les relations projectives. De plus, il utilise pour montrer l'analogie du théorème fondamental avec cette définition, la même technique que Steiner qui consiste à se ramener à la situation perspective. Chasles a toujours affirmé ne pas connaître les théories de Steiner faute de lire l'allemand.

Chasles donne une autre démonstration d'essence algébrique de ce théorème en montrant que

L'équation générale d'une division homographique entre deux droites s'écrit :

$$am.b'm' + \lambda am + \mu b'm' + \nu = 0 \quad (6.1)$$

où a est un point (fixe) de la première droite, b' un point (fixe) de la seconde droite, m et m' deux points correspondants par l'homographie et λ, μ, ν des constantes. Réciproquement, une telle équation définit division homogra-

l'on peut déduire des équations

$$\begin{aligned} \frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc} &= \frac{a'b'}{a'e'} : \frac{d'b'}{d'e'} \\ \frac{ab}{ac} : \frac{eb}{ec} &= \frac{a'b'}{a'e'} : \frac{e'b'}{e'e'} \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

toutes les équations du type

$$\frac{db}{dc} : \frac{eb}{ec} = \frac{d'b'}{d'e'} : \frac{e'b'}{e'e'}$$

phique.²⁹ Les constantes λ , μ et ν peuvent recevoir une interprétation géométrique. En effet si I et J' désignent respectivement le point de la première droite qui correspond au point à l'infini de la seconde droite et le point de la seconde droite correspondant au point à l'infini de la première, l'équation de la division homographique peut s'écrire :

$$am.b'm' - am.b'J' - b'm'.aI = cste$$

où la constante peut se déterminer en considérant les cas particuliers $m = a$ ou $m' = b'$. Les faisceaux homographiques sont caractérisés par une équation duale à celle des divisions harmoniques : si A, C sont deux droites arbitraires du premier faisceau, et B', D' sont deux droites arbitraires du second faisceau,

²⁹Chasles désigne cette équation comme l'équation à quatre terme des divisions homographiques. Il considère les équations à deux termes obtenues lorsque l'on choisit deux paires de points correspondants (a, a') et (b, b') . Le point m' correspondant à un point m quelconque sera déterminé par une équation du type :

$$\frac{am}{bm} = \lambda \frac{a'm'}{b'm'}$$

où λ est une constante.

Quand deux droites sont divisées homographiquement, le rapport des distances d'un point quelconque de la première à deux points fixes de cette droite est au rapport des distances du point homologue de la seconde aux deux points fixes homologues dans une raison constante. [Chasles, 1852, 77]

En désignant par I le point de la droite qui correspond au point à l'infini de la seconde et par J' celui de la seconde qui correspond au point à l'infini de la première, l'équation précédente s'écrit alors

$$Im.J'm' = \lambda.$$

Chasles obtient alors la caractérisation suivantes des divisions homographiques :

Quand deux droites sont divisées homographiquement si l'on prend sur chacune le point qui correspond à l'infini de l'autre, les distances de deux points homologues quelconques aux deux points ainsi déterminés auront leur produit constant.

Réciproquement : Quand, à partir de deux points fixes sur deux droites, on prend deux points tels, que le produit de leurs distances aux deux points fixes, respectivement, soit constant, ces deux points diviseront les deux droites homographiquement. [Chasles, 1852, 81]

Chasles définit de même, l'équation à trois termes des divisions homographiques ; si a est un point arbitraire de la première droite, c' un point arbitraire de la seconde et (b, b') une paire de points correspondants, alors le point m' correspondant à un point m sera déterminé par une équation du type :

$$\lambda \frac{am}{bm} + \mu \frac{c'm'}{b'm'} = 0$$

où λ et μ sont des constantes.

Chasles définit en outre une équation homogène à quatre termes :

Quand deux droites sont divisées homographiquement, si l'on prend sur la première deux points fixes quelconques a, c et sur la seconde deux points fixes quelconques b', d' , la division homographique sera exprimée par la relation homogène :

$$\frac{am}{cm} \frac{b'm'}{d'm'} + \lambda \frac{am}{cm} + \mu \frac{b'm'}{d'm'} + \nu = 0.$$

[Chasles, 1852, 92]

Les coefficients λ , μ et ν se calculent et l'équation peut s'écrire en toute généralité :

$$\frac{am}{cm} \frac{b'm'}{d'm'} - \frac{b'c'}{d'c'} \frac{am}{cm} - \frac{ad}{cd} \frac{b'm'}{d'm'} + \frac{ab}{cb} \frac{c'b'}{c'd'}.$$

alors la droite M' correspondante de M est déterminée par l'équation

$$\frac{\sin(A, M)}{\sin(C, M)} \frac{\sin(B' M')}{\sin(D', M')} + \lambda \frac{\sin(A, M)}{\sin(C, M)} + \mu \frac{\sin(B' M')}{\sin(D', M')} + \nu = 0. \quad (6.2)$$

Si A et C sont perpendiculaires, ainsi que B' et D' , l'équation s'écrit plus simplement :

$$\text{tang}(A, M)\text{tang}(B', M') + \lambda \text{tang}(A, M) + \mu \text{tang}(B', M') + \nu.$$

Un cas particulier important de deux faisceaux homographiques est celui dans lequel les rayons correspondants forment un angle constant.

Lorsqu'on considère une division homographique sur une même droite, l'équation générale peut être réduite :

$$am.am' + \lambda am + \mu am' + \nu = 0. \quad (6.3)$$

La position des points doubles de la division homographique est déterminée par l'équation :

$$am^2 + (\lambda + \mu)am + \nu = 0 \quad (6.4)$$

et donc :

Quand deux droites divisées homographiquement sont superposées l'une sur l'autre, il existe deux points (réels ou imaginaires) dont chacun, considéré comme appartenant à la première division, coïncide avec son homologue dans la seconde division. [Chasles, 1852, 100]

Chasles appelle de tels points les *points doubles* de la division homographique et il est aisé de montrer que, ces points soient réels ou imaginaires, leur milieu est celui des deux points qui correspondent au point à l'infini dans les deux divisions. En désignant par O le milieu des deux points doubles, l'équation qui détermine les points doubles peut s'écrire :

$$am^2 - 2aO.am + aI.aa' = 0.$$

Chasles montre que les points doubles d'une division homographique se construisent facilement en choisissant pour origine dans l'équation précédente le point O (et en désignant par O' le correspondant de O) : $Om^2 + OI.OO'$ d'où $Om = \pm\sqrt{OJ'.OO'}$.

Ainsi, les points doubles sont de part et d'autre du point O à des distances égales à $\sqrt{OO'.OJ'}$ de sorte que leur recherche se réduit à construire une moyenne proportionnelle entre deux lignes. [Chasles, 1852, 103]

De plus, si e et f désignent les deux points doubles de la division homographique et si m, m' est une paire de points correspondants on a l'équation :

$$\frac{me}{mf} : \frac{m'e}{m'f} = \lambda.$$

Dans deux divisions homographiques sur une même droite, deux points homologues quelconques font avec les deux points doubles un rapport anharmonique constant. [Chasles, 1852, 102]

Chasles explique que de nombreux problèmes se résolvent par la construction des points doubles de deux divisions homographiques. Il souligne que ce mode de résolution uniforme est toujours très simple alors que avec les méthodes ordinaires de la géométrie analytique, «on éprouverait des difficultés réelles, surtout à raison de la multiplicité des racines, qu'on ne pourrait éviter dans la mise en équation du problème»³⁰ Chasles propose comme exemple paradigmatique du genre de problème qui se résolvent par la méthode des points doubles de deux divisions homographiques le problème général suivant à partir desquels se résolvent les problèmes classiques de la section de raison et celui de la section de l'espace³¹ :

Étant données sur deux droites AL , BL' deux divisions homographiques, on demande de mener, par deux points donnés P , P' , des droites aboutissant à deux points homologues a , a' des deux divisions et faisant entre elles un angle de grandeur donnée. [Chasles, 1852, 201]

La démonstration de Chasles consiste à montrer que les deux droites demandés sont les droites fixes de deux faisceaux homographiques : Chasles commence par choisir sur les deux droites données une paire arbitraire de points correspondants a et a' . Il trace alors la droite $P'a'$ et mène par le point P la droite $P\alpha$ qui fait avec $P'a'$ l'angle désiré (α' est le point d'intersection de $P\alpha$ avec la première droite donnée). La correspondance entre a et α' sur la première droite est homographique car la correspondance entre $P'a'$ et $P\alpha$ est elle-même homographique puisque l'angle entre les deux droites est constant. Par composition, «les deux points a et α' forment deux divisions homographiques, et il est évident que chacun des deux points doubles de ces divisions fournit une solution de la question»³².

Un cas particulier de divisions homographiques sur une même droite est celui dans lequel les coefficients λ et μ de l'équation générale

$$am.am' + \lambda.am + \mu.am' + \nu = 0$$

sont égaux. Dans ce cas, les deux divisions «jouissent de cette propriété particulière qu'un même point quelconque, considéré comme appartenant soit à la première division, soit à la seconde, a toujours le même homologue»³³. Chasles précise que ces divisions homographiques particulières se présenteront surtout dans la théorie des sections coniques et dans la théorie de l'*involution*. Il propose de les appeler *divisions homographiques en involution*.³⁴ La première propriété des divisions homographiques en involution notée par Chasles est qu'il suffit

³⁰[Chasles, 1852, 199].

³¹Chasles signale que ces problèmes donnent lieu à de nombreuses solutions particulières dans les traités d'Apollonius alors que sa méthode en donne une «solution unique pour les trois questions considérées dans leur énoncé le plus général» [Chasles, 1852, 200]. Le problème de la section de raison est celui de mener par un point donné une transversale à deux droites données qui forme sur ces deux droites, à partir de deux points fixes deux segments qui soient entre eux dans un rapport donné. Celui de la section de l'espace est de mener une transversale à deux droites données qui forme sur ces deux droites à partir de deux points fixes deux segments dont le produit ait une valeur donnée.

³²[Chasles, 1852, 201].

³³[Chasles, 1852, 114].

³⁴Von Staudt utilise le terme d'involution pour désigner les correspondances projectives qui sont leur propre réciproque. Chasles réserve le terme d'involution à la notion de points en involution.

pour que les divisions homographiques soient en involution, «qu'un seul point quelconque de cette droite, considéré comme appartenant successivement aux deux divisions, ait le même point homologue dans les deux cas»³⁵.

6.4 La théorie de l'involution

Dans son traité de *Géométrie supérieure*³⁶, Chasles définit la notion de points en involution à partir de la notion de rapport anharmonique :

Quand trois systèmes de deux points conjugués, situés sur une même droite, sont tels, que quatre de ces points, pris dans les trois systèmes, aient un rapport anharmonique égal à celui des quatre points qui leur sont conjugués, nous dirons que les six points sont en involution. [Chasles, 1852, 119]

Cette propriété est indépendante du choix des quatre points pourvu que les trois couples de points conjugués soient représentés. Chasles retrouve immédiatement à partir de cette définition les définitions plus habituelles de la notion de points en involution :

Quand trois systèmes de deux points conjugués a, a', b, b' et c, c' sont en involution, il existe entre ces points les sept équations suivantes ; et, réciproquement, chacune de ces équations exprime l'involution et comporte les six autres :

(a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ab.ab'}{ac.ac'} = \frac{a'b.a'b'}{a'c.a'c'} \\ \frac{bc.bc'}{ba.ba'} = \frac{b'c.b'c'}{b'a.b'a'} \\ \frac{ca.ca'}{cb.cb'} = \frac{c'a.c'a'}{c'b.c'b'} \end{array} \right.$$

(b)

$$\left\{ \begin{array}{l} ab'.bc'.ca' = -a'b.b'c'.ca \\ ab'.bc.c'a' = -a'b.b'c'.ca \\ ab.b'c'.ca' = -a'b'.bc.c'a \\ ab.b'c.c'a' = -a'b'.bc'.ca \end{array} \right.$$

³⁵[Chasles, 1852, 157].

³⁶Dans une note consacrée à la *Théorie de l'involution de six points*, Chasles commence par définir cette notion par la propriété «connue» :

Quand six points, situés en ligne droite, et se correspondant deux à deux, tels que A et A' , B et B' , C et C' , font entre eux de tels segments que l'on ait la relation

$$\frac{CA.CA'}{CB.CB'} = \frac{C'A.C'A'}{C'B.C'B'}$$

on dit que les six points sont en *involution*, et les points qui se correspondent sont dits *conjugués*. [Chasles, 1837a, 309]

Il précise qu'un des objectifs de cette note est de donner «diverses autres manières nouvelles d'exprimer cette involution»[Chasles, 1837a, 309]. La plus importante de ces innovations est celle qui lie la notion d'involution des points à celle de rapport anharmonique.

Un cas particulier d'involution est celui où c et c' coïncident. Dans ce cas, les sept équations se réduisent à quatre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ab.ab'}{a'b.a'b'} = \frac{ac}{a'c} \\ \frac{ba.ba}{b'a.b'a'} = \frac{bc}{b'c} \\ ab'.bc.ca' = -a'b.b'c.ca \\ ab.b'c.ca' = -a'b'.bc.ca \end{array} \right.$$

Les deux couples a, a' et b, b' étant donnés, chacune de ces équations est une équation du second degré. Il y a donc deux positions du point c qui vérifie la propriété de former «avec les deux systèmes a, a' et b, b' une involution dans laquelle le conjugué de ce point coïncide avec ce point lui-même»³⁷ Chacun de ces points que Chasles appelle les *points doubles de l'involution* divisent harmoniquement les segments aa' et bb' . Réciproquement :

Si deux points e, f divisent harmoniquement à la fois deux segments aa', bb' , chacun de ces points formera avec les deux couples a, a' et b, b' une involution dans laquelle ce point sera lui-même son conjugué. [Chasles, 1852, 128]

La propriété d'involution structure les couples de points d'une droite; ainsi, si les six points a, a', b, b' et c, c' sont en involution, tout couple d, d' formant une involution avec a, a' et b, b' en formera une aussi avec a, a' et c, c' . Cette propriété montre qu'il existe un point (que Chasles désigne par *point central* de l'involution) dont «les distances à deux points conjugués quelconques donnent un produit constant»³⁸. De même, si les six points a, a', b, b', c, c' forment une involution, il existe deux points (réels ou imaginaires) qui divisent harmoniquement les segments aa', bb', cc' . Chasles ne contente de donner des définir ces notions par des formules géométrico-algébriques; il en déduit des constructions géométriques. Ainsi, le centre O d'une involution est déterminé par l'équation :

$$\frac{Oa}{Ob} = \frac{ab'}{ba'}$$

et pour le construire, il suffit de mener par les points a et b deux segments parallèles αa et $b\beta$ égaux aux segments ab' et ba' ³⁹. La droite $\alpha\beta$ coupe évidemment la droite ab en O . De même, Chasles donne la construction du sixième point d'une involution. Pour cela, il utilise la propriété selon laquelle la corde commune de deux cercles passant le premier par aa' et le second par bb' passe par le centre O de l'involution définie par les points a, a' et b, b' .⁴⁰ En effet, si

³⁷[Chasles, 1852, 127].

³⁸[Chasles, 1852, 130].

Le point central est le point qui, conjugué au point à l'infini, formerait une involution avec les points a, a' et b, b' .

Chasles signale que cette propriété suffirait à caractériser la notion de points en involution mais qu'elle ne lui paraît être «la plus propre à définir l'involution, parce qu'elle repose sur la considération d'un point étranger au système des six points dont il faut exprimer les relations mutuelles, tandis que, par la notion du rapport anharmonique, on exprime immédiatement ces relations, en ne considérant que les six points eux-mêmes» [Chasles, 1852, 132]. Il ajoute que la définition de l'involution par les formules obtenues par les égalités de birapports est celle qui est géométriquement la plus pratique.

³⁹Les segments sont orientés.

⁴⁰Si l'on désigne par g l'un des points d'intersection de ces deux cercles et par g' et g'' les deux autres points d'intersection de Og avec les cercles, on a :

$$Og.Og' = Oa.Oa' \quad \text{et} \quad Og.Og'' = Ob.Ob'$$

mène par un point g arbitraire deux cercles admettant respectivement aa' et bb' comme cordes, ils se coupent en un second point g' et le cercle passant par c, g, g' coupe la droite ab en c' qui est le sixième point de l'involution.

Après avoir étudié les propriétés de l'involution de six points, Chasles associe à deux couples de points d'une droite deux divisions homographiques en involution : l'ensemble des couples de points c, c', d, d', \dots qui forment chacun avec les deux couples de points a, a' et b, b' une involution constitue deux divisions homographiques en involution. Les divisions homographiques en involution semblent être un cas particulier de divisions homographiques ; il n'en est rien puisque «deux droites divisées homographiquement peuvent toujours être placées l'une sur l'autre, de manière que les deux divisions soient en involution»⁴¹ :

Il résulte de là que deux divisions homographiques en *involution* ont toutes la généralité de deux divisions homographiques quelconques, et que les relations qui ont lieu entre trois systèmes de deux points conjugués sont dues seulement à la manière particulière dont les deux droites sur lesquelles on peut concevoir les deux divisions formées se trouvent placées l'une sur l'autre. [Chasles, 1852, 158-159]

Comme von Staudt, Chasles met donc au cœur de la théorie géométrique l'étude des involutions. Il donne, en les montrant à partir de la considération des équations géométrico-algébriques, les mêmes propriétés qui seront les outils fondamentaux de la théorie des jets de Staudt⁴². Ainsi, il établit que si a, b, c, \dots et a', b', c', \dots sont des points homologues de deux divisions homographiques formées sur une même droite, alors les points doubles de ces divisions forment une involution avec a, b' et a', b , avec b, c' et b', c , etc.⁴³

et comme par définition de point central, on a $Oa.Oa' = Ob.Ob'$, on obtient $Og' = Og''$. Chasles ne se préoccupe pas de la réalité des points qu'il définit. Les formules qu'il utilise sont supposées être valables que les points g, g', g'' soient réels ou imaginaires. La méthode de Chasles est justifiée tant qu'il utilise des formules dont il a montré le caractère général et qui si elle concerne des éléments imaginaires, peuvent être ramenées par des manipulations algébriques à des formules réelles. Étendre la propriété de la puissance des points par rapport à un cercle au cas imaginaire n'est pas justifié du point de vue de Chasles.

⁴¹[Chasles, 1852, 158].

Il existe toujours deux couples de points homologues a, a' et b, b' tels que ab et $a'b'$ soient égaux. En faisant coïncider a et b' et a' et b , les deux divisions seront en involution.

⁴²Bien entendu, même si elles ont le même énoncé, il ne s'agit réellement de propositions identiques puisque la définition des relations projectives est radicalement différente chez Chasles et von Staudt.

⁴³Chasles donne plusieurs démonstrations de cette proposition ; la première consiste en notant e et f les points doubles de la division homographique, à noter que puisque, a, b, e, f et a', b', e, f ont même rapport anharmonique, on obtient en changeant l'ordre des points, que a, b, e, f et b', a', f, e ont même rapport anharmonique. La seconde consiste à étudier l'équation qui déterminent les points doubles des deux divisions. La troisième utilise l'équation homogène à quatre termes des divisions homographiques :

$$\frac{am \cdot b'm'}{cm \cdot d'm'} - \frac{b'c' \cdot am}{d'c' \cdot cm} - \frac{ad \cdot b'm'}{cd \cdot d'm'} + \frac{ab \cdot c'b'}{cb \cdot c'd'} = 0.$$

En identifiant a et b' , ainsi que d' et c , l'équation s'écrit :

$$\frac{b'm \cdot b'm'}{cm \cdot cm'} - \frac{b'c' \cdot b'm}{c'c' \cdot cm} - \frac{b'd \cdot b'm'}{cd \cdot cm'} + \frac{b'b \cdot c'b'}{cb \cdot c'c'} = 0$$

et on obtient en considérant le produit des racines de l'équation du second degré qui détermine les points doubles :

$$\frac{b'e \cdot b'f}{ce \cdot cf} = \frac{b'b \cdot c'b'}{cb \cdot c'c'}.$$

6.5 Les figures homographiques et corrélatives

Chasles met en œuvre ces théories pour retrouver les théorèmes classiques concernant les quadrilatères et les triangles ; ainsi, il obtient que toute transversale coupe les côtés opposés et les diagonales d'un quadrilatère en une involu- tion⁴⁴, que les diagonales divisent harmoniquement les points d'intersection des côtés opposés⁴⁵, que les six droites menées d'un même point aux quatre sommets et aux points d'intersection des côtés opposés d'un quadrilatère forment un fais- ceau en involu- tion, ... De même, il retrouve le théorème de Carnot, les théorèmes de Desargues, les propriétés des triangles homologues et introduit la notion de polarité. Chasle appelle *polaire* d'un point P par rapport à un angle, la droite *conjuguée harmonique* de celle qui joint le point P au sommet de l'angle par rapport aux deux côtés de l'angle. Chasles prouve en manipulant des équations algébriques-géométriques que les polaires d'une même point par rapport aux trois angles d'un triangle rencontrent les côtés opposés en trois points alignés. Plus abstraitement, Chasles propose une série de théorèmes généraux concernant les figures homographiques et leur construction ; ainsi, il propose une construc- tion générale des figures homographiques qui intègre implicitement la notion de repère projectif :

Étant pris un triangle ABC dans le plan d'une figure, si de ses sommets A, B on mène à chaque point m de la figure deux droites qui forment sur les côtés opposés les deux rapports de segments $\frac{bC}{bB}$, $\frac{aC}{aA}$; puis qu'on prenne un second triangle quelconques $A'B'C'$ et deux constantes λ, μ , et qu'on détermine dans [le plan de] ce triangle un point m' tel que les rapports des segments faits par les droites $A'm', B'm'$ sur les côtés opposés aient avec les premiers rapports, les relations

$$\frac{aC}{aA} = \lambda \frac{a'C'}{a'A'} \quad \text{et} \quad \frac{bC}{bB} = \mu \frac{b'C'}{b'B'}$$

le point m' appartiendra à une figure homographique à la proposée. [Chasles, 1852, 337-338]

Chasles en déduit que pour former une figure homographique à une figure don- née, on peut prendre arbitrairement les quatre points qui correspondront à quatre points désignés de la figure donnée. De même, étant donné deux couples de points et un couple de droites homologues de deux figures homographiques, le rapport des distances de la première droite aux deux points de la première figure est dans un rapport constant au rapport des distances de la seconde droite aux points correspondants de la seconde figure. De manière duale :

Quand deux figures sont homographiques, si l'on prend dans la pre- mière deux droites fixes et dans la seconde les deux droites corres- pondantes, les rapports des distances de deux points homologues quelconques à ces deux couples de droites, respectivement, seront entre eux dans une raison constante. [Chasles, 1852, 345]

Ces deux propriétés justifient une «nouvelle définition des figures homogra- phiques, aussi simple que précise» :

⁴⁴Chasles ne reprend pas la notion de quadrilatère complet.

⁴⁵Chasles déduit de cet analogue du théorème du quadrilatère complet une construction du quatrième harmonique de trois points donnés.

Deux figures homographiques sont celles dans lesquelles les points se correspondent deux à deux, de manière que les rapports des distances de chaque point de la première figure à trois droites fixes soient aux rapports des distances du point correspondant de la seconde figure à trois autres droites fixes dans des raisons constantes.

Deux figures sont homographiques quand des droites dans l'une correspondent à des droites dans l'autre, de manière que les rapports des distances de chaque droite de la première figure à trois points fixes soient, aux rapports des distances de la droite correspondante dans la seconde figure à trois autres points fixes dans des raisons constantes. [Chasles, 1852, 347].

Chasles introduit la notion générale d'homologie en reprenant la définition de Poncelet ; deux figures sont dites homologues si les points homologues sont situés sur des droites concourantes en *centre d'homologie* et si les droites homologues s'intersectent sur une même droite, *l'axe d'homologie*. Chasles montre en particulier que «deux figures homographiques de construction générale peuvent toujours être placées de manière à former deux figures homologues»⁴⁶. En faisant un rotation autour de l'une des figures autour de l'axe d'homologie, on obtient que deux figures homographiques de construction générale peuvent toujours être placées de manière à être la perspective l'une de l'autre»⁴⁷. // Chasles s'intéresse aux propriétés relatives de deux figures homographiques placées d'une manière quelconque l'une par rapport à l'autre ; en particulier, il s'attache à l'étude des courbes d'intersection des rayons homologues de deux faisceaux homographiques et à la courbe enveloppe des droites qui joignent deux à deux les points homologues de deux divisions homographiques. Chasles développe la théorie de ces courbes de manière analogue à celle de Steiner et montre que ces courbes sont des coniques sans étudier dans le traité de *Géométrie supérieure* les propriétés des coniques car il a l'intention de consacrer un volume à la théorie des sections coniques⁴⁸. Par contre, dans *l'Aperçu historique* et dans son mémoire de 1837 consacré à l'homographie, il énonce déjà comme une propriété fondamentale de la théorie des figures homographiques le théorème suivant :

Deux faisceaux homographiques étant situés dans un même plan, les droites du premier rencontrent les droites du second en des points qui sont sur une conique qui passe par les centres des deux faisceaux. [Chasles, 1837a, 340]

Pour montrer que la courbe enveloppe des droites qui joignent les points homologues de deux divisions homographiques est une section conique, Chasles montre que l'on peut se ramener au cas du cercle ; en effet puisque deux figures homographiques peuvent être placée de manière à être en perspective :

Deux courbes dont chacune est l'enveloppe des droites qui joignent les points homologues de deux divisions homographiques peuvent toujours être considérées comme étant la perspective l'une de l'autre, de manière que trois tangentes de la première correspondent respectivement à trois tangentes désignées de la seconde. [Chasles, 1852, 371]

⁴⁶[Chasles, 1852, 377].

⁴⁷[Chasles, 1852, 379].

⁴⁸[Chasles, 1865].

Il suffit donc de montrer que les tangentes à un cercle forment sur deux tangentes fixes deux divisions homographiques. Pour montrer cette propriété, Chasles suppose connue la propriété selon laquelle tous les angles qui ont leur sommet en des points de la circonférence d'un cercle et qui sous-tendent une même corde sont égaux ou supplémentaires l'un de l'autre. Il en déduit que si P et P' sont deux points fixes du cercle, m un point variable sur la circonférence, la correspondance entre les rayons des faisceaux (P) et (P') qui associe au rayon Pm le rayon $P'm$, est homographique.⁴⁹ Ces deux faisceaux induisent sur toute droite une division homographique dont les points doubles sont les points d'intersection de la droite et du cercle.⁵⁰ Chasles en conclut donc que «la courbe enveloppe des droites qui joignent les points homologues de deux divisions homographiques peut être placée sur un cône à base circulaire et est, par conséquent, une section conique.»⁵¹

Il se correspond dans deux figures homographiques des éléments de même espèce. Chasles envisage une autre catégorie de relations entre figure, les *figures corrélatives* «dans lesquelles à des points de l'une correspondent des droites dans l'autre, de manière qu'à des points en ligne droite correspondent des droites passant par un même point, avec cette condition que le rapport anharmonique de quatre points soit égal à celui des quatre droites correspondantes»⁵². Chasles déduit de la définition de transformations corrélatives que les points d'une droite et les points d'intersection de cette droite avec les droites correspondantes aux points de la droite forment deux divisions homographiques et qu'il y a donc en général sur une droite «deux points (réels ou imaginaires) tels, que leurs droites corrélatives passant par ces points eux-mêmes, respectivement» et que «par un point on peut mener, en général, deux droites (réelles ou imaginaires) passant par leurs points corrélatifs respectifs»⁵³. Chasles retrouve ainsi la caractérisation des coniques de von Staudt :

Étant données deux figures corrélatives, les points de la première

⁴⁹Cette propriété est un cas particulier de la caractérisation des coniques comme le lieu des points d'intersection des droites correspondantes de deux faisceaux projectifs. Chasles rappelle qu'il a donné une première version de ce théorème «sous un énoncé différent» dans un article publié en 1829 [Chasles, 1829] et qu'il en donne aussi une démonstration dans la note XV de son *Aperçu historique* [Chasles, 1837a, 340].

⁵⁰Chasles déduit de ce théorème les propriétés de la puissance des points par rapport à un cercle :

Il résulte de là que les propriétés relatives aux points d'intersection d'un cercle par une droite peuvent se conclure de celles des points doubles de deux divisions homographiques. [Chasles, 1852, 422]

Si on considère une droite passant par un point quelconque O , les points doubles A et B de la division homographique vérifie l'équation et donc le produit $OA \cdot OB$ est constant. La démonstration proposée par Chasles traite la proposition dans toute sa généralité que le point O soit intérieur ou extérieur au cercle, que les points A et B soient réels ou imaginaires.

Si une droite tourne autour d'un point O , le produit des segments compris entre ce point et les deux points (réels ou imaginaires) où cette droite rencontre un cercle reste constant. [Chasles, 1852, 423-424]

⁵¹[Chasles, 1852, 371].

⁵²[Chasles, 1852, 382].

Chasles signale que la notion de *figures supplémentaires* en géométrie sphérique (dans lesquelles les points de l'une correspondent à des arcs de grand cercle) ont «des relations de construction analogues» ; il en déduit qu'on obtient des figures corrélatives en faisant passer par deux figures supplémentaires deux cônes dont le sommet est le centre de la sphère.

⁵³[Chasles, 1852, 389].

qui jouissent de la propriété que les droites qui leur correspondent dans la seconde figure passent par ces points eux-mêmes sont situés sur une courbe du deuxième ordre, et ces droites enveloppent une courbe de deuxième classe. [Chasles, 1852, 397]⁵⁴

Chasles signale que les théories des figures homographiques et corrélatives donnent lieu à deux catégories de méthodes de transformation des figures ; la théorie des figures homographiques permet de «transformer une figure en une autre du même genre», ce qui peut le cas échéant justifier l'application «à une figure les propriétés d'une figure plus simple et de généraliser ainsi des vérités connues»⁵⁵. Des figures corrélatives sont au contraire de genre différents et «aux propriétés de la première figure correspondent des propriétés de la seconde, qui dérivent des premières, en vertu des relations générales qui ont lieu entre deux figures corrélatives» d'où résulte la notion de dualité :

Il serait donc possible de conclure, en vertu de cette dualité constante, une moitié à peu près de nos propositions de l'autre moitié, sans nouveaux frais de démonstration.

Toutefois nous n'avons pas procédé de cette manière, il faut en dire le motif. [Chasles, 1852, 401]

Chasles explique qu'il ne peut utiliser un principe de dualité comme principe de démonstration car comme son objectif est de développer systématiquement les différentes parties de la géométrie, «il faut faire pénétrer le principe de dualité dans les éléments mêmes et donner des méthodes générales qui soient propres à démontrer deux propositions corrélatives». Chasles réitère le même argument par lequel il refusait d'utiliser le principe de continuité ; la généralisation des méthodes passe par une unification des situations géométriques et non pas par une justification de la possibilité d'étendre un résultat. Il donne comme exemple la théorie du rapport anharmonique pour les points et pour les droites. Chasles reconnaît que sa méthode n'est forcément la plus rapide, ni même la plus aisée ; c'est à ses yeux le prix à payer pour constituer des théories organisées car «il ne suffit pas de savoir qu'une proposition est vraie pour qu'on puisse en faire un usage utile en Mathématiques»⁵⁶. Il faut pouvoir la situer dans le réseau déductif des diverses propositions de la théorie et la connaissance de la structure déductive des théories est épistémologiquement féconde :

En se privant du secours de ces méthodes [les méthodes de transformations], on se crée parfois des difficultés ; mais ce n'est pas sans utilité, parce que l'obligation de démontrer par les ressources naturelles du sujet certaines propositions qui auraient pu se conclure des méthodes de transformation met toujours sur la voie de beaucoup d'autres vérités qui accroissent souvent d'une manière inattendue et fort propice le sujet que l'on traite. [Chasles, 1852, 402].

De plus en refusant de considérer les méthodes de transformation de figures comme des méthodes de démonstration, Chasles s'autorise à considérer à la suite de Steiner et von Staudt la théorie des relations projectives entre formes fondamentales comme un objet d'étude.

⁵⁴Chasles définit les courbes d'ordre n comme celles qui sont intersectées par une droite en n points réels ou imaginaires et les courbes de classe n comme celles telles qu'on peut mener par un point quelconque n tangentes réelles ou imaginaires.

⁵⁵[Chasles, 1852, 399].

⁵⁶[Chasles, 1852, 402].

Chapitre 7

Démontrer le théorème fondamental de la géométrie projective

7.1 Introduction

Un des résultats inattendus des travaux géométriques de von Staudt a été de montrer que le développement de la géométrie projective jusqu'à l'introduction de la notion des coordonnées projectives reposait essentiellement sur le théorème fondamental de la géométrie projective, selon lequel il n'existe entre deux formes fondamentales de première espèce qu'une et une seule relation projective qui associe à trois éléments donnés de la première trois éléments donnés de la seconde. Il est donc important de savoir quelles sont réellement les hypothèses nécessaires pour prouver ce théorème. Klein montre assez rapidement que le théorème fondamental de la géométrie projective est indépendant de l'axiome des parallèles (et donc qu'il ne suppose pas la géométrie euclidienne). Il aborde en même temps la question du rôle des hypothèses de continuité que von Staudt admettait plus ou moins implicitement et il pense avoir décelé dans le raisonnement de von Staudt une *lacune*.¹ C'est le début d'une longue discussion qui ne trouvera son issue qu'avec l'achèvement de l'axiomatisation de la géométrie pro-

¹Enriques [1907] dans son exposé sur *les principes de la géométrie* attribue à Weierstrass la découverte de l'insuffisance de la démonstration de Staudt :

La démonstration graphique que *K.G. Chr. von Staudt* a donnée de son théorème présente une lacune qui a été signalée par *K. Weierstrass* dans son cours professé à l'université de Berlin. [Enriques, 1907, 89]

Selon les éditeurs du 3^e tome de ses œuvres complètes, Weierstrass donne un cours (*privatim* de 4 semaines) consacré à la *Neue synthetische Geometrie* durant les semestres d'été 1866, d'hiver 1867-68 et d'hiver 1869-70. Il écrit en outre (mais ne publie pas) une note consacrée à une preuve purement géométrie du théorème fondamental de la géométrie projective. [Weierstrass, 1903]

jective.² Cette discussion rejoint celle qui a lieu peu avant au sujet du continu numérique. Une stratégie utilisée entre autre par Klein, Klein, Veblen et Young consistera à donner une forme géométrique de la présentation du continu par Dedekind. D'autres comme Thomae, Darboux ou Schur proposeront de s'appuyer sur une version cinématique de l'axiome de continuité. Cette partie de la discussion se termine lorsque, en reprenant un résultat des *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert, il sera montré que les seuls axiomes projectifs sont insuffisants pour montrer le théorème de la géométrie projective comme le prouvent certains exemples de géométrie non-archimédienne. Par contre, il suffit d'adjoindre aux axiomes projectifs une version projective de l'axiome d'Archimède, pour obtenir une démonstration du théorème; l'axiome de continuité est donc loin d'être une hypothèse nécessaire comme le prouvait déjà l'exemple des géométries finies introduites par Fano, Veblen et Young. La théorie des jets de von Staudt avait montré que l'on pouvait envisager la question de l'introduction des nombres en géométrie autrement que métriquement et qu'il existe un lien plus profond relevant des structures algébriques sous-jacentes à toute géométrie; de ce point de vue, le théorème de la géométrie projective est équivalent à l'hypothèse de commutativité de la multiplication des jets, des points ou plus algébriquement du corps sur lequel est modelé la géométrie considérée. Ces réflexions rencontrent un résultat annoncé par Wiener selon lequel le théorème fondamental de la géométrie projective est démontrable sans considération de continuité à partir des théorèmes de Desargues et Pascal et le théorème de Hilbert selon lequel le théorème de Pascal entraîne la commutativité de la multiplication.

7.2 La géométrie projective et l'axiome des parallèles

La motivation première de Klein dans ses considérations sur la géométrie projective est de montrer l'indépendance de la géométrie projective exposée à la manière de von Staudt par rapport à l'axiome des parallèles. En effet, dans ses articles consacrés aux fondements de la géométrie non-euclidienne,³ Klein développe, à la suite des travaux de Cayley, des modèles projectifs des géométries euclidiennes et non-euclidiennes, montrant ainsi que les géométries non-euclidiennes ont, au moins par rapport à la géométrie projective, le même statut que la géométrie euclidienne. Pour être conséquent, il est obligé de s'assurer que la géométrie projective peut être fondée indépendamment de toute référence à l'axiome des parallèles, c'est-à-dire ne présuppose pas la géométrie euclidienne.

Ainsi que nous l'avons déjà dit, au point de vue de la géométrie projective, c'est le système de von Staudt que l'on doit adopter comme base. L'on pourrait faire cette objection que von Staudt admet de fait l'axiome des parallèles (en postulant une correspondance bi-uniforme entre un pinceau de droites et une rangée de points). Mais j'ai fait

²Pour une autre présentation de l'histoire de la démonstration du théorème fondamental de la géométrie projective, on peut consulter l'article de J.-D. Voelke [2007], *Le théorème fondamental de la géométrie projective : évolution de sa preuve entre 1847 et 1900*.

³[Klein, 1871, 1873].

Pour plus de détails sur les modèles projectifs des géométries non-euclidiennes, on peut consulter le livre de J.J. Gray [1989], *Ideas of Space, Euclidean, non-Euclidean and relativistic*

voir dans les *Math. Annalen* comment l'on peut lever cette apparente difficulté, en limitant toutes les constructions de von Staudt à une portion limitée de l'espace.⁴

Klein consacre le second chapitre de son deuxième article sur les géométries non-euclidiennes⁵ à montrer comment la géométrie projective peut être construite sans faire appel à l'axiome des parallèles. En effet, les développements de von Staudt ne sont pas de ce point de vue complètement satisfaisants : certes, von Staudt n'utilise pas de considérations métriques dans son exposé, mais, comme le fait remarquer Klein, en supposant qu'il existe une correspondance biunivoque entre les droites ponctuelles et les faisceaux de plans, Staudt admet implicitement qu'un faisceau de plans ne peut pas «contenir une série de plans qui ne rencontrent même pas la droite ponctuelle».⁶

Klein fait d'abord remarquer *a contrario* qu'une des conséquences de son travail sur les modèles projectifs des géométries non-euclidiennes est que la géométrie projective reste valable dans le cadre de ces géométries. Mieux, alors que dans le cadre euclidien, on est obligé d'adjoindre à l'espace euclidien des éléments à l'infini pour obtenir la géométrie projective, l'espace de la géométrie elliptique suffit pour que deux droites coplanaires soient sécantes. Dans le cadre de la géométrie hyperbolique, l'introduction des éléments à l'infini est certes requise pour pouvoir développer toute la géométrie projective mais ces éléments à l'infini reçoivent la même interprétation géométrique qu'en géométrie euclidienne. Ainsi, un point à l'infini est le représentant d'un faisceau de droites parallèles :

⁴[Klein, 1898, 87].

⁵[Klein, 1873, 330-343].

⁶„Bei allen diesen Entwicklungen wird von Maßbestimmung nicht geredet, aber allerdings wird das Parallelenaxiom vorausgesetzt, weil sonst z. B. zwischen einer geraden Punktreihe und einem Ebenenbüschel kein vollständiges Entsprechen stattzufinden brauchte, sondern das Ebenenbüschel eine ganze Reihe von Ebenen enthalten könnte, welche der Punktreihe gar nicht begegnen.“[Klein, 1873, 331]

Klein fait allusion à la définition de correspondance entre formes fondamentales donnée par Staudt dans *Geometrie der Lage* :

Deux formes fondamentales sont dites rapportées l'une à l'autre si, à chaque élément d'une des formes, est assigné un élément de l'autre forme, que l'on appellera son correspondant. [...] La manière la plus simple de rapporter une ponctuelle s et un faisceau de plans, dont l'axe ne coupe pas la première forme, consiste à considérer la ponctuelle comme une section (par la droite s) du faisceau de plans. Ainsi, chaque point de la ponctuelle est situé dans le plan du faisceau qui lui correspond.

Zwei Grundgebilde heissen auf einander bezogen, wenn jedem Elemente eines jeden ein Element des andern zugewiesen ist, welches jenem entsprechend heisst. [...] Die einfachste Art, ein gerades Gebilde s und einen Ebenenbüschel, dessen Axe das erstere Gebilde nicht schneidet, auf einander zu beziehen, besteht darin, dass man das gerade Gebilde als einen Schnitt des Ebenenbüschels (mit der Geraden s) betrachtet. Es liegt alsdann jeder Punkt des gerades Gebildes in der ihm entsprechenden Ebene des Büschels. [Staudt, 1847, 25-26]

En fait, Staudt utilise dans le paragraphe consacré aux parallèles et qui lui permettra d'introduire les éléments à l'infini un énoncé de l'axiome des parallèles. Il considère cet énoncé comme un corollaire immédiat du théorème qui affirme que la projection d'une droite à partir d'un point extérieur à celle-ci est un angle plan plat („ein flacher ebener Winkel“). Un angle plat est un angle qui n'est ni convexe, ni concave. Pour montrer que l'angle obtenu par la projection d'une ligne droite n'est pas concave, Staudt pose comme axiome qu'un angle concave ne peut contenir une droite. Cet axiome est manifestement équivalent à l'axiome des parallèles. [Staudt, 1847, 12]

C'est parce que ce faisceau possède toutes les propriétés projectives fondamentales appartenant à un faisceau de droites passant par un point réel que l'expression : «un point à l'infini» est autorisée et utilisable.⁷

Avec cette remarque, Klein utilise un argument heuristique intéressant. Comme on peut obtenir, modulo un choix de points à l'infini, la géométrie projective à partir des trois géométries euclidienne et non-euclidiennes, il en conclut que l'on est fondé à penser que celle-ci est indépendante de l'axiome des parallèles et que l'on doit pouvoir la construire «sans avoir à se prononcer sur cet axiome»⁸.

Pour se convaincre définitivement de l'indépendance des développements de von Staudt par rapport à une décision quelconque concernant l'axiome des parallèles, Klein se propose de montrer que l'on peut effectuer toutes les constructions fondamentales, en particulier obtenir le théorème fondamental de la géométrie projective, en se restreignant à une région limitée de l'espace. En effet, il est clair que si l'on impose par hypothèse de ne pas quitter une région limitée de l'espace, aucune référence à l'axiome des parallèles n'a à être faite. Klein va en fait généraliser son problème à tous les systèmes de courbes et surfaces⁹ en nombre infini définies dans une région limitée de l'espace et vérifiant les trois propriétés d'incidence suivantes :

⁷„Der unendlich ferne Punkt ist nur der Repräsentant des durch ihn gehenden Parallelstrahlenbüschels : weil dieser Büschel alle wesentlichen projektivischen Eigenschaften besitzt, die einem Büschel von Geraden zukommen, welche durch einen wirklichen Punkt gehen, ist die Ausdrucksweise : „ein unendlich ferner Punkt“ gestattet und brauchbar.“ [Klein, 1873, 329] On notera ici la différence que fait Klein entre les points réels et les points idéaux qui sont conçus comme des expressions linguistiques auxquelles il faut donner un sens. Dans sa critique du livre de Russell, *An Essay on the Foundations of Geometry* [Russell, 1897], Poincaré affirme au contraire que tous les éléments de l'espace projectif sont qualitativement identiques.

Il faut encore qu'un «point à l'infini» [...] soit qualitativement équivalent à un point ordinaire ; l'ensemble des points à l'infini forme un «plan de l'infini» qui doit être regardé comme indiscernable d'un plan ordinaire, au point de vue qualitatif. [Poincaré, 1899, 253]

⁸Klein défend déjà cette idée dans son premier article sur les géométries non-euclidiennes [Klein, 1871, 303-304]. Il insiste sur le fait que l'on peut développer la géométrie projective avant de se préoccuper de la définition de la métrique. A cet égard, il cite bien entendu les travaux de von Staudt mais aussi le traité moins connu de Fiedler [1871]. Klein souligne l'intérêt d'une construction de la géométrie projective sans avoir à décider de l'axiome des parallèles pour la compréhension de la géométrie et plus généralement de l'espace. En effet, comme il le montre dans ses développements sur les géométries non-euclidiennes, les métriques euclidienne, elliptique ou hyperbolique peuvent être introduites de la même manière comme logarithme d'un birapport calculé dans un espace projectif.

On décrirait d'abord l'espace comme une multiplicité projective, puis comme une multiplicité à courbure constante, et enfin on fixerait la valeur de la courbure comme nulle en introduisant l'axiome des parallèles. [Klein, 1873, 332].

„Man würde den Raum zunächst als eine projektivische Mannigfaltigkeit, sodann erst als eine Mannigfaltigkeit von konstanter Krümmung bezeichnen, und endlich durch Einführung des Parallelenaxioms den Wert des Krümmungsmaßes auf Null festsetzen.“

Dans la préface de ses *Éléments de géométrie projective*, Cremona [1873] attribue en faisant référence à cet article à Klein la paternité de l'expression *géométrie projective*.

⁹Klein précise que les surfaces ne doivent être limitées que par la frontière de la région limitée choisie et que la courbure de ces surfaces est continue („stetig gekrümmten Fläche“). Dans ce qui suit, sauf mention contraire, le terme «surface» désignera une surface du second ordre.

1. Par trois points déterminés de l'espace, il passe une et seule surface du système.
2. La courbe d'intersection de deux surfaces du système, appartient à toutes les surfaces qui contiennent deux points de cette courbe.¹⁰

Pour Klein, la géométrie projective ordinaire n'est qu'un cas particulier ; le développement de la géométrie projective pour les systèmes de courbes et surfaces doit s'effectuer sans utiliser les notions de droites et plans mais seulement celles de lignes continues et de surfaces qui sont logiquement antérieures. Le raisonnement de Klein est une avancée vers une conception de la géométrie projective indépendante des conceptions géométriques intuitives habituelles ; pour autant, nous sommes encore loin d'une conception abstraite fondée sur des relations entre termes primitifs puisque Klein ne considère que des systèmes que l'on peut qualifier de géométriquement réalisables.¹¹ Par contre, il insiste sur les transpositions directes que l'on peut faire du cas particulier du système de droites et plans au cas général des systèmes de courbes et surfaces. En fait, dans cet article, il se contente de suivre les développements de von Staudt¹² et de Reye¹³ en les adaptant au cas particulier d'un domaine borné. Klein généralise la définition des formes fondamentales comme des ensembles composés de points, courbes et surfaces du système. Il distingue, comme von Staudt et Reye, les formes fondamentales de première espèce (la courbe ponctuelle, le faisceau de courbes qui à l'intérieur d'une surface passe par un point et le faisceau de surfaces qui contiennent une même courbe) et celles de seconde espèce (la surface ponctuelle, la surface considérée comme l'ensemble des courbes qu'elle contient, la gerbe des courbes passant par un point et la gerbe des surfaces passant par un point). Il différencie, du fait de la limitation de l'espace, les formes limitées (la courbe, la surface ponctuelle et la surface vue comme un ensemble de courbes) et celles illimitées (les faisceaux et les gerbes). Une telle distinction est nécessaire pour définir la notion de correspondance projective : dans le cadre d'un espace limité, on ne peut, par exemple, espérer mettre en correspondance bijective (complète en utilisant le vocabulaire de Klein) une courbe et un faisceau de plans.

Pour montrer que l'on peut développer une théorie analogue à la géométrie projective à partir d'un système de courbes et de surfaces vérifiant les deux axiomes ci-dessus, Klein se propose de montrer un équivalent du théorème du quadrilatère complet de von Staudt et de la construction du quatrième harmonique de trois éléments d'une même forme fondamentale illimitée de première espèce. De fait, il montre le théorème dans le cas où les trois éléments A, B, C appartiennent à une même courbe ponctuelle puisque «l'intuition [de celle-ci] nous est plus familière que celle des formes fondamentales de première espèce illimitées»¹⁴. Bien entendu, dans ce cas, il faut s'assurer que la construction du quadrilatère est possible. Pour cela, Klein impose que le point C n'appartienne

¹⁰ „1. Durch drei beliebig angenommene Punkte des gegebenen Raumes geht eine und nur eine Fläche des Systems hindurch.

2. Die Durchschnittskurve, welche zwei Flächen des Systems gemein haben können, gehört allen Flächen an, die zwei Punkte der Kurve enthalten.“ [Klein, 1873, 333]

¹¹ Klein précise même qu'il pense pouvoir établir que tout système de surfaces vérifiant ces hypothèses peut être obtenu par déformation continue d'un système de plans. [Klein, 1873, 334].

¹² [Staudt, 1847, 1856].

¹³ [Reye, 1866].

¹⁴ „die Punktreihe [...] deren Anschauung uns geläufiger ist als die Anschauung der unbegrenzten Grundgebilde erster Stufe.“ [Klein, 1873, 336]

pas au segment AB ce qui assure la possibilité de la construction dans chaque surface contenant la courbe contenant A, B, C . Klein énonce le théorème dans toute sa généralité pour les formes illimitées sans hypothèse sur la position des éléments A, B, C et choisit un cas particulier comme cadre de l'exposé de la démonstration. Cette restriction ne servant qu'à assurer la construction du quadrilatère et n'intervenant pas dans la preuve proprement dite, le raisonnement de Klein est correct sans argument supplémentaire.¹⁵

La démonstration proposée par Klein est une transposition directe dans le cadre du système de courbes et de surfaces de celle du théorème de la division harmonique de la géométrie projective ordinaire.¹⁶ Pour démontrer que le quatrième harmonique D de trois points A, B, C appartenant à une même courbe est bien défini, on considère deux quadrilatères $\alpha\beta\gamma\delta$ et $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ construits à partir des trois points A, B, C sur des surfaces différentes. Le point essentiel de la démonstration est alors de prouver que les deux quadrilatères sont des sections d'un même 4-arête, c'est-à-dire que les quatre courbes $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma', \delta\delta'$ joignant les sommets homologues des deux quadrilatères sont concourantes et que l'on peut toujours se ramener au cas générique où ces courbes sont effectivement concourantes dans l'espace limité autorisé.¹⁷ Pour cela, Klein explique que l'on peut toujours se ramener à cette situation en utilisant un certain nombre de projections sur des surfaces contenant la courbe à laquelle appartiennent A, B, C . Klein généralise en fait ici la démonstration du théorème dans le cas où les deux quadrilatères appartiennent à un même plan (ou une même surface); on utilise alors un plan auxiliaire et un quadrilatère construit dans ce plan auxiliaire. Klein propose d'utiliser un certain nombre de plans (ou de surface) auxiliaires et de quadrilatères obtenus par projection.¹⁸

¹⁵Chaque argument de la démonstration effectuée dans le cadre des courbes peut se transposer à celui des formes illimitées puisque dans ce cas la question de la construction de la figure analogue au quadrilatère complet ne se pose pas. Klein donne un autre argument qui utilise la notion de projection; le théorème général s'obtient sans démonstration, affirme Klein, à partir du cas restreint des ponctuelles car on peut toujours intersecter trois éléments quelconques d'un faisceau de courbes ou de surfaces par une courbe de manière que l'on puisse construire le quatrième harmonique des trois points d'intersection obtenus.

¹⁶«Les mêmes considérations peuvent être intégralement tenues si on se donne un système de courbes et surfaces au lieu du système de droites et plans.»

„Genau dieselben Betrachtungen können nun angestellt werden, wenn statt des Systems der Geraden und Ebenen das System der Kurven und Flächen gegeben ist.“ [Klein, 1873, 337]

¹⁷Il faut bien faire la différence entre l'hypothèse selon laquelle C n'appartient pas au segment AB et la condition selon laquelle les quatre droites $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma', \delta\delta'$ sont concourantes. La première n'est posée que pour assurer la possibilité de construire les quadrilatères dans le cas des courbes alors que la seconde est fondamentale pour la démonstration.

¹⁸L'argument de Klein ressemble plus à une pétition de principe qu'à une véritable démonstration :

Mais le point d'intersection peut occasionnellement être en dehors de l'espace limité donné, autrement dit, ne même pas exister. Dans ce cas, on projettera un des deux quadrilatères sur une nouvelle F passant par K , et on réitérera ce procédé jusqu'à les courbes K joignant les sommets du quadrilatère original et ceux du nouveau quadrilatère se croisent.

„Aber der Schnittpunkt kann gelegentlich über den gegebenen begrenzten Raum hinausfallen, d. h. gar nicht vorhanden sein. In dem Falle wird man eins der beiden Vierecke durch Projection auf eine neue durch K gehende F übertragen, und mit diesem Verfahren so lange fortfahren, bis die Verbindungskurven K der Ecken des ursprünglichen und des neu konstruierten Vierecks sich treffen.“ [Klein, 1873, 337]

Klein fait appel à l'intuition du lecteur en affirmant que l'on peut se convaincre de cette proposition en se représentant «deux quadrilatères dans la situation spatiale désirée» („sowie

Klein poursuit le programme de Staudt en définissant la notion de correspondance projective des formes par la conservation des formes harmoniques. Il rappelle que Staudt déduit de cette définition le théorème fondamental de la géométrie projective :

Une correspondance projective entre deux formes fondamentales de première espèce est entièrement définie par la données de trois couples d'éléments homologues.¹⁹

Klein décèle dans la démonstration de Staudt du théorème fondamental une lacune qu'il se propose de réparer en introduisant un axiome de continuité²⁰. Indépendamment de cette discussion, le théorème fondamental de la géométrie projective ne suffit pas pour construire directement un système de coordonnées homogènes. Il faut d'abord justifier une définition des éléments idéaux et développer la géométrie projective des gerbes et des formes de seconde espèce, c'est-à-dire introduire l'équivalent pour les système de courbes et surfaces de la géométrie des ensembles de courbes et surfaces passant par un même point et celle du plan ponctuel (ou réglé). Pour cela, Klein fait explicitement référence à la *Geometrie der Lage* de Reye²¹ et signale que le seul point délicat est de se convaincre que bien que l'espace soit limité, il existe néanmoins des formes élémentaires illimitées (de première et de seconde espèce²²) et que l'on peut transposer directement à celles-ci les considérations de Reye au sujet du plan, en particulier celles concernant la dualité :

On peut remplacer les K et les F respectivement par des F et des K dans les théorèmes qui sont relatifs à des F et des K passant par un même point.²³

Selon Klein, le fait de travailler dans un espace limité n'est pas gênant pour développer la géométrie des formes fondamentales de deuxième espèce illimitées des systèmes de courbes et de surfaces puisque dans ce cas, les points sont vus uniquement comme gerbes de courbes ou de surfaces. La géométrie des surfaces F considérées comme formes fondamentales limitées ponctuelles (ou réglées nécessite d'introduire les éléments idéaux) afin de traduire en terme de lieu de points (ou de courbes) les théorèmes obtenus pour les formes fondamentales illimitées de surfaces. Les points idéaux au sens de Klein sont définis de manière analogue aux points à l'infini de la géométrie projective classique²⁴ puisqu'ils

man zwei Vierecke in den bewußten Lagenverhältnissen gezeichnet denkt.“) et c'est la seule justification qu'il propose!

¹⁹„[...] das projektivische Entsprechen zwischen zwei Grungebilden erster Stufe durch drei einander entsprechende Elemente A, B, C und A', B', C' festgelegt ist.“ [Klein, 1873, 337]

²⁰Voir la section suivante.

²¹[Reye, 1866].

²²Bien que cela ne soit pas explicite, on peut penser que Klein étend (comme Staudt et Reye) la définition des correspondances projectives à toutes les formes de manière à développer en particulier la notion d'involution et de polarité.

²³„[...] das Gesetz der *Dualität* [...], welches jetzt dahin auszusprechen ist, daß man in allen Sätzen, die sich auf K und F beziehen, welche durch einen Punkt gehen, statt K und F auch F und K setzen kann.“ [Klein, 1873, 339]

²⁴Klein insiste pour bien distinguer les points de l'espace et les point idéaux :

Par conséquent, il est évident que les points idéaux de la F donnée, définis ainsi, ne doivent pas être pensés comme appartenant à cette F mais comme *points spatiaux idéaux*.

„Es ist hiernach auch ersichtlich, wie der ideale Punkt der gegebenen F , der hierdurch definiert ist, nicht bloß als dieser F angehörig, sondern als *idealer Raumpunkt* gedacht werden muß.“ [Klein, 1873, 340]

sont introduits pour garantir la possibilité de parler en général d'une intersection entre courbes appartenant à une même surface ou entre les surfaces et les courbes. Ainsi, les points idéaux d'une surface F sont définis par l'intermédiaire des courbes d'une même gerbe ne coupant pas F . Klein s'assure de l'indépendance de sa définition par rapport au choix de la gerbe en affirmant²⁵ que les surfaces d'une gerbe intersectant la surface F définissent le même réseau de courbes sur F indépendamment de la gerbe choisie. Klein considère alors que ces considérations suffisent à développer la géométrie projective de l'espace et qu'il a montré que «la géométrie projective est applicable aux systèmes de courbes et surfaces considérés»²⁶. En particulier, Klein introduit la notion de birapport de quatre éléments d'une forme élémentaire de première espèce (en utilisant de nouveau l'axiome de continuité introduit pour montrer le théorème fondamental de la géométrie projective), puis celle de coordonnées homogènes «qui ne sont rien d'autre que les valeurs relatives de certains birapports»²⁷. La démarche de Klein n'est pas circulaire; s'il se contentait de reprendre la théorie des jets de Staudt, la définition de la valeur numérique des jets s'effectuerait en utilisant une métrique ce qui serait incompatible avec l'intention de Klein de subordonner les géométries métriques à la géométrie projective. En fait, Klein associe à chaque combinaison de quatre éléments d'une forme fondamentale de première espèce un nombre réel par l'intermédiaire d'un système harmonique²⁸ et de l'axiome de continuité :

On désigne trois éléments A, B, C comme les éléments fondamentaux de la forme à partir desquels on distribue suivant un principe arbitraire, les nombres réels de $-\infty$ à $+\infty$ aux autres éléments D de la forme illimitée en question de telle manière que chaque combinaison $ABCD$ soit associée à un nombre qui la caractérise.²⁹

C'est seulement après avoir défini une telle échelle arbitraire que Klein se préoccupe de montrer que l'on peut, en utilisant la théorie des jets de Staudt, lui donner un statut purement projectif.³⁰

²⁵L'article de Klein [1873] n'est en toute rigueur qu'une suite d'affirmations. On comprend le commentaire de Enriques :

Les postulats de la géométrie projective dans une région limitée de l'espace ont été analysés et formulés en toute rigueur par *M. Pasch*. [Enriques, 1907, 78]

Néanmoins, la plupart des idées du développement de Pasch sont annoncées et la justification de certaines esquissées en un paragraphe par Klein.

²⁶ „[...] dass für das bez. Flächen- und Kurvensystem die projectivische Geometrie gilt [...]“ [Klein, 1873, 340]

²⁷ „die nichts sind als die relativen Werte gewisser Doppelverhältnisse“. [Klein, 1873, 341]

²⁸On définit un système harmonique sur une forme fondamentale de première espèce en considérant à partir de trois éléments l'ensemble des quatrièmes harmoniques que l'on peut construire. Le point essentiel de la discussion autour de la démonstration de Staudt du théorème fondamental de la géométrie projective est la question de la densité d'une tel système. Voir le paragraphe suivant.

²⁹ „Man bezeichne drei Elemente A, B, C als Grundelemente des Gebildes, auf die übrigen Elemente D des unbegrenzt gedachten Gebildes verteile man nach einem willkürlichen Gesetze die reellen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$, so ist jeder Kombination $ABCD$ eine Zahl zugeordnet, welche sie charakterisiert.“ [Klein, 1873, 340]

³⁰Klein signale que l'on peut à cette fin utiliser la notion de réseau géométrique introduite par Möbius [1827] dans son traité *Der barycentrische Calcul*.

7.3 Le théorème fondamental de la géométrie projective et l'axiome de continuité

7.3.1 La lacune de Staudt et la première analyse de Klein

Même si l'intention première de Klein est de montrer que l'on peut développer la géométrie projective indépendamment de l'axiome des parallèles, la principale réception de ses travaux au sujet de la géométrie projective concerne sa discussion autour de la démonstration du théorème fondamental de la géométrie projective et de la nécessité de l'introduction d'un axiome de continuité. Dans son deuxième article sur les géométries non-euclidiennes³¹, Klein signale une lacune concernant la question de la continuité de la droite dans la démonstration du théorème fondamental de la géométrie projective. Il rappelle le principe de démonstration de von Staudt : étant donné deux formes fondamentales de première espèce, trois éléments A, B, C de l'une et trois éléments A', B', C' de l'autre, que l'on suppose deux à deux respectivement correspondants, on peut alors définir une correspondance projective point par point en associant d'abord au quatrième harmonique D de A, B, C le quatrième harmonique D' de A', B', C' , puis en itérant infiniment le procédé³². Selon Klein, le point délicat de la démonstration est de montrer que l'on peut obtenir de cette manière tous les éléments d'une forme de première espèce, c'est-à-dire que l'on peut approcher tous les éléments de la forme aussi près que l'on veut par un nombre fini de divisions harmoniques. Klein précise sa pensée en définissant ce que signifie «approcher d'aussi près que l'on veut» :

[...] on peut toujours trouver un point approprié situé entre³³ le point à déterminer et un autre différent de ce dernier supposé quelconque.

³⁴

Von Staudt croyait avoir obtenu une démonstration de ce théorème en établissant l'absurdité de l'hypothèse selon laquelle «un point est le dernier que l'on puisse construire par ce processus».³⁵ Klein explique que la démonstration de von Staudt n'est pas suffisante car *a priori*, il est possible que le processus puisse se poursuivre indéfiniment sans pour autant «franchir une certaine frontière». Dans ce cas, ces points-limites délimiteraient des segments dans lesquels le système des éléments obtenus par itération du processus de division harmonique ne pourrait pas pénétrer et donc, certains points pourraient être inapprochables par des points du système harmonique. La différence avec la situation envisagée

³¹[Klein, 1873].

³²Le résultat d'une telle itération est un *système harmonique*.

³³Klein considère que la relation «entre» n'est pas à définir, ni à expliciter. Il faut attendre l'exposition axiomatisée de la géométrie projective de Pasch [1882a] pour que la relation «entre» soit spécifiquement étudiée avec les axiomes d'ordre. Par contre, comme on va le voir, Klein va montrer que certaines questions de continuité des transformations projectives sont en fait liées à des considérations sur l'ordre des points.

³⁴„[...] daß man immer einen entsprechenden Punkt finden kann, der zwischen dem zu bestimmenden Punkte und einem beliebig von ihm verschieden angenommenen inne liegt.“ [Klein, 1873, 338]

³⁵Très exactement, Staudt montre que l'hypothèse selon laquelle un segment défini par deux points du système harmonique ne contiendrait pas d'autre point du système harmonique est absurde. La discussion de Klein au sujet de la démonstration de Staudt porte sur le statut des points-frontière de ces segments dans lesquels le système harmonique ne pénètre pas.

par Staudt concerne le statut des bornes de ces segments : dans l'éventualité envisagée par Klein, les bornes des segments dans lesquels le système ne pénètre pas ne sont pas des points de la suite mais des points d'accumulation de celui-ci. Dans un tel cas, la démonstration de Staudt n'est plus valable puisqu'elle repose explicitement sur le fait que les bornes du segment qui ne contient aucun point du système harmonique sont des points de ce système. Pour sauver la démonstration de Staudt, il est donc nécessaire de pouvoir envisager ces points d'accumulation comme des points de la suite, c'est-à-dire de pouvoir considérer les points qui résultent d'une infinité d'itérations du processus de détermination du quatrième harmonique de la même manière que ceux construits avec un nombre fini d'itérations ; il faut donc, selon Klein, admettre un nouvel axiome :

Axiome 7.1 (axiome de continuité de Klein) *Il doit être permis de considérer le point-frontière comme complètement existant, même s'il est défini [...] par un processus infini.*³⁶

En effet, Klein explique que, si l'on admet cet axiome, la démonstration de von Staudt peut aussi s'appliquer à ces points et aux segments qu'ils délimitent pour prouver (par l'absurde) qu'il n'existe pas de segment dans lequel le système harmonique ne pénètre pas.

7.3.2 La discussion autour des questions de continuité

Cette analyse va susciter une intense et longue discussion autour de la question de la continuité en géométrie projective ; Klein, lui-même, publie plusieurs notes dans les *Mathematische Annalen* à ce sujet,³⁷ exposant et commentant entre autre les contributions de Lüroth, Zeuthen et Darboux³⁸ à la solution du problème de la continuité en géométrie ; enfin dans son cours de géométrie non-euclidienne durant le semestre d'hiver de l'année universitaire 1889-1890³⁹, il précise minutieusement l'état de ses réflexions sur cette question.

Le lemme de Lüroth et Zeuthen

Le supplément de Klein à son deuxième article sur les géométries non-euclidiennes⁴⁰ est entièrement consacré aux questions de continuité ; Klein différencie deux types de problèmes liés à la continuité dans la démonstration du théorème fondamental de la géométrie de von Staudt : ceux, déjà identifiés dans

³⁶„daß es gestattet sein soll, den Grenzpunkt, auch wenn er [...] durch einen unendlichen Prozeß definiert ist, als fertig vorhanden aufzufassen.“ [Klein, 1873, 338]

Klein ne considère pas comme von Staudt la relation projective donnée dans son ensemble. Pour Klein, les points qui n'appartiennent pas au système harmonique sont à construire. Comme on le verra dans la suite, cette conception l'amènera à ajouter comme axiome la continuité des relations projectives.

³⁷[Klein, 1874, 1880].

³⁸[Darboux, 1880].

La démonstration de Darboux est complétée par Schur [1881].

³⁹[Klein, 1892].

⁴⁰[Klein, 1874].

l'article général ⁴¹ qui concernent «la continuité des formes de la géométrie projective» et ceux qui se rapportent à «la continuité des applications projectives». Klein approfondit d'abord son analyse précédente en l'approfondissant en distinguant deux niveaux dans l'axiome qu'il proposait : d'une part, les éléments-limites qui bornent les segments (maximaux) dans lesquels une suite d'éléments d'une forme serait susceptible de ne pas pénétrer doivent être des éléments bien déterminés de la forme et d'autre part, dans le cas d'un système harmonique, ces éléments-limites doivent avoir les mêmes propriétés que les autres éléments du système. L'axiome de l'article précédent est donc divisé en deux demandes : d'abord, un premier axiome relatif à la structure des formes fondamentales :

Axiome 7.2 (deuxième axiome de continuité de Klein) *Soit une suite infinie d'éléments d'une forme de première espèce, si celle-ci ne pénètre pas dans un segment de la forme, il doit être permis de parler d'un élément frontière vers lequel tend la série comme d'un élément parfaitement défini.*⁴²

Le premier axiome est ensuite complété par une seconde demande concernant le statut de tels éléments dans le cas d'un système harmonique :

S'il se présente dans la suite des éléments harmoniques de tels éléments-frontière, alors ils doivent être ajoutés à la suite.⁴³

Come on l'a vu précédemment, l'admission de ces deux axiomes permet de réparer la «lacune de von Staudt» mais Klein signale qu'il a reçu des contributions de Lüroth et Zeuthen qui montrent que la seconde demande est inutile et superflue.⁴⁴

En particulier, Messieurs Lüroth et Zeuthen m'ont communiqué indépendamment l'un de l'autre une preuve au moyen de laquelle on parvient à prouver que la suite des éléments harmoniques peut pénétrer dans chaque segment d'une forme fondamentale sans introduire la seconde supposition citée plus haut.⁴⁵

La preuve du théorème fondamental de la géométrie projective ne nécessiterait donc que la continuité des formes de première espèce. Klein précise que cette hypothèse n'a rien d'extraordinaire puisqu'elle est aussi admise en géométrie élémentaire :

La continuité des formes de première espèce telle qu'elle supposée en géométrie ordinaire doit être aussi posée en géométrie projective.⁴⁶

⁴¹[Klein, 1873].

⁴²„Wenn auf einem Gebilde erster Stufe eine unendliche Reihe von Elementen gegeben ist, die in ein Segment des Gebildes nicht eindringt, so soll es gestattet sein, von einem Grenzelemente, dem die Reihe zustrebt, als einem völlig bestimmten Elemente zu sprechen.“ [Klein, 1874, 532]

⁴³„Sollten in der Reihe der harmonischen Elemente solche Grenzelemente auftreten, so dürfen sie der Reihe zugezählt werden“ [Klein, 1874, 532]

⁴⁴Klein signale aussi une correspondance à ce sujet avec Cantor dont nous n'avons pas retrouvé trace.

⁴⁵„Insbesondere haben mir die Herren Lüroth und Zeuthen unabhängig voneinander einen Beweis mitgeteilt, vermöge dessen es gelingt, auch ohne Einführung der zweiten oben genannten Voraussetzung zu beweisen, daß man mit der Reihe der harmonischen Elemente in jedes Segment des Grundgebildes eindringen kann.“ [Klein, 1874, 346]

⁴⁶„Die in der gewöhnlichen Geometrie vorausgesetzte Stetigkeit der Gebilde erster Stufe soll auch in der projectivischen Geometrie zu Grunde gelegt werden.“ [Klein, 1874, 534]

Klein ajoute que cette exigence signifie que l'analogie analytique d'une forme de première espèce, que l'on se place dans le cadre de la géométrie usuelle ou dans celui de la géométrie projective, est la suite numérique réelle.⁴⁷

En admettant un axiome de continuité des formes, Zeuthen pose le même problème que Staudt et Klein⁴⁸ :

Il s'agit de démontrer qu'il n'existe pas dans une série fondamentale complète [une forme fondamentale de première espèce illimitée] des segments ou des angles où l'on ne puisse entrer par des constructions successives du quatrième point harmonique, les trois premiers éléments étant donnés. [Klein, 1874, 348]

Pour démontrer ce lemme, Zeuthen considère un segment FG «qui ne contient aucun point d'un système harmonique, déterminé par les constructions successives du quatrième point harmonique». Si on donne à un tel segment FG «l'extension la plus grande possible», deux cas peuvent être distingués : soit les points F et G appartiennent tous les deux au système des éléments harmoniques, soit l'un des deux points F et G n'y appartient pas. Le premier cas ne pose pas de problème car le conjugué harmonique de n'importe quel point extérieur à FG appartiendra nécessairement à FG . Dans le second cas, Zeuthen montre en utilisant le fait que l'on peut approcher F et G par des points du système harmonique aussi près que l'on veut et les propriétés d'ordre de la relation d'harmonie⁴⁹ que, A étant un point du système quelconque, il existe deux points B et C de la suite des points harmoniques dont le quatrième harmonique D est nécessairement dans FG .⁵⁰ Dans tous les cas, la supposition que la suite harmonique ne pénètre pas à l'intérieur d'un segment – qu'il y ait des points que cette suite n'approche pas – est absurde.

En 1874, Klein continue cependant de penser que dans le cadre d'une présentation systématique des fondements de la géométrie projective, la demande précédente ne suffit pas et qu'il est nécessaire de postuler en outre la continuité des transformations projectives lorsqu'on les définit, à la manière de von Staudt, comme les transformations qui conservent la relation d'harmonie. Il présente cette exigence en la comparant avec le cas d'une fonction réelle définie sur les rationnels et que l'on voudrait définir sur l'ensemble des nombres réels. Cette hypothèse de continuité des transformations projectives consiste selon lui à admettre que l'on peut associer à tout élément C compris entre deux éléments A et B , dont on connaît les images A' et B' , une image C' comprise entre A' et B' . Comme il le fait remarquer, cette hypothèse de continuité est autant une hypothèse d'existence que de continuité. Il résume son axiome en insistant sur le respect de la structure d'ordre :

⁴⁷„[...] daß in der projektivischen Geometrie, wie in der gewöhnlichen, das analytische Gegenbild eines Gebildes erster Stufe die einfach unendliche Zahlenreihe ist.“[Klein, 1874, 534]

⁴⁸Klein reprend dans sa note [Klein, 1874] le texte (en français) d'une lettre de Zeuthen.

⁴⁹Zeuthen utilise le fait que, les points A, B, F, H, G, K, J étant situés dans cet ordre sur la ponctuelle, si l'on suppose les couples A, H et A, G respectivement divisés harmoniquement par les couples B, K et F, J , alors le conjugué harmonique de A par rapport à B, J appartient nécessairement au segment (fini) HG .

⁵⁰Les protagonistes du débat, Klein, Zeuthen, Lüroth, Darboux et Schur, considèrent comme acquis que deux paires de points harmoniques sont séparées ; ce qui est naturel, puisque au moins implicitement, ils présupposent que la géométrie projective qu'ils considèrent est modélisée sur le corps des réels. Plus tard, après les travaux de Fano et de Veblen sur les géométries finies, il sera fait une hypothèse supplémentaire pour exclure le cas des corps de caractéristique 2 et en particulier la configuration de Fano.

Axiome 7.3 (axiome de continuité des transformations projectives) *Quatre éléments de la première forme répartis dans un certain sens doivent correspondre à quatre éléments de l'autre forme répartis aussi dans un sens.*⁵¹

La démonstration de Darboux

Klein aborde de nouveau cette question en 1880⁵² après avoir reçu une lettre de Darboux⁵³ dans laquelle ce dernier revient sur la discussion autour de la démonstration du théorème fondamental de la géométrie projective de von Staudt. Darboux propose de montrer que, le théorème tel qu'il est énoncé par von Staudt est «parfaitement exact et qu'il peut être établi sans le secours d'aucune hypothèse complémentaire»⁵⁴ concernant la continuité des transformations projectives. Dans un premier temps, il propose une démonstration qui utilise la notion de coordonnée projective (nécessairement obtenue à partir de considérations métriques). La démonstration est devenue classique et consiste à montrer qu'étant donné deux ponctuelles réelles projectives, l'application φ qui associe, à la coordonnée x d'un point de la première forme, x' celle du point correspondant de la seconde, soit

$$x' = \varphi(x)$$

est l'application identité si l'on suppose que

$$\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1, \varphi(\infty) = \infty.$$
⁵⁵

En effet, on déduit d'abord de l'hypothèse de conservation des formes harmoniques la relation :

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \varphi(x_1 + x_2).$$

On obtient alors de manière immédiate pour x rationnel⁵⁶ :

$$\varphi(x) = x \varphi(1) = x. \tag{7.1}$$

Puis en appliquant de nouveau l'hypothèse à quatre points en proportion harmonique ayant pour coordonnées $x_1, x_2, x_3, -x_3$,⁵⁷ on obtient l'égalité :

$$\varphi(x_1) \varphi(x_2) = [\varphi(x_3)]^2,$$

d'où l'on déduit :

$$\varphi(x) = [\varphi(\sqrt{x})]^2.$$

⁵¹„Vier Elementen des einen Gebildes, die in einem Sinne liegen, sollen vier Elemente des anderen entsprechen, die ebenfalls in einem Sinne liegen.“ [Klein, 1874, 350]

Klein utilise ici le mot *sens* dans la même acception que Staudt ; l'axiome de Klein signifie que si les éléments A, B, C de la première forme ont pour correspondant dans la seconde forme les éléments A', B', C' , alors si D est dans un certain sens par rapport à A, B, C , son correspondant D' est dans le même sens par rapport à A', B', C' .

⁵²[Klein, 1880].

⁵³[Darboux, 1880].

⁵⁴[Darboux, 1880, 55].

⁵⁵Cette condition peut être toujours vérifiée moyennant la transformation d'une des séries linéaires par une homographie.

⁵⁶Darboux utilise le terme «commensurable».

⁵⁷ x_1, x_2, x_3 vérifient donc $x_1 x_2 = x_3^2$.

Cette dernière égalité permet de se convaincre que l'application φ est positive lorsque son argument l'est, d'en déduire qu'elle est croissante et de généraliser aux valeurs irrationnelles⁵⁸ de x l'égalité

$$\varphi x = x.$$

Darboux reconnaît que cette démonstration ne saurait satisfaire entièrement les exigences de Klein concernant la fondation de la géométrie projective puisque elle utilise la notion de coordonnées et présuppose une géométrie métrique. Il répond à cette éventuelle objection en faisant observer que «les raisonnements qui précèdent peuvent en quelque sorte être traduits dans la géométrie de position»⁵⁹.

Le premier point de la démonstration géométrique de Darboux est un lemme qui sert de critère pour caractériser les segments⁶⁰ qui s'intersectent ou non l'un l'autre :

Si deux segments PQ , $P'Q'$ n'empiètent pas l'un sur l'autre, il existe toujours au moins un segment les divisant harmoniquement.⁶¹ [Darboux, 1880, 58]

Darboux admet pour démontrer ce lemme une propriété de continuité de la droite projective qu'il exprime en termes relevant de la cinématique⁶² :

[...] si deux mobiles se meuvent sur une droite d'une manière continue, c'est-à-dire de manière à occuper toutes les positions, et que l'un, après être demeuré en arrière, finisse par dépasser l'autre, il y aura au moins une position dans laquelle ils coïncideront. [Darboux, 1880, 59]

Darboux justifie l'adoption de cette propriété en expliquant qu'il est indispensable de l'admettre lorsque l'on veut représenter géométriquement les propriétés de l'ensemble des réels. Darboux ne cherche pas vraiment à préciser les fondements de la géométrie projective d'un point de vue purement géométrique : pour lui, l'admission de la continuité des formes de première espèce est naturelle et indispensable ; sa première démonstration analytique utilisait les propriétés de continuité de l'ensemble des réels ; pour donner un équivalent géométrique de cette démonstration, il est donc nécessaire d'admettre que la droite géométrique possède des propriétés de continuité équivalentes à celle de l'ensemble des nombres réels si l'on veut obtenir une démonstration équivalente n'utilisant que des notions géométriques. Avec ce seul axiome (que von Staudt admettait implicitement), Darboux propose de montrer le théorème fondamental de la géométrie projective et donc de sauver dans ce cadre l'énoncé de von Staudt.

En faisant référence aux travaux de Lüroth et Zeuthen cités par Klein⁶³,

⁵⁸Darboux utilise le terme «incommensurable»

⁵⁹[Darboux, 1880, 58].

⁶⁰Dans ce qui suit, la notion de segment déterminé par deux points désigne celui qui ne contient pas le point à l'infini.

⁶¹Darboux présente son lemme comme la réciproque d'une propriété d'ordre bien connue : deux segments divisant harmoniquement un même segment sont soit compris l'un dans l'autre soit d'intersection vide.

⁶²Darboux utilise aussi dans sa démonstration un vocabulaire relevant de la cinématique : ainsi, il considère des points qui se «meuvent de P' en Q' » ou qui «parcourent» des segments ou des arcs.

⁶³[Klein, 1874].

Darboux reprend le résultat de Klein selon lequel deux séries ponctuelles d'une même droite projectivement correspondantes qui admettent trois points fixes admettent de tels points dans tout intervalle⁶⁴. Il faut donc montrer que l'on peut en déduire, sans utiliser une propriété de continuité des transformations projectives, qu'en fait tous les points sont fixes. Darboux montre que l'on obtient immédiatement une contradiction avec le lemme précédent si l'on admet que deux points homologues x et x' ne coïncident pas. En effet, dans ce cas, le segment xx' contiendrait deux points fixes A et B . Comme xA et Bx' «n'empiètent pas l'un sur l'autre», il existe d'après le lemme un segment mn qui divise harmoniquement ces deux segments. Le segment $m'n'$ constitué par les points correspondants des points m et n doit donc diviser harmoniquement les segments $x'A$ et Bx ce qui est absurde car ces segments «empiètent l'un sur l'autre, ne peuvent admettre aucun segment qui les divise tous les deux harmoniquement»⁶⁵. Il est surprenant que Klein ait publié la lettre de Darboux et donc validé cette démonstration qui est nettement insuffisante. En effet, Darboux admet que le point correspondant de x' est le point x ce qui revient à admettre que la transformation projective est une involution.

La première contribution de Schur à la démonstration du théorème fondamental de la géométrie projective

La discussion rebondit en 1881 dans une note rédigée par Klein et publiée dans un article de Friedrich Schur consacré au théorème fondamental de la géométrie projective⁶⁶. Avant de montrer comment réparer la preuve de Darboux, Klein précise que l'erreur de Darboux lui a été signalé par Bobek⁶⁷ et par Küpper. La preuve de Klein consiste à considérer trois points fixes a, b, c et deux points homologues x, x' qui ne coïncident pas situés de telle manière que le segment xx' soit compris à l'extérieur du segment ab et que x' soit situé à l'intérieur du segment bc . Klein considère le conjugué harmonique y de x par rapport à ab ; le point y' correspondant de y est donc le conjugué harmonique de x' par rapport à ab . Comme x et x' sont à l'extérieur de ab , le segment yy' est situé à l'intérieur du segment ab . Comme les segments xy et bc ne s'intersectent pas, il existe des paires de points qui les divisent harmoniquement; si mn est l'une d'entre elles, la paire de points de points correspondants $m'n'$ divise harmoniquement $x'y'$ et bc ce qui est impossible puisque ces deux segments s'intersectent.

L'article de Schur⁶⁸ analysait un autre aspect de la démonstration du théorème fondamental obtenue par Klein, Lüroth, Zeuthen et Darboux : dans la démonstration du lemme de Lüroth-Zeuthen, le fait de considérer des bornes qui sont «le résultat d'un processus-limite»⁶⁹ introduirait dans le cadre de la géométrie

⁶⁴Darboux précise qu'il s'agit des points qui admettent des coordonnées rationnelles dans la démonstration analytique précédente

⁶⁵[Darboux, 1880, 59]

Darboux signale que sa démonstration se généralise aux applications de Möbius qui conservent les cercles.

⁶⁶[Schur, 1881].

⁶⁷Karl Bobek a publié en 1889 les leçons de C. Küpper [Bobek, 1889], qui était professeur de mathématiques à la *technischen Hochschule* de Prague.

⁶⁸F. Schur précise que ses conversations avec Klein ont été déterminantes pour la rédaction de son article.

⁶⁹„das Resultat eines Grenzprocesses“ [Schur, 1881, 253].

pure de l'irrationnel⁷⁰ ce qui est selon Schur critiquable :

Mais on fera bien de tenir celui-ci [l'irrationnel] éloigné de la géométrie pure aussi longtemps que possible⁷¹

Schur annonce pouvoir montrer le théorème fondamental de la géométrie projective en utilisant uniquement des moyens qu'il qualifie de *rationnels*. Pour cela, il propose d'adapter une démonstration de Johannes Thomae; en effet, dans sa *Geometrie der Lage*⁷², Thomae démontrait le théorème fondamental de la géométrie projective en définissant les correspondances projectives comme composition de perspectives.⁷³ Pour cela, Thomae définit la notion d'*intérieur* et d'*extérieur* d'un segment à partir d'une notion de sens de parcours de la forme.⁷⁴ La première partie de la démonstration consiste à établir que si deux formes de première espèce possèdent deux éléments correspondants communs α et β , alors les éléments correspondant des éléments intérieurs au segment $\alpha\beta$ sont soit tous intérieurs, soit tous extérieurs à $\alpha\beta$. Thomae en conclut que deux formes de première espèce qui possèdent trois éléments correspondants communs ont nécessairement des sens concordants, ce qui signifie qu'un élément mobile et l'élément qui lui correspond parcourent la forme dans un même sens. La seconde partie est consacrée à construire un segment borné par des points correspondants communs et n'en contenant aucun. Thomae considère trois éléments $\alpha\beta\gamma$ correspondants communs et une paire d'éléments correspondants $\xi\eta$ qui ne coïncident pas. Il déduit du lemme précédent que les trois éléments $\alpha\beta\gamma$ sont tous intérieurs ou tous extérieurs au segment définis par paire $\xi\eta$. En supposant que les cinq points sont situés dans l'ordre $\alpha\beta\xi\eta\gamma$ et que ξ et η se déplacent vers β , il note μ le premier point correspondant commun que ξ et η rencontre lors de ce mouvement.⁷⁵ Thomae considère ensuite que ξ et η se déplacent vers γ et note ν le premier point correspondant commun rencontré. Le segment $\mu\nu$ ne contient aucun point correspondant commun et α est un point correspondant commun extérieur à ce segment. Puisque une composition de perspectives conserve les formes harmoniques, le conjugué harmonique de α par rapport à μ et ν est nécessairement un point correspondant, intérieur au segment $\mu\nu$ contrairement à la définition de ce segment.

En utilisant une conséquence du lemme de Darboux,⁷⁶ Schur montre que la dé-

⁷⁰En utilisant ce vocabulaire, Schur fait allusion à la discussion de Klein [1880] qui distinguait dans une forme de première espèce les éléments *rationnels* qui sont le résultat d'un nombre fini d'itérations du processus de recherche du quatrième harmonique et ceux *irrationnels* qui en tant que résultat d'un nombre infini de telles itérations peuvent aussi être vus comme des limites de suites infinies d'éléments rationnels.

⁷¹„man wird aber gut thun, dasselbe möglichst lange von der reinen Geometrie fern zu halten.“ [Schur, 1881, 253]

⁷²[Thomae, 1873].

⁷³Thomae considérait une telle définition comme plus conforme à l'esprit de la méthode synthétique.

⁷⁴Ayant défini un sens de parcours, l'intérieur du segment $\alpha\beta$ est constitué par les points rencontrés par un point mobile entre, α et β et l'extérieur par ceux qui ne le sont pas (ou par ceux qui sont rencontrés lorsque l'on choisit l'autre sens). L'argument utilisé par Thomae pour justifier la notion de sens de parcours est un peu étrange. Il considère qu'en fixant un élément dans une forme de première espèce, la notion de déplacement de la gauche vers la droite est définie.

⁷⁵ μ peut être confondu avec β ; l'important pour l'argument de Thomae est que ce μ soit le premier élément correspondant commun rencontré.

⁷⁶Klein fait remarquer dans son article Klein [1880] présentant la lettre de Darboux que le critère énoncé par Darboux pour reconnaître si deux segments s'intersectent ou non entraîne une propriété de conservation des «suites» („Folge“) par les projections. En effet, si P, Q, P', Q'

monstration de Thomae peut s'adapter au théorème de Staudt, c'est-à-dire que l'on peut utiliser la même démonstration que Thomae lorsque les projectivités sont définies par la propriété de conservation des formes harmoniques. Schur explique qu'il préfère cette démonstration à celle obtenue précédemment en utilisant le lemme de Lüroth-Zeuthen car il n'est besoin que de montrer l'existence des points μ et ν comme des points en lesquels des points continuent mobiles dans la même direction coïncident⁷⁷ ; or, comme il n'est pas nécessaire pour cela de construire par un processus infini ces points, on n'utilise pas le postulat de continuité des formes fondamentales.⁷⁸

7.3.3 La *Geometrie der Lage* de Th. Reye

En 1866, Theodor Reye publie un traité de *Géométrie de position*⁷⁹ qu'il présente comme une introduction théorique à la *Statique graphique* de Culmann. Il déclare reprendre non seulement la terminologie de von Staudt mais aussi sa présentation :

La manière de Monsieur von Staudt de fonder cette science contrairement à tous les autres auteurs de géométrie nouvelle me paraît présenter tant d'avantages significatifs que je la préférerais à toute autre sans raison supplémentaire.⁸⁰

Outre les avantages pour les ingénieurs et les architectes, Reye souligne l'intérêt pédagogique de la présentation de la géométrie par von Staudt puisqu'il «parvient par intuition directe à la connaissance des vérités géométriques sur lesquelles il fonde la géométrie de position»⁸¹. Reye souligne aussi la difficulté que présente l'étude des traités de von Staudt tant par la complexité du domaine que par l'aridité du style de von Staudt. L'ambition essentielle de Reye

constitue une suite (c'est-à-dire si les points P, Q séparent les points P', Q' ou si les segments PQ et $P'Q'$ s'intersectent), l'existence d'une paire de points p, q divisant harmoniquement à la fois P, Q et P', Q' entraîne que les points correspondants à P, Q, P, Q' par une transformation projective constitue une suite.

⁷⁷Enriques dans son exposé sur les *Principes de la géométrie* pour l'Encyclopédie des sciences mathématiques [Enriques, 1907] évoque le travail de Schur en affirmant qu'il postule «que si deux points se meuvent sur la droite en sens contraires l'un de l'autre, ils se rencontrent nécessairement en un point déterminé de la droite» [Enriques, 1907, 91]. Dans la démonstration de Thomae les deux points dont on veut s'assurer qu'ils coïncideront se déplacent dans le même sens. Darboux, par contre, utilise la propriété de continuité évoquée par Enriques. Le point important – et c'est en cela que Schur a raison lorsqu'il affirme que la démonstration de Thomae n'utilise pas la continuité des formes uniformes pour définir les points μ et ν – est que Thomae utilise simplement comme argument que deux points mobiles dont on sait qu'ils coïncident en un point peuvent avoir coïncidé auparavant.

⁷⁸On n'utilise seulement une notion d'ordre qui permet de définir le sens de parcours des formes. Comme lors des deux déplacements, les deux points coïncideront par définition en β pour l'un, en γ pour l'autre, la définition de μ et ν comme premier point en lesquels les deux points mobiles coïncident n'utilisent pas d'hypothèse de continuité de la forme. Pour être complètement convaincant, Schur aurait dû aussi proposer une nouvelle démonstration du lemme de Darboux car celle de ce dernier utilise la continuité des formes.

⁷⁹[Reye, 1866].

⁸⁰„Und die Art, wie Herr von Staudt, im Gegensatz zu allen übrigen Autoren der neueren Geometrie, diese Wissenschaft begründet, scheint mir so bedeutende Vortheile zu gewähren, dass ich auch ohne anderweitige Veranlassung sie jeder andern vorziehen würde.“ [Reye, 1866, VI]

⁸¹„Dafür aber gelangt Herr von Staudt durch directe Anschauung zur Erkenntniss der geometrischen Wahrheiten, auf welche die Geometrie der Lage gründet.“ [Reye, 1866, VII]

est de faciliter l'approche du point de vue de Staudt en géométrie. En 1866, pour montrer le théorème fondamental de la géométrie projective, Reye suit la démonstration originale de von Staudt. Dès la seconde édition en 1877, il intègre à la définition de correspondance l'hypothèse de continuité que von Staudt utilisait implicitement :

On dit que deux formes sont *rapportées* l'une à l'autre quand à chaque élément de l'une correspond un élément de l'autre et quand à une série d'éléments se suivant d'une manière continue dans l'une correspond une série d'éléments se suivant d'une manière continue dans l'autre.⁸²

Cette hypothèse appliquée aux correspondances projectives permet d'affirmer que l'image d'une suite continue d'éléments d'une forme uniforme par une correspondance projective est aussi une suite continue :

Étant données deux ponctuelles projectives u et u_1 , si l'une d'elles u est décrite d'un mouvement continu par un point P , le point correspondant P_1 de u_1 décrit en même temps cette autre ponctuelle, si P et P_1 restent constamment homologues l'un de l'autre.⁸³

De plus, Reye corrige la démonstration du théorème fondamental en s'inspirant de celle de Thomae :

Eu égard aux objections légitimes élevées par M. F. Klein contre elle, la démonstration de von Staudt du théorème fondamental de la géométrie de position sera remplacée par une démonstration provenant de M. Thomae.⁸⁴

La démonstration proposée par Reye repose sur la même idée que celle de Thomae : soit A, B, C trois points fixes d'une correspondance projective entre deux ponctuelles u et u_1 , si P , un point appartenant au segment AB (qui ne contient pas le point C) ne correspond pas avec son correspondant P_1 , en faisant décrire à P la ponctuelle u vers A , puis vers B , on définit un segment $A'B'$ (éventuellement confondu avec AB) qui ne contient aucun point correspondant commun et dont les bornes sont des points correspondants communs, d'où une contradiction immédiate. La démonstration proposée par Reye conserve l'esprit de celle de von Staudt qui considérait les correspondances projectives comme données et ne cherchait pas à les construire (en formant un système harmonique). De plus, il se contente de reprendre le cadre réel implicitement admis par Staudt et n'intègre la discussion initiée par Klein qu'en posant explicitement en termes cinématiques la continuité des formes uniformes et celle des correspondances projectives. A cet égard, il est encore fidèle à l'esprit de von Staudt dont beaucoup de raisonnements s'appuyaient sur le mouvement supposé continu d'éléments d'une forme.⁸⁵

⁸²„Zwei Gebilde heissen nämlich auf einander *bezogen*, wenn jedem Element des einen ein Element des anderen zugewiesen ist, und zwar so, dass jeder stetigen Aufeinanderfolge von Elementen des einen eine stetige Aufeinanderfolge von Elementen des anderen entspricht. [Reye, a, 17]

⁸³„Wird von zwei projectivischen Punktreihen u, u_1 die eine u durch stetige Bewegung eines Punktes P beschrieben, so durchläuft zugleich der entsprechende Punkt P_1 von u_1 diese andere Punktreihe, wenn P und P_1 beständig homologe Punkte bleibe.“ [Reye, a, 44]

⁸⁴„Der von Staudt'sche Beweis des Fundamentalsatzes der Geometrie der Lage wurde mit Rücksicht auf die berechtigten Einwendungen, welche Herr F. Klein gegen ihn erhoben hat, durch einen von Herrn Thomae herrührenden Beweis ersetzt. [Reye, a, XIII]

⁸⁵On peut aussi noter que Reye s'appuie sur la démonstration de Thomae au moins quatre ans avant l'article de Schur.

Dans la troisième édition de 1886, Reye annonce avoir obtenu un traitement achevé de cette question :

J'ai remplacé la démonstration de von Staudt du théorème fondamental de la géométrie de position en utilisant les remarques à ce sujet de MM. F. Klein et Darboux par une preuve irréprochable. Étant donné deux formes fondamentales projectives, il était explicitement admis dans la définition de la «correspondance» de la seconde édition qu'il correspondait à une suite continue d'éléments de la première forme une suite continue d'éléments de la seconde; désormais cela est prouvé sur la base de la définition de von Staudt de la projectivité.⁸⁶

La stratégie démonstrative adoptée en 1886 par Reye est la même que celle proposée par Schur : adapter la démonstration de Thomae en montrant le lemme de Darboux. En effet, il déduit la propriété de conservation par les correspondances projectives des suites continues de points d'une propriété de conservation de l'ordre par ces mêmes correspondances :

Étant donné deux ponctuelles projectives, il correspond toujours à quatre points quelconques A, B, C, D de la première tels que les deux premiers ne sont pas séparés par les deux derniers, quatre points A_1, B_1, C_1, D_1 qui vérifient la même propriété.⁸⁷

Cette dernière proposition découle d'une proposition analogue au lemme de Darboux selon laquelle deux paires qui divisent harmoniquement une même troisième paire de points ne se séparent jamais et que réciproquement deux paires B, D et B', D' qui ne se séparent pas sont harmoniquement séparées par une même troisième A, C .⁸⁸ Pour montrer ce lemme, Reye considère un point P qui parcourt le segment $B'D'$ (qui ne contient pas B et D) et pose (sans aucune justification) que P_1 et P_2 les conjugués harmoniques de P par rapport à B' et D' et par rapport à B et D parcourt, le premier, le complémentaire de $B'D'$ et le second, un segment B_2D_2 contenu dans le complémentaire de $B'D'$. P_1 et P_2 doivent au moins une fois coïncider puisque le lieu de P_2 est contenu dans celui de P_1 . On obtient une solution du problème en désignant par A , un de ces points de coïncidence et par C , le lieu correspondant de P .

Dans son cours de géométrie projective de 1891,⁸⁹ Hilbert utilise la même présentation et reprend la plupart des arguments avancés par Reye dans la troisième édition de son traité. En particulier, il revient sur la démonstration du lemme de Darboux. Comme la notion d'harmonicité est définie à partir de la construction du quadrilatère complet, Hilbert conclut que «l'intuition montre

⁸⁶„Den von Staudt'schen Beweis des Fundamentalsatzes der Geometrie der Lage habe ich unter Benutzung der darauf bezüglichen Bemerkungen der Herren F. Klein und Darboux durch einen einwandfreien ersetzt. Dass in zwei projectiven Grundgebilden einer stetigen Aufeinanderfolge von Elementen des einen wieder eine stetige Folge von Elementen des andern Gebildes entspricht, wurde in der zweiten Auflage bei der Definition des „Beziehens“ ausdrücklich angenommen, wird aber nunmehr bewiesen auf Grund der von Staudt'schen Definition der Projectivität. [Reye, b, XII]

⁸⁷„In zwei projectiven Punktreihen entsprechen vier beliebigen Punkten A, B, C, D der einen, von welchen die beiden ersten durch die zwei letzten nicht getrennt sind, allemal vier Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 , von welchen das Gleiche gilt. [Reye, b, 52]

⁸⁸Reye exprime la première partie de cette proposition sous forme d'un théorème qui approfondit la notion d'harmonicité; par contre, la réciproque est énoncée et montrée comme une simple remarque suivant le théorème.

⁸⁹[Hallett and Majer, 2004, 15-64].

que les deux paires de points associées d'une suite ponctuelle harmonique *se séparent toujours*⁹⁰. Hilbert poursuit son étude des paires de points harmoniques en expliquant intuitivement (à partir de la considération de la figure du quadrilatère complet) qu'une paire de points A, C fixée, les points B, D qui divisent harmoniquement AC parcourt dans des sens opposés les deux segments (fini et infini) définis par A et C .⁹¹ Hilbert en déduit que deux paires de points BD et $B'D'$ qui divisent harmoniquement une même paire de points AC ne se séparent jamais. Pour montrer la réciproque, il reprend la même démonstration que Reye : supposant le segment fini $B'D'$ contenu dans le segment $B'D'$ (de manière que que B, D et B', D' ne se séparent ou que les segments finis BB' et DD' ne s'intersectent pas), Hilbert considère un point C qui parcourt le segment $B'D'$ (de B' à D') et A et A' les conjugués harmoniques de C respectivement par rapport à BD et à $B'D'$. Comme A et A' se déplacent dans le même sens et que le segment parcouru par A' est contenu dans celui parcouru par A , A et A' coïncident au moins une fois. Comme Reye, Hilbert déduit de ce premier lemme que lorsque deux formes fondamentales sont projectives (que Hilbert définit comme Staudt ou Reye comme conservant l'harmonicité), il correspond à une suite d'éléments de l'une des formes une suite d'éléments. Hilbert insiste pour expliquer que cette proposition concerne l'ordre des éléments entre éléments correspondants de deux formes projectives :

Signification de cette proposition Si, par exemple, les éléments A, B, C, D, E, F, \dots se suivent dans une suite, c.-à-d. tels que je peux aller de A à B , de B à C , de C à D , etc., *sans passer par aucun point de la suite*, alors les points correspondants $A', B', C', D', E', F', \dots$ vérifient la même propriété; ou si *un point* parcourt la première suite suivant une *direction déterminée*, alors le point correspondant parcourt la 2^e suite *de la même manière que sa direction ne change jamais*.⁹²

Hilbert montre par l'absurde cette proposition en considérant deux points E', F' de la suite de points correspondants qui ne peuvent être joints sans passer par un autre point de la suite; on désigne par P' un des points de la suite du segment fini $E'F'$ par lequel doit passer le point mobile pour aller de E' à F' et par Q' un point du segment (infini) $E'F'$ ayant la même propriété. Si on désigne par E, F, P, Q les points correspondants de E', F', P', Q' , on obtient d'une part deux paires de points E, F et P, Q de la première suite qui ne se séparent pas et deux paires de points E', F' et P', Q' de la seconde suite qui se séparent. Il existe donc une paire de points H et K qui divise harmoniquement E, F et P, Q . La paire correspondante H' et K' divise harmoniquement E', F' et P', Q' ce qui est impossible puisque E', F' et P', Q' se séparent.⁹³ Hilbert termine

⁹⁰„Die Anschauung zeigt, dass die beiden zugeordneten Paare einer harmonischen Punktreihe *sich immer trennen*. [Hallett and Majer, 2004, 35]

⁹¹Hilbert ne donne pas beaucoup plus d'arguments que Reye pour justifier cette proposition. Par contre, il insiste plus que ces prédécesseurs pour expliquer à partir de la figure du quadrilatère complet comment le point D parcourt le segment infini AC pendant que le point B parcourt le segment fini AC .

⁹²„*Sinn des Satzes* : Wenn z.B. auf einer Punktreihe die Elemente A, B, C, D, E, F, \dots aufeinanderfolgen, d.h. so, dass ich von A zu B , B zu C , C zu D , u.s.f. gelangen kann, *ohne einen Punkt der Reihe zu überschreiten*, so haben die entsprechenden Punkte $A', B', C', D', E', F', \dots$ dieselbe Eigenschaft : oder wenn *ein Punkt* die eine Punktreihe in einer *bestimmten Richtung* durchläuft, so durchläuft der entsprechende Punkt die 2^{te} Punktreihe *ebenfalls so, dass er seine Richtung niemals ändert*. [Hallett and Majer, 2004, 39]

⁹³Je ne suis pas d'accord avec le commentateur du texte de Hilbert qui affirme qu'une hypothèse de continuité est nécessaire pour cette propriété [Hallett and Majer, 2004, 41].

la démonstration du théorème fondamental de la géométrie projective de la même manière que Thomae et Reye. Étant donné trois points fixes A, B, C d'une correspondance projective et P un point qui ne coïncide pas avec son correspondant P' . Le lemme précédent montre que P et P' appartiennent à un même segment défini par A et B .⁹⁴ Puis Hilbert définit en déplaçant vers B puis vers A le point P un segment borné par des points qui coïncident avec leur correspondant et ne contenant aucun autre point qui coïncide avec son correspondant. L'existence d'un tel segment est contradictoire.

7.4 Montrer le théorème fondamental sans hypothèse de continuité

Outre permettre d'approfondir l'analyse des axiomes utilisés en géométrie, la discussion de la démonstration du théorème fondamental de la géométrie projective a un effet structurant en ce sens qu'elle entraîne des interrogations sur les rôles respectifs des théorèmes de la théorie. Ainsi, Wiener annonce sans donner de démonstration qu'il obtient le théorème fondamental de la géométrie projective en supposant les théorèmes de Desargues et Pappus⁹⁵.

Les réflexions de Wiener sur les fondements et l'organisation de la géométrie

Wiener cite l'exemple de la géométrie projective plane pour illustrer *a contrario* ce qu'il entend par *domaine fondé de manière autonome des sciences*⁹⁶. Un tel domaine est défini par la donnée d'un certain nombre d'objets et d'opérations à partir desquels la théorie peut se développer sans apport extérieur. La géométrie projective plane est à ses yeux la théorie de l'incidence des points et des droites.⁹⁷ Mais aux yeux de Wiener, les théorèmes de la géométrie projective plane les plus importants sont ce qu'il appelle des théorèmes de clôture⁹⁸,

Cette proposition ne dépend que de la définition d'un ordre et donc d'un sens de parcours sur les formes. La démonstration de ce théorème (et du lemme précédent) reste valable dans un espace projectif rationnel.

⁹⁴Une conséquence immédiate du lemme précédent est la conservation de la propriété de séparation : Si A, B séparent les points C, D (si A, D, B, C constituent une suite) alors les points correspondants A', B' séparent C', D' .

⁹⁵Wiener parle du théorème de Pascal associé à deux droites. Le théorème de Pascal exprimé dans le cas particulier où la conique est dégénérée en deux droites est ordinairement appelé le théorème de Pappus.

⁹⁶„ein in sich begründetes Gebiet der Wissenschaft“.

⁹⁷Wiener propose même d'exprimer cette théorie de manière abstraite en se débarrassant de toute intuition géométrique. Plus littéralement, il suggère de «se débarrasser des oripeaux géométriques» („vom geometrischen Gewande losgelöst“) :

soit des éléments de deux espèces et deux opérations dont on suppose que l'association de deux éléments de même espèce donne un élément de l'autre espèce.
„es seien Elemente von zweierlei Art vorausgesetzt, und zweierlei Operationen, indem man annimmt, dass die Verknüpfung je zweier Elemente derselben Art ein Element der anderen Art ergebe. [Wiener, 1892, 46]

⁹⁸„Schliessungssätze“.

c'est-à-dire des théorèmes «dans lesquels chaque droite [...] porte au moins trois points et chaque point est situé sur au moins trois droites»⁹⁹. Les deux premiers exemples sont les théorèmes de Desargues et de Pappus dont Wiener affirme qu'ils ne sont pas démontrables avec les seuls axiomes projectifs.¹⁰⁰ La géométrie projective plane n'est donc pas un domaine fondé de manière autonome ce qui n'empêche pas que leur admission permettra de dériver une partie délimitée de la géométrie plane. L'admission du théorème de Desargues¹⁰³ conduit à une partie de la géométrie qui comprend les théorèmes de l'addition des segments ou des points¹⁰⁴ Wiener rappelle que les tentatives de montrer le théorème de Pappus à partir de celui de Desargues n'ont pas été fructueuses¹⁰⁵ et que l'on peut le montrer soit par projection¹⁰⁶ ou en introduisant la notion de continuité¹⁰⁷. Wiener annonce alors que «ces deux théorèmes de clôture suffisent à prouver le théorème fondamental de la géométrie projective sans considérations supplémentaires de continuité, ni processus infini»¹⁰⁸. Wiener termine sa note en définissant un programme de recherche dans lequel il distingue un certain nombre de directions plus ou moins autonomes comme l'étude de la géométrie spatiale, celle de la droite, les questions d'ordre cyclique, de continuité analytique et géométrique. On peut penser que la note de Wiener fut une source d'inspiration pour Hilbert qui organise ses *Grundlagen der Geometrie* autour de l'analyse des théorèmes de Desargues et Pappus.

⁹⁹„[...] solche Sätze [...] in denen jede [...] Gerade wenigstens drei [...] Punkte trägt, und jeder Punkt auf wenigstens drei Geraden liegt“ [Wiener, 1892, 46]

¹⁰⁰Une géométrie projective (qui vérifie les axiomes projectifs d'incidence) dans laquelle le théorème de Desargues est vérifié est dite arguésienne. Le théorème de Desargues est démontrable à partir des seuls axiomes d'incidence en dimension supérieure ou égale à trois. Par contre, en géométrie plane, la démonstration du théorème de Desargues nécessite l'utilisation d'autres axiomes comme la congruence ([Hilbert, 1899, 486]. La preuve de la non-démonstrabilité du théorème de Desargues en géométrie plane avec seulement des hypothèses d'incidence est en général attribuée à Hilbert [1899] ou à Moulton [1902]. Comme Wiener semble considérer la non-démonstrabilité du théorème de Desargues dans le cadre de la géométrie d'incidence comme une évidence, on peut raisonnablement penser que cette propriété était connue et admise dans les années 1890 sans en avoir une preuve effective. Le théorème de Desargues est équivalent au fait que l'addition et la multiplication du calcul des jets (de Staudt et Lüroth) ou du calcul des points (de Hessenberg) vérifient les axiomes de définition d'un corps.

Le théorème de Pappus n'est pas démontrable avec les seuls axiomes d'incidence en toute dimension. En dimension supérieure ou égale à trois, ce théorème est démontrable, comme Schur¹⁰¹ le proposera en 1899, en admettant un axiome d'incidence supplémentaire, inspiré des recherches de Dandelin¹⁰² sur les hyperboloïdes. De nouveau, Wiener semble considérer la non-démonstrabilité du théorème de Pappus dans le cadre de la géométrie d'incidence comme faisant partie du folklore.

¹⁰³Wiener rappelle que ce théorème est démontrable en géométrie spatiale.

¹⁰⁴Les indications de Wiener sont surprenantes. Le calcul des segments de Hilbert date de 1899 et celui des points est développé par Hessenberg en 1902.

¹⁰⁵Je n'ai rien trouvé dans la littérature concernant ces tentatives. En fait, Hessenberg [1905b] montrera que le contraire est vrai.

¹⁰⁶Wiener fait sûrement allusion aux travaux de Dandelin [1824-1825].

¹⁰⁷Wiener fait ici allusion à la *Geometrie der Lage* de von Staudt qui dérive le théorème de Pappus de sa théorie des correspondances projectives et donc du théorème fondamental de la géométrie projective.

¹⁰⁸„Diese beiden Schliessungssätze aber genügen, um ohne weitere Stetigkeitsbetrachtungen oder unendliche Prozesse den Grundsatz der projectiven Geometrie zu beweisen [...]. [Wiener, 1892, 47]

La seconde contribution de F. Schur à la démonstration du théorème fondamental de la géométrie projective

La même année que celle de la publication du traité de Hilbert, F. Schur publie dans les *Mathematischen Annalen* une seconde note intitulée *Ueber den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie*¹⁰⁹ dans laquelle il montre le théorème de Pappus (en dimension supérieure ou égale à trois) à partir de l'axiome de Dandelin et donne une preuve du théorème fondamental à partir des théorèmes de Desargues et Pappus. Il déplore que malgré les nombreuses publications concernant le théorème fondamental, sa justification ne soit pas encore complètement éclaircie. À ses yeux, il faut en chercher les raisons dans les liens qu'entretient le théorème avec la notion de mesure. Schur motive son point de vue en signalant que les démonstrations antérieures font toutes appel plus ou moins à la notion de mesure ou alors font appel à des considérations qui ne peuvent fournir une compréhension définitive du théorème et en fait évite les difficultés¹¹⁰. Ainsi, la démonstration de Thomae¹¹¹ repose sur la notion de mouvement, celle plus récente de Zeuthen¹¹² font appel à des postulats «dont une reconnaissance immédiate échappe complètement à l'intuition ou à l'expérience»¹¹³; ceux qui, croyant éviter la notion de congruence, tentent de définir certains points par des processus-limites introduisent en fait des considérations de mesure pour justifier la transition entre la géométrie élémentaires et la géométrie infinitésimale. Enfin, Schur n'est guère plus satisfait par la *Neuere Geometrie* de Pasch¹¹⁴; en effet, celui-ci introduit en plus des axiomes de congruence l'axiome d'Archimède. Or, Schur se range à l'avis de Klein qui considérait dans ce cas l'introduction de la notion de congruence comme inutile¹¹⁵.

La stratégie de preuve du théorème fondamental proposée par Schur consiste d'abord à montrer le théorème de Pappus à partir des axiomes de congruence et sans utiliser l'axiome d'Archimède, puis à démontrer l'affirmation de Wiener. L'idée de la démonstration du théorème de Pappus est inspirée par les travaux de Dandelin qui en particulier concevait deux droites sécantes comme appartenant chacune aux deux systèmes engendrant un hyperboloïde à une nappe. Schur commence par définir la notion de symétrie orthogonale par rapport à un plan σ qu'il dénomme *réflexion*¹¹⁶. Il obtient immédiatement à partir des axiomes de Pasch les propriétés des symétries orthogonales (exprimées en lan-

¹⁰⁹[Schur, 1899]. La note de Schur est datée de mars 1898.

¹¹⁰Schur affirme que les démonstrations qui semblent éviter la question de la mesure «peuvent ne pas être sans intérêt pédagogique mais la science ne peut les prendre en considération tant que les postulats en question ne seront pas eux-mêmes démontrés». („Solche Beweise mögen pädagogisch nicht ohne Bedeutung sein, für die Wissenschaft kommen sie nicht in Betracht, so lange das betreffende Postulat nicht selbst *bewiesen* ist.“ [Schur, 1899, 401])

¹¹¹[Thomae, 1873].

¹¹²[Zeuthen, 1897a,b, 1898].

¹¹³„[...] von einem Postulate, das sich einer unmittelbaren Erkenntniss durch die Anschauung oder Erfahrung vollkommen entzieht.“ [Schur, 1899, 401]

Zeuthen [1898] justifiait l'intérêt de son postulat en affirmant qu'il l'empruntait à l'intuition et que s'il avait des rapports avec la continuité géométrique, son postulat ne servait pas comme chez Staudt à introduire les mesures projectives mais au contraire conservait un caractère plus graphique.

¹¹⁴[Pasch, 1882b].

Pour une analyse des travaux de Pasch, voir le chapitre suivant.

¹¹⁵[Klein, 1897].

¹¹⁶„Spiegelung“.

gage contemporain) :

1. Les réflexions sont des involutions.
2. L'image par une réflexion d'un segment est un segment congruent.
3. Une droite g et son image g' par une réflexion se coupe sur le plan de réflexion.
4. La composition de trois réflexions par rapport à des plans appartenant à un même faisceau est une réflexion par rapport à un plan du faisceau.¹¹⁷
5. Deux droites g et g' sécante (en un point propre) peuvent être échangées par une réflexion Σ .

Il s'ensuit la propriété de base des travaux de Dandelin :

Deux systèmes de droites g'_1, g'_2, \dots et g_1, g_2, \dots peuvent être déployés par les points de deux droites g et g' ayant en commun un point propre S de telle manière que deux droites appartenant à des systèmes différents appartiennent toujours à un même plan, au contraire de deux droites appartenant au même système.¹¹⁸

Le théorème de Pappus est une conséquence immédiate de la propriété de Dandelin ; étant donné deux droites g et g' , trois points E_1, E_3, E_5 de g et E'_2, E'_4, E'_6 trois points de g' , on note

$$D_1 = (E_1E'_2, E'_4E_5), \quad D_2 = (E'_2E_3, E_5E'_6), \quad D_3 = (E_3E'_4, E'_6E_1).$$

En désignant par a une droite du plan de symétrie de g et g' , par g'_1, g'_2, g'_3 les images de g par les réflexions par rapport aux plans aE_1, aE_3, aE_5 et par g_2, g_4, g_6 les images de g' par les réflexions par rapport aux plans aE'_2, aE'_4, aE'_6 , on obtient que D_1 appartient à la ligne d'intersection des plans $[g'_1, g_2]$ et $[g_4, g'_3]$, D_2 appartient à la ligne d'intersection des plans $[g'_3, g_2]$ et $[g_6, g'_5]$ et D_3 appartient à la ligne d'intersection des plans $[g'_3, g_4]$ et $[g_6, g'_1]$, soit en désignant par F_1, F_2 et F_3 les points d'intersection respectifs de g'_3 et g_6 , de g'_1 et g_4 et g_2 et g'_3 , D_1 appartient à la droite F_2F_3 , D_2 à la droite F_3F_1 et D_3 à F_1F_2 . Comme d'après la propriété de Dandelin, F_1, F_2, F_3 n'appartiennent pas au plan $[g, g']$, D_1, D_2, D_3 appartiennent à la droite d'intersection des plans $[g, g']$ et $F_1F_2F_3$. Schur définit une projectivité comme une composition de perspectivités ; plus précisément, une composition de n perspectivités est une projectivité de n^e degré. Schur déduit du théorème de Desargues qu'une projectivité de 2^e degré entre deux droites peut être réduite à une projectivité du 1^{er} degré (c'est-à-dire à une perspectivité) si les trois droites de projection sont concourantes, puis qu'une projectivité est soit une projectivité du 2^e degré, soit une perspectivité. Schur déduit alors du théorème de Pappus un critère pour reconnaître les perspectivités parmi les projectivités :

Une projectivité entre deux droites d'un même plan est une perspectivité, c.-à-d. les droites de liaison entre points correspondants

¹¹⁷Pour montrer cette proposition, Schur montre que la composition de deux réflexions σ_1 et σ_2 n'est jamais une réflexion à moins que $\sigma_1 = \sigma_2$.

¹¹⁸„Durch die Punkte zweier Geraden g und g' , die einen eigentlichen Punkt S gemein haben, können zwei Schaaren von Geraden g'_1, g'_2, \dots und g_1, g_2, \dots so gelegt werden, dass zwei Geraden verschiedener Schaaren stets derselben Ebene angehören, zwei Geraden derselben Schaar hingegen nicht.“[Schur, 1899, 404]

Il suffit pour cela de considérer une droite a (non-perpendiculaire au plan engendré par g et g') dans le plan de symétrie des droites g et g' . Les deux systèmes sont les images de g et g' par les réflexions dont les plans appartiennent au faisceau d'axe a .

passent par un même point, si et seulement si le point d'intersection des deux supports se correspond à lui-même.¹¹⁹

Si on suppose que la projectivité est la composition de deux perspectivités, la première de centre S_1 entre les droites g_1 et g_2 et la seconde de centre S_2 entre g_2 et g_3 , le point d'intersection A de g_1 et g_3 est son propre correspondant par la projectivité si ce point appartient soit à la droite g_2 auquel cas la projectivité peut se réduire à une perspective, soit à la droite S_1S_2 . Dans ce dernier cas, il suffit d'appliquer le théorème de Pappus aux points S_1, S_2, A de la droite S_1S_2 et aux points C_2, P_2, D_2 de la droite g_2 , où C_2 est le point d'intersection de g_2 et g_1 , D_2 celui de g_2 et g_3 et P_2 un point quelconque de g_2 et déduire que les points

$$S = (C_2S_2, S_1D_2), P_3 = (S_2P_2, D_2A), P_1 = (P_2S_1, AC_2)$$

sont alignés. Comme P_1 et P_3 sont par définition des points correspondants quelconque de la projectivité, les droites de liaison des points correspondants P_1P_3 passent par le point fixe S . Schur déduit de ce critère le théorème fondamental; le premier point de la construction est de construire une projectivité entre les droites g_1 et g_3 telles les points A_3, B_3, C_3 de g_3 correspondent aux points A_1, B_1, C_2 de g_1 . Pour cela, il suffit de poser $g_2 = A_1B_3$, $S_1 = (B_1B_3, C_1C_3)$ et $S_2 = (A_1A_3, C_1C_3)$ et de considérer la composition de la perspective de centre S_1 entre g_1 et g_2 avec la perspective de centre S_2 entre g_2 et g_3 . En composant toute autre projectivité qui vérifie les hypothèses du théorème et qui applique un point P_1 de g_1 sur un point P'_3 de g_3 avec la perspective de g_3 sur g_2 de centre S_2 , on obtient une projectivité entre g_1 et g_2 qui laisse fixe le point d'intersection A_1 de ces deux droites et qui fait correspondre le point P_1 à un point noté P'_2 . D'après le théorème précédent, les rayons de projections et en particulier $P_1P'_2$ passe tous par le point S_1 et donc P'_2 est l'image de P_1 par la perspective de centre S_1 et P'_3 est l'image de P_1 par la projectivité.

Dans son traité *Grundlagen der Geometrie*¹²⁰, Schur reprend cette démonstration en remplaçant sa théorie des réflexions par une analyse des mouvements des figures. Il justifie l'introduction des postulats du mouvement¹²¹ en arguant que les axiomes projectifs ne peuvent rendre compte que des propriétés optiques de l'espace. Il faut donc les compléter par les principes des mouvements sans déformation des figures. Schur pose une série de postulats dits du mouvement qui lui permettent de définir les notions de symétries orthogonales¹²² et de rotations dans le plan, à partir desquelles il montre le théorème de Pascal, puis de la même manière le théorème fondamental de la géométrie projective.

L'addition et la multiplication des segments projectifs

Une fois obtenu le théorème fondamental de la géométrie projective, Schur développe en s'inspirant explicitement du calcul des jets de von Staudt un calcul segmentaire. Schur signale qu'au contraire de von Staudt, il n'utilisera ni

¹¹⁹Eine Projectivität zwischen zwei Geraden derselben Ebene ist dann und nur dann eine Perspektivität, d.h. die Verbindungslinien entsprechender Punkte laufen durch einen Punkt, wenn der Schnittpunkt der beiden Träger sich selbst entspricht. [Schur, 1899, 407-408]

¹²⁰[Schur, 1909].

¹²¹„die Postulate der Bewegung“.

¹²²Schur utilise le terme de „Umwendung“ pour désigner ces transformations.

l'axiome des parallèles, ni axiome de continuité. Il précise qu'il développe ce calcul après avoir prouvé le théorème fondamental pour établir clairement ce qui dans le calcul segmentaire, dépend (ou ne dépend pas) de ce théorème ou du théorème de Pappus.¹²³

Schur fonde son calcul sur la définition géométrique de l'addition des segments d'une droite en géométrie euclidienne. En fait, son calcul est une généralisation projective du calcul segmentaire de Hilbert. Pour définir l'addition des segments OA et OB d'une droite g , on choisit arbitrairement une parallèle g' de g et un point S extérieur à g et g' ; on trace les droites SO et SA qui coupent respectivement g' en O' et A' . La droite BO' coupe au point S' la parallèle à g passant par S ; la droite $S'A'$ intersecte la droite g au point C qui vérifie $OA + OB = OC$.¹²⁴ La généralisation projective de cette construction consiste à ne plus considérer des parallèles de la droite g mais des droites passant par un point U de g . Une addition projective des segments d'une droite g est définie relativement au *point fixe*¹²⁵ U de g en choisissant une droite g' passant par U et un point S (extérieur à g et g'). Comme dans le cas euclidien, les droites SO et SA coupent g' en O' et A' , la droite BO' coupe en S' la droite SU et la droite $S'A'$ intersecte g en C qui vérifie $(OA) + (OB) = (OC)$.¹²⁶ Schur établit les propriétés d'associativité, de commutativité et d'existence d'un élément neutre de l'addition ainsi définie :

Notre addition des segments projectifs vérifie donc effectivement toutes les règles de l'addition des segments ordinaires et cela, indépendamment du théorème fondamental.¹²⁷

Pour définir la multiplication, Schur définit la notion de *similitude projective*¹²⁸ : deux suites de points $ABC \dots$ et $A_1B_1C_1 \dots$ d'une droite g sont dites *projectivement semblables* par rapport à un point fixe U et à l'origine O appartenant tous deux à g ,¹²⁹ si les points $A_1B_1C_1 \dots$ sont les images des points $ABC \dots$ par une collinéation centrale de centre U et un axe quelconque passant par O .¹³⁰ Schur peut alors définir la notion de multiplication relativement au choix d'une unité : si le segment projectif (OE) représente le nombre 1, le segment (OC) est défini comme le produit de (OA) et (OB) si les deux suites de points $UOEB$ et $UOAC$ sont projectivement semblables.¹³¹ Le théorème de Desargues prouve

¹²³On peut rappeler que les définitions des opérations du calcul des jets de von Staudt est fondé sur la notion d'involution, notion qui dépend dans l'exposé de von Staudt du théorème fondamental.

¹²⁴L'addition ainsi définie est indépendante du choix de g' et S .

¹²⁵„Deckpunkt“.

¹²⁶Ainsi définie, cette opération ne dépend pas du choix de S et de g' mais bien entendu dépend du choix de U . L'addition définie par Schur est conceptuellement la même que celle de von Staudt : en effet, les paires de côtés opposés du quadrangle complet $O'A'SS'$ intersecte la droite g en une involution $UU.OC.AB$. C est donc l'image de O dans l'involution $UU.AB$ ce qui est exactement la définition de von Staudt de l'addition.

¹²⁷„Unsre Addition projektiver Strecken erfüllt also wirklich alle Regeln der Addition gewöhnlicher Strecken, und zwar unabhängig vom Fundamentalsatze.“ [Schur, 1909, 55]

¹²⁸„Projektive Ähnlichkeit“.

¹²⁹Schur note une telle similitude projective : $UOABC \sim UOA_1B_1C_1$.

¹³⁰Si A, A_1 et B, B_1 sont deux paires de points correspondants par une collinéation centrale de centre U et d'axe α , les droites AA_1 et BB_1 se coupent en S et les droites AB et A_1B_1 se coupent sur la droite α . Une collinéation centrale de centre U et d'axe α est déterminée par la donnée d'une paire de points correspondants A, A_1 .

¹³¹La multiplication définie par Schur est aussi conceptuellement identique à la multiplication des jets définie par von Staudt. En effet, la détermination de C comme image du point B par la collinéation centrale $UOEB \sim UOAC$ montre que les points $OU.EC.AB$ sont en involution puisque g apparaît comme une transversale d'un quadrangle complet.

que la combinaison de similitudes projectives de point fixe U et d'origine O est une similitude projective de même point fixe et même origine. Schur en déduit (sans utiliser le théorème fondamental) l'associativité de la multiplication et la distributivité de celle-ci par rapport à l'addition. Par contre, la définition graphique du produit montre que la propriété de commutativité de la multiplication est équivalente au théorème de Pappus.

La discussion de l'axiome d'Archimède

Comme on l'a vu, Schur reprend en 1899 les critiques de Klein au sujet de l'utilisation conjointe des axiomes de congruence et de celui d'Archimède. En effet, Klein jugeait en 1897 superflu les axiomes de congruence lorsque l'on admet l'axiome d'Archimède pour introduire projectivement les coordonnées ; outre les axiomes purement projectifs, Schur ne s'appuie dans l'essentiel de ses travaux sur les fondements de la géométrie que sur des considérations de congruence qu'il exprime en terme d'une théorie des réflexions (en 1899) ou un peu plus abstraitement par des postulats du mouvement (1909). Néanmoins, son travail ne saurait être complet sans analyser le statut géométrique de l'axiome d'Archimède puisque celui-ci est à ses yeux au fondement de toute mesure pratique. Il souligne que dans ses travaux, il ne fait jamais appel à cet axiome, ce qui constitue une preuve qu'«une grande partie de la géométrie est indépendante de ce théorème»¹³². Schur propose alors d'étudier la partie de la géométrie que l'on peut montrer à partir des axiomes d'incidence (en renonçant donc aux postulats du mouvement) et d'une version projective du postulat d'Archimède. Dans les *Grundlagen der Geometrie*¹³³, Hilbert dont l'objectif est de produire une axiomatique de la géométrie euclidienne utilise la version habituelle du postulat d'Archimède :

Soit A_1 un point quelconque d'une droite situé entre les points donnés arbitrairement A et B ; si on construit les points A_2, A_3, A_4, \dots , tels que A_1 soit situé entre A et A_2 , puis A_2 entre A_1 et A_3 , puis A_3 entre A_2 et A_4 , etc. et que de plus les segments

$$AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$$

soient égaux entre eux, alors il y a toujours dans la suite des points A_2, A_3, A_4, \dots un point A_n tel que B soit situé entre A et A_n .¹³⁴

Dans la suite des points A_i , le point A_i est le milieu du segment $A_{i-1}A_{i+1}$ et donc en désignant par U le point à l'infini, A_1 est le conjugué harmonique de U par rapport à U_{i-1} et U_{i+1} . La généralisation projective de cet axiome

¹³²„[...] eine großer Teil der Geometrie von diesem Postulate unabhängig ist“. [Schur, 1909, 162]

¹³³[Hilbert, 1899].

¹³⁴„Es sei A_1 ein beliebiger Punkt auf einer Geraden zwischen den beliebig gegebenen Punkten A und B ; man construere dann die Punkte A_2, A_3, A_4, \dots , so dass A_1 zwischen A und A_2 , ferner A_2 zwischen A_1 und A_3 , ferner A_3 zwischen A_2 und A_4 u.s.w. und überdiess die Stecken

$$AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$$

einander gleich sind : dann giebt es in der Reihe der Punkte A_2, A_3, A_4, \dots stets einen solchen Punkt A_n , dass B zwischen A und A_n liegt.“ [Hilbert, 1899, 452]

consiste à l'adapter en reprenant cette dernière caractéristique à partir d'un point quelconque U :

Si E et P sont deux points quelconques du segment OU , et si on construit de proche en proche la suite formée du quatrième harmonique E_2 de O par rapport à E et U , E_3 de E par rapport à E_2 et U , E_4 de E_2 par rapport à E_3 et U , etc., E_n de E_{n-2} par rapport à E_{n-1} et U , alors il y a toujours dans cette suite un point E_n tel que P soit situé sur le segment OE_n .¹³⁵

Le projet de Schur consiste d'abord à démontrer à partir des axiomes projectifs et de l'axiome d'Archimède le théorème fondamental de la géométrie projective, puis en déduire la commutativité de la multiplication des segments projectifs et le théorème de Pappus ; dans un deuxième temps, il donne une preuve directe à partir des axiomes projectifs et de l'axiome d'Archimède de la commutativité de la multiplication et termine son analyse du rôle de l'axiome d'Archimède en géométrie en prouvant que ni le théorème de Pappus, ni le théorème fondamental ne peuvent être prouvés à partir des seuls axiomes d'incidence.

La preuve fondée sur l'axiome d'Archimède du théorème fondamental repose sur deux lemmes : Schur reprend l'idée de construire un système harmonique et montre qu'il peut étendre la suite des points E_n définie dans l'axiome d'Archimède en un système harmonique de points $(E_{\frac{m}{n}}$ contenus dans le segment OU . L'axiome d'Archimède permet d'affirmer que tout segment contenu dans le segment OU contient des points de ce système. Il définit de plus un point extérieur au segment OU noté E_{-1} comme le quatrième harmonique de E par rapport à O et U . Le second lemme affirme que les projectivités sont ordonnées, c'est-à-dire :

Si $A, B, C, D \bar{\wedge} A_1, B_1, C_1, D_1$, alors chaque fois que A est séparé de B par C et D , A' est séparé de B' par C' et D' .¹³⁶

Si une correspondance projective laisse fixes trois points O , E et U tels que E appartient au segment OU . Chaque point du système $E_{\frac{m}{n}}$ est donc fixe. Si F' est le point correspondant d'un point F du segment OU , alors F' est un point de OU puisque la correspondance projection conserve la séparation des points F et E_{-1} par les points O et U . Si F et F' ne coïncident pas, le segment FF' contient un point $E_{\frac{m}{n}}$ du système harmonique. Si on suppose que F appartient au segment OF' , alors O et $E_{\frac{m}{n}}$ sont séparés par F et U alors que O et $E_{\frac{m}{n}}$ ne sont pas séparés par F' et U . Tous les points du segment OU sont donc fixes et par conséquent tous les points de la droite OU .

La commutativité de la multiplication est une conséquence immédiate du théorème fondamental : en effet, par définition si $(OC) = (OA)(OB)$, il existe une

¹³⁵ „Sind E und P irgend zwei Punkte der Strecke OU , und man konstruiert der Reihe nach die vierten harmonischen Punkte E_2 von O für E und U , E_3 von E für E_2 und U , E_4 von E_2 für E_3 und U , usw., E_n von E_{n-2} für E_{n-1} und U , so gibt es in dieser Reihe stets einen solchen Punkt E_n , daß P auf der Strecke OE_n liegt.“ [Schur, 1909, 163]

Schur justifie empiriquement cet axiome comme une abstraction de notre expérience du dessin linéaire, puis il rappelle que cet axiome n'est pas une conséquence des axiomes projectifs (d'incidence) puisque, comme Hilbert l'a montré dans les *Grundlagen der Geometrie*, on peut développer des géométries non-archimédiennes qui vérifient toutes les propriétés d'incidence.

¹³⁶ „Ist $A, B, C, D \bar{\wedge} A_1, B_1, C_1, D_1$, so ist jedesmal, wenn A von B getrennt ist durch C und D , auch A' von B' getrennt durch C' und D' .“ [Schur, 1909, 167]

Schur définit les projectivités comme des compositions de perspectives. La propriété de conservation de l'ordre par les correspondances projectives résulte des axiomes projectifs.

similitude projective telle que :

$$UOEB \sim UOAC$$

, soit autrement dit, il existe une involution (au sens de Staudt) telle que :

$$UO.EC.AB,$$

propriété qui ne dépend pas de l'ordre de A et B ce qui entraîne la commutativité de la multiplication.¹³⁷

Une fois montré que le théorème d'Archimède implique le théorème fondamental et que l'on peut du théorème fondamental déduire la commutativité de la multiplication, Schur change de perspective : il propose de montrer que le théorème d'Archimède peut être déduit directement de l'axiome d'Archimède (sans l'intermédiaire du théorème fondamental). D'un point de vue systématique, un tel résultat semble inutile puisque Schur vient d'obtenir cette propriété comme conséquence de l'axiome d'Archimède. L'intérêt de cette nouvelle démonstration réside dans le caractère algébrique plus prononcé de la démonstration proposée par Schur : celle-ci repose sur une notion d'ordre que Schur définit pour les segments projectifs ; étant donné sur une droite trois points propres U, O, E tels que E soit situé dans le segment (fini) OU ¹³⁸, un segment OA est dit *positif* ou *négatif* selon que le point A est ou n'est pas situé sur le segment OU .¹³⁹ De manière naturelle, Schur définit alors une notion d'ordre sur les segments projectifs : le segment (OC') est plus grand que le segment OC si et seulement si $(OC') - (OC)$ est positif et la multiplication par un segment positif respecte cette notion d'ordre. Schur montre par l'absurde la commutativité de la multiplication, en posant $(OA).(OB) = (OC)$, $(OB).(OA) = (OC')$ et $(OC') > (OC)$. Le segment (CC') contient un point du système harmonique $E_{\frac{m}{n}}$ dont l'image par la similitude projective servant à la définition du produit $(OA).(OB)$ est le point D :

$$UOAE_{\frac{m}{n}} = UOED.$$

Comme par définition, on a $(OA).(OD) = (OE_{\frac{m}{n}})$, il vient $(OB) < (OD)$. En définissant D' par la relation $(OD)(OD') = (OE)$, il vient immédiatement, en vertu de l'associativité de la multiplication, $(OA) = (OE_{\frac{m}{n}})(OD')$. Or, comme ce dernier produit commute d'après un lemme général¹⁴⁰, on obtient $(OA) = (OD')(OE_{\frac{m}{n}})$, d'où $(OD)(OA) = (OE_{\frac{m}{n}})$ et $(OD) < (OB)$.

Après avoir montré que le théorème fondamental résultait de l'admission soit

¹³⁷Le théorème fondamental est utilisé pour affirmer la coïncidence des deux involutions $UO.AB\dots$ et $UO.BA\dots$

Puisque la commutativité de la multiplication est une conséquence du théorème fondamental, que la commutativité de la multiplication est équivalente au théorème de Pappus, et que le théorème fondamental peut être déduit du théorème de Pappus, Schur a montré que les axiomes projectifs de l'espace étant admis, la validité du théorème fondamental, celle du théorème de Pappus et la propriété de commutativité de la multiplication des points sont équivalentes.

¹³⁸Le segment fini défini par deux points est le segment qui ne contient pas le point à l'infini.

¹³⁹Schur fait dépendre la notion de signe des segments projectifs de la donnée d'un repère formé par des points propres et de la notion de segment fini. En fait, Schur utilise en fait cette notion d'une manière beaucoup plus projective : OA est positif si les points E et A ne sont pas séparés par les points O et U .

¹⁴⁰La démonstration de ce lemme est purement algébrique ; il suffit de noter que (OE) commute, puis tous les segments (OE_n) puisque $(OE_n) = (OE) + (OE) + \dots + (OE)$ et enfin par construction, tous les segments $(OE_{\frac{m}{n}})$.

des postulats du mouvements, soit de l'axiome d'Archimède, Schur pose alors la question de savoir si l'on peut montrer ce théorème avec les seuls axiomes projectifs :

De tels essais ont été faits et c'est le grand mérite de Hilbert d'avoir montré qu'ils resteront toujours vains et qu'au contraire le théorème fondamental ou, ce qui revient au même d'après nos recherches, le théorème de Pappus ne peuvent être démontré à partir des seuls axiomes projectifs.¹⁴¹

L'idée de la démonstration de Schur consiste à considérer un corps non commutatif, ou pour reprendre le langage de Schur, de poser arithmétiquement un système de grandeurs qui vérifient les mêmes propriétés que le système des segments projectifs et pour lequel on assure que la multiplication n'est pas commutative et à développer à partir de ce corps une géométrie de coordonnées. Une telle géométrie vérifie les axiomes projectifs mais la multiplication des segments projectifs que l'on peut déduire à partir de celle-ci est identique à celle du corps de référence. La difficulté consiste à exhiber un tel corps commutatif et Schur reprend la construction proposée par Hilbert dans les *Grundlagen der Geometrie*¹⁴²

7.5 Les échelles numériques de Hölder

O. Hölder¹⁴³ développe en 1908 une intéressante géométrie de la droite isolée qui repose sur des axiomes d'ordre cyclique des points de la droite, des axiomes qui reprennent les propriétés habituelles des formes harmoniques¹⁴⁴ et un axiome de continuité. Il définit une notion de densité et montre, en reprenant les travaux de Zeuthen et Lüroth, le théorème de densité des systèmes harmoniques de points :

Chaque système harmonique général de points possède au moins un point dans chaque segment, c.-à-d. il est *dense* partout dans la droite.¹⁴⁵

L'intention essentielle du travail de Hölder est de montrer que l'on peut sans l'axiome de continuité associer à chaque d'un système harmonique un nombre rationnel et grâce à la propriété de densité définir un système de coordonnées sur la droite. Néanmoins, à la fin de son imposant article, Hölder consacre un paragraphe à la question du théorème fondamental de la géométrie projective. Il envisage deux droites qui vérifient les axiomes d'ordre cycliques et les axiomes des formes harmoniques.¹⁴⁶ Plusieurs formes du théorème fondamental sont dis-

¹⁴¹„Solche Versuche sind gemacht worden, und es ist das große Verdienst von Hilbert, gezeigt zu haben, daß sie immer vergeblich bleiben müssen, daß vielmehr der Fundamentalsatz oder, was nach unsern Untersuchungen auf dasselbe hinauskommt, *der Pascalsche Satz aus den projektiven Postulaten allein nicht beweisen werden kann*. [Schur, 1909, 170]

¹⁴²[Hilbert, 1899, 506-510].

¹⁴³[Hölder, 1908].

¹⁴⁴La définition et l'existence de ces formes sont elles-mêmes des axiomes.

¹⁴⁵„Jedes allgemeine harmonische Punktsystem besitzt in jeder Strecke mindestens einen Punkt, d.h. es ist in der Gerade *überalldicht*. [Hölder, 1908, 200]

Hölder renvoie pour plus de détails sur la notion de densité aux travaux de Cantor.

¹⁴⁶Hölder souligne l'originalité de son approche puisqu'en général, les droites entre lesquelles on établit une correspondance projective appartiennent à un même plan ou un même espace.

tinguées selon que l'on considère des systèmes harmoniques ou l'ensemble des points des droites.

Pour montrer qu'il n'y a au plus qu'une correspondance projective entre deux systèmes harmoniques \mathcal{S} et \mathcal{S}' qui associe respectivement les trois points A, B, C de \mathcal{S} aux trois points A', B', C' de \mathcal{S}' , il suffit de se rendre compte que deux points correspondants P et P' sont par définition tous les deux obtenus de manière analogue à partir des points A, B, C et A', B', C' ¹⁴⁷. Du point de vue habituel, le théorème fondamental est surtout un théorème d'unicité puisque quelque soit la définition de la projectivité, la question de l'existence se résoud toujours simplement en considérant le produit de deux ou trois perspectivités. Du point de vue de Hölder, le théorème fondamental affirme autant l'existence que l'unicité d'une correspondance projective dont on impose trois paires d'éléments correspondants. Hölder pose donc le problème de l'existence d'une correspondance projective entre deux systèmes harmoniques \mathcal{S} et \mathcal{S}' qui associe respectivement les trois points A, B, C de \mathcal{S} aux trois points A', B', C' de \mathcal{S}' . Pour cela, il associe aux points A, B, C et A', B', C' les nombres $0, 1, \infty$. Il s'ensuit une répartition des nombres rationnels sur les points des deux systèmes harmoniques et on fait correspondre les points des deux systèmes harmoniques qui sont associés aux mêmes nombres rationnels. On obtient donc une correspondance biunivoque entre les points des deux systèmes qui conservent l'harmonicité de part la propriété de conservation du birapport. La correspondance ainsi définie conserve l'ordre cyclique – les propriétés de séparation – des points ; Hölder en déduit que l'on peut restreindre le théorème fondamental à la considération des formes harmoniques qui contiennent un point déterminé :

Si deux systèmes harmoniques généraux de points sont reliés de telle manière que quatre points harmonique de \mathcal{S} parmi lesquels se trouve le point déterminé C correspondent à chaque fois quatre points également harmoniques de \mathcal{S}' parmi lesquels doit naturellement se trouver le point correspondant C' , alors les deux systèmes de points sont projectifs.¹⁴⁸

Les théorèmes concernant les systèmes harmoniques n'utilise pas la condition de densité, ni l'axiome de continuité. Pour les étendre à l'ensemble des points de la droite, Hölder utilise un théorème général qui associe un *corps réel* à une droite vérifiant, en sus des axiomes d'ordre et des formes harmoniques, la condition de densité des systèmes harmoniques. Comme on l'a vu, Hölder montre que, dès l'on a attaché à trois points les valeurs numériques $0, 1, \infty$, on peut associer à tous les points d'un système harmonique (qui contient ces points) un nombre rationnel. La condition de densité des systèmes harmoniques permet alors d'associer à tous les points de la droite un nombre réel. L'ensemble de ces valeurs constitue un corps réel qui est indépendant du choix des points de base. La géométrie de la droite qui vérifie les axiomes d'ordre, ceux des formes harmoniques

Du point de vue de Hölder, chaque droite est considérée pour elle-même. La seule définition d'une correspondance projective entre droites envisageable est celle de von Staudt.

¹⁴⁷ Il faut auparavant établir que l'on peut obtenir tous les points d'un système harmonique à partir de trois points quelconques de ce système

¹⁴⁸ „Sind zwei allgemeine harmonische Punktsysteme ein-eindeutig so aufeinander bezogen, daß vier solchen harmonischen Punkten von \mathcal{S} , unter denen der bestimmte Punkt C vorkommt, jedesmal vier gleichfalls harmonische Punkte von \mathcal{S}' entsprechen, unter denen dann natürlich der entsprechende Punkt C' vorkommen muß, so sind die Punktsysteme projektiv.“ [Hölder, 1908, 250]

et la condition de densité est ainsi complètement algébrisée.¹⁴⁹ Hölder montre dans un premier temps un lemme analogue à celui montré précédemment pour les systèmes harmoniques : si l'ensemble des points d'une droite vérifiant les axiomes d'ordre, les axiomes des formes harmoniques et la condition de densité est associé biunivoquement à l'ensemble des points d'une droite vérifiant les mêmes conditions de telle manière que chaque forme harmonique de la première droite contenant un point C corresponde à une forme harmonique contenant le point correspondant de C, C' , alors la correspondance entre les droites est projective. De plus, s'il existe entre deux droites vérifiant les mêmes conditions que précédemment une relation projective conservant l'ordre, alors les corps associés aux deux droites coïncident. Hölder obtient (en faisant le détour par la théorie des birapports) le théorème fondamental sous une forme algébrique :

Si les corps de deux droites vérifiant la condition de densité coïncident, alors il existe toujours une et une seule correspondance projective ordonnée entre l'ensemble des points des deux droites pour laquelle il correspond à trois points donnés de la première droite trois points donnés de la seconde.¹⁵⁰

De plus, si les droites vérifient l'axiome de continuité, la condition de conservation de l'ordre est inutile.

L'intérêt des travaux de Hölder est d'une part de mener jusqu'au bout l'algébrisation complète de la géométrie de la droite projective et de montrer que la géométrie projective de la droite se réduit essentiellement à la théorie algébrique du birapport, d'autre part de distinguer explicitement deux formes du théorème fondamental, la première s'appliquant aux systèmes harmoniques, la seconde à l'ensemble des points de la droite considérée.¹⁵¹ La théorie de Hölder permet aussi de comprendre que l'hypothèse importante est, comme Klein le pressentait en 1873, est celle de la densité des systèmes harmoniques.

7.6 L'analyse de Enriques

Les deux paragraphes qui suivent sont consacrés à des exposés *définitifs* de la démonstration du théorème fondamental ; celle proposée par Enriques¹⁵² repose sur l'axiome de continuité. L'exposé de Veblen et Young reprend l'ensemble de la problématique et traite des différentes hypothèses algébriques, topologiques ou géométriques à partir desquelles on peut déduire le théorème fondamental¹⁵³. L'intervention de Enriques dans le débat sur la démonstration du théorème

¹⁴⁹Hölder montre la réciproque de ce théorème ; c'est-à-dire que l'on peut par le biais du birapport, associer à tout corps réel une géométrie qui vérifient ces axiomes et la condition de densité.

¹⁵⁰„Stimmen die Zahlkörper zweier die Tatsache der Dichtigkeit erfüllenden Geraden überein, so gibt es stets eine und nur eine die Ordnung erhaltende projektive Beziehung zwischen den sämtlichen Punkten der einen Geraden und den sämtlichen der anderen, in der drei gegebenen Punkten der einen Geraden drei gegebene Punkte der anderen entsprechen.“ [Hölder, 1908, 253-254]

¹⁵¹Cette présentation est aussi adoptée par Veblen and Young [1908] qui distingue la théorie sur les réseaux de Möbius et la théorie générale.

¹⁵²[Enriques, 1894, 1898].

¹⁵³[Veblen and Young, 1908, 1910]

fondamental est liée aux difficultés qu'il rencontre en 1894 à organiser un cours de géométrie projective¹⁵⁴ :

Je suis fort occupé par la préparation de deux cours pour lesquels (surtout avec la Projective) je rencontre des difficultés à chaque étape. [...] Après cela, j'ai des difficultés plus graves avec les concepts de groupe ordonné sur une droite (ou forme) et avec le concept de continuité pour le théorème fondamental de la géométrie projective. Pour des raisons variées, je n'ai pas envie de me fonder sur la considération intuitive du mouvement. Il me paraît que par ce moyen il reste des doutes que outre la conservation des groupes harmoniques supposée par la correspondance, il faille ajouter la continuité de celle-ci en sus de la continuité de la forme. Voilà un résumé de mon approche. J'admets d'abord le postulat selon lequel un point d'une droite définit sur celle-ci 2 *ordres naturels* des points (inverses l'un de l'autre), chacun correspondant à la manière intuitive d'ordonner la droite engendrée par le mouvement. L'existence des segments suit, etc. Ensuite, j'énonce le postulat de Dedekind. Si un segment AB est divisé en 2 parties de telle manière que chaque point de AB soit soit un H ou un K et que les H soient à la gauche des K , alors la division est effectuée au moyen d'un point C (qui est un H ou un K). On déduit le théorème que l'on peut admettre comme postulat au lieu [de l'axiome de Dedekind], si dans une correspondance, il correspond au segment AB , CD tel que $C \neq A$ et si la correspondance est ordonnée (conserve l'ordre, etc.), il existe un point invariant H (qui peut être B) tel qu'il n'y ait pas de point invariant dans le segment AH .¹⁵⁵ Il s'ensuit : il y a au moins une paire [de points] qui sépare harmoniquement deux paires [de points] qui ne sont pas séparées. Le théorème fondamental suit (comme dans Staudt). [Lettre de Enriques à Castelnuovo datée du 19 janvier 1894]¹⁵⁶

L'intention de Enriques est d'inférer les axiomes de la géométrie d'une intuition expérimentale de l'espace¹⁵⁷ et il revendique à plusieurs reprises l'origine

¹⁵⁴Pour plus de détails, on peut consulter l'article de Avellone et al. [2005] sur l'histoire des fondements de la géométrie projective en Italie. La citation de la correspondance entre Enriques et Castelnuovo est faite d'après cet article.

¹⁵⁵Enriques sous-entend implicitement que le segment CD est contenu dans le segment AB .

¹⁵⁶«Sono immensamente occupato per la preparazione dei due corsi : dove (specie per la Proiettiva) incontro ad ogni passo delle difficoltà. [...] Dopo vengono le difficoltà a più gravi, cioè i concetti di gruppi ordinati sulla retta (o forma) et di continuità pel teorema fondamentale della proietta. Per varie ragioni non mi piace fondarmi sulle considerazioni intuitive di movimento ; mi pare che in tal modo resti il dubbio che alla conservazione dei gruppi armonici ammessa per la corrispondenza si aggiunga la continuità di questa anziché della retta. Ecco uno schizzo della mia trattazione. Ammetto dapprima il postulato che un punto di una retta individua 2 *ordini naturali* di punti (inversi l'un dell'altro) ciascuno dei quali corrisponde al modo intuitivo di ordinare la retta generandola col moto. Ne segue l'esistenza dei segmenti ecc. Quindi enuncio il postulato di Dedekind. Se un segmento AB è diviso in 2 parti in guisa che ogni punto di AB sia H o K e gli H sieno a sinistra dei K , la divisione è operata mediante un punto C (che è H o K). Ne deduco il teorema che si può assumere invece come postulato "se in una corrispondenza al segmento AB corrisponde CD in esso dove $C \neq A$ e se la corrispondenza è ordinata (conserva l'ordine ecc.) esiste un punto unito H (che può anche esser B) tale che in AH non vi son punti uniti. Di qui segue : vi è almeno una coppia che ne separa armonicamente 2 che non si separano. Segue poi (come in Staudt) il teorema fondamentale.»

¹⁵⁷Enriques fait référence à une *intuition expérimentale de l'espace* alors que Pasch s'appuie plus directement sur l'expérience immédiate pour énoncer les *axiomes de base*.

expérimentale de la géométrie.¹⁵⁸ À la différence de Pasch, Hilbert ou des mathématiciens réunis autour de Peano, il ne conçoit pas une théorie axiomatisée comme seulement un simple développement logique à partir des axiomes et données de base ou comme un simple jeu de signes, renvoyant ainsi les questions philosophiques à l'origine et au statut des axiomes. Ainsi, s'il présente ses *Leçons de géométrie projective* comme un exposé de *géométrie abstraite*, il souligne qu'il insiste souvent pour montrer l'adéquation des résultats formels obtenus et de l'intuition géométrique¹⁵⁹ :

Nous avons cherché à mettre en lumière comment la Géométrie projective se rapporte à des concepts *intuitifs*, psychologiquement bien définis, et c'est précisément pour cette raison que nous n'avons négligé aucune occasion de montrer l'accord de nos déductions avec notre intuition. Nous avons toutefois fait remarquer dès le début que toutes nos déductions ne s'appuieraient que sur ce petit nombre de propositions données immédiatement par l'intuition que nous avons énoncées comme postulats. [Enriques, 1898, 397]¹⁶⁰

Les concepts de base introduits par Enriques sont ceux de points, de droites, de plans et de formes. Suivant le programme qu'il annonçait à Castelnuovo, il s'intéresse aux propriétés d'ordre cyclique d'une forme de première espèce :

Dans une (certaine) forme de 1. espèce a , on peut établir un *ordre* des éléments tel que :

- 1.) Étant donné deux éléments B, C , l'un des deux, par exemple B , précède l'autre C (et alors C suit B) ;
- 2.) Si B, C, D sont trois éléments de la forme tels que dans l'ordre donné, B précède C et C précède D , alors B précède toujours D ;
- 3.) Il existe un *premier* élément A qui précède tous les autres ;
- 4.) Entre deux éléments B, C qui se succèdent suivant l'ordre donné, il existe toujours un élément *intermédiaire* qui est un antécédent de C et un successeur de B (il y a donc une infinité d'éléments intermédiaires entre B, C) ;
- 5.) Il n'existe pas d'élément *ultime* qui, d'après l'ordre donné, suivrait tous les autres.

¹⁵⁸[Enriques, 1900].

¹⁵⁹La justification des axiomes s'effectue ainsi en deux temps ; d'abord en soulignant leur conformité à l'intuition puis en vérifiant l'adéquation des déductions effectuées avec cette même intuition.

¹⁶⁰Enriques exprimait déjà en 1894 dans des termes analogues son empirisme modéré :

Nous n'avons, par ailleurs, pas l'intention d'introduire pour ces concepts intuitifs rien de plus que leurs relations logiques si bien que la géométrie ainsi fondée peut encore recevoir une infinité d'interprétations dans le cas où il est attribué aux éléments «points» une signification arbitraire. Il nous semble seulement que l'origine expérimentale de la géométrie ne devrait pas être oubliée lors de la recherche des hypothèses sur laquelle elle est fondée.

“Non intendiamo per altro di introdurre di quei concetti intuitivi niente più che le loro relazioni logiche, sicché la geometria così fondata può ancora ricevere una infinita di interpretazioni ove all'elemento “punto” di essa si attribuisca un arbitrario significato. Ci sembra soltanto che l'origine sperimentale della geometria non debba essere dimenticata nella ricerca delle ipotesi su cui essa è fondata.” [Enriques, 1894, 551]

Enriques montre alors qu'en inversant les termes « précéder » et « suivre », on obtient un second ordre associé au point A et qu'il n'y en a pas d'autre ; on peut donc parler d'une disposition circulaire des éléments d'une forme de 1^e espèce qui aurait deux sens inverses l'un de l'autre. La définition de la notion d'ordre des éléments permet d'introduire les notions de succession de points, de segments (ordonnés), de points intérieurs et extérieurs à un segment¹⁶² et de séparation d'éléments :

Si $ABCD$ sont 4 éléments qui se succèdent, on dira que AC *sépare* BD .¹⁶³

Enriques introduit comme axiome le caractère projectif de la disposition circulaire des éléments, c'est-à-dire l'invariance par les perspectives des propriétés liées à l'ordre (en particulier, celles de séparation)¹⁶⁴, puis en reprenant la définition de von Staudt de forme harmonique¹⁶⁵, il établit en utilisant l'axiome d'invariance de l'ordre des éléments par perspectives, que le quatrième harmonique D de A, B, C trois éléments d'une forme de 1^e espèce est séparé de C par A, B .

Enriques introduit l'axiome de continuité de Dedekind (qui affirme que toute coupure d'un segment est réalisée par un élément déterminé)¹⁶⁶

¹⁶¹«In una (certa) forma di 1. specie a si puo' stabilire un *ordine* degli elementi in modo che :

- 1.) dati due elementi B, C l'uno dei due p. es. B *precede* l'altro C (ed allora C *segue* B) ;
- 2.) se B, C, D sono tre elementi della forma tali che nel dato ordine B *precede* C e C *precede* D , sempre B *precede* D ;
- 3.) esiste un *primo* elemento A che *precede* ogni altro ;
- 4.) tra due elementi B, C che si susseguono nel dato ordine esiste sempre un elemento *intermedio* cioè *precedente* a C e *consequente* a B (esistono quindi infiniti elementi intermedi fra B, C ;
- 5.) non esiste alcun *ultimo* elemento che *consegua* ad ogni altro nel dato ordine.» [Enriques, 1894, 554]

¹⁶²Étant donné deux points A et B d'une ponctuelle tels que A précède B , C est un point intérieur du segment ordonné AB si les trois points A, C, B se succèdent. Les notions d'intérieur et d'extérieur sont relatives à un ordre.

¹⁶³«Se $ABCD$ sono 4 elementi susseguentesi si dirà che AC *separano* BD . [Enriques, 1894, 557].

Enriques précise que la relation de séparation des paires de points est symétrique.

¹⁶⁴Dans les *Leçons de géométrie projective*, Enriques associe la notion de disposition circulaire des éléments d'une forme à une intuition du sens de parcours de celle-ci. Le postulat du caractère projectif de la disposition circulaire des éléments est exprimé en terme de mouvement d'un élément :

Si deux formes de première espèce sont perspectives et si un élément se meut sur l'une d'elles et décrit un segment, l'élément correspondant se meut de même sur l'autre en décrivant un segment. [Enriques, 1898, 26]

¹⁶⁵Enriques parle de *groupe harmonique*. Nous utiliserons, lorsqu'il sera question des travaux de Enriques, indifféremment *forme* ou *groupe* harmonique.

¹⁶⁶Dans les *Leçons*, Enriques justifie l'introduction de l'axiome de continuité à partir de quelques remarques à propos de notre intuition spatiale : en particulier, deux points qui parcourent en sens inverse un segment doivent coïncider en un point ; deux points qui décrivent un segment dans le même sens et à un moment, l'un précède l'autre et qu'à un autre moment, la position soit inversée, alors ils coïncident au moins une position où ils coïncident. On notera que ces propriétés ont été utilisées par Thomae, Darboux ou Schur dans leurs contributions à la démonstration du théorème fondamental.

Dans son article de 1894, il se contente de justifier du point de vue de la pratique mathématique

Si un segment ordonné AB d'une forme de 1^{espèce} est divisé en deux parties de manière que :

- 1.) chaque élément du segment AB appartient à une des deux parties ;
- 2.) l'extrémité A appartient à la *première* partie, B à la *seconde* ;
- 3.) chaque élément de la première partie précède (dans AB) chaque élément de la seconde,

alors il existe *un* élément C du segment AB (qui peut appartenir à l'une ou l'autre partie) tel que chaque élément de AB précédant C (s'il en existe) appartient à la première partie et chaque élément de AB suivant C (s'il en existe) appartient à la seconde.¹⁶⁷

Enriques montre alors le lemme du point fixe, essentiel pour la démonstration du théorème fondamental, selon lequel une correspondance biunivoque ordonnée¹⁶⁸ qui applique un segment AB dans un segment $A'B'$ contenu dans AB possède un point fixe¹⁶⁹. Si les deux segments AB et $A'B'$ sont de même sens (A et B sont dans le même ordre que A' et B'), on divise le segment AB en deux parties, la première constituée des points tels que tous les points qui les précèdent et eux-mêmes précèdent leur correspondant, la seconde constituée des points dont un des prédécesseurs n'appartient pas à la première partie. Ces deux parties vérifient les conditions de l'axiome de Dedekind et sont donc définies par un point qui ne peut qu'être fixe. Le cas où les segments sont de sens opposés se montre de manière analogue. Enriques obtient à partir de ce lemme la propriété de Darboux :

Étant donné dans une forme de 1^{espèce} deux paires d'éléments qui ne se séparent pas, il existe (au moins) une paire d'éléments qui les divise tous les deux harmoniquement.¹⁷⁰

Enriques en déduit que les correspondances qui conservent l'harmonicité sont ordonnées et montre par l'absurde le théorème fondamental en reprenant la démonstration de Darboux corrigée par Schur. En montrant comment l'axiome de Dedekind sert à prouver le lemme du point fixe achève en fait le programme

la forme de l'axiome en montrant qu'un point d'un segment définit sur celui-ci deux parties qui vérifient les trois conditions de l'axiome. Il utilisera pour justifier la problématique du théorème fondamental une démarche identique ; les perspectives vérifient la conservation de l'harmonicité ce qui motive comme les questions de la forme : est-ce que les correspondances conservant l'harmonicité vérifient telle propriété vérifiée par les perspectives ?

Comme on le verra, Pasch utilisera systématiquement ce type de procédure pour généraliser une notion : soit une notion N définie par la définition D_1 . Si on montre que D_1 entraîne la propriété P_1 , on utilise le fait de vérifier la condition P_1 comme extension de la définition de la notion N .

¹⁶⁷«Se un segmento ordinato AB di una forma di 1^{espèce} è diviso in due parti in guisa che

- 1.) ogni elemento del segmento AB appartenga ad *una* delle due parti ;
- 2.) l'estremo A appartenga alla *prima* parte, B alla *seconda* ;
- 3.) ogni elemento della prima parte preceda (in AB) ad ogni elemento della seconda,

esiste *un* elemento C del segmento AB (che può appartenere all'una o all'altra parte) tale che ogni elemento di AB precedente a C (ove esista) appartiene alla prima parte, ed ogni elemento di AB conseguente a C (ove esista) appartiene alla seconda.» [Enriques, 1894, 561-562]

¹⁶⁸Une correspondance entre deux formes est dite *ordonnée* si elle conserve la succession des points.

¹⁶⁹Enriques utilise le terme «uni».

¹⁷⁰«Date in una forma di 1^{espèce} due coppie di elementi che non si separano esiste una coppia (almeno) che le separa armonicamente entrambe.» [Enriques, 1894, 565]

de Klein qui à l'origine s'interrogeait sur le rôle des hypothèses de continuité dans la démonstration du théorème fondamental.

7.7 La géométrie projective générale de Veblen et Young

Oswald Veblen et John Wesley Young proposent en 1908¹⁷¹ une axiomatique d'une géométrie projective qu'ils qualifient de *générale*. Pour justifier ce terme, ils indiquent que «ce qu'il appelle *general projective geometry* est, analytiquement, la géométrie associée à un corps de nombres général»¹⁷² et ils insistent pour sur le fait que tous les théorèmes qu'ils montrent dans le premier volume de leur traité *Projective Geometry* sont valides non seulement dans les cas des espaces réels et complexes mais aussi dans le cas des espaces finis¹⁷³ ou dans celui de l'«espace rationnel ordinaire»¹⁷⁴. La présentation par Veblen et Young des notions de base et des premiers principes de leur géométrie projective, c'est-à-dire le développement à partir des axiomes de la théorie jusqu'à l'introduction des coordonnées homogènes peut être lue comme une tentative de donner une réponse définitive à la discussion initiée par Klein autour de la question de la continuité et de la démonstration du théorème fondamental de la géométrie projective.

Veblen et Young présentent les premiers axiomes de leur géométrie projective d'un espace de dimension trois en deux groupes, ceux dits d'*alignement* (A) et ceux dits d'*extension* (E). Ils sont très attentifs à la présentation logique de leur axiomatique et précisent que leurs axiomes s'expriment exclusivement en terme de relation sur les classes d'objets fondamentaux :

Toutes les relations utilisées sont définies en termes généraux de logique, principalement au moyen de la relation *appartenir à une classe* et de la notion de *correspondance bijective*.¹⁷⁵

Ces axiomes suffisent à définir les notions de projection, de section et de perspective (centrale et axiale). Une projectivité entre formes fondamentales¹⁷⁶ de première espèce est définie comme une composition de perspectives. Veblen et Young montrent comme conséquences des seuls axiomes d'alignement (A)¹⁷⁷ et

¹⁷¹[Veblen and Young, 1908].

¹⁷²«What we call *general projective geometry* is, analytically, the geometry associated with a general number field.» [Veblen and Young, 1910, IV]

¹⁷³Les espaces finis sont les espaces des géométries modelées sur les corps finis.

¹⁷⁴«ordinary rational space». [Veblen and Young, 1910, IV]

Il s'agit de l'espace modelé sur le corps des rationnels.

¹⁷⁵«All the relations are defined in general logical terms, mainly by means of the relation of *belonging to a class* and the notion of *one-to-one correspondance*.» [Veblen and Young, 1910, 15]

¹⁷⁶Veblen et Young utilisent le terme de formes primitives («*primitive forms*»).

¹⁷⁷Les axiomes d'alignement sont au nombre de trois :

11. Si A et B sont des points distincts, il y a au moins une droite à la fois sur A et B .
22. Si A et B sont des points distincts, il n'y a pas plus d'une droite à la fois sur A et B .
33. Si A, B, C sont des points non-alignés et si D et E ($D \neq E$) sont des points tels que B, C, D et C, A, E sont sur une droite, alors il y a un point F tel

d'extension (E)¹⁷⁸ deux théorèmes : le premier exprime qu'il existe une projectivité qui associe trois paires de points de deux formes fondamentales de première espèce¹⁷⁹ et le second que toute projectivité entre deux ponctuelles de supports différents peut être obtenue comme composition de deux perspectivités. Il est donc établi que la donnée de trois paires d'éléments correspondants de deux formes fondamentales de première espèce suffit pour assurer l'existence et la détermination d'une application projective entre ces formes et qu'un tel théorème résulte des seuls axiomes d'incidence. Les seuls axiomes d'incidence permettent de résoudre le problème de construire l'élément correspondant de tout élément connaissant trois paires d'éléments correspondants.¹⁸⁰

Reste la question de l'unicité et de quel ensemble de transformations est considéré pour aborder ce problème.¹⁸¹

Veblen et Young abordent la discussion sur le théorème fondamental de la géométrie projective en montrant avec les axiomes d'incidence le *théorème fondamental sur les ensembles quadrangulaires*. L'objet de ce théorème est de montrer que la notion d'ensemble quadrangulaire ne dépend pas du quadrangle utilisé pour le définir.¹⁸²

que A, B, F et aussi D, E, F soient sur une droite.

11. "If A and B are distinct points, there is at least one line on both A and B ."
22. If A and B are distinct points, there is not more than one line on both A and B ."
33. If A, B, C are points not all on the same line, and D and E ($D \neq E$) are points such that that B, C, D are on a line and C, A, E are on a line, there is a point F such that A, B, F are on a line and also D, E, F are on a line."
[Veblen and Young, 1917, 2]

¹⁷⁸Les axiomes d'extensions expriment qu'il y a au moins trois points sur chaque droite, qu'il existe au moins une droite, que tous les points ne sont ni alignés, ni coplanaires et tous les points sont contenus dans l'espace.

¹⁷⁹Veblen et Young qu'un corollaire de ce théorème permet de réaliser les permutations de trois éléments d'une forme fondamentale de première espèce :

Si 1, 2, 3 sont des éléments d'une forme fondamentale de première espèce, alors il existe des transformations projectives qui réalisent n'importe lesquelles des six permutations de ces trois éléments.

"If 1, 2, 3 are elements of any one-dimensional primitive form, there exist projective transformations which will effect any one of the six permutations of these three elements." [Veblen and Young, 1910, 60]

¹⁸⁰En particulier, étant donné quatre points A, B, C, D , alors il existe une projectivité entre A, B, C, D et B, A, D, C . Veblen et Young signalent que la question d'un ordre géométrique n'a rien à voir avec cette proposition :

Le théorème établit simplement que *la correspondance obtenue en échangeant deux points quelconques des quatre points colinéaires et en échangeant aussi les deux autres est projective*. "The theorem merely states that *the correspondence obtained by interchanging any two of four collinear points and also interchanging the remaining two is projective*." [Veblen and Young, 1910, 60]

¹⁸¹Veblen et Young introduisent le langage des groupes. Ils définissent la notion d'élément ou de figure invariante par un sous groupe et proposent d'appeler *groupe projectif général de la droite* le groupe formés par les perspectivités qui laissent invariantes les points d'une droite. Ils donnent comme premier exemple de sous-groupe du groupe projectif général de la droite celui formé par les projectivités laissant trois points invariants (dans leur ensemble) et précisent que pour montrer que ce groupe comportent six éléments (soit pour montrer que l'unicité de la transformation projective laissant trois points invariants point par point), il est nécessaire d'admettre un autre axiome.

¹⁸²Les ensembles quadrangulaires sont en fait les involutions de von Staudt.

Si deux quadrangles complets $P_1P_2P_3P_4$ et $P'_1P'_2P'_3P'_4$ se correspondent – P_1 avec P'_1 , P_2 avec P'_2 , etc. – de telle manière que cinq des paires de côtés homologues s'intersectent sur une ligne l , alors la sixième paire de côtés homologues s'intersecte en un point de l . (A,E)¹⁸³

Veblen et Young définissent alors la notion d'*ensemble quadrangulaire* comme un ensemble de points en lequel les côtés d'un quadrangle complet intersectent une droite.¹⁸⁴ Ils proposent de dire que les trois points qui correspondent à trois côtés non-concourants (qui forment un triangle) d'un quadrangle forment un *triplet triangulaire de points*¹⁸⁵ et que ceux qui correspondent à trois côtés concourants forment un *triplet ponctuel*¹⁸⁶. Ces dénominations justifient la notation suivantes :¹⁸⁷

Un ensemble quadrangulaire sera noté par

$$Q(ABC, DEF)$$

où ABC est un triplet ponctuel et DEF un triplet triangulaire et où A et D , B et E , C et F sont respectivement les intersections avec la droite de l'ensemble quadrangulaire des paires de côtés opposés du quadrangle.¹⁸⁸

La notion (plane) duale d'ensemble quadrangulaire de points est celle d'*ensemble quadrangulaire de droites* et toute section d'un ensemble quadrangulaire de droites est un ensemble quadrangulaire de points, ce qui montre que la notion d'ensemble colinéaire de points est projective. De même, la notion (spatiale) duale d'ensemble quadrangulaire de points est celle d'*ensemble quadrangulaire de plans*. Les *ensembles harmoniques* sont définis comme cas particuliers d'ensemble quadrangulaire :

Un ensemble quadrangulaire $Q(123, 124)$ est appelé un *ensemble harmonique* et est noté $H(12, 34)$. Les éléments 3, 4 sont dits *conjugués harmoniques par rapport aux éléments 1 et 2*.¹⁸⁹

¹⁸³“If two complete quadrangle $P_1P_2P_3P_4$ and $P'_1P'_2P'_3P'_4$ correspond – P_1 to P'_1 , P_2 to P'_2 , etc. – in such a way that five of the pairs of homologous sides intersect in points of a line l , then the sixth pair of homologous sides will intersect in a point of l . (A,E) [Veblen and Young, 1910, 47]”

¹⁸⁴Veblen et Young introduisent une hypothèse notée (H_0) qui éliminent en particulier la configuration de Fano. En effet, les seuls axiomes d'incidence ne peuvent assurer que les droites comportent plus de trois points et en particulier d'exclure le cas où les trois *points diagonaux* – les points d'intersection des paires de côtés opposés – sont alignés. Comme affirmer qu'il y a plus de trois points dans une droite n'exclut pas possibilité que les points diagonaux d'un quadrangle soient alignés, Veblen et Young introduisent dans un premier temps l'hypothèse (H_0) qui exclut explicitement cette hypothèse. Plus tard, l'hypothèse (H_0) sera impliquée par celle assurant qu'il y a une infinité de points dans une droite.

¹⁸⁵“triangle triple of points”.

¹⁸⁶“point triple of points”.

¹⁸⁷Cette notation met en exergue le lien entre ces ensembles et la notion d'involution.

¹⁸⁸A quadrangular set of points will be denoted by $Q(ABC, DEF)$ where ABC is a point triple and DEF is a triangle triple, and where A and D , B and E , and C and F are respectively the intersections with the line of the set of the pairs of opposite sides of the quadrangle. [Veblen and Young, 1910, 49]

¹⁸⁹“A quadrangular set $Q(123, 124)$ is called a *harmonic set* and is denoted $H(12, 34)$. The element are called *harmonic conjugates with respect to the element 1, 2*. [Veblen and Young, 1910, 80]

Cette définition est la même que celle de von Staudt puisque dans un ensemble harmonique

Dans la définition des ensembles harmoniques, les rôles de 1 et 2 et ceux de 3 et 4 sont différents. La symétrie de la relation «être conjugué harmonique» n'est donc pas encore montrée. Pour cela, il est donc nécessaire de prouver que si $H(34, 12)$ alors $H(12, 34)$. Cette proposition découle immédiatement des théorèmes généraux énoncés précédemment sur les ensembles quadrangulaires à condition que 1 et 2 soient des éléments distincts et donc que l'expression $H(12, 34)$ ait un sens. Or, dans le cas où l'hypothèse où les points diagonaux sont colinéaires, alors chaque triplet de points alignés forment un ensemble harmonique et donc dans ce cas, l'hypothèse $H(34, 12)$ signifie que 1 et 2 sont confondus.¹⁹⁰ Pour introduire la notion de *réseau de rationalité*, Veblen et Young généralisent la relation de conjugaison harmonique :

Un point P d'une droite est dit *harmoniquement relié à trois points distincts donnés* de la ligne si P est un point d'une suite $A, B, C, H_1, H_2, H_3, \dots$ de points de la ligne, finie en nombre, telle que H_1 est le conjugué harmonique d'un des points A, B, C par rapport aux deux autres et tel que chaque autre point H_i est harmonique avec trois de l'ensemble $A, B, C, H_1, H_2, \dots, H_{i-1}$. La classe de tous les points harmoniquement reliés à trois points distincts A, B, C d'une droite est appelé the *réseau de rationalité à une dimension* défini par A, B, C ; il est noté $R(ABC)$.¹⁹¹

Comme la notion d'harmonicité est projective¹⁹², Veblen et Young en déduisent que la notion d'ensemble de rationalité est conservée par projection et qu'un ensemble de rationalité est défini par trois de ses points :

Si K, L, M sont trois points distincts de $R(ABC)$, A, B, C sont des points de $R(KLM)$.¹⁹³

La notion d'ensemble quadrangulaire est compatible avec celle d'ensemble de rationalité. Ainsi, si tous les points, sauf un, d'un ensemble quadrangulaire sont des points d'un même ensemble de rationalité R alors le dernier point de l'ensemble quadrangulaire est aussi un point de R . Veblen et Young introduise une nouvelle relation :

Un point P d'une droite est dit *quadrangulairement relié à trois points distincts donnés* de la ligne si P est un point d'une suite $A, B, C, H_1, H_2, H_3, \dots$ de points de la ligne, finie en nombre, telle

de points $H(AB, CD)$, les points A et C sont les points d'intersection de deux paires de côtés opposés d'un quadrangle complet et B et D sont les points d'intersection des deux autres côtés (opposés) avec la droite AC . Ce cas particulier de la figure formée par un quadrangle complet et une transversale est la configuration dite du quadrilatère complet à partir de laquelle von Staudt définissait la notion de forme harmonique.

¹⁹⁰Veblen et Young notent que le théorème général analogue sur les ensembles quadrangulaires (Si $Q(123, 456)$ alors $Q(456, 123)$) ne peut être prouvé sans un axiome supplémentaire.

¹⁹¹«A point P of a line is said to be *harmonically related to three given distinct points* A, B, C of the line, provided P is one of a sequence of points $A, B, C, H_1, H_2, H_3, \dots$ of the line, finite in number, such that H_1 is the harmonic conjugate of one of the points A, B, C with respect to the other two, and such that every other point H_i is harmonic with three of the set $A, B, C, H_1, H_2, \dots, H_{i-1}$. The class of all points harmonically related to three distinct points A, B, C on a line is called the *one-dimensional net of rationality* defined by A, B, C ; it is noted by $R(ABC)$. [Veblen and Young, 1910, 84]

¹⁹²Au sens de la définition adoptée par Veblen et Young, c'est-à-dire conservée par les compositions de perspectives.

¹⁹³«If K, L, M are three distinct point of $R(ABC)$, ABC are points of $R(KLM)$ » [Veblen and Young, 1910, 85]

que H_1 est le conjugué harmonique d'un des points A, B, C par rapport aux deux autres et tel que chaque autre point H_i appartient à un ensemble quadrangulaire dont les cinq autres points appartiennent à l'ensemble $A, B, C, H_1, H_2, \dots, H_{i-1}$.¹⁹⁴

Un corollaire du théorème précédent est que la classe des points quadrangulairement reliés à trois points A, B, C est $R(ABC)$. Les ensembles obtenus par la construction itérée du quatrième harmonique (suite harmonique) et ceux obtenus à partir d'une transversale d'un quadrangle complet sont identiques. La notion d'ensemble quadrangulaire (involution) est plus générale que celle de forme harmonique alors que les ensembles obtenus à partir de ces deux notions sont les mêmes. Comme Veblen et Young le montrent, en considérant la notion d'ensemble quadrangulaire (involution) comme première au contraire de von Staudt qui fondait sa théorie sur celle de notion de forme harmonique, il est possible de développer à partir des seuls axiomes d'incidence la géométrie projective des réseaux de rationalité.

Le réseau de rationalité $R(ABC)$ consiste en l'ensemble des points de la droite AB que l'on peut construire à partir de A, B, C au moyen de lignes et de points. Veblen et Young généralisent ce point de vue aux plans et à l'espace pour définir les notions de réseaux de rationalité dans le plan et l'espace. Ainsi, «un point est dit *rationnellement relié* à deux réseaux de rationalité R_1, R_2 non-colinéaires ayant un point en commun s'il est l'intersection de deux droites joignant, chacune, un point de R_1 à un point distinct de R_2 . Une droite est dite *rationnellement reliée* à R_1 et R_2 si elle joint deux points qui leur sont rationnellement reliés.»¹⁹⁵ L'ensemble des points et des lignes reliés rationnellement à deux réseaux de rationalités (qui n'ont pas même support et qui ont un point commun) constitue le *réseau de rationalité à deux dimensions* ou *réseau plan* déterminé par R_1 et R_2 . Un réseau plan vérifie les axiomes d'incidence de la géométrie projective, en particulier, l'intersection de deux droites d'un réseau plan est un point du réseau plan et les points d'un réseau plan qui appartiennent à une droite du réseau plan constituent un réseau de rationalité. Veblen et Young définissent de la même manière la notion de *réseau de rationalité à trois dimensions* ou *réseau spatial* :

Un réseau de rationalité dans l'espace est un espace satisfaisant les axiomes A et E, si «droite» est interprété par «réseau linéaire» et «plan» par «réseau plan».¹⁹⁶

La question du théorème fondamental de la géométrie projective est naturellement résolue dans les espaces de rationalité : comme le réseau de rationalité déterminé par trois points est aussi la suite harmonique engendrée par ces trois points, il est clair que si une projectivité laisse invariant trois points distincts

¹⁹⁴«A point P of a line is said to be *quadrangularly related to three given distinct points* A, B, C of the line, provided P is one of a sequence of points $A, B, C, H_1, H_2, H_3, \dots$ of the line, finite in number, such that H_1 is the harmonic conjugate of one of the points A, B, C with respect to the other two, and such that every other point H_i is one of a quadrangular set of which the other five belong to the set $A, B, C, H_1, H_2, \dots, H_{i-1}$. [Veblen and Young, 1910, 85-86]

¹⁹⁵«A point is said to be *rationally related* to two noncollinear nets of rationality R_1, R_2 having a point in common, provided it is the intersection of two lines each of which joins a point of R_1 to a distinct point of R_2 . A line is said *rationally related* to R_1 and R_2 , provided it joins two points that are rationally related to them." [Veblen and Young, 1910, 86]

¹⁹⁶«A net of rationality in space is a space satisfying Assumptions A and E, if "line" be interpreted as "linear net" and "plane" as "planar net". [Veblen and Young, 1910, 92]

d'une droite, alors elle laisse invariant tous les points du réseau de rationalité défini par ces trois points.¹⁹⁷ d'où le *théorème fondamental des projectivités des réseaux linéaires de rationalité* :

Si A, B, C, D sont des points distincts d'un réseau linéaire de rationalité, et si A', B', C' sont trois points quelconques d'un autre ou du même réseau linéaire, alors pour toutes projectivités pour lesquelles $ABCD \bar{\wedge} A'B'C'D'$ et $ABCD \bar{\wedge} A'B'C'D'_1$, on a $D' = D'_1$.¹⁹⁸

Veblen et Young affirment qu'il est nécessaire d'introduire un nouvel axiome pour obtenir une proposition analogue concernant tous les points de la droite; dans un premier temps, pour ne pas avoir à aborder une discussion difficile et «quelque peu ennuyeuse»¹⁹⁹ au sujet des notions d'ordre et de continuité, il propose d'admettre provisoirement comme nouvel axiome un des énoncés du théorème fondamental de la géométrie projective :

P. Si une projectivité laisse invariant chacun de trois points d'une droite, elle laisse invariant chaque point de la droite.²⁰⁰

Veblen et Young poursuivent la discussion autour de ce théorème en montrant que l'axiome P est une condition nécessaire et suffisante pour que la multiplication des points soit commutative. Soit P_0, P_1, P_∞ une échelle sur une droite l et P_x, P_y deux points de l (distincts de P_0, P_1, P_∞), le produit P_{xy} est défini comme le point déterminé par l'ensemble quadrangulaire $Q(P_0P_xP_1, P_\infty P_y P_{xy})$.²⁰¹ Veblen et Young donnent en même temps une définition constructive du produit de deux points comme résultant de l'application de deux perspectives ce qui justifie le théorème (toujours en n'utilisant que les axiomes (A,E)) :

Si la relation $P_x.P_y = P_{xy}$ est vérifiée entre trois points quelconques P, x, P_y, P_{xy} de l distincts de P_0 , alors on a $P_\infty P_0 P_1 P_x \bar{\wedge} P_\infty P_0 P_y P_{xy}$ et aussi $P_\infty P_0 P_1 P_y \bar{\wedge} P_\infty P_0 P_x P_{xy}$; c.-à-d. la correspondance établie en faisant correspondre chaque point P_x de l à $P'_x = P_x.P_a$ (ou $P'_x = P_a.P_x$), où P_a est un point fixe quelconque de l distinct de P_0 , est projective.²⁰²

En posant $P_{xy} = P_x.P_y$ et $P_{yx} = P_y.P_x$, ce théorème permet d'établir que

$$P_\infty P_0 P_x P_{xy} \bar{\wedge} P_\infty P_0 P_x P_{yx}$$

soit en utilisant l'axiome P,

$$P_{xy} = P_{yx}.$$

¹⁹⁷Une projectivité résulte pour Veblen et Young d'une composition de perspective. Elle conserve donc la notion d'harmonicité.

¹⁹⁸«If A, B, C, D are distinct points of a linear net of rationality, and A', B', C' are any three distinct points of another or the same linear net, then for any projectivities giving $ABCD \bar{\wedge} A'B'C'D'$ et $ABCD \bar{\wedge} A'B'C'D'_1$, we have $D' = D'_1$. [Veblen and Young, 1910, 94]

¹⁹⁹«somewhat tedious». [Veblen and Young, 1910, 94]

²⁰⁰«If a projectivity leaves each of three distinct points of a line invariant, it leaves every point of the line invariant.» [Veblen and Young, 1910, 95]

²⁰¹On note $P_x.P_y = P_{xy}$.

La définition de la multiplication des points d'une droite ne dépend que des axiomes d'incidence (A,E).

²⁰²«If the relation $P_x.P_y = P_{xy}$ holds between any three points P, x, P_y, P_{xy} on l distinct from P_0 , we have $P_\infty P_0 P_1 P_x \bar{\wedge} P_\infty P_0 P_y P_{xy}$ and also $P_\infty P_0 P_1 P_y \bar{\wedge} P_\infty P_0 P_x P_{xy}$; i.e. the correspondance established by making each points P_x of l correspond to $P'_x = P_x.P_a$ (or to $P'_x = P_a.P_x$), where P_a is any fixed point of l distinct from P_0 , is projective.» [Veblen and Young, 1910, 147]

L'axiome P est donc une condition suffisante pour la commutativité de la multiplication des points.

La réciproque se déduit de la décomposition d'une projectivité en trois perspectives. Soit Π une projectivité définie sur une ponctuelle $[H]$ qui admet trois points fixes H_x, H_y, H_∞ . On suppose qu'elle se décompose sous la forme :

$$[H] \stackrel{S}{\wedge} [P] \stackrel{T}{\wedge} [Q] \stackrel{U}{\wedge} [\Pi(H)]$$

où S, T, U sont les centres des perspectives et $[P], [Q]$ des ponctuelles qui ont respectivement comme point commun avec $[H]$ $[H_x]$ et $[H_y]$. On peut de plus aussi choisir $[P]$ et $[Q]$ telles que leur point commun $[R]$ soit sur la ponctuelle $[SH_\infty]$ de sorte que $[P] = [H_xR]$ et $[Q] = [H_yR]$. Comme H_∞ est un point fixe de Π , que R est un point de $[P]$ et de $[Q]$, il est nécessaire que S, U, H_∞ soient colinéaires.²⁰³ Puisque H_x est un point fixe de Π et en même temps un point de $[H]$ et de $[P]$, il est nécessaire que H_x, T, U soient alignés.²⁰⁴ Enfin, puisque H_y est un point fixe et en même temps un point commun à $[H]$ et $[Q]$, les points S, T, H_y sont colinéaires.²⁰⁵ Soit H un point quelconque de la ponctuelle $[H]$, on désigne (en reprenant les notations des notes précédentes) par P le transformé de H par p_1 , par Q le transformé de P par p_2 et par H' le transformé de Q par p_3 . Le problème est de montrer que sous l'hypothèse de la commutativité de la multiplication des points, $H = H'$. Veblen et Young propose de noter par H_0 et H_1 les intersections respectives des droites PT et RT avec la droite H_xH_y et de travailler avec l'échelle définie par H_0, H_1, H_∞ .²⁰⁶ La considération du quadrangle complet $TRSP$ et la transversale H_xH_y définit l'ensemble quadrangulaire $Q(H_0H_yH_1, H_\infty H_xH)$, soit dans l'échelle H_0, H_1, H_∞ ,

$$H_y.H_x = H.$$

De même, la considération du quadrangle complet $TRQU$ et de la transversale H_xH_y définit l'ensemble quadrangulaire $Q(H_0H_xH_1, H_\infty H_yH')$, soit dans

²⁰³Si on note p_1 la perspective $[H] \stackrel{S}{\wedge} [P]$, $p_2, [P] \stackrel{T}{\wedge} [Q]$ et $p_3, [Q] \stackrel{U}{\wedge} [H]$, $p_1(H_\infty) = R$, $p_2(R) = R$ et donc si S, U, H_∞ sont alignés, $p_3(R) = H_\infty$.

²⁰⁴En reprenant les notations précédentes, $p_1(H_x) = H_x$, $p_2(H_x) = K_x$ où K_x est le point d'intersection de $[H_xT]$ et de $[Q]$, et puisque $p_3(K_x) = H_x$, on a H_x, T, U colinéaires.

²⁰⁵Avec les mêmes notations, on a $p_1(H_y) = K_y$ où K_y est le point d'intersection de $[P]$ et $[SH_y]$, $p_2(K_y) = K'_y$ où K'_y est le point d'intersection de $[TK_y]$ et Q , et $p_3(K'_y) = H_y$. Comme H_y est le point commun de $[H]$ et $[Q]$, $K'_y = H_y$ et donc S, T, H_y sont colinéaires.

²⁰⁶Veblen et Young signalent que le choix de l'échelle est indifférent puisque les corps associés à deux échelles différentes sont isomorphes. Veblen et Young n'utilisent le terme de corps ; après avoir introduit les opérations d'addition, de multiplication, de soustraction et de division, il introduise une notion de *système de nombres* ("number system") qui est essentiellement celle de corps :

Un ensemble N d'éléments est dit former un système de nombres si deux opérations distinctes, notées respectivement \oplus et \odot existent et opèrent sur les paires d'éléments de N sous les conditions suivantes :

1. L'ensemble N forme un groupe par rapport à \oplus .
2. L'ensemble N forme un groupe par rapport à \odot , excepté que si i_+ est l'élément identité de N par rapport à \oplus , aucun inverse par rapport à \odot n'existe pour i_+ . Si a est un élément quelconque de N , $a \odot i_+ = i_+ \odot a = i_+$.
3. Trois éléments quelconques a, b, c de N satisfont les relations $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$ et $(b \oplus c) \odot a = (b \odot a) \oplus (c \odot a)$.

[Veblen and Young, 1910, 149]

la même échelle

$$H_x.H_y = H'$$

, d'où $H = H'$.

Veblen continue la discussion²⁰⁷ en analysant des hypothèses qui entraînent l'hypothèse P. La condition K selon laquelle le corps défini sur l'ensemble des points par l'addition et la multiplication est isomorphe au corps des réels entraîne évidemment la condition P puisque la multiplication des réels est commutative. La condition algébrique K est déclinée selon trois propositions H, C, R.

La première proposition H affirme qu'aucune suite harmonique n'est constituée d'un nombre fini de points.²⁰⁸ Les espaces qui vérifient les axiomes A,E,H sont dits *non-modulaires* et ceux qui vérifient les axiomes A,E, et la négation de H, \bar{H} sont dits *modulaires*.²⁰⁹ Veblen distingue deux types de coupures dans un réseau rationnel : les coupures *fermées* définies par les points du réseau et les coupures *ouvertes* qui ne le sont pas. L'axiome Q impose que les seules coupures d'un réseau soient fermées :

Il n'y a pas plus d'un réseau de rationalité dans une droite.²¹⁰

La géométrie des espaces vérifiant l'axiome Q est dite rationnelle.

La condition C est une traduction géométrique de l'axiome de Dedekind et permet d'associer à une coupure ouverte d'un réseau de rationalité sur une droite un point et de prolonger les propriétés des projectivités définies sur le réseau de rationalité aux points de coupure.²¹¹ L'ensemble des points rationnels et irrationnels par rapport à trois points constitue une *chaîne*. Si H_0, H_1, H_∞ sont trois points d'une droite, on désigne par $R(H_0H_1H_\infty)$ le réseau de rationalité engendré par ces trois points et par $C(H_0H_1H_\infty)$ l'ensemble des points de coupure (ouvertes et fermées) ; par rapport à l'échelle associée à $H_0 = 0, H_1 = 1, H_\infty = \infty$, les points de la chaîne $C(H_0H_1H_\infty)$ (moins H_∞) constitue un système de nombres (un corps) isomorphe au corps des réels. Le théorème fondamental est vérifié pour les chaînes. L'axiome C assure l'existence d'un ensemble de points isomorphe à l'ensemble des réels ; Veblen et Young ajoutent un axiome R qui assure l'unicité d'un tel ensemble et que tous les points de la droite sont atteint par la chaîne :

Si dans au moins une droite, il y a un chaîne alors il n'y en a pas plus d'une.²¹²

La géométrie des espaces vérifiant les axiomes C et R est dite réelle. La négation \bar{R} de l'axiome R permet à Veblen d'envisager des espaces dont les droites possèdent plusieurs chaînes. Pour déterminer les géométries complexes, Veblen ajoute un axiome I qui assure aux droites d'un espace vérifiant l'axiome \bar{R} une structure analogue à celle de l'ensemble des nombres complexes :

²⁰⁷Cette discussion est exposée dans le second tome du traité rédigé par Veblen seul.

²⁰⁸Cette condition est introduite par Fano [1892]. Cette hypothèse entraîne que la condition P est valable pour les réseau de rationalité.

²⁰⁹Les espaces de rationalité d'un espace modulaire sont constitués de $p + 1$ points où p est premier.

²¹⁰There is not more than one net of rationality on a line." [Veblen and Young, 1917, 16]

²¹¹Les points du réseau correspondent aux nombres rationnels et ceux associés aux coupures ouvertes aux nombres irrationnels.

²¹²"On at least one line, if there is one there is not more than one chain." [Veblen and Young, 1917, 23]

Par un point P d'une chaîne quelconque C d'une droite l et par un point J de l qui n'appartient pas à C , il n'y a pas plus d'une chaîne de l qui n'a pas d'autres points que P en commun avec C .²¹³

Les géométries qui vérifient les axiomes \overline{R} et I sont dites complexes et vérifient le théorème fondamental.²¹⁴ La dernière classe de géométries envisagée par Veblen est celle associée à les axiomes S de la notion de *sens*. Le théorème fondamental n'est pas une conséquence des axiomes S.

La classification des géométries peut être résumée par le tableau :

<i>Axiomes</i>	<i>Espaces</i>
A, E	Espace projectif général
A, E, P	Espace projectif propre
A, E, H	Espace projectif non-modulaire
A, E, \overline{H}	Espace projectif modulaire
A, E, S	Espace projectif ordonné
A, E, \overline{H} , Q	Espace projectif modulaire rationnel
A, E, H, Q	Espace projectif non-modulaire rationnel
A, E, H, C, R ou A, E, K	Espace projectif réel
A, E, H, C, \overline{R} , I ou A, E, J	Espace projectif complexe

7.8 Annexe : qu'est-ce qu'une correspondance projective ?

Plusieurs définitions sont utilisées dans ces discussions de manière conjointe ; Cremona, Schur, Veblen et Young, à la suite de Thomae et de Poncelet, définissent une correspondance projective entre formes de première espèce comme un produit de perspectivités. Klein et Enriques continuent à utiliser la définition introduite par von Staudt. On peut aussi regarder les relations projectives entre formes projectives de première espèce comme les restrictions des collinéations du plans.²¹⁵ De plus, une fois le birapport introduit, ces définitions peuvent être mises en regard avec la propriété de conservation du birapport qui sert à Steiner, Möbius ou Chasles pour caractériser les correspondances projectives. Dans

²¹³“Through a point P of any chain C of the line l , and any point J on l but not in C , there is not more than one chain of l which has no other point than P in common with C .” [Veblen and Young, 1917, 30]

²¹⁴Elles peuvent être introduite à l'aide d'un axiome J qui assure que le corps associé est isomorphe à celui des nombres complexes.

²¹⁵H. Freudenthal [1980] distingue trois groupes de transformations sur une droite :

1. G_1 : le groupe des produits de perspectivités.
2. G_2 : le groupe des restrictions du groupe des collinéations planes.
3. G_3 : le groupe des applications conservant l'harmonie.

Si l'on considère la géométrie projective induite à partir d'un espace vectoriel sur un corps \mathcal{K} de caractéristique $\neq 2$, G_1 est induit par les applications linéaires, G_2 par les combinaisons des applications linéaires et des automorphismes du corps et G_3 par les combinaisons des applications linéaires et des automorphismes et antimorphismes du corps. On a donc en général

$$G_1 \subset G_2 \subset G_3.$$

Dans les géométries pappusiennes – une géométrie est qualifiée par Hilbert [1899] de pappusienne si le théorème de Pappus est valide et non-pappusienne s'il ne l'est pas. Une géométrie non-pappusienne est nécessairement non-archimédienne.–, on a, du fait de la commutativité du corps, $G_2 = G_3$. Pour obtenir $G_1 = G_2 = G_3$, il faut faire de nouvelles hypothèses à caractère topologique comme admettre l'axiome d'Archimède.

son premier article de 1881²¹⁶, Schur aborde une première fois cette question en critiquant le point de vue de Staudt ; à ses yeux, fonder la définition des correspondances projectives entre formes de première espèce est artificiel car l'utilisation à cet effet des formes harmoniques ne se comprend pas immédiatement alors que si l'on décrit les projectivités entre formes de première espèce comme les restrictions des collinéations des formes de seconde espèce,²¹⁷ l'introduction des quadrangles complets et donc des formes harmoniques devient complètement naturelle.²¹⁸ Schur affirme que cette manière de présenter les relations projectives des formes de première espèce est beaucoup plus simple car, selon lui, les propriétés géométriques peuvent s'exprimer bien plus directement dans le cadre des formes de seconde ou troisième espèce que dans celui restreint des formes de première espèce ; il conclut :

La définition des projectivités des formes fondamentales d'espèces supérieures doit être placée en tête de la géométrie projective.²¹⁹

Comme on l'a vu, Schur ne poursuivra dans cette direction et définira dans ses travaux suivants sur les fondements de la géométrie les projectivités comme combinaison de perspectives sans donner de justification ; il montre par contre à la fin de sa discussion sur le rôle de l'axiome d'Archimède que si l'on admet cet axiome, la définition de Staudt et celle par les perspectives sont équivalentes. Comme il est établi avec les axiomes projectifs que les perspectives conservent la notion d'harmonie, le seul point à montrer est la réciproque, à savoir qu'une correspondance bijective qui conserve l'harmonie des formes peut s'exprimer comme combinaison de perspectives. Pour cela, il suffit de prouver le théorème fondamental dans le cas des correspondances projectives au sens de von Staudt et donc de démontrer que ces correspondances sont ordonnées, ce qui résulte du lemme selon lequel deux paires de points qui divisent harmoniquement une même troisième paire de points ne se séparent pas.²²⁰

Enriques évoque plusieurs fois la question de la définition des correspondances projectives des formes de première espèce. Dans son rapport sur les fondements de la géométrie²²¹, il considère que von Staudt a été incité à proposer sa définition des projectivités entre droites après l'étude des corrélations planes.²²²

²¹⁶[Schur, 1881].

²¹⁷Schur reprend en fait une idée avancée en 1874 par Battaglini.

²¹⁸L'argument avancé par Schur n'est pas tout à fait convaincant. Il soutient qu'il n'est nul besoin de faire intervenir pour justifier le théorème du quadrangle complet de travailler dans l'espace. En fait, pour développer une théorie des collinéations du plan, il faut supposer celui-ci arguésien et donc de ce point de vue, sa présentation ne présente guère d'avantage par rapport à celle de von Staudt.

²¹⁹„[...] also die Definition der Projectivität der Grundgebilde höherer Stufe an die Spitze der projectivischen Geometrie zu stellen.“[Schur, 1881, 254]

²²⁰Schur utilise l'axiome d'Archimède pour montrer ce lemme.

²²¹[Enriques, 1907].

²²²H. Freudenthal [1980] rejoint d'une certaine manière cette hypothèse historique tout en l'associant à d'autres arguments :

Pour les prédécesseurs de von Staudt, les projectivités étaient données explicitement bien que définies séparément pour les ponctuelles, les faisceaux de droites et les faisceaux de plans. Von Staudt cherchait clairement une définition qui premièrement, rendrait évidente la propriété de groupe des projectivités, deuxièmement s'appliquerait uniformément à toutes les entités de dimensions un et trois, troisièmement, mènerait facilement au théorème fondamental de la géométrie projective. Ceci excluait une définition constructive des projectivités ; une autre solution aurait été de définir celles-ci comme restrictions des collinéations, mais cela n'était probablement pas assez élégant. Dans le contexte historique de cette

Enriques défend la définition proposée par von Staudt en expliquant que le théorème fondamental montré en se restreignant aux combinaisons de perspectives «a moins de portée en ce qu'il ne permet pas, à lui tout seul, d'édifier la théorie de l'homographie entre plans et espaces»²²³. Dans son traité de géométrie projective²²⁴, Enriques distinguait deux approches de la question de la théorie générale des correspondances ; la première, que l'on pourrait qualifier, à la suite de Freudenthal, de constructive consiste à «trouver les propriétés d'une correspondance définie au moyen d'un système particulier d'opérations». Avec la seconde manière d'étudier les correspondances, on définit la correspondance comme admettant certaines propriétés et l'on en déduit «quelles devront être les autres propriétés de cette correspondance et quel système d'opérations permettra de la réaliser».²²⁵ Définir les correspondances projectives comme combinaison de perspectives relève de la première démarche alors que définir comme von Staudt ces correspondances à partir de la propriété (vérifiée par les perspectives) de conservation d'harmonicité.

période, c'est une circonstance surprenante qu'il trouve cette définition complètement implicite par invariance de l'harmonicité, et cet événement a eu des conséquences exemplaires en algèbre et en géométrie.

“To von Staudt's predecessors the projectivities were given explicitly, though separately defined for point series, line pencils, plane pencils. Clearly von Staudt looked for one definition which, first, showed perspicuously the group property of projectivities; second, applied uniformly to all one-dimensional entities, and third, led in a straight way to the fundamental theorem of projective geometry. This excluded a constructive definition of projectivities; another solution would have been to define them as restrictions of collineations, but this probably was not elegant enough. In the historical framework of that period it was an astonishing occurrence that he hit upon the utterly implicit definition by invariance of harmonicity, and this event has had exemplary consequences in algebra and geometry.” [Freudenthal, 1980, 409-410]

²²³[Enriques, 1907, 89].

²²⁴[Enriques, 1898].

²²⁵[Enriques, 1898, 62].

Chapitre 8

Le temps des axiomatiques

Les recherches sur le théorème fondamental de la géométrie projective, les travaux inspirés de Klein et Lie sur la présentation en terme de groupes de transformations des diverses géométries, l'exemple de l'arithmétique, les débats philosophiques sur la nature des diverses géométries amènent les mathématiciens à essayer de donner aux nouvelles géométries non-euclidiennes et à la géométrie projective une présentation axiomatique. D'un point de vue mathématique, l'intérêt est certain puisque l'on contrôle ainsi rigoureusement les notions et les propositions fondamentales de la théorie. D'un point de vue philosophique, l'intérêt d'une telle présentation permet de concentrer la discussion sur le statut des axiomes. Une des motivations des *Vorlesungen über neuere Geometrie* de Moritz Pasch est certainement de montrer que le cadre volontairement restreint de la géométrie empirique suffit pour reconstruire formellement la totalité de la géométrie. Pieri et Whitehead sont, quant à eux, plutôt éloignés de ces considérations philosophiques et veulent simplement analyser en détail quelles sont et comment s'organisent les notions et propositions primitives. Pieri choisit de multiplier les axiomatiques en variant les notions primitives ; Whitehead développe son axiomatique en la justifiant à partir de considérations de pratique et en examinant soigneusement l'utilisation des axiomes dans le développement de la géométrie projective.

8.1 La nouvelle géométrie de Pasch

Comme le constate Enriques¹ dans l'encyclopédie des sciences mathématiques de Klein, Moritz Pasch est le premier à aborder la question des fondements de la géométrie projective en toute rigueur (au sens moderne du terme). La présentation rigoureuse de la nouvelle géométrie adoptée par Pasch est associée à une tentative philosophique d'en montrer le caractère empirique. Dès la préface de son traité *Vorlesungen über neuere Geometrie*², Pasch affirme le ca-

¹[Enriques, 1907, 70].

²[Pasch, 1882b].

Le traité de Pasch est réédité en 1926 avec une postface historique de Dehn ([Pasch, 1926]).

ractère de science naturelle de la géométrie³ ; selon Pasch, le but de la géométrie est de déduire à partir de notions et de propositions de base obtenues à partir de l'expérience spatiale ordinaire les lois de phénomènes plus complexes. Pour cela, il sera nécessaire de renoncer à certaines représentations habituelles et d'attribuer une signification nouvelle à certaines notions. De plus, si l'on veut conserver le caractère de science naturelle de la géométrie, il faut dès le début se limiter aux seuls aspects empiriques des concepts géométriques.⁴ En conséquence de quoi, Pasch s'interdit toute considération concernant l'infini, que ce soit l'infiniment grand ou l'infiniment petit. En fait, pour des raisons philosophiques, Pasch fait sien le point de vue adopté par Klein de commencer à travailler en se restreignant à une région limitée (accessible à l'expérience) de l'espace. De plus, il reprend dans son travail la stratégie de fondation inaugurée par von Staudt puisqu'il subordonne l'introduction des considérations numériques à l'étude des propriétés projectives des formes :

Le travail porte essentiellement seulement sur les propriétés projectives des figures et ne va pas plus loin [...]. Il commence par l'énonciation des concepts et des principes de base nécessaires et se termine avec l'introduction des coordonnées et du calcul des coordonnées des points et des plans.⁵ [Pasch, 1882b, III-IV]

Bien entendu, l'ambition de Pasch est d'arriver à définir la notion de coordonnée projective indépendamment de toute considération métrique. Cependant, le point de vue strictement empirique adopté par Pasch pour introduire les notions et les principes de base lui interdit toute considération de l'infini et l'obligera donc à introduire la notion non projective de congruence des figures pour démontrer le théorème fondamental de la géométrie projective.

La forme d'exposition adoptée par von Staudt est axiomatique⁶ : les notions et les propositions fondamentales⁷ étant posées, les définitions des nouvelles notions (que Pasch dénomme *notions dérivées*⁸) peuvent être réduites aux notions fondamentales et les théorèmes sont exclusivement déduits à partir des propositions fondamentales et des théorèmes précédemment démontrés.

Les théorèmes seront déduits des propositions de base, de telle manière que tout ce qui est nécessaire à l'établissement des théorèmes doit, sans exception, se trouver intégralement dans les propositions

³Considérer les mathématiques comme une science naturelle n'est pas l'apanage des empiristes. Hermite qui était un réaliste radical (et même naïf d'un certain point de vue) affirmait qu'il explorait le monde des idées mathématiques comme un naturaliste le monde matériel.

⁴Pasch signale que la géométrie se distingue des autres sciences naturelles en ce qu'elle n'a besoin d'emprunter à l'expérience qu'un nombre limité de concepts et de principes.

⁵„Die Arbeit befaßt sich im wesentlichen nur mit den projektiven Eigenschaften der Figuren und geht nicht weiter [...]. Sie beginnt mit der Aufzählung der erforderlichen Grundbegriffe und Grundsätze und schließt mit der Einführung der Koordinaten und der Koordinatenrechnung für Punkte und Ebenen.“

⁶Sur les rapports entre les présentations axiomatiques de Pasch et Hilbert, on peut consulter l'article de Contro [1975] *Von Pasch zu Hilbert*.

⁷Pasch adopte en 1882 la terminologie de „*Grundbegriff*“ et de „*Grundsatz*“ ; dans la seconde édition de son traité, en 1926, Pasch utilise les termes de „*Kernbegriff*“ et de „*Kernsatz*“.

Je choisis de traduire „Begriff“ par «notion» plutôt que par «concept» du fait de sa coloration un peu moins philosophique. En effet, même si le point de vue empiriste influe, comme on va le voir, fortement sur la présentation de Pasch, il n'est pas certain que l'intention de Pasch était de faire œuvre de philosophe au sens strict du terme.

⁸„abgeleitete Begriffe“.

de base.⁹

Il souligne que chaque notion nouvelle n'est définie qu'en utilisant les notions précédentes et qu'utiliser dans une démonstration une notion dérivée n'est que l'application de sa définition. Pour cela, Pasch utilise le plus souvent des définitions implicites et linguistiques. Une notion dérivée est la plupart du temps définie par l'expression de la possibilité d'utiliser un terme ou une tournure. Par exemple, comme on va le voir, la notion de droite est simplement introduite en autorisant l'expression « C se trouve sur la droite AB » dès que l'un des trois points A, B, C se trouve sur le segment défini par les deux autres.

Ainsi, selon Pasch, tout recours à une quelconque intuition est banni du cadre de la géométrie. Il explique son choix d'une exposition de type axiomatique à partir de ses conceptions strictement empiriste. Les notions fondamentales ne sont pas définies puisqu'elles ne sont pas réductibles et la compréhension de celles-ci ne peut se faire que par un renvoi à des objets naturels. De même, les propositions fondamentales ne se fondent que sur des observations répétées qui s'imposent plus nettement que des observations d'une autre sorte. Pasch précise dans une discussion sur l'intérêt et l'utilisation des figures géométriques¹⁰ que les propositions fondamentales sont les seules qui nécessitent un recours à une figure représentative pour être comprises. On peut penser que Pasch concevait la genèse des propositions fondamentales comme un processus de schématisation d'expériences communes. Par contre, Pasch n'aborde pas la question de la sélection des propositions fondamentales, ni de leur indépendance : en effet, l'expérience commune pourrait nous conduire à de nombreuses propositions rendant compte de situations simples qui pourraient être redondantes. La consistance des propositions fondamentales pourrait être assurée par leur caractère expérimental. Comme l'utilisation des procédures déductives n'amène aucune connaissance nouvelle, la connaissance géométrique n'est fondée que sur l'expérience. L'intérêt d'une présentation rigoureusement formelle de la géométrie est donc aux yeux de Pasch de garantir son origine empirique¹¹ :

Il s'agissait par conséquent de combler les lacunes dans le système traditionnel de la géométrie, d'obtenir une vue d'ensemble complète sur les représentations et les connaissances utilisées par la géométrie, en particulier sur celles qui sont inapparentes et cachées et par conséquent de réunir celles semblant appropriées pour être les «notions et les propositions fondamentales» en un «noyau», à partir duquel *tout* ce qui relève de la géométrie sera extrait.¹²

Pasch commence par traiter une géométrie limitée. En effet, notre expérience étant bornée, les concepts et les propositions fondamentales que l'on va abstraire de celle-ci concernent des objets (formels) limités. Ainsi, Pasch décrit d'abord la notion fondamentale de segments à partir de laquelle il déduira formellement

⁹„Die Lehrsätze werden aus den Grundsätzen deducirt, so daß Alles, was zur Begründung der Lehrsätze gehört, ohne Ausnahme sich in der Grundsätzen niedergelegt finden muß.“ [Pasch, 1882b, 5]

¹⁰[Pasch, 1882b, 42-45].

¹¹De fait, avec les présentations axiomatiques, la discussion philosophique du problème de l'espace se concentre sur l'origine et le statut des axiomes.

¹²„Es galt also, die Lücken in dem überlieferten Lehrgebäude der Geometrie zu ergründen, über die von der Geometrie verarbeiteten Vorstellung und Erkenntnisse, besonders die unscheinbaren und versteckten, eine vollständige übersicht zu gewinnen und schließlich daraus die geeignet scheinenden als „Kernbegriffe“ und „Kernsätze“ zu einem „Kern“ zu vereinigen, aus dem *alles*, was zur Geometrie gehört, herauswächst.“ [Pasch, 1924, 231]

celle de droite.¹³ Il développe à partir du *noyau*¹⁴, c'est-à-dire des notions et des propositions fondamentales, une première théorie jusqu'à obtenir (en utilisant exclusivement des procédures déductives) les concepts et les axiomes qui servent ordinairement de fondements à la géométrie projective. Ce corpus s'organise en une *souche*¹⁵ à partir de laquelle la théorie classique de la géométrie projective peut se déduire :

La géométrie projective apparaît à partir d'une «souche» obtenue par déduction à partir du noyau de la géométrie en séparant dans le champ de la géométrie sa partie projective.¹⁶

Du point de vue de Pasch, il faut distinguer les notions et les propositions de base¹⁷ des notions-souche et propositions-souche¹⁸ : les premières sont données empiriquement alors que les secondes sont construites formellement à partir des premières. Les notions-souches sont donc d'un point de vue formelle des *notions dérivées*. Les théories mathématiques apparaissent comme *théories-souche*, c'est-à-dire comme des condensations théoriques à l'intérieur du corpus des définitions et théorèmes que l'on déduit à partir d'un noyau.¹⁹

L'utilisation des propositions fondamentales, en raison de leur origine empirique, est soumise à certaines restrictions : elles ne peuvent s'appliquer que dans un cadre fini.

Les propositions fondamentales doivent contenir complètement le matériau empirique à utiliser en mathématiques de telle manière qu'après les avoir posées, on n'ait plus besoin de revenir aux perceptions sensibles. On doit d'autant plus précautionneusement déterminer à l'avance les éventuelles restrictions auxquelles est soumise l'application d'une proposition fondamentale particulière.²⁰ [Pasch, 1882b, 17]

Pasch donne l'exemple de la proposition qui autorise à placer un point entre deux points donnés d'un segment. Si l'on applique cette proposition de manière répétée, autrement dit si A et B sont des points du segment primitif, que l'on insère un point C entre A et B , puis un point C_1 entre A et C , puis un point C_2 entre A et C_1 , et ainsi de suite, on se rapproche du point A jusqu'à un moment où l'on doit, selon Pasch, renoncer à insérer un nouveau point car les deux points sont trop proches pour définir un segment. Pasch précise que bien

¹³Dans son article méthodologique *Betrachtungen zur Begründung der Mathematik*, Pasch argumente en soulignant que son point de vue a été celui des mathématiques euclidiennes :

La géométrie a longtemps existé sans connaître notre ligne droite. En conséquence, il paraît naturel d'admettre le segment droit comme notion fondamentale. [Pasch, 1924, 232]

¹⁴„Kern“.

¹⁵„Stamm“.

¹⁶„Die projektive Geometrie entspringt aus einem „Stamm“, der auf dem Boden der Geometrie vor der Abspaltung ihres projektiven Teiles gewonnen ist, durch Deduktion aus dem Kern der Geometrie.“ [Pasch, 1924, 232]

¹⁷„Grundbegriff“ ou „Kernbegriff“ et „Grundsatz“ ou „Kernsatz“.

¹⁸„Stammbegriff“ et „Stammsatz“.

¹⁹Pasch applique ce schéma méthodologique à l'ensemble des mathématiques, en particulier à l'analyse [Pasch, 1914].

²⁰„Die Grundsätze sollen das von der Mathematik zu verarbeitende empirische Material vollständig umfassen, so daß man nach ihrer Aufstellung auf die Sinneswahrnehmungen nicht mehr zurückzugehen braucht. Um so vorsichtiger müssen von vornherein etwaige Einschränkungen festgestellt werden, denen die Anwendung einzelner Grundsätze unterliegt.“

entendu, il est impossible de préciser «une frontière parfaitement nette»²¹ entre ces deux situations. Lorsque les figures deviennent trop petites, elles sont trop indéfinies pour être accessibles à nos sens et les propriétés fondamentales ne peuvent s'appliquer dans ce cas.

Lorsque l'on étend trop les domaines, l'application des propositions fondamentales peut être aussi fautive. Pasch donne l'exemple d'un observateur sur une courbe simple fermée. Si la courbe est suffisamment grande pour que l'observateur ne perçoive et ne parcourt qu'une partie limitée de cette courbe, il peut être amené à conclure que la courbe est une droite. Lorsque les figures deviennent trop grandes, elles sont hors de portée de notre expérience et on ne peut pas extrapoler les propriétés géométriques à celles-ci.

Pasch conclut ses réflexions sur les conditions d'applications des propositions de base qu'il faut s'en servir en toute confiance tant que les figures concernées ne sont ni trop grandes, ni trop petites.

8.1.1 L'énumération des notions et des principes de base

La ligne droite

Pasch commence par examiner l'axiome, ordinairement admis par les géomètres, qui affirme que par deux points, il passe une ligne droite. Cet axiome oblige à considérer les droites comme illimitées. Or, selon Pasch, «cette exigence ne correspond à aucun objet sensible».²² Seule est accessible à notre sensibilité la notion de droite limitée, de segment. Les axiomes de la ligne concernent uniquement la notion de segment et de point appartenant à un segment et sont obtenus, d'après Pasch, à partir d'observations très simples. Pasch énonce huit propositions fondamentales permettant d'étudier les positions relatives de points alignés :

1. Entre deux points, on peut toujours tracer un segment de droite, et seulement un.
2. On peut toujours désigner un point qui se trouve à l'intérieur d'un segment de droite donné.
3. Si le point C se trouve à l'intérieur du segment AB , alors le point A se trouve à l'extérieur du segment BC .
4. Si le point C se trouve à l'intérieur du segment AB , alors tous les points du segment AC sont en même temps des points du segment AB .
5. Si le point C se trouve à l'intérieur du segment AB , alors un point qui n'appartient à aucun des segments AC et BC ne peut pas appartenir au segment AB .
6. Soit A et B deux points, alors on peut choisir le point C de telle manière que B se trouve à l'intérieur du segment AC .
7. Si le point B se trouve à l'intérieur du segment AC et du segment AD , alors soit le point C se trouve à l'intérieur du segment AD , soit le point D se trouve à l'intérieur du segment AC .

²¹[Pasch, 1882b, 18].

²²„Diese Forderung entspricht keinem wahrnehmbaren Object“. [Pasch, 1882b, 4]

8. Si le point B se trouve à l'intérieur du segment AC et le point A à l'intérieur du segment BD , alors A se trouve également à l'intérieur du segment CD .²³

Pasch définit la notion de prolongement d'un segment : si B est un point du segment AC , le segment BC est un prolongement du segment AB , puis celle de série linéaire²⁴ pour désigner trois points dont l'un appartient au segment joignant les deux autres. Enfin, Pasch propose une définition implicite de la notion de droite²⁵ :

Définition 8.1 (Définition de la notion de droite) *Si A, B, C constitue une série linéaire, on dit C se trouve sur la droite AB .*

Pasch donne une première définition de la notion de droite sans définir réellement un nouvel objet, ni élargit simplement le vocabulaire de la géométrie pour caractériser des situations ne concernant que les points *propres*, c'est-à-dire les points du domaine limité considéré. La définition de la droite ne résulte pas de l'ajout à un segment de points qui échapperait au domaine ; définir la notion de droite consiste à définir la notion de colinéarité de trois points :

Le passage du segment droit à la ligne droite nécessitait une justification par une déduction et une définition, bien avant que l'on travaille avec des points impropres.²⁶

Pasch démontre alors immédiatement :

Théorème 8.1 *Par deux points, on peut toujours placer une ligne droite.*²⁷

Théorème 8.2 *Chaque droite est déterminée par deux quelconques de ses points.*

Si A, B, C appartiennent à une même droite, trois situations sont possibles selon que A est à l'intérieur de BC , B à l'intérieur de AC ou C à l'intérieur de AB . Pasch définit la relation «entre» en posant que si C est à l'intérieur du segment AB , C est entre A et B . Il en déduit une série de théorèmes qui munissent la droite d'une structure ordonnée :

Théorème 8.3 *1. Si trois points se trouvent sur une ligne droite, alors un de ceux-ci se trouve entre les deux autres.*

- 2. Si les trois points A, B, C se trouvent sur une ligne droite, C étant entre A et B , alors ni A ne se trouve entre B et C , ni B ne se trouve entre A et C .*

²³En 1926, dans la seconde édition de son traité, Pasch ajoute un 9^e axiome qui permet la construction de triangle :

9. Etant donné deux points A et B quelconques, alors on peut choisir un troisième point tel que aucun des trois points A, B, C ne se trouve à l'intérieur du segment joignant les deux autres.

²⁴Pasch utilise l'expression „gerade Reihe“.

²⁵Une telle définition permet d'éviter de considérer la droite AB comme l'ensemble des points constituant une série linéaire avec A et B .

²⁶„Der Übergang von der geraden Strecke zur geraden Linie bedurfte der Rechtfertigung durch eine Deduktion und eine Definition, noch bevor man mit uneigentlichen Punkten arbeitete.“ [Pasch, 1924, 232]

²⁷[Pasch, 1882b, 8].

3. Soit deux points A et B d'une droite, alors on peut toujours choisir C tel que C soient entre A et B .
4. Soit deux points A et B d'une droite, alors on toujours choisir C tel que A soit entre B et C .
5. Si les quatre points A, B, C, D se trouvent sur une droite, C entre A et B , D entre A et C , alors D est aussi entre A et B .
6. Si les points A, B, C, D se trouvent sur une droite, C et D entre A et B , mais D n'étant pas entre A et C , alors D est entre B et C .
7. Si les points A, B, C, D se trouvent sur une droite, D entre A et B , alors D est soit entre A et C , soit entre B et C .
8. Si les points A, B, C, D se trouvent sur une droite, C entre A et B , D entre B et C , alors C est entre A et D .
9. Si les points A, B, C, D se trouvent sur une ligne droite, B entre A et C et de même B entre A et D , alors A n'est pas entre C et D .
10. Si les points A, B, C, D se trouvent sur une ligne droite, B entre A et C , de même B entre A et D , alors B n'est pas entre C et D .
11. Si les points A, B, C, D se trouvent sur une ligne droite, A entre B et C , B entre A et D , alors A est entre C et D .
12. Si on a sur une droite un certain nombre (fini) de points, alors on peut en extraire en deux entre lesquels tous les autres sont situés.²⁸

La relation «entre» permet à Pasch de définir la situation générale de points sur la droite.²⁹ La donnée d'un point S sur une droite m divise celle-ci en deux branches³⁰. Pasch définit de nouveau cette notion de manière implicite : soit A et B deux points de la droite m ; ils sont du même côté par rapport à S si A est entre B et S ou si B est entre A et S . Ils sur des côtés différents si S est entre A et B . La relation «être du même côté» est transitive.

Définition 8.2 (Définition de la notion de branche) *Si A et B se trouvent par rapport à S sur le même côté de la droite m , on peut dire que B se trouve sur la branche SA .*³¹

Pasch précise que la définition de la branche SA ne dépend pas du point choisi sur ce côté : Si A' et A sont du même côté par rapport à S , les branches SA et SA' sont identiques.

Le plan

Après avoir décrit la ligne droite, Pasch s'intéresse au plan. Il refuse, comme pour la droite, la propriété habituellement admise qu'un plan est illimité ; puis-

²⁸[Pasch, 1882b, 9-11]

²⁹Pasch analyse aussi la relation «entre» pour une ligne fermée et en déduit la notion de séparation pour les couples de points.

³⁰J'ai choisi de traduire le terme utilisé par Pasch „*Schenkel*“ par «branche» plutôt que par «côté» pour le différencier de la traduction de „*Seite*“.

³¹„Wenn A und B in der Geraden m auf derselben Seite von S liegen, so kann man sagen : B liegt im *Schenkel* SA .“ [Pasch, 1882b, 27]

qu'il s'en tient à des propriétés relevant de la perception immédiate, il restreint son propos au contraire à des surfaces planes limitées.

D'après cela, il sera question en premier lieu uniquement de *surfaces planes* et de *points d'une surface plane*, la notion de «plan» sera introduite seulement ensuite.³² [Pasch, 1882b, 20]

Pasch énonce quatre propositions fondamentales au sujet des surfaces planes :

1. Par 3 points quelconques, on peut poser une surface plane.
2. Si un segment est tracé entre deux points d'une surface plane, alors il y a une surface plane qui contient tous les points de la surface originale et tous ceux du segment.
3. Si deux surfaces planes P, P' ont un point en commun, on peut désigner un autre point qui est à la fois contenu dans une surface plane contenant tous les points de P et dans une surface plane contenant tous ceux de P' .
4. Soit trois points A, B, C d'une surface plane reliés deux à deux par les segments AB, AC, BC et dans la même surface une droite DE passant par un point situé à l'intérieur du segment AB , alors le segment DE ou un prolongement de celui-ci passe soit par un point du segment AC , soit par un point du segment BC .

La notion de plan est définie de manière implicite en donnant un sens à l'expression «appartenir au plan des points A, B, C » :

Définition 8.3 (Définition de la notion de plan) *Etant donné trois points non alignés A, B, C et D un point quelconque. S'il existe une surface plane contenant A, B, C, D , on dit que D appartient au plan ABC .*

Pasch montre alors une série de théorèmes concernant la détermination d'un plan par trois points non-alignés, par une droite et un point n'appartenant pas à cette droite et par deux droites concourantes. Puis, il établit que deux plans ayant un point commun ont nécessairement une droite commune.

Une figure plane est définie comme constituée de points et de droites appartenant à un même plan. Pasch précise que si l'on ajoute à une figure plane des éléments obtenus par construction, on ne sort pas du plan et que l'on obtient une nouvelle figure plane. Il termine l'exposition des propriétés élémentaires du plan par une série de théorèmes d'incidence :

Théorème 8.4 1. *Soit A, B, C trois points non-alignés, D un point de la droite AB entre A et B , g une droite dans le plan ABC , qui passe par D , mais qui ne passe par aucun des points A, B, C , alors g rencontre soit la droite AC entre A et C , soit la droite BC entre B et C .*

2. *Soit A, B, C trois points non-alignés, a un point de la droite BC entre B et C , b un point de la droite AC entre A et C , c un point de la droite AB entre les points A et B , alors les points a, b, c ne sont pas alignés.*

3. *Soit A, B, C, D quatre points coplanaires, alors soit les droites AD et BC , soit BD et AC , soit CD et AB ont (au moins) un point commun.³³*

³²„Demgemäß wird zunächst nur von der ebenen Fläche und von Punkten einer ebenen Fläche die Rede sein, der Begriff „Ebene“ aber erst nachher eingeführt werden“.

³³[Pasch, 1882b, 25-26]

Les faisceaux et les gerbes de droites

Pasch introduit la notion de gerbe de rayons en faisant référence aux rayons lumineux émanant d'un même point. Deux droites l et m concourantes (respectivement concourantes et coplanaires) en un point S définissent une gerbe (respectivement un faisceau) de rayons, notée lm . Le point S est appelé le «sommet ou le centre de la gerbe»³⁴ ou du faisceau. Pasch commence par étudier les faisceaux de droites en les considérant plutôt comme des ensembles de demi-droites ou branches (selon sa terminologie) issues d'un même point que comme un ensemble de droites concourantes. Ainsi, il définit la relation «entre» pour les branches.

Définition 8.4 (La relation «entre» pour les branches) *Soit un faisceau de sommet S , A un point de la branche SA et B un point de la branche SB . Si la branche SC coupe le segment AB , on dit que la branche SC est entre les branches SA et SB .*

Il généralise cette relation aux rayons d'un faisceau en introduisant la notion de rayon-frontière³⁵ : comme on peut déterminer si deux points sont d'un même côté d'un plan par rapport à une droite, on peut de même déterminer si deux branches sont d'un même côté du plan par rapport à une droite. La donnée d'un rayon, dite «rayon frontière»³⁶ va en quelque sorte orienter le faisceau et permettre de définir une relation «entre» sur l'ensemble des rayons d'un faisceau.

Définition 8.5 (La relation «entre» pour les rayons d'un faisceau) *Etant donné trois rayons e, f, g d'un faisceau de centre S . Soit k une rayon déterminé du faisceau, A, B, C trois points appartenant respectivement à e, f, g et choisis du même côté du plan par rapport à k , SA, SB, SC les trois branches correspondantes. Si la branche SC est entre les branches SA et SB , on dit que le rayon g est entre les rayons e et f pour le rayon frontière k . Si k est entre e et f par rapport à g , on dit que e et f sont séparés par g et k .³⁷*

Pasch déduit de cette définition une série de propositions analogues à celles montrées pour les points d'une courbe fermée ce qui l'amène à constater qu'un faisceau de rayons peut être comparé à une ligne fermée.

Dans la seconde édition de son ouvrage, Pasch ajoute trois théorèmes qui montrent la possibilité de construction de figures à partir du triangle :

4. Soit A, B, C trois points non-alignés, a un point de la droite BC entre B et C , b un point de la droite CA entre A et C , alors a est différent de A et b de B ; les droites aA et bB sont différentes et se coupent en un point E à la fois entre a et A et entre b et B ; E ne se trouve sur aucune des droites BC, CA, AB .
5. On peut choisir A, B, C, D de telle manière que trois d'entre eux ne puissent être alignés et que la droite AD passe par un point du segment BC et que la droite BD passe par un point du segment AC .
6. Si quatre points A, B, C, D sont dans la situation du théorème précédent, alors la droite CD passe par un point du segment AB . [Pasch, 1926, 25]

³⁴„Dieser Punkt heißt der *Scheitel* oder *Mittelpunkt des Bündels*“. [Pasch, 1882b, 28]

³⁵Pour analyser la relation «entre» pour une ligne fermée (sans point double), Pasch avait introduit la notion de «point-frontière». En fait, il excluait ce point de la courbe et se ramenait ainsi à une relation analogue à celle de la droite.

³⁶Pasch utilise le terme de „*Grenzstrahl*“.

³⁷Par la suite, Pasch note cette propriété : ef est séparé par gk .

- Théorème 8.5** 1. Soit e, f, g, k des rayons d'un faisceau, alors soit fg est séparé par ek , soit ge par fk soit ef par gk et chaque situation exclut les deux autres.
2. Soit e, f, k des rayons d'un faisceau, alors on peut choisir un rayon du faisceau g tel que ef soit séparé par gk .
3. Si dans un faisceau de rayons, ef est séparé par gk ou hk et pas par l'autre, alors ef est séparé par gh .
4. Si dans un faisceau de rayons, ef est séparé par gk , alors gk est séparé par ef .

Une fois établies les propriétés générales des faisceaux de rayons, Pasch étudie celles des gerbes de rayons en insistant sur les analogies entre les propriétés des gerbes de rayons et celle des points. Dans un premier temps, il montre une forme (légèrement) généralisée du théorème du quadrilatère de von Staudt et obtient comme corollaire un critère de coplanarité des droites. Il en déduit que l'on peut considérer la gerbe déterminée par deux rayons coplanaires même lorsque que l'on ne connaît pas leur point d'intersection. Un tel lemme est important pour son projet : en effet, il lui faut pouvoir définir les notions de faisceau et de gerbe de rayons indépendamment de la détermination de leur sommet³⁸ ; techniquement, ce résultat est nécessaire pour obtenir la notion de point projectif à partir de celle de gerbe. De plus, l'*a priori* empiriste de Pasch lui impose de se limiter au cadre de nos expériences perceptuelles pour déterminer si deux droites sont sécantes. Ce critère permet de caractériser la notion de droites sécantes sans faire référence à leur point d'intersection.

Pasch utilisera de nombreuses fois le même procédé de généralisation des définitions. Il est caractéristique de la démarche formelle adoptée par Pasch : il ne cherche pas à définir directement (explicitement) de nouveaux éléments lors d'une généralisation – ainsi il n'introduit pas de nouveaux points lorsqu'il généralise les notions de faisceaux ou de gerbes – ; au contraire la stratégie de généralisation de Pasch consiste à considérer une propriété que l'on peut déduire de la définition originale comme nouvelle définition :

Définition 1 \implies Propriété 1 \iff Définition 2.

Le premier point de l'argumentation de Pasch consiste à s'apercevoir qu'étant donné deux droites l, m d'un faisceau et un point A n'appartenant au plan lm , la droite intersection des plans Al et Am n'est autre que la droite λ qui joint A et le sommet du faisceau.

Le second point est aussi élémentaire : étant donné deux points A et B n'appartenant pas au plan lm , en notant λ et μ les droites de la gerbe qui passent respectivement par A et B , les plans λB et μA coïncident avec le plan ABS où S est le sommet de la gerbe.

Enfin, Pasch considère dans un plan deux droites l et m à partir desquelles il construit la figure du quadrilatère de von Staudt en s'assurant scrupuleusement de l'existence et de la position des points d'intersection des droites qu'il considère. En particulier, il adopte une configuration telle que tous les points qu'il construit sont situés entre des points déjà déterminés. Il choisit dans le plan lm un point C de l'autre côté que l par rapport à m . Etant donné deux points A

³⁸Le lemme de Pasch est à rapprocher de la détermination des éléments idéaux par Klein.

et B sur l ,³⁹ il trace les droites CA et CB qui coupent m respectivement en D et E . Les droites AE et BD se coupent en F . La droite CF intersecte la droite l en un point G . C'est la construction classique du quadrilatère de von Staudt. Pasch considère alors une autre droite λ coplanaire avec l et non-coplanaire avec m , il recommence la même construction et définit les points A', B', F', E', D', C' qui jouent respectivement le même rôle que A, B, C, D, E, F dans la première construction.⁴⁰ Il en déduit trois théorèmes⁴¹ :

Théorème 8.6 (Théorème du quadrilatère de von Staudt) *Si m et λ sont coplanaires, alors les droites CF et $C'F'$ sont concourantes en G .*

Théorème 8.7 (Réciproque du théorème de von Staudt) *Si les droites CF et $C'F'$ sont concourantes, alors m et λ sont coplanaires.*

Théorème 8.8 *Si les paires de droites $lm, l\lambda, m\lambda, l\mu, m\mu$ sont coplanaires et si le plan lm ne contient ni λ , ni μ , alors λ et μ sont aussi coplanaires.*

Comme conséquence du dernier théorème, Pasch étend la définition de la notion de gerbe de droites en prenant comme propriété caractéristique le fait que les droites d'une gerbe sont coplanaires deux à deux, ce qui permet d'éviter toute référence à un quelconque point d'intersection et d'intégrer les gerbes de droites parallèles⁴² :

Définition 8.6 (Définition étendue de la gerbe)⁴³ *Si les droites efg sont deux deux liées par un plan, sans que les trois le soient par un même plan ou si les droites efg sont contenues dans un plan et peuvent être liées par un plan avec une droite extérieure à leur plan, alors on dit [...] que g est une droite de la gerbe ef .*⁴⁴

Pasch caractérise implicitement les ensembles de droites qui, du point de vue habituel, s'intersectent en dehors du domaine limité considéré. Il caractérise en même temps les ensembles de droites qui s'intersectent à l'infini. L'intérêt de

³⁹Pasch précise que l'éventuel point d'intersection entre l et m n'appartient pas au segment AB . Ce choix permet d'obtenir une figure dont tous les points restent «proches».

⁴⁰Par rapport à la première construction, Pasch inverse donc les rôles de D' et E' et ceux de F' et C' . L'intérêt de cette inversion est de considérer les droites CC', DD', EE' et FF' dans la suite de la démonstration.

⁴¹[Pasch, 1882b, 34]

⁴²Pasch qualifie de «propres» („*eigentlich*“) les gerbes dont les droites ont un point commun.

⁴³„Wenn die Strahlen efg paarweise durch eine Ebene verbunden werden, aber nicht alle drei durch eine Ebene, oder wenn die Strahlen efg in einer Ebene enthalten sind und mit einer von ihrer Ebene ausgeschlossenen Geraden durch Ebenen verbunden können, so sagt man [...] g ist ein Strahl des Bündels ef .“

⁴⁴La définition étendue de la notion de gerbe entraîne une extension de celle de faisceau de droites :

Définition 8.7 *Des rayons qui se trouvent dans un plan et en même temps dans une gerbe sont appelé un faisceau de rayons [...]. „Strahlen, welche in einer Ebene und zugleich in einem Bündel liegen, werden ein Strahlenbüschel genannt [...].“ [Pasch, 1882b, 36]*

la démarche de Pasch est de permettre de retrouver la notion usuelle de gerbe (ou de faisceau) uniquement par des considérations limitées au domaine borné initial; il n'a besoin ni de prolonger les droites, ni d'introduire des éléments impropres.

Pasch montre une série de propositions qui partant de cette définition concernant trois droites déterminent l'utilisation du mot «gerbe» pour désigner les ensembles de droites deux à deux coplanaires :

- Proposition 8.1.1.1**
1. *Si les droites g et h sont dans la gerbe ef , alors elles sont coplanaires.*
 2. *Si les droites g et h sont dans la gerbe ef , alors les droites e et f sont dans la gerbe gh .*
 3. *Si e' est une droite de la gerbe ef différente de f , alors la gerbe de droites ef coïncide avec $e'f$.*
 4. *Si e' et f' sont des droites quelconques de la gerbe ef , alors les gerbes ef et $e'f'$ sont identiques.*
 5. *Par deux droites quelconques coplanaires, on peut mettre une gerbe. Une telle gerbe peut être désignée par ef .*
 6. *Chaque gerbe est déterminée par deux quelconques de ses droites.*⁴⁵

Ainsi définies, les gerbes vérifient une série de propriétés qui vont justifier l'extension de l'acception du mot «point». Une droite g se trouvant dans deux gerbes S et T est caractérisée par cette propriété. Pasch désigne donc une telle droite par ST et propose de dire que « S est une gerbe de la droite g ou que S appartient à g »⁴⁶ [Pasch, 1882b, 37]. Par contre, il laisse encore ouverte la question de savoir si deux gerbes quelconques ont toujours une droite commune.⁴⁷ De même, si un plan P contient une droite d'une gerbe S , il propose de dire que S est une gerbe de P et démontre quelques propositions qui généralisent des propriétés élémentaires du plan.

- Théorème 8.9**
1. *Toute droite qui a deux gerbes en commun avec un plan appartient à ce plan.*
 2. *On peut toujours trouver un plan passant par une droite donnée et par une gerbe donnée.*
 3. *Deux droites, qui ont une gerbe en commun, sont coplanaires.*

8.1.2 L'extension de l'acception des mots de la géométrie

Le mot «point»

Pasch envisage de conserver au mot «point» son acception primitive, c'est-à-dire restreinte aux seuls points propres et de développer la géométrie autour

⁴⁵[Pasch, 1882b, 35-36].

⁴⁶„[...] S ist ein Strahlenbündel der Geraden g , das Bündel S gehört zur Geraden g [...]“.

⁴⁷Si les deux gerbes sont propres, c'est évident. Si une des gerbes est propre, la démonstration ne pose pas de problème. Par contre, dans le cas général, Pasch estime ne pas pouvoir encore apporter de réponse.

de la notion de gerbe. L'avantage de cette solution serait la brièveté et la simplicité mais selon Pasch, on perdrait une grande part de l'intuition car les figures constituées de gerbes sont difficiles à se représenter. Il propose donc au contraire d'étendre l'acception du mot «point» à celle qu'avait jusqu'à présent l'expression «gerbe de rayons».

Nous avons la conviction que le mot «point» ne doit plus être utilisé dans un sens étroit, qu'au contraire l'expression «*le point S se trouve sur la droite g* » doit être désormais synonyme de l'expression «*la gerbe de droites S appartient à la droite g* » et que le point S doit être appelé *point propre*⁴⁸ là où la gerbe de droites S était qualifiée de propre.⁴⁹

Après avoir justifié sa démarche par rapport à l'exposition de la géométrie, Pasch éprouve le besoin d'ajouter un argument en signalant que le fait d'étendre la signification de certains mots n'est pas nouveau en mathématiques. Il cite les exemples des mots «nombres» et «fonction». Bien entendu, il est conscient des difficultés occasionnées par l'extension des acceptions de certains mots. En particulier, il faut être très prudent avec les définitions et les théorèmes dans lesquels intervenait le mot «point». Certains, pour l'instant, comme les théorèmes utilisant la relation «entre» doivent être reformulés en terme de points propres. D'autres définitions ou propositions restent valides avec les nouvelles acceptions :

On dit que les droites g et h se coupent, dès que, un (et même seulement un) point se trouve dans les deux, sans que un point propre en commun soit découvert.⁵⁰

Les théorèmes reliant les notions de points et de droites ainsi que la série de théorèmes concernant la détermination des plans par trois points non-alignés, par un point et une droite, ... sont étendus avec la nouvelle acception du mot «point» :

- Théorème 8.10** 1. *Par un point quelconque et un point propre, on peut toujours tracer une droite.*
2. *Chaque droite est déterminée par deux de ses points.*
3. *Par deux points quelconques et un point propre, on peut toujours poser un plan.*
4. *Chaque plan est défini si on donne trois de ses points dont au moins un propre et si ils ne sont pas alignés.*

⁴⁸Pasch signale que von Staudt avait déjà utilisé, dans son traité *Geometrie der Lage* [Staudt, 1847], l'expression «points impropres» („*uneigentliche Punkte*“) pour désigner les points à l'infini ; de même, Klein introduit les expressions de «points idéaux» ou de «points impropres». On notera que la démarche de Pasch est inverse de celle de ses deux prédécesseurs : en effet, chez von Staudt et Klein, ce sont les points impropres qui sont qualifiés alors que Pasch qualifie les points propres.

⁴⁹„Wir treffen in der That die Bestimmung, dass das Wort „Punkt“ nicht mehr in der bisherigen Bedeutung angewendet werden soll, dass vielmehr mit der Aussage „das Strahlenbündel S gehört zur Geraden g “ fortan gleichbedeutend sein soll die Aussage „der Punkt S liegt in der Geraden g “, und dass, wo das Strahlenbündel S als eigentliches bezeichnet wird, auch der Punkt S ein *eigentlicher Punkt* genannt werden soll.“ [Pasch, 1882b, 40]
Dans l'édition de 1926, Pasch ajoute qu'il s'agit d'une définition implicite (*implizite Definition*).

⁵⁰„Man sagt, dass die Geraden g und h sich schneiden, sobald ein (und zwar nur ein) Punkt in beiden liegt, ohne dass ein gemeinschaftlicher eigentlicher Punkt gefordert wird.“ [Pasch, 1882b, 41]

5. *Une droite qui a deux points en commun avec un plan, est entièrement contenue dans celui-ci.*
6. *Par une droite et un point, on peut toujours poser un plan*
7. *Un plan est défini si on connaît une de ses droites et un de ses points et si le point est extérieur à la droite.*
8. *Par deux droites qui ont un point commun, on peut toujours poser un plan.*
9. *Chaque plan est défini par deux de ses droites.*
10. *Si deux plans ont en commun un point propre, alors ils ont une droite commune.*
11. *Deux droites dans un plan ont toujours un point commun.*
12. *Une droite et un plan ont toujours un point commun.*
13. *Deux plans ont toujours un point commun.*
14. *Trois plans dont deux se coupent le long d'une droite ont toujours un point commun.*⁵¹

Pasch désigne sous le terme de figure⁵² un groupe quelconque de points (au sens étendu), de droites et de plans. Une figure peut être enrichie en y ajoutant arbitrairement d'autres éléments, mais aussi en y adjoignant des éléments par construction comme des points d'intersection de droites ou de plans. A cet égard, l'extension de la signification du mot «point» n'est pas neutre sur la pratique du géomètre. Pasch insiste longuement sur les précautions à prendre lorsque l'on construit de nouveaux éléments. Ainsi, on peut toujours définir le point d'intersection de deux droites. Dans la suite de la construction, si le point d'intersection n'est pas propre, il faut utiliser à la place de celui-ci les deux droites qui ont servi à le définir. De plus, dans les théorèmes précédents, seuls des points propres étaient concernés. Les représentations des figures résumaient l'ensemble des hypothèses et des constructions du problème. Lorsque sont concernés des points quelconques, la situation est différente : un point quelconque peut être figuré comme un point ou par la donnée de deux droites. Donc, l'introduction de chaque point quelconque donne lieu à deux cas et donc, lorsque l'on multiplie les points, de nombreux cas sont à examiner. Pasch distingue dans la pratique du géomètre deux moments : celui de la représentation et celui de la démonstration :

Là où, dans la démonstration proprement dite, plusieurs cas sont distingués, on pourrait aussi expliquer chaque cas sur une figure particulière. Pourtant, une figure qui illustre un cas quelconque, remplit son rôle si la démonstration est guidée de manière unique.⁵³

Il n'est pas indispensable de faire des figures ; en facilitant la découverte et la compréhension des relations entre les données du problèmes, leur rôle est totalement heuristique. Pasch précise qu'un théorème est réellement démontré lorsque sa preuve est indépendante des figures et qu'une preuve incompréhensible sans la figure correspondante ne satisfait pas aux exigences que Pasch s'impose.

⁵¹[Pasch, 1882b, 41-42]

⁵²Pasch utilise ici le terme de „Figur“ sans pour autant faire une différence conceptuelle avec celui de «Abbildung». Les deux termes sont d'ailleurs échangés dans les deux éditions du traité de Pasch.

⁵³„Wo im Beweise selbst mehrere Fälle unterschieden werden, da mag man auch die einzelnen Fälle an besonderen Figuren erläutern. Wird der Beweis jedoch einheitlich geführt, so erfüllt eine Abbildung, die irgendeinen Fall veranschaulicht, vollkommen ihren Zweck.“[Pasch, 1882b, 43]

La figure n'est pas indispensable pour une preuve complète.⁵⁴

Les seules propositions pour la compréhension desquelles la figure correspondante est indispensable sont les propositions fondamentales.

On ne peut pas saisir le contenu géométrique des propositions fondamentales sans figures représentatives. Elles expriment ce qui est à observer dans certaines figures très simples.⁵⁵

Le mot «droite»

De nombreuses questions restent en suspens : peut-on tracer une droite entre deux points quelconques ?, les points communs à deux plans constituent-ils une droite ?, est-ce que trois points quelconques non-alignés d'un plan suffisent à déterminer ce dernier ?, est-ce que l'on peut faire passer un plan par trois points quelconques non-alignés ? Pasch tente d'apporter des réponses à ces questions que tout exposé de géométrie se doit d'élucider. Il propose de modifier l'acception du mot «droite» en lui faisant prendre le sens qu'avait l'expression «faisceau de plans». Pour justifier cette modification, il commence par compléter son étude des faisceaux de plans en proposant une définition de ceux-ci adaptée à la nouvelle signification du mot «point» :

Définition 8.8 (Définition généralisée des faisceaux de plans) *Si trois plans P, Q, R ont deux points en commun, on dira : le plan R se trouve dans le faisceau de plans PQ .*⁵⁶

Si les deux plans P et Q ont une droite en commun, le faisceau est dit propre. Si les deux plans P et Q ont au moins deux points quelconques en commun A, B , le plan du faisceau PQ qui passe par un point propre C (qui n'est pas un point commun à P et Q) est le plan ABC . Pasch en conclut :

Proposition 8.1.2.1 *1. On peut toujours faire passer un faisceau de plans par deux plans quelconques.*

2. Un faisceau de plans est déterminé par deux quelconques de ses plans.

*3. Un point qui appartient à deux plans d'un faisceau de plans g , appartient à tous les plans du faisceau g .*⁵⁷

Lorsque le faisceau est propre (possède un axe), dire que A est un point du faisceau est équivalent à dire que A appartient à l'axe du faisceau, ce qui motive la définition suivante :

⁵⁴„[...] ; bei einem vollkommenen Beweise ist die Abbildung entbehrlich.“ [Pasch, 1882b, 45]

⁵⁵„Die Grundsätze kann man ohne entsprechende Figuren nicht einsehen ; sie sagen aus, was an gewissen, sehr einfachen Figuren beobachtet worden ist.“ [Pasch, 1882b, 43]

⁵⁶[Pasch, 1882b, 50].

⁵⁷Un point qui appartient à deux plans d'un faisceau g est appelé *un point du faisceau g* (ein Punkt des Ebenenbüschels g). [Pasch, 1882b, 51]

Définition 8.9 (Définition étendue du mot «droite») *Nous définissons (définition implicite) l'expression « A est un point de la droite g » comme synonyme de « A est un point du faisceau de plans g ».⁵⁸*

Une droite sera dite propre lorsque le faisceau qui la définit l'est, autrement dit, l'expression «droite propre» a le même sens que primitivement le mot «droite». Les théorèmes précédemment énoncés par Pasch se généralisent :

- Théorème 8.11**
1. *On peut faire passer une droite par deux points.*
 2. *Une droite est déterminée par deux quelconques de ses points.*
 3. *On peut faire passer un plan par deux points quelconques et un point propre.*
 4. *Un plan est déterminé par trois quelconques de ses points s'ils sont non-alignés.*
 5. *Une droite qui a deux points en commun avec un plan est contenue entièrement dans ce dernier.*
 6. *On peut faire passer un plan par une droite propre et un point quelconque. De même, par une droite quelconque et un point propre.*
 7. *Un plan est déterminé si on connaît une de ses droites et un de ses points n'appartenant pas à la droite.*
 8. *On peut toujours faire passer un plan par une droite propre et une droite quelconque ayant un point commun.*
 9. *Un plan est déterminé par deux quelconques de ses droites.*
 10. *Une droite qui contient un point propre est une droite propre.*
 11. *Deux droites contenues dans un plan ont toujours un point commun.*
 12. *Une droite et un plan ont toujours un point commun.*
 13. *Deux plans ont toujours une droite commune.*
 14. *Trois plans ont toujours un point ou une droite en commun.*⁵⁹

Pasch montre en reprenant son étude sur la relation «entre» des branches d'un faisceau de droites, une série de théorèmes relatifs à l'ordre des points sur une droite, généralisant ainsi les théorèmes obtenus sur les droites propres ; il met en lumière dans le même temps la structure circulaire des droites projectives.

Définition 8.10 *Soit A, B, C, D quatre points quelconques d'une droite quelconque, on dit que AB sépare CD si, étant donné un point point M à l'extérieur de la droite, la droite MC est entre MA et MB par rapport à MD .*

Théorème 8.12

1. *Soit A, B, C, E quatre points d'une droite, alors soit BC est séparé par AE , soit CA est séparé par BE , soit AB est séparé par CE . De plus, chacune de ses situations exclut les deux autres.*

⁵⁸„[...] wir definieren die Ausdruckweise „ A ist ein Punkt der Geraden g “ als gleichbedeutend mit „ A ist ein Punkt des Ebenenbüschels g .“ [Pasch, 1882b, 51]

Dans l'édition de 1926, Pasch ajoute qu'il s'agit d'une définition implicite (*implizite Definition*).

⁵⁹[Pasch, 1882b, 60-61].

2. Soit A, B, E trois points d'une droite, alors on peut choisir dans celle-ci un point C tel que AB soit séparé par CE .
3. Si à l'intérieur d'une droite, la paire de point AB est séparé par une des paires CE ou DE et pas par l'autre, alors AB est séparé par CD et réciproquement.
4. Si à l'intérieur d'une droite, les points AB sont séparés par CE , alors CE est aussi séparé par AB .⁶⁰

Le mot «plan»

Pasch fait le constat que l'extension de l'acception des seuls mots «point» et «droite» n'est pas encore suffisante. En effet, on ne sait toujours pas si trois points quelconques, un point et une droite quelconque ou deux droites quelconques sécantes déterminent un plan sans ajouter une hypothèse de propreté sur un point ou une droite. Pour étendre l'acception du mot «plan», il va de nouveau appliquer sa méthode : il va exhiber une propriété vérifiée immédiatement par trois points coplanaires (au sens original du terme) et montrer que cette propriété est plus large que celle de coplanarité. Cette propriété sera alors posée comme caractéristique de la nouvelle signification du mot «plan».

Pour cela, il considère trois points A, B, C coplanaires.⁶¹ Les droites AB, AC, BC sont donc des droites du plan ABC . Pasch désigne par D un point de la droite AB , distinct de A et de B ; de même, E est un point de AC , distinct de A et C . Il conclut immédiatement que DE et BC sont sécantes, parce que coplanaires. Dans un second temps, il montre que l'hypothèse de coplanarité des points A, B, C est superflue pour démontrer cette propriété⁶² et obtient la proposition :

Proposition 8.1.2.2 *Soit A, B, C, D quatre points quelconques tels que les droites BC et AD se coupent. Alors, les droites CA et BD , ainsi que les droites AB et CD sont aussi sécantes.*⁶³

Cette proposition permet à Pasch de proposer une nouvelle acception du mot «plan» en utilisant, comme à son habitude, une définition implicite :

Définition 8.11 (Nouvelle définition du mot «plan») *L'expression « D se trouve dans le plan ABC » n'exprime rien d'autre que la propriété selon laquelle les droites BC et AD , et par suite les droites CA et BD , ainsi que les droites AB et CD , se coupent.*⁶⁴

⁶⁰[Pasch, 1882b, 55].

⁶¹L'ambition de Pasch est de donner un sens au mot «plan» qui permette d'affirmer que trois points généralisés soient coplanaires. Il faut comprendre l'hypothèse de Pasch comme la donnée de trois points (pris dans le sens généralisé) appartenant à un même plan (pris pour l'instant dans le sens initial).

⁶²La démonstration de Pasch n'est pas très difficile quoique un peu longue. L'idée essentielle est de projeter la figure sur un plan.

⁶³[Pasch, 1882b, 58]

⁶⁴[Pasch, 1882b, 58]

L'expression «plan propre» sera utilisée pour désigner l'ancienne notion de plan. Pasch établit alors une série de théorèmes généraux qui expriment à la fois les propriétés habituelles des notions de points, droites et plans et leurs relations d'incidence. Avec ces théorèmes, Pasch prouve aussi que le point de vue restreint qu'il a adopté dans le choix de ses notions et propositions fondamentales ne le limite pas puisqu'il obtient pour les notions construites de point, droite et plan les axiomes habituellement admis par les géomètres.

Théorème 8.13 1. *On peut faire toujours passer une droite par deux points.*

2. *Toute droite est déterminée par deux quelconques de ses points.*

3. *Toute droite qui contient un point propre est une droite propre.*

4. *On peut faire toujours passer un plan par trois points.*

5. *Tout plan est déterminé par trois de ses points, qui ne sont pas alignés.*

6. *Tout plan qui contient un point propre, est un plan propre.*

7. *Une droite qui a deux points communs avec un plan, est toute entière contenue dans le plan.*

8. *On peut faire toujours passer un plan par une droite et un point.*

9. *Tout plan est déterminé si on connaît une de ses droites et un de ses points en dehors de la droite.*

10. *On peut toujours faire passer un plan par deux droites qui ont un point en commun.*

11. *Tout plan est déterminé par deux de ses droites.*

12. *Deux droites coplanaires ont toujours un point commun.*

13. *Une droite et un plan ont toujours un point commun.*

14. *Deux plans ont toujours une droite commune.*

15. *Trois plans ont toujours un point ou une droite en commun.*⁶⁵

Pasch généralise enfin la notion de séparation des couples de droites d'un faisceau. En effet, telle qu'elle est définie pour l'instant, cette relation ne concerne que les paires de droites appartenant à un faisceau propre. Pasch propose une nouvelle définition, généralisant l'originale, fondée sur la notion déjà étendue de séparation de couples de points.

Définition 8.12 (Définition généralisée de la séparation des couples de droites)

*Soit e, f, g, h quatre droites appartenant à un faisceau quelconque. On dit que ef est séparé par gh (ou que la droite g est entre les droites e et f par rapport à la droite frontière h) si les points d'intersection de ces droites avec une sécante l (ne passant pas par le sommet du faisceau) vérifient que les points el et fl sont séparés par gl et hl .*⁶⁶

⁶⁵[Pasch, 1882b, 60-61]

⁶⁶Pasch montre dans un lemme précédent que cette définition ne dépend pas du choix de l .

Le mot «entre»

Si l'on veut généraliser les théorèmes concernant la position relative des points d'une droite ou celle des droites d'un faisceau, il faut étendre aux nouvelles acceptions des mots «points», «droites» et «plans» la signification du mot «entre». Pasch a déjà généralisé aux points quelconques d'une droite quelconque la notion de séparation de paires de points et il pose :

Définition 8.13 *Le point C se trouve entre les points A et B par rapport au point-frontière D ⁶⁷, si A, B, C, D sont alignés et si AB est séparé par CD .*

Lorsque l'on considère plusieurs droites, il peut être intéressant de choisir tous les points frontières alignés. Dans ce cas, en reprenant les notations de la définition précédente et en notant d une droite passant par D , on pourra aussi dire que C est entre A et B par rapport à d . d est appelée la droite-frontière.⁶⁸ De la même manière, étant donné dans un plan quatre droites $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ d'un faisceau, si $\alpha\beta$ est séparé par $\gamma\delta$, on dit que γ est entre α et β par rapport au plan-frontière H où H est un second plan passant par δ . Ceci posé, les théorèmes concernant la relation «entre» pour les points d'une droite se généralisent aux points quelconques d'une droite quelconque en remplaçant la mention d'un point-frontière par celle d'une droite-frontière. Pasch obtient en outre les théorèmes généraux suivants :

Théorème 8.14 *Soit un plan déterminé par trois points A, B, C et d une droite du plan ABC . Si les droites BC, CA, AB sont respectivement coupées par un autre rayon en a, b, c de telle manière que a soit entre B et C par rapport à la droite-frontière d et que b ne soit pas entre A et C par rapport à cette même droite, alors c est entre A et B par rapport à d .⁶⁹*

Il montre de même le même théorème concernant les droites faisant ainsi apparaître un début de dualité entre points et droites d'un plan :

Théorème 8.15 *Soit trois droites E, F, G non-coplanaires appartenant à une gerbe et H un plan passant par le sommet de la gerbe. On désigne par e, f, g les droites d'intersection deux à deux des plans EF, FG, GE . Si la droite e est entre les droites F et G par rapport au plan-frontière H et si f n'est pas entre E et G par rapport à H , alors g est entre E et F par rapport à H .⁷⁰*

Pasch a défini la relation «entre» en faisant référence selon les cas à un droite-frontière ou un plan-frontière. Inversement, étant données quatre droites d'un faisceau $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, Pasch propose de dire que la droite γ est entre les droites α et β par rapport au point-frontière m si $\alpha\beta$ est séparé par $\gamma\delta$ et si m est un

⁶⁷Pasch utilise aussi pour désigner le point-frontière, l'expression «point exclu» („ausgeschlossen Punkt“).

⁶⁸Pasch utilise aussi pour désigner la droite-frontière, l'expression «droite exclue» („ausgeschlossene Gerade“).

⁶⁹[Pasch, 1882b, 66]

⁷⁰[Pasch, 1882b, 66]

point quelconque (différent du sommet du faisceau) de δ .⁷¹ Il généralise alors les théorèmes pour les droites et les plans d'un faisceau en utilisant les diverses relations «entre».

8.1.3 Les notions de perspective, de forme harmonique et de dualité

Figures perspectives

Une fois construites à partir des notions et des propositions de base, les notions usuelles de la géométrie projective, Pasch se propose d'étudier les propriétés projectives des figures. La géométrie de Pasch est une géométrie de figures et non de transformations géométriques. Il désigne par *planes* les figures composées de points et droites d'un même plan et par *centrales* celles constituées de droites et plans passant par un même point. Il commence par définir les notions de figures perspectives et de sections. Etant donné une figure plane et un point M n'appartenant pas au plan de la figure. Les droites joignant les points de la figure au point M et les plans reliant les droites de la figure et M constituent une figure centrale dont le sommet est M . De même, l'intersection d'une figure centrale par un plan ne passant pas par son sommet définit une figure plane. De telles figures sont désignées par Pasch comme *perspectives* l'une de l'autre, la figure plane comme une *section* de la figure centrale. Deux éléments correspondants seront dits *homologues*.⁷²

Dans un premier temps, seuls les éléments des figures considérées possèdent un élément homologue dans l'autre figure. Pour autant, cette définition ne constitue pas une restriction aux yeux de Pasch. Ainsi, il précise que tout point m du plan de la figure plane peut être ajouté à celle-ci et que l'on peut ainsi toujours joindre ce point au sommet de la figure centrale par une droite m' . La droite m' est alors appelée la droite homologue du point m .

Si deux figures, l'une centrale, l'autre plane sont perspectives, les éléments de la figure centrale passent par leur élément homologue de la figure plane et tout élément de la figure plane se trouve sur son homologue de la figure centrale.⁷³ Il décrit les relations qui existent entre éléments homologues et parties homologues des figures :

Chaque fois que les points de la figure plane sont alignés, leurs droites homologues constitue un faisceau, et réciproquement ; et chaque fois que les droites de la figure plane passent par un [même] point, les plans homologues passent par une [même] droite et réciproquement.
Par conséquent, la droite d'intersection de deux plans homologues à deux droites de la figure plane correspond à leur point d'intersection, le plan reliant deux droites homologues à deux points de la figure plane correspond à la droite joignant ces points. [...] *Chaque fois que deux paires d'éléments dans la figure plane sont séparées l'une de*

⁷¹Pasch définit de même une relation «entre» par rapport à une droite pour les plans d'un faisceau.

⁷²Le point de vue développé ici par Pasch est très proche de celui de Poncelet.

⁷³Pasch propose de dire à cet égard que deux éléments homologues se «trouvent l'un dans l'autre» („aneinanderlegen“).

*l'autre, les paires homologues dans chaque figure centrale perspective sont séparées l'une de l'autre et réciproquement.*⁷⁴

Pasch entreprend alors de définir ce qu'est à ses yeux une propriété graphique (descriptive)⁷⁵. Il le fait de deux manières : la première peut être qualifiée de logico-linguistique puisqu'elle consiste à caractériser un ensemble de notions et de théorèmes parmi toutes les notions dérivées et théorèmes de la géométrie. La seconde est mathématique (et plus classique) puisqu'elle revient à définir une propriété descriptive comme invariante par perspective.

La mise en œuvre de la notion de perspectives ne fait jamais intervenir les éléments propres, ni de propriétés concernant ceux-ci mais «seulement les expressions point, droite et plan dans leur sens général ainsi que la notion étendue de position relative de deux éléments et celle de séparation de deux paires d'éléments»⁷⁶.

On dit de ces notions qu'elles ont rapport à la situation.⁷⁷

Cette classe de notions, dérivées bien entendu comme les autres à partir des notions de base, est désignée par Pasch comme celle des *notions-souche*.⁷⁸ L'ensemble des théorèmes qui concernent ces notions-souche, et qui, entre autres, ne concernent que les acceptions étendues des mots «point», «droite», «plan» et «entre», soit, en fait, la position relative d'éléments généraux, constitue ce qui est appelé *la géométrie de position*⁷⁹. Les propriétés uniquement relatives à la situation des éléments d'une figure sont dites *graphiques* ou *descriptives*. Leur étude est l'objet de la géométrie de situation. Pasch précise qu'un théorème dont la preuve n'utilise que des notions et des théorèmes de la géométrie de situation est lui-même un théorème de la géométrie de situation. Par contre la réciproque est fautive puisque les premiers théorèmes de la géométrie de situation ont été obtenus à partir des notions et des propositions de base qui ne font pas partie de cette géométrie.

Dans un second temps, Pasch ajoute qu'une propriété descriptive est aussi une

⁷⁴ „So oft also Punkte der Planfigur in einer Geraden liegen, bilden die homologen Strahlen ein Büschel, und umgekehrt; und so oft Strahlen der Planfigur durch einen Punkt gehen, gehen die homologen Ebenen durch eine Gerade, und umgekehrt. Daher entspricht dem Schnittpunkte zweier Geraden der Planfigur die Schnittlinie der homologen Ebenen, der Verbindungslinie zweier Punkte der Planfigur die Verbindungsebene der homologen Strahlen. [...] So oft in einer Planfigur zwei Elementenpaare einander trennen, sind in jeder perspektiven zentralen Figur die homologen Paare durch einander getrennt, und umgekehrt.“ [Pasch, 1882b, 73-74]

⁷⁵ „graphische (deskriptive) Eigenschaften“.

⁷⁶ „Es sind die Ausdrücke Punkt, Gerade, Ebene nur in ihrem allgemeinen Sinn, ausserdem der Begriff des Aneinanderliegens von zwei Elementen und der Begriff der getrennten Lage von zwei Elementenpaaren vorgekommen [...].“ [Pasch, 1882b, 74]

⁷⁷ „Von diesen Begriffen sagt man, dass sie sich auf die „Lage“ beziehen.“ [Pasch, 1882b, 74]

⁷⁸ „Stammbegriffe“.

Le terme *Stammbegriff* n'a pas, à ma connaissance, été repris par les mathématiciens et n'a pas de traduction usuelle. *Stamm* peut signifier *tronc*, *lignée*, *origine* ou encore *souche*. On retrouve ce terme dans *Stammbaum* qui signifie *arbre généalogique*, dans *Stammtisch* que l'on peut traduire par *table d'hôte* ou encore dans *Stammdividende* qui a pour signification *dividende des actions ordinaires*. Outre l'idée de généalogie, on peut penser que Pasch, en adoptant ce néologisme, veut signifier que les *Stammbegriffe* sont les notions habituelles utilisées en géométrie. Je traduis l'idée de *Stamm* par *souche* en référence à l'expression *faire souche*.

⁷⁹ „Geometrie der Lage“.

Pasch précise que les théorèmes concernant le plan appartiennent à la géométrie de position à l'exception du théorème 6 qui concerne les plans propres.

propriété possédée par deux figures perspectives⁸⁰. Il ne montre pas l'équivalence des deux définitions. Peut-être, à ses yeux, la seconde n'est qu'une conséquence de la première puisqu'il précise un peu avant que la définition et l'étude des figures perspectives utilisent uniquement les notions de point, droite et plan au sens le plus général et celles concernant la situation. Il conclut en résumant les propriétés des figures perspectives en un théorème général :

Théorème 8.16 *Si une figure plane se trouve en situation perspective avec une figure centrale, alors chaque propriété graphique d'un constituant de l'une se transmet à la partie homologue de l'autre.*⁸¹

Il en déduit le principe selon lequel, tant qu'il n'est question que de propriétés graphiques, l'étude des figures planes se réduit à celle des figures centrales :

Principe 1 *Tout théorème qui concerne les propriétés graphiques d'une figure plane, peut être transféré à une figure centrale en remplaçant les points de la figure plane par des droites et ses droites par des plans.*⁸²

Réciproquement :

Principe 2 *Au même titre, les théorèmes planimétriques, qui concernent les propriétés graphiques, sont obtenus à partir des théorèmes analogues sur les figures centrales sans démonstration particulière.*⁸³

En particulier, on peut appliquer ce principe aux droites, faisceau de droites et faisceau de plans :

Théorème 8.17 *Toute propriété graphique que l'on a prouvée pour une ponctuelle, un faisceau de droites ou un faisceau de plans, est aussi valide pour les deux autres domaines.*⁸⁴

Pasch enrichit alors sa notion de figures perspectives en l'étendant à deux sections d'une même figure centrale. Les figures planes obtenues sont encore considérées comme perspectives. Il introduit alors seulement la notion de projection en considérant que dans la situation précédente, l'une des figures planes est projetée sur l'autre par une projection dont le centre est le sommet de la figure centrale. Il obtient alors le principe :

⁸⁰ „Auch die perspective Lage zweier Figuren ist eine graphische Eigenschaft des Systemes.“ [Pasch, 1882b, 75]

⁸¹ „Wenn eine Planfigur sich in perspektiver Lage mit einer zentrischen Figur befindet, so kommt jede graphische Eigenschaft von Bestandteilen der einen Figur auch den homologen Bestandteilen der andern zu.“ [Pasch, 1882b, 75]

⁸² „Jeder Satz, der von graphischen Eigenschaften einer Planfigur handelt, kann auf centrische Figuren übertragen werden, indem man die Punkte der Planfigur durch Strahlen, ihre Geraden durch Ebenen ersetzt.“ [Pasch, 1882b, 75]

⁸³ „Mit gleichen Rechte werden planimetrische Sätze, die graphische Eigenschaften betreffen, aus den analogen Sätzen über zentrische Figuren ohne besonderen Beweis entnommen.“ [Pasch, 1882b, 76]

⁸⁴ [Pasch, 1882b, 76].

Principe 3 *Les propriétés graphiques d'une figure plane ne sont pas modifiées par projection sur un autre plan.*⁸⁵

De même que deux sections d'une même figure centrale sont considérées comme perspectives, deux figures centrales qui ont une section plane commune sont aussi perspectives. Les figures centrales perspectives ont les mêmes propriétés graphiques.

Une fois la notion de figures perspectives établie dans sa généralité, Pasch démontre les théorèmes habituels de la géométrie projectives comme le théorème de Desargues et sa réciproque, celui du quadrilatère complet de von Staudt.

Formes harmoniques

Pasch commence par étudier à quelles conditions deux ponctuelles coplanaires sont en perspective. Il montre que le problème est évident pour les paires de points. Par contre, étant donné deux ponctuelles coplanaires de trois points, celles-ci ne sont pas nécessairement reliées à l'aide d'une seule projection et ne sont donc pas obligatoirement perspectives. De plus, l'ordre des points est important pour les séries de trois points : si trois points fgh d'une droite sont en perspective avec trois points cde , gfh et cde ne sont pas nécessairement en perspective. Pour cela, Pasch montre qu'il faut que $acdhk$ constitue un quadrilatère complet où a désigne le centre de la projection qui associe fgh à cde et k le point d'intersection des droites cde et fgh .⁸⁶ Pasch introduit alors la notion d'harmonicité : dans une telle configuration, les points $fgkh$ sont dits *harmoniques*. Pasch précise que l'on peut dire aussi que la paire fg est séparée harmoniquement par hk . Il insiste pour montrer l'importance de l'ordre des points et précise par exemple que la paire gh n'est pas séparée harmoniquement par fk . Il énumère alors les permutations possibles d'une forme harmonique :

Si un des huit ordonnancements

$$\begin{array}{cccc} fghk & gfhk & fgkh & gfk h \\ hkfg & hkgf & khfg & khgf \end{array}$$

est harmonique, alors les autres le sont aussi ; par contre, aucun autre ordonnancement des mêmes quatre points n'est harmonique. [Pasch, 1882b, 85-86]⁸⁷

Pasch rappelle la construction du quadrilatère complet pour montrer l'unicité du quatrième harmonique d'un triplet de point fgh , indiquant en même temps une méthode de construction.

Proposition 8.1.3.1 *Sur la diagonale fg se trouve deux sommets opposés du quadrilatère complet, f et g , ainsi que les deux points d'intersection avec les*

⁸⁵ „Die graphischen Eigenschaften einer Planfigur werden durch Projektion auf eine andere Ebene nicht geändert.“ [Pasch, 1882b, 77]

⁸⁶ Bien entendu, il faut que les points c, d, e, f, g, h soient différents de k .

⁸⁷ „Wenn also von den acht Anordnungen

$$\begin{array}{cccc} fghk & gfhk & fgkh & gfk h \\ hkfg & hkgf & khfg & khgf \end{array}$$

eine harmonisch, so sind es auch die übrigen ; aber keine andere Anordnung derselben vier Punkte ist alsdann harmonisch.“

deux autres diagonales, h et k ; quatre points dans cette situation sont toujours harmoniques.⁸⁸

Pasch établit ensuite que la propriété d'harmonicité est invariante par projection. Pour cela, il considère deux séries linéaires qui sont en perspective et qui ont un point commun. Si l'une des deux séries est harmonique, on obtient immédiatement que l'autre l'est aussi. En composant deux perspectives, il montre que la projection d'une série linéaire harmonique est harmonique. Il peut ainsi motiver l'extension de la notion d'harmonicité aux faisceaux de droites ou de plans en insistant sur la propriété d'invariance par perspective de la notion d'harmonicité.

Pasch définit la notion de polaire d'un point e par rapport à un triangle abc ⁸⁹ ; soit e_1 le point d'intersection de ae et bc , e_2 celui de be et ac et e_3 celui de ce et ab . Les deux triangles abc et $e_1e_2e_3$ sont en perspective et d'après le théorème de Desargues, les points d'intersection respectifs $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ de ab et e_1e_2 , de bc et e_2e_3 et de ac et e_1e_3 sont alignés. De plus, ϵ_1 est le conjugué harmonique de e_1 par rapport à ab ; de même, ϵ_2 et ϵ_3 sont des formes harmoniques. La droite ainsi définie est la *polaire* de e par rapport au triangle abc . Inversement, le point e est défini comme le pôle de cette droite. Après avoir donné les bases de la théorie de la polarité dans le plan, Pasch développe la théorie analogue dans l'espace ce qui lui permet d'aborder les questions de dualité.

Dualité

Pasch commence par constater que les théorèmes (graphiques) de la géométrie position qu'il a énoncés auparavant sont doubles :

On dit pour cette raison qu'il y a dans la géométrie de position une réciprocité ou une dualité entre les points et les plans et que chaque notion graphique a en regard une notion réciproque ou duale.⁹⁰

Pasch insiste sur le fait que tant que l'on reste dans le domaine de la géométrie de position, – celle développée à partir de la souche constituée par les théorèmes d'incidence et d'ordre des points, droites et plans (notions prises dans leur acception étendue), – chaque notion est la duale de sa notion duale et chaque théorème est le dual de son théorème dual.⁹¹ Il souligne que les figures planes vérifient une propriété de dualité entre points et droites et que les figures à centre en vérifient une entre plans et droites. Tant que l'on se limite à la géométrie de position, les propriétés de dualité est fondée puisque les théorèmes d'incidence et d'ordre sur lesquels elle s'appuie sont eux-mêmes duaux. Par contre, lorsque

⁸⁸„In der Diagonale fg liegen zwei Gegenecken des vollständigen Vierseits, f und g , außerdem zwei Durchschnittspunkte mit den beiden anderen Diagonalen, h und k ; solche vier Punkte sind allemal harmonisch.“ [Pasch, 1882b, 86]

⁸⁹ e est supposé ne pas appartenir aux droites ab , bc et ca .

⁹⁰„Man sagt deshalb, es finde in der Geometrie der Lage eine Reciprocität oder Dualität statt zwischen den Punkten und Ebenen, und stellt jedem graphischen Begriffe einen reciproken oder dualen Begriff gegenüber.“ [Pasch, 1882b, 93]

⁹¹Pasch fait implicitement allusion au paradoxe de la dualité résolu par Plücker. Ainsi, le degré de la courbe duale de la courbe duale d'une courbe de degré supérieur à deux n'est pas égal au degré de la courbe initiale. Pour plus de détails, on peut consulter le livre de J. Gray [2007], *Worlds out of Nothing : A Course in the History of Geometry in the 19th Century*.

un élément propre intervient dans un théorème, la proposition duale n'est plus automatiquement valide. De même, si l'on ajoutera des axiomes aux propriétés d'incidence et d'ordre de la géométrie de position, la propriété de dualité devra être alors de nouveau être justifiée.

8.1.4 La congruence

Pasch justifie l'introduction des axiomes de congruence par des considérations générales sur la notion de figure géométrique :

Lorsque l'on considère géométriquement une figure, il est toujours supposé que ses composants appartiennent à un corps fixe ou qu'au moins elles entretiennent entre elles suffisamment de liaisons fixes.⁹²

Dans un premier temps, Pasch limite son analyse de la notion de congruence aux points propres ; de plus, il explique que puisque chaque figure est considérée comme inscrite dans un solide, la donnée d'une figure $abcd$ permet de considérer comme des figures ab , ac , abc , ... Par contre, comme l'ensemble des figures considérées n'est pas supposé inscrit dans un solide, la donnée de deux figures n'entraîne pas que l'on puisse les réunir en une même figure ; Pasch autorise les mouvements relatifs des figures les unes par rapport aux autres. Il définit constructivement la congruence des figures en commençant par la définit la congruence de deux segments comme la possibilité de leur superposition, puis en étendant cette définition à toutes les figures :

Même si nous l'avons d'abord fait que dans le cas le plus simple, nous avons introduit une nouvelle notion de base, à savoir la notion de deux figures qui peuvent être superposées et à l'aide de celle-ci nous avons éclairci la signification du mot «congruent».⁹³

La congruence des segments (propres) vérifient les propositions de bases suivantes :

1. Les figures ab et ba sont congruentes.
2. Étant donné deux segments ab et ac , il existe un seul point propre b' sur la droite ac tel que ab et ab' soient congruents et b' est situé à l'intérieur du segment ac ou c est situé à l'intérieur du segment ab' .
3. Si le point c est situé à l'intérieur du segment ab et si les figures abc et $a'b'c'$ sont congruentes alors le point c' est situé à l'intérieur du segment $a'b'$.
4. Si le point c_1 est situé à l'intérieur du segment ab et si l'on prolonge le segment ac_1 par le segment congruent c_1c_2 et celui-ci par le segment congruent c_2c_3 et ainsi de suite, alors on arrive toujours à un segment $c_n c_{n+1}$ qui contient le point b .⁹⁴

⁹²„Bei der geometrischen Betrachtung einer Figur wird immer vorausgesetzt, dass ihre Bestandtheile einem festen Körper angehören oder doch mit einander in hinreichend fester Verbindung stehen.“ [Pasch, 1882b, 101]

⁹³„Wir haben, wenn auch zunächst nur für den einfachsten Fall, einen neuen Grundbegriff eingeführt, nämlich den Begriff zweier Figuren, welche zum Decken gebracht werden können, und mit Hilfe desselben die Bedeutung des Wortes „congruent“ erklärt.“ [Pasch, 1882b, 103]

⁹⁴Pasch introduit ici l'axiome d'Archimède (euclidien) dans les propriétés de la congruence. Hilbert [1899] reprendra dans ses *Grundlagen der Geometrie* le même axiome. Une version projective de l'axiome d'Archimède est introduite par Schur [1909].

Les axiomes de la congruence sont complétés par ceux de la congruence des triangles et par quelques propriétés générales qui permettent de composer et de particulariser les congruences :

1. Si dans la figure abc les segments ac et bc sont congruents, alors les figures abc et bac sont congruentes.
2. Si deux figures sont congruentes, alors leurs parties homologues sont aussi congruentes.
3. Deux figures congruentes à une même troisième sont congruentes.
4. Étant donné deux figures congruentes, si la première est dilatée autour d'un point propre, alors on peut dilater la seconde autour d'un point propre de telle manière que les figures dilatées soient de nouveau congruentes.
5. Étant donné deux figures ab et fg telles que f, g, h ne soient pas alignés et que ab et fg soient congruentes, alors on peut déterminer dans toute surface plane passant par a et b (ou dans une dilatation de celle-ci) deux points c et d tels que les figures abc et abd soient congruentes avec la figure fgh . De plus, le segment cd a un point commun avec le segment ab ou avec un de ses prolongements.⁹⁵
6. Deux figures $abcd$ et $abce$ dont les points ne sont pas situés dans une surface plane, ne sont pas congruentes.⁹⁶

Ces propriétés de base définissent la congruence des figures constituées de points propres. Pasch étend cette notion aux autres éléments des figures ; ainsi, si ab et $a'b'$ sont congruents, la ponctuelle c' homologue d'une ponctuelle c située entre a et b sera située entre a' et b' . De plus, la congruence conserve la propriété de séparation. De même, les droites, plans définis par des points (propres) homologues sont dits homologues et les propriétés d'ordre sont conservées :

En général, toute propriété des éléments de la première figure qui concerne la position relative des éléments ou l'ordre des points d'une droite⁹⁷ se transmet aux éléments homologues de la figure congruente.⁹⁸

Pasch obtient alors une série de théorèmes qui constituent les principes d'utilisation de la relation de congruence des figures :

- Théorème 8.18** 1. *Les figures congruentes ont toutes leurs propriétés graphiques en commun.*
2. *Si deux figures sont congruentes, alors leurs parties homologues sont aussi congruentes.*
 3. *Si deux figures sont congruentes à une troisième, alors elles sont congruentes entre elles.*
 4. *Dans deux figures congruentes, il est associé à chaque point propre de la première un point propre de la seconde et par conséquent, à chaque élément propre de la première un élément propre de l'autre.*

⁹⁵Pasch considère la congruence des figures planes dans l'espace.

⁹⁶Pasch suppose que d et e ne sont pas confondus.

⁹⁷Une propriété ne peut être qu'une propriété d'incidence ou d'ordre (et plus tard de congruence) puisque les propriétés de base ne concernent que ces genres de propriété.

⁹⁸„Ueberhaupt kommt jede Eigenschaft von Elementen der einen Figur, welche sich nur auf das Aneinanderliegen der Elemente und die Anordnung von Punkten in Geraden bezieht, auch den homologen Elementen der congruenten Figur zu.“ [Pasch, 1882b, 112]

5. Si la première de deux figures congruentes est étendue à un élément quelconque, on peut alors étendre la seconde de telle manière qu'elles soient de nouveau congruentes.
6. Si deux figures congruentes admettent comme points correspondants communs trois points propres qui ne sont pas situés sur une même droite alors tous leurs points sont correspondants communs.
7. Si deux ponctuelles ponctuelles admettent comme points correspondants communs deux points propres, alors tous leurs points sont correspondants communs.⁹⁹

Les constructions sont conservées, en particulier, celle du quadrilatère de Staudt. Les formes harmoniques sont donc conservées par les congruences. De plus, la notion de congruence permet de définir une relation d'ordre sur les segments : un segment est plus petit qu'un autre s'il est congruent d'une partie de celui-ci. Les axiomes de congruence introduits par Pasch affirment la possibilité de rapporter une figure à une autre et ont donc évidemment un caractère métrique. Il est important de noter qu'ils ne fixent pas une métrique mais expriment simplement la possibilité de celle-ci. L'admission des axiomes de congruence n'est pas vraiment en contradiction avec le projet de Klein de fonder la géométrie projective indépendamment de l'axiome des parallèles puisque ces axiomes ne subordonnent pas la géométrie projective à une géométrie métrique particulière ; ils subordonnent simplement le point de vue projectif au point de vue métrique.

8.1.5 La démonstration de Pasch du théorème fondamental de la géométrie projective.

Une fois établie la théorie des figures congruentes, Pasch se propose d'appliquer celle-ci «pour compléter les théorèmes-souche de la géométrie projective»¹⁰⁰. Étant donné trois points AB_0B_1 d'une droite, Pasch considère la suite harmonique $AB_0B_1B_2B_3\dots$ définie par la propriété d'harmonicité de $AB_{k-1}B_{k-2}B_k$. Il reprend explicitement la dénomination de Möbius et désigne cette suite comme le réseau¹⁰¹ AB_0B_1 . De par leur construction, il est clair que pour tout λ , $B_1B_2\dots B_\lambda$ est situé entre B_0 et B_λ ; les points du réseau sont donc tous différents.¹⁰² La notion de réseau se conserve par projection :

Théorème 8.19 *Si une ponctuelle $AB_0B_1B_\lambda$ est projeté sur $ab_0b_1b_\lambda$ et si B_λ est le λ^e point du réseau AB_0B_1 , alors b_λ est le λ^e point du réseau ab_0b_1 .*¹⁰³

⁹⁹[Pasch, 1882b, 114-115].

¹⁰⁰„Die Lehre von den congruenten Figuren wollen wir zunächst benutzen, um die Stammsätze der projectiven Geometrie zu vervollständigen“ [Pasch, 1882b, 118].

¹⁰¹„Netz“.

Pasch ne considère la notion de réseau que potentiellement ; autrement dit, il ne raisonne jamais sur un réseau dans son ensemble mais uniquement en construisant des points déterminés d'un réseau.

¹⁰²Pasch semble être le premier à s'être assuré de cette propriété des points d'une suite harmonique. Gino Fano [1892] étudiera plus systématiquement cette propriété et donnera des exemples de géométries modelées sur des corps finis.

¹⁰³[Pasch, 1882b, 119].

Pasch déduit de cette propriété de conservation par projection que si les points AB_1 sont séparés par les points B_0P , alors il existe un entier n tel que le n^e élément du réseau AB_0B_1 soit coïncide avec P , soit est séparé du $n+1^e$ élément du réseau par A et P .¹⁰⁴ Pasch introduit alors une relation d'équivalence sur les paires de points d'une droite :

Si en effet $Abcb'c'$ sont des points alignés et si $bc'A$ admettent le même quatrième harmonique M que $b'cA$, alors je dirai que bc et $b'c'$ sont équivalents par rapport au point A .¹⁰⁵

La notion de paires équivalentes affine le lemme introduit par Darboux dans sa note sur le théorème fondamental de la géométrie projective¹⁰⁶ : en effet, Pasch précise que si deux paires de points bc et $b'c'$ ne sont jamais équivalentes alors les paires bc' et cb' ne sont pas séparées. D'autre part, si la définition de paires équivalentes imposent que $bb'cc'$ sont des points différents de A , ils n'ont pas besoin d'être différents entre eux : ainsi, si b' et c coïncident, il suffit de prendre c comme quatrième harmonique commun.¹⁰⁷

Les paires de points B_0B_1 et B_1B_2 du réseau AB_0B_1 sont équivalentes, de même les paires B_1B_2 et B_2B_3 et plus généralement $B_\lambda B_{\lambda+1}$ et $B_\mu B_{\mu+1}$ pour tout λ et μ . Pasch montre alors que si bc et $b'c'$ sont équivalentes, alors on peut «transporter $Abcb'c'$ sur $Ab'c'bc$ par des projections répétées»¹⁰⁸. Il en déduit deux propriétés qui décrivent la structure des paires de points équivalentes sur une droite :

Si les paires bc et $b'c'$ sont équivalentes par rapport au point frontière A et si bc' sont séparés par Ab' , alors bc' sont aussi séparés par Ab' .¹⁰⁹

Si dans une droite, les paires bc et $b'c'$ sont équivalentes par rapport au point frontière A ainsi que les paires cd et $c'd'$, alors il en est de même pour les paires bd et $b'd'$.¹¹⁰

Pasch annonce alors que son objectif est de montrer si $ABCD$ peut être transporté sur $ABCE$ par projections répétées alors D et E coïncident, c'est-à-dire de montrer le théorème fondamental de la géométrie projective. Si l'on suppose que D et E sont différents, alors AC est séparé par BD et BE , c'est-à-dire qu'en excluant B ¹¹¹, D et E sont situés entre A et C et donc, soit D est situé entre

¹⁰⁴Pasch qualifie ce théorème de graphique mais souligne qu'il a utilisé la congruence pour l'obtenir. En effet, il obtient ce théorème (dans le cas où A, B_0, B_1 et P sont propres) en comparant les segments définis par les points du réseau AB_0B_1 et la suite des points $B_0, B_1, C_2, C_3, \dots$ obtenue en reportant successivement sur la droite un segment congruent à B_0B_1 (B_0B_1 et C_kC_{k+1} sont congruents). Il obtient la propriété d'Archimède (projective) pour le réseau AB_0B_1 à partir de celle (métrique) de la suite C_k . Le théorème est alors généralisé à toute droite et tout point par projection.

¹⁰⁵„Sind nämlich $Abcb'c'$ Punkte in einer Geraden sind und zu $bc'A$ derselbe vierte harmonische Punkt M wie zu $cb'A$ gehört, so will ich sagen, die Paare bc und $b'c'$ seien äquivalent für den Grenzpunkt A .“ [Pasch, 1882b, 121]

¹⁰⁶[Darboux, 1880].

¹⁰⁷Pasch fait ici une induction (sans la préciser) : M le quatrième harmonique commun de $bc'A$ et $b'cA$ appartient au segment défini par b' et c qui ne contient pas A . Si b' et c se rapproche jusqu'à coïncider, le point M doit aussi coïncider avec b' et c .

¹⁰⁸[Pasch, 1882b, 122].

¹⁰⁹„Sind also in einer Geraden die Paare bc und $b'c'$ äquivalent für den Grenzpunkt A und werden bc' durch Ab' getrennt, so werden bc' auch durch Ac getrennt.“ [Pasch, 1882b, 122]

¹¹⁰„Wenn also in einer Geraden die Paare bc et $b'c'$ für den Grenzpunkt A äquivalent sind, ebenso die Paare cd und $c'd'$, so sind es auch die Paare bd und $b'd'$.“ [Pasch, 1882b, 121-122]

¹¹¹En retirant un point d'une droite projective, celle-ci devient affine du point de vue de l'ordre.

A et E , soit E entre A et D . Si l'on suppose que E est situé entre A et D , alors AD et BD sont séparés par CE . Soit B_1 un point tel que BB_1 et DE soient équivalentes par rapport à A ; BE sont séparés par AB_1 et AB_1 ne le sont pas par B_1C puisque E est situé entre A et D . Pasch désigne par B_n le point du réseau ABB_1 qui est séparé de B par AC et par C_1 le point à partir duquel on peut définir le réseau ABC_1 qui admet C comme n^e point. Le réseau ABC_1 est construit jusqu'au point $C_{\lambda+1}$ tel que soit C_λ coïncide avec D ou est séparé de $C_{\lambda+1}$ par A et D . Les paires BC_1 et $C_\lambda C_{\lambda+1}$ sont donc équivalentes par rapport au point A (puisque les paires BC_1 et $C_\lambda C_{\lambda+1}$ sont constituées de points successifs du réseau AB_1C_1). Les points F et G sont déterminés de telle manière que les paires BF et GC_1 soient équivalentes à la paire $C_\lambda D$ par rapport à A . Pasch déduit des propriétés générales de la relation d'équivalence des paires de points d'une ponctuelle que FC_1 , $DC_{\lambda+1}$ et BG sont équivalents par rapport à A . Les hypothèses faites sur l'ordre des points $ABCDE$ entraînent que BC_1 est séparé par AF et AG , que DE est séparé par $AC_{\lambda+1}$, et par conséquent, AD est séparé par $BC_{\lambda+1}$ et $AC_{\lambda+1}$ par BE . En appliquant à la ponctuelle $ABCDC_1C_{\lambda+1}$ la projection qui applique $ABCD$ à $ABCE$, les points $A, B, C, C_1, C_{\lambda+1}$ restent fixes et l'image du point D est le point E . Comme AD est séparé par $BC_{\lambda+1}$, AE est séparé par $BC_{\lambda+1}$ ce qui est contradictoire avec le fait que BE est séparé par $AC_{\lambda+1}$.

Pasch énonce alors une généralisation de la propriété qu'il vient de montrer dans laquelle il affirme que les projections opèrent transitivement sur les triplets de points alignés et que la donnée de trois éléments d'une forme uniforme suffit à la définir projectivement :

Théorème 8.20 *Si les formes $ABCD$ et $ABCE$ sont chacune constituées de quatre éléments différents d'une ponctuelle, d'un faisceau de rayons ou d'un faisceau de plans et si elles ont toutes les propriétés graphiques en commun, alors D et E coïncident.*

*Trois points ABC donnés arbitrairement sur une droite peuvent toujours être transformés par une ou plusieurs projections en trois points $\alpha\beta\gamma$ donnés arbitrairement sur la même ou une autre droite.*¹¹²

Pasch signale que l'on peut éviter d'utiliser la notion de congruence pour montrer ce théorème en admettant un axiome de continuité :

Si l'on peut concevoir à l'intérieur d'un segment AB un nombre illimité de points $A_1A_2A_3\dots$ de telle manière que A_1 soit situé entre A et B , A_2 entre A_1 et B , A_3 entre A_2 et B , etc., alors il existe dans ce segment un point C (qui peut coïncider avec B) de telle sorte que lorsque le point D peut être placé sur la droite AB entre A et C , tous les points de la suite $A_1A_2A_3\dots$ ne se trouvent pas entre A et D alors que aucun point de la suite ne se trouve entre B et C .¹¹³

¹¹² „Wenn die Gebilde $ABCD$ und $ABCE$ je aus vier verschiedenen Elementen einer Punktreihe oder eines Strahlenbüschels oder eines Ebenenbüschels bestehen und alle graphischen Eigenschaften gemein haben, so fällt D mit E zusammen.

Drei Punkte ABC , welche in einer Geraden beliebig gegeben sind, können allemal nach drei Punkten $\alpha\beta\gamma$, welche in derselben oder in einer andern Geraden beliebig gegeben sind, durch ein- oder mehrmalige Projection übertragen werden.“ [Pasch, 1882b, 124]

¹¹³ „Kann man in einer geraden Strecke AB Punkte $A_1A_2A_3\dots$ in begrenzter Anzahl so

Pasch ajoute qu'«admettre une telle proposition de base ne serait pas cohérent avec le point de vue retenu»¹¹⁴ dans son ouvrage. Selon Pasch, non seulement un tel axiome n'est pas compatible avec ses principes empiriques car «une observation ne peut absolument pas se rapporter à une infinité de choses»¹¹⁵ mais il serait en contradiction avec le sens du mot «point» tel qu'il a été défini dans les développements précédents. En effet, la définition actuelle du mot «point» essentiellement à partir des proposition de base d'incidence n'autorise que la considération d'un nombre fini de points à l'intérieur d'un segment. Pour pouvoir admettre un axiome de continuité, il faudrait étendre la signification du mot «point» ce qui «sera nécessaire lorsque l'on voudra établir une analogie complète entre les points de la droite et les éléments de la suite constituée à partir des nombres rationnels et irrationnels»¹¹⁶.

L'introduction par Pasch des considérations de congruence correspond à sa volonté de conserver un point de vue purement géométrique le plus longtemps possible et de retarder le moment d'introduire des considérations liées à la continuité; à ses yeux, conserver un point de vue géométrique signifie entre autre que lorsqu'on envisage des relations entre des éléments géométriques de n'en considérer qu'un nombre fini que l'on peut construire par un nombre fini de manipulations géométriques. Pasch revient sur cette question dans un article publié dans les *Mathematische Annalen* en 1887 dans lequel il répond à quelques objections et précise certaines de ses positions¹¹⁷. En particulier, Pasch évoque les démonstrations de certains théorèmes pour lesquelles il a utilisé la notion de congruence; il reprend l'argumentation selon laquelle pour éviter d'introduire la notion de congruence pour obtenir le théorème fondamental, il est nécessaire d'introduire comme Klein un axiome de continuité ce qui est incompatible avec l'exigence selon laquelle «les notions de base et les propositions de base doivent être tirées immédiatement de l'expérience et toutes les autres notions et propositions doivent être réductibles exclusivement à celles-ci»¹¹⁸.

Klein ne sera pas vraiment convaincu par les arguments de Pasch. En 1897, dans son rapport sur le troisième tome de *Theorie der Transformationsgruppen* de Sophus Lie,¹¹⁹ il souligne l'intérêt et la rigueur de l'ouvrage de Pasch en insistant sur la démarche de Pasch de fonder son exposé sur une intuition spatiale empirique et d'en déduire les notions géométriques usuelles. Puis, Klein revient sur la question de l'introduction des nombres en géométrie projective. A son avis, le processus de l'introduction des coordonnées en géométrie projective

herstellen, dass A_1 zwischen A und B , A_2 zwischen A_1 und B , A_3 zwischen A_2 und B liegt u.s.w., so existirt in jener Strecke ein Punkt C (welcher mit B zusammenfallen kann) derart, dass, wie auch der Punkt D in der Geraden AB zwischen A und C gelegen sein mag, nicht alle Punkte der Reihe $A_1A_2A_3 \dots$ sich zwischen A und D befinden, während zwischen B und C sich kein Punkt der Reihe befindet.“ [Pasch, 1882b, 125-126]

Pasch signale que l'axiome utilisé par Klein [1873] se déduit de celui qu'il propose.

¹¹⁴ „Diesen als Grundsatz anzunehmen würde mit den hier festgehaltenen Anschauungen nicht im Einklang stehen.“ [Pasch, 1882b, 126]

¹¹⁵ „[...] eine Beobachtung sich überhaupt nicht auf unendlich viele Dinge beziehen kann.“ [Pasch, 1882b, 126]

¹¹⁶ „Eine solche Ausdehnung wird erforderlich, wenn man die Punkte der Geraden in vollständige Analogie mit den Gliedern der aus den rationalen und irrationalen reellen Zahlen bestehenden Reihe bringen will.“ [Pasch, 1882b, 127]

¹¹⁷ [Pasch, 1887].

¹¹⁸ „Die Grundbegriffe und die Grundsätze unmittelbar aus der Erfahrung geschöpft und alle übrigen Begriffe und Sätze auf jene allein zurückführbar sein müssen.“ [Pasch, 1887, 129]

¹¹⁹ [Klein, 1897].

ne diffère pas essentiellement de celui adopté en géométrie métrique ; il s'agit de construire empiriquement sur une droite donnée une échelle aussi fine que possible et finalement d'introduire un axiome de continuité. La différence (apparente) que voit Klein entre les deux processus d'introduction des coordonnées réside dans le fait qu'en géométrie projective, on commence par la donnée de trois points auxquels on affecte arbitrairement les nombres $0, 1, \infty$ alors qu'en géométrie métrique, la donnée de deux points (auxquels on affecte les nombres 0 et 1) suffit mais cette différence n'affecte en rien la compréhension de cette axiome :

Il suffit de construire une fois effectivement une échelle projective (empirique) pour voir bientôt de ses propres yeux se rapprocher les points de division aussi étroitement que l'on ne peut plus les différencier. C'est pour cela que je n'ai jamais pu comprendre pour quelles raisons Pasch a dans son livre [...] inséré avant l'introduction de l'axiome de continuité un chapitre sur la congruence des figures et alors ajouté les axiomes correspondant sur l'échelle métrique.¹²⁰

Pasch n'a pas l'intention de limiter la géométrie à des représentations fondées sur l'expérience. En particulier, son objectif est de passer d'une description du point physique à celle du point mathématique et à ses représentations numériques ; Pasch poursuit son exposé de la géométrie en définissant la notion de formes projectives. Le théorème précédent peut s'exprimer dans les mêmes termes que von Staudt. Pasch poursuit alors le programme de von Staudt en introduisant les notions d'involution, de collinéation entre deux formes de seconde espèce et de système polaire. Pasch explique qu'en considérant des polarités particulières, on est conduit à la géométrie euclidienne ou aux géométries non-euclidiennes.¹²¹ Par exemple, on obtient la géométrie euclidienne s'il existe une droite e qui est la polaire de chaque point propre et qui contient le pôle de chaque droite propre.¹²²

Pasch aborde alors la question d'introduire dans le cadre de la géométrie la notion de nombre. Il précise à cette occasion sa conception des mathématiques, en particulier de l'arithmétique et de la géométrie :

Parmi les notions qui servent à décrire les phénomènes, les notions mathématiques constituent un groupe autonome. Elles sont mises en correspondance les unes avec autres par une série de relations sans que l'on ait besoin d'ajouter d'autres notions.

De la même manière, à l'intérieur des mathématiques, le groupe des notions dont s'occupe la science des nombres (arithmétique, algèbre,

¹²⁰ „Es genügt, sich wirklich einmal eine projective Scala (empirisch) zu construieren, um zu sehen, dass die Theilpunkte für das beobachtende Auge bald do eng zusammenrücken, dass sie nicht mehr unterschieden werden können. Ich habe daher auch nie verstehen können, wesshalb Pasch in seinem Buche, [...] vor Einführung der Stetigkeitsaxiome eine Abschnitt über Congruenz der Figuren einschaltet und die genannten Axiome dann an die metrische Scala anschliesst.“ [Klein, 1897, 596-597]

¹²¹ Pasch donne une interprétation géométrique des travaux de Cayley et Klein sur les modèles projectifs des géométries

¹²² La droite e devient la droite à l'infini. On peut induire sur cette droite une involution en associant les points d'intersection de cette droite avec des droites perpendiculaires (La notion de perpendicularité a été définie grâce à la notion de congruence). Les paires de points associés par cette involution sont évidemment se séparent deux à deux. Une telle involution n'a pas de points fixes (réels). Les points fixes imaginaires de cette involution sont les points cycliques de Poncelet.

analyse) se laisse isoler. La géométrie ajoute à ses propres notions d'autres notions ; celle-ci ne constitue donc pas un groupe autonome [...].¹²³

Pour appliquer la science des nombres à la géométrie, il est nécessaire d'introduire dans celle-ci la notion de nombre ; traditionnellement, les nombres apparaissent en géométrie par l'intermédiaire de la mesure. Pasch propose d'utiliser la notion de réseau et de paires de points équivalentes pour introduire la notion de birapport. Il étend d'abord la notion de réseau de manière à avoir des points d'indice négatif.¹²⁴ Pasch introduit alors les notions d'indice d'un point dans un réseau et d'indice de deux paires de points par rapport à un point : si p est le λ^e point du réseau ua_0a_1 , le nombre entier λ est défini comme l'indice du point p dans le réseau ua_0a_1 ; il est de même défini comme l'indice par rapport à u des paires a_0p et a_0a_1 :

$$\overset{ua_0a_1}{ind} p = \overset{u}{ind} \begin{pmatrix} a_0 & p \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix} = \lambda.$$

Avec ces notations, on a :

$$\overset{u}{ind} \begin{pmatrix} a_0 & a_0 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \overset{u}{ind} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix} = 1.$$

Pasch dénomme a_0a_1 la paire unité. Il montre que l'égalité

$$\overset{u}{ind} \begin{pmatrix} p & q \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = 0$$

signifie que p et q coïncident et que l'égalité

$$\overset{u}{ind} \begin{pmatrix} p & q \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = 1$$

signifie que les paires pq et $\alpha\beta$ sont équivalentes. Les indices de deux paires équivalentes par rapport à un même point sont égaux, plus précisément si pq et $p'q'$ sont équivalentes par rapport à u , alors

$$\overset{u}{ind} \begin{pmatrix} p & q \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \overset{u}{ind} \begin{pmatrix} p' & q' \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, «si des paires pq et $p'q'$ rapportées à une certaine paire unité, admettent un même indice par rapport à u , alors les paires pq et $p'q'$ sont équivalentes par rapport à u »¹²⁵. Si on échange la paire $\alpha\beta$ par la paire $\beta\alpha$ ou la paire pq par la paire qp , l'indice change de signe. Pasch en déduit que

$$\overset{u}{ind} \begin{pmatrix} p & q \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} + \overset{u}{ind} \begin{pmatrix} q & p \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = 0.$$

¹²³„Unter den Begriffen, welche zur Beschreibung der Erscheinungen dienen, bilden die mathematischen Begriffe eine selbständige Gruppe. Sie lassen sich mit einander durch eine Reihe von Beziehungen verknüpfen, ohne dass man andere Begriffe hinzuzunehmen braucht.

In derselben Weise lässt sich innerhalb der Mathematik die Gruppe derjenigen Begriffe loslösen, mit welchen sich die Zahlenlehre (Arithmetik, Algebra, Analysis) befasst. Die Geometrie nimmt andere, ihr eigenthümliche Begriffe hinzu ; diese machen jedoch keine selbständige Gruppe aus [...].“ [Pasch, 1882b, 164]

¹²⁴Les points d'indice négatif sont définis de la même manière que ceux d'indice positif : $ua_k a_{k-1} a_{k+1}$ est une forme harmonique.

¹²⁵„Wenn die Paare pq und $p'q'$, auf ein gewisses Einheitspaar bezogen, einen und denselben Index für u ergeben, so sind die Paare pq und $p'q'$ für u äquivalent“ citep[167]Pasc1882.

A partir de cette égalité, Pasch développe une algèbre des indices. Il généralise cette égalité et obtient une relation de Chasles sur les indices :

$$\text{ind}^u \begin{pmatrix} p & q \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} + \text{ind}^u \begin{pmatrix} q & r \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} + \text{ind}^u \begin{pmatrix} r & p \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = 0.$$

Une fois montrées les propriétés additives (analogues à celles des entiers relatifs) des indices, Pasch étudie leurs propriétés multiplicatives :

Si les indices par rapport à u de rs , pq et de pq , ab existent, alors

$$\text{ind}^u \begin{pmatrix} r & s \\ p & q \end{pmatrix} \cdot \text{ind}^u \begin{pmatrix} p & q \\ a & b \end{pmatrix} = \text{ind}^u \begin{pmatrix} r & s \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Si p, q sont différents et si les indices par rapport à u de rs , ab et pq , ab existent, alors le rapport

$$\text{ind}^u \begin{pmatrix} r & s \\ a & b \end{pmatrix} : \text{ind}^u \begin{pmatrix} p & q \\ a & b \end{pmatrix}$$

est indépendant de ab et même de l'indice par rapport à u des paires rs , pq .¹²⁶

Lorsque p est un point d'un réseau abc , Pasch définit l'indice de p par rapport au réseau abc comme l'indice

$$\text{ind}^a \begin{pmatrix} b & p \\ b & c \end{pmatrix} = \text{ind}^{abc} p.$$

Il montre que cette définition peut être étendue aux valeurs rationnelles,¹²⁷ et que p est le quatrième harmonique de abc si et seulement si

$$\text{ind}^{abc} p = -1.$$

Pasch définit alors le birapport $(abcd)$ de quatre points a, b, c, d tels que d appartient au réseau abc par la formule :

$$(abcd) = \frac{abc}{\text{ind}^a d}.$$

Pasch précise que la valeur d'un birapport est pour l'instant restreinte aux nombres rationnels. On obtient l'ensemble des nombres rationnels grâce aux propriétés liant la notion de birapport de quatre points et les permutations de ces points : si le birapport $(abcd) = x$ de quatre points est défini, alors

¹²⁶„Sind Indices von rs , pq und von pq , ab für u vorhanden, so ist

$$\text{ind}^u \begin{pmatrix} r & s \\ p & q \end{pmatrix} \cdot \text{ind}^u \begin{pmatrix} p & q \\ a & b \end{pmatrix} = \text{ind}^u \begin{pmatrix} r & s \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Sind p, q verschieden und Indices von rs , ab und von pq , ab für u vorhanden, so ist das Verhältniss

$$\text{ind}^u \begin{pmatrix} r & s \\ a & b \end{pmatrix} : \text{ind}^u \begin{pmatrix} p & q \\ a & b \end{pmatrix}$$

von ab unabhängig und gleich dem Index der Paare rs , pq für u .“ [Pasch, 1882b, 171]

¹²⁷Les propriétés multiplicatives des indices entraînent que

$$\text{ind}^a \begin{pmatrix} b & p \\ b & c \end{pmatrix} = \left(\text{ind}^u \begin{pmatrix} b & c \\ b & p \end{pmatrix} \right)^{-1}.$$

$$\begin{aligned}
(abcd) &= (badc) = (cdab) = (dcba) = x \\
(abdc) &= (bacd) = (dcab) = (cdba) = \frac{1}{x} \\
(acbd) &= (cadb) = (bdac) = (dbca) = 1 - x \\
(adb c) &= (dacb) = (bcad) = (cbda) = 1 - \frac{1}{x} \\
(acdb) &= (cabd) = (dbac) = (bdca) = \frac{1}{1-x} \\
(adcb) &= (dabc) = (cbad) = (bcda) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}}.
\end{aligned}$$

Ainsi si les birapports (abp_1p_2) et (abp_3p_1) existent alors le birapport (abp_2p_3) est défini et vérifie :

$$(abp_2p_3)(abp_3p_1)(abp_1p_2) = 1.$$

Les propriétés algébriques du birapport permettent de montrer que, le réseau abc étant fixé, il correspond à chaque nombre rationnel λ un point p tel que $(abcp) = \lambda$.¹²⁸

Pasch n'a donc pas suivi la stratégie de von Staudt pour introduire la notion de birapport. Alors que von Staudt s'attachait à montrer les propriétés algébriques des jets (indépendamment de toute considération numérique), puis à associer aux jets par l'intermédiaire de la mesure des segments une valeur numérique, et finalement à déduire la notion de birapport, Pasch utilise dès l'introduction de l'indice la notion de valeur numérique et leurs propriétés. Von Staudt cherchait à développer la géométrie le plus loin possible sans introduire la notion de nombre mais lorsque il associe aux jets une valeur numérique, il ne se préoccupe pas des différences de statut entre les nombres ; il considère directement des valeurs réelles de la mesure des segments et affecte aux jets directement une valeur réelle. Une telle posture s'explique d'une part historiquement puisque à l'époque à laquelle von Staudt développe sa théorie des jets, les questions de continuité n'étaient pas encore d'actualité ; d'autre part, plus systématiquement, l'objectif de von Staudt est de développer une théorie purement géométrique et renvoie en annexe toute propriété liée à la question de la mesure ; la question de l'introduction des coordonnées n'est pas essentielle pour von Staudt. Au contraire, Pasch a l'intention de fonder la géométrie à partir de considérations empiriques. Il tente de développer moins une géométrie pure qu'une *géométrie naturelle*¹²⁹. Comme pour lui, la géométrie n'est pas une science complètement autonome et qu'elle devra requérir à partir d'un certain moment des considérations numériques, Pasch ne s'attache pas à développer le plus loin possible la géométrie pure mais au contraire accepte sans restriction d'introduire la notion de nombre et d'utiliser les propriétés algébriques des nombres relatifs et rationnels pour définir la notion d'indice. Par contre, il est extrêmement soucieux de montrer que dans un premier temps, il n'a besoin que des nombres rationnels dont l'introduction peut être justifiée empiriquement¹³⁰. Jusqu'à l'avant dernier chapitre de son ouvrage, Pasch exclut toute considération de continuité, notion qui à ses yeux échappe au cadre empirique qu'il s'est fixé et qui relève que des mathématiques.

Pour introduire la notion de coordonnée, Pasch reprend la méthode utilisée par Möbius¹³¹ ou par von Staudt¹³² ; il associe aux trois points a, b, c définissant un

¹²⁸Pasch précise qu'un tel point p devra être dorénavant considéré comme un point du réseau abc .

¹²⁹[Pasch, 1924].

¹³⁰[Pasch, 1914].

¹³¹[Möbius, 1827].

¹³²[Staudt, 1857].

réseau sur une droite les nombres ∞ , 0 et 1 puisque

$$(abca) = \infty \quad (abcb) = 0 \quad (abcc) = 1.$$

Le point a est appelé l'élément à l'infini, le point b , l'origine et le point c l'élément unité. La coordonnée x d'un point p par rapport au réseau abc (ou dans le système de coordonnées abc) est donnée par la valeur du birapport $(abcp)$.¹³³ Toute paire (x_1, x_2) de nombres entiers premiers entre eux telle que

$$x = \frac{x_1}{x_2}$$

représente dans le réseau abc le point p de coordonnée x et est appelée par Pasch les coordonnées homogènes (ordinaires) de p .

Pasch étend la notion de coordonnées aux plans. Pour cela, il considère quatre points fixes a, b, c, e tels que trois d'entre eux ne sont pas alignés. Les projections de e sur les droites bc, ca, ab respectivement à partir des points a, b et c sont notées e_1, e_2 et e_3 . Pasch étend la notion de réseau au plan en considérant les points p dont les projections p_1, p_2, p_3 sur bc, ca et ab à partir de a, b , et c sont respectivement des points des réseaux bce_1, cae_2 et abe_3 ; de tels points sont dits éléments du réseau $abce$. Les coordonnées homogènes de p_1 dans le réseau bce_1 , w_1, w_2 , celles de p_2 dans le réseau cae_2 et x_1, x_2 , celles de p_3 dans le réseau abe_3 vérifient la propriété :

$$\frac{v_1 w_1 x_1}{v_2 w_2 x_2} = (bce_1 p_1)(cae_2 p_2)(abe_3 p_3) = 1.$$

En notant par x_3 les quotients

$$\frac{x_2 v_2}{v_1} = \frac{x_1 w_1}{w_2}$$

Pasch exhibe trois nombres (rationnels) x_1, x_2, x_3 tels que

$$\frac{x_2}{x_3} = (bce_1 p_1), \quad \frac{x_3}{x_1} = (cae_2 p_2), \quad \frac{x_1}{x_2} = (abe_3 p_3).$$

Pasch appelle ces nombres x_1, x_2, x_3 les coordonnées homogènes de p par rapport au réseau $abce$. Les coordonnées homogènes spatiales sont définies de la même manière.

Pasch termine son traité en posant la question de savoir si la description analytique qu'il vient de donner des points d'un réseau et de leurs propriétés peut s'étendre à l'ensemble de tous les points. Il souligne que si on veut s'assurer qu'un point appartient à un réseau, on est déjà amené rapidement à considérer des segments trop petits pour être accessibles à une quelconque expérience; à plus forte raison, si l'on considère des points dont les indices admettent une limite. Pour traiter de tels cas, on est, selon Pasch, amené à admettre l'existence de segments «à l'intérieur desquels des points particuliers ne sont plus différenciés les uns des autres»¹³⁴. De plus, chaque segment congruent ou plus petit

¹³³Pour définir la coordonnée par rapport au système de coordonnées abc d'un point p , il est implicitement admis que p appartienne (au sens large) au réseau abc puisque le birapport $(abcp)$ existe.

¹³⁴„[...] eine Strecke MN anzugeben vermag, innerhalb deren einzelne Punkte nicht mehr von einander unterschieden werden“. [Pasch, 1882b, 188]

vérifie la même propriété. Pasch décrit alors un processus d'approximation d'un point p (situé entre B et E) par des points d'un réseau ABE . Il considère deux points h' et k' du réseau tels que les segments ph' et pk' vérifient la propriété d'indifférentiation des points. Comme h' et k' appartiennent au réseau, leurs indices s'écrivent sous la forme de fraction $\frac{r}{v}$ et $\frac{s}{v}$. Comme p est situé entre h' et k' , son éventuel indice dans le réseau ABE sera un nombre (rationnel) compris entre $\frac{r}{v}$ et $\frac{s}{v}$ ce qui sera le cas d'au moins une fraction de dénominateur $v + 1$. On pourrait poursuivre le processus mais de toute manière les points qui correspondent à des nombres compris entre $\frac{r}{v}$ et $\frac{s}{v}$ ne diffèrent pas de p de manière sensible.

Si l'on n'a pas déjà trouvé parmi les fractions positives ordinaires avec un dénominateur plus petit un nombre qui représente exactement le point p , il sera d'après cela vain de poursuivre la recherche au delà du dénominateur $v + 1$ et ainsi un nombre fini de constructions conduit toujours à un nombre ξ qui, en tant qu'indice dans le réseau ABE , représente avec une précision suffisante le point p .¹³⁵

En reprenant la construction des coordonnées homogènes dans le plan puis dans l'espace, on peut décrire la position d'un point quelconque dans un réseau $AB\Gamma\Delta E$ avec suffisamment de précision par des coordonnées homogènes. Cependant, les résultats des calculs analytiques effectués à partir de ces coordonnées approchées ne seront eux-aussi qu'approchés. La géométrie analytique applique à des coordonnées réelles les principes et les déterminations établis précédemment dans le cas restreint des points d'un réseau et des coordonnées rationnelles. Par exemple, en géométrie analytique, chaque système de quatre nombres réels, rationnels ou irrationnels, non tous nuls x_1, x_2, x_3, x_4 sera appelé un point mathématique. Les droites et les plans sont définis par des équations analogues à celle que Pasch avait obtenues lorsqu'il avait développé la g formes de seconde espèce et dans l'espace. Lorsque Pasch développait la théorie des coordonnées des points d'un réseau, il s'attachait à représenter les points d'un réseau par des coordonnées. Lorsqu'il évoque la géométrie analytique, ce sont les coordonnées qui définissent la notion de point mathématique.

Certes, pour assurer son caractère géométrique et son applicabilité, la géométrie analytique est modelée sur la géométrie des coordonnées des points des réseaux mais Pasch ne cherche pas à fonder, ni à justifier les notions fondamentales (mathématiques) de la géométrie analytique à partir de celles qu'il a élaborées empiriquement. Le point mathématique de la géométrie n'est pas une abstraction du point empirique; il occupe simplement dans un certain dispositif théorique la place du point empirique pour pallier l'inexactitude des notions empiriques.¹³⁶ À ce stade, l'essentiel de la réflexion de Pasch est une tentative

¹³⁵„Wenn man nicht schon unter den positiven echten Brüchen mit kleinerem Nenner eine Zahl angetroffen hat, welche den Punkt p genau darstellt, so wird es hiernach zwecklos sein, die Versuche über den Nenner $v + 1$ hinaus fortzusetzen, und so führt immer eine endliche Anzahl von Constructionen zu einer Zahl ξ , welche als Index im Netze ABE den Punkt p mit hinreichender Genauigkeit darstellt.“ [Pasch, 1882b, 189]

¹³⁶En 1917, dans son article *Grundfragen der Geometrie*, Pasch défend le même point de vue :

Pour obtenir complètement les théorèmes-souche de la géométrie projective, on doit faire appel à la congruence, et par conséquent à la géométrie métrique. Les coordonnées et, compte tenu de l'inexactitude des notions de base géométriques, les formes arithmétiques que l'on peut désigner comme «point mathématique», «droite mathématique», «plan mathématique» sont alors introduites.

de montrer que l'application de la géométrie analytique à la géométrie naturelle est légitime à condition de rester conscient que les résultats obtenus ne sont qu'approximatifs.

Néanmoins, Cassirer¹³⁷ reprend la critique de Veronese¹³⁸ sur les difficultés de retrouver les concepts mathématiques avec les méthodes de Pasch :

Une fois admis le point de départ, tous ces attendus sont parfaitement conséquents avec eux-mêmes ; mais il apparaît aussitôt qu'ils ne permettent pas de retrouver le plan selon lequel s'est édifiée la science géométrique, telle que l'Histoire l'a façonnée. En adoptant l'hypothèse de points «propres» représentant les objets offerts à l'observation, on se voit contraint, pour conférer aux preuves une véritable rigueur et une portée générale, d'admettre des variétés «impropres» et qui se révèlent finalement le produit de ces constructions notionnelles que l'on cherchait, au départ, à mettre hors circuit. Les concepts de points, de droites, et de plans parfaitement déterminés reprennent alors leur droit et servent de fondement à la définition d'éléments incarnant l'idée géométrique de façon tout accidentelle et approximative. Toute géométrie par approximation est ainsi condamnée à opérer avec des postulats qu'elle emprunte à la géométrie «pure» ; elle ne saurait permettre la dérivation de méthodes générales dont elle est tout au plus un cas particulier.¹³⁹

Les reproches de Veronese sont moins péremptoires. Il constate que le domaine des éléments géométriques propres est limité (comme chez Klein) par les éléments trop grands mais aussi par ceux trop petits. Veronese souligne que Pasch n'utilise pas comme on aurait pu s'y attendre la méthode empirique pour introduire la notion de point mathématique ; il évoque la discussion de Pasch sur le caractère approximatif de la transcription de données géométriques en coordonnées et des résultats que l'on peut obtenir par le biais de la géométrie analytique lorsqu'on les applique à une figure décrite en tant qu'objet sensible. Pour lui, ce genre de considérations est bien connu et ne mérite qu'on s'y attarde. Par contre, il reproche à Pasch explicitement de vouloir à partir d'un certain moment décrire les notions géométriques en utilisant une représentation numérique. Pour lui, «si l'on utilise plus tard l'analyse dans l'étude de la géométrie et si l'on appelle *géométrie analytique* la science ainsi obtenue qui est à séparer complètement de la géométrie proprement dite, on abandonne en même temps le domaine des observations directes pour étudier la géométrie et cela conduit aussi directement à la géométrie idéale ou abstraite»¹⁴⁰

„Um die Stammsätze der projektiven Geometrie vollständig zu erhalten, muß Kongruenz, also metrische Geometrie zugezogen werden. Nunmehr werden Koordinaten und, unter Rücksichtnahme auf die Ungenauigkeit der geometrischen Kernbegriffe, arithmetische Gebilde eingeführt, die man als „mathematischen Punkt“, „mathematischen Gerade“, „mathematischen Ebene“ bezeichnen darf.“
[Pasch, 1917, 187]

¹³⁷[Cassirer, 1910, 125-126].

¹³⁸[Veronese, 1891].

¹³⁹[Cassirer, 1910, 125-126].

¹⁴⁰„Wenn man später die Analysis bei dem Studium der Geometrie benutzt und die sich so ergebende Wissenschaft *analytische Geometrie* nennt, welche von der eigentlichen Geometrie wohl zu unterscheiden ist, so verlässt man damit das Gebiet der directen Beobachtungen, um die Geometrie zu studiren und dies thut gerade auch die ideelle oder abstracte Geometrie.“
[Veronese, 1891, 658]

8.2 Les systèmes hypothético-déductif de Mario Pieri

Dans son commentaire sur le traité de Pasch, Klein soulignait que «les axiomes de la géométrie projective abstraite ont été ces dernières années à la suite de Pasch analysé plus loin par différents géomètres italiens»¹⁴¹. Même si il ne cite que Veronese au sujet des questions de continuité, Klein faisait sûrement aussi allusion à Enriques¹⁴², Gino Fano¹⁴³ et surtout à Mario Pieri¹⁴⁴.

Dans sa conférence au congrès de philosophie de Paris en 1900 intitulée *Sur la Géométrie envisagée comme un système purement logique*¹⁴⁵, Pieri donne une

¹⁴¹„Die Axiome der *abstracten* projectiven Geometrie sind im Anschluss an Pasch in den letzten Jahren von verschiedenen italienischen Geometern weiter zergliedert worden.“ [Klein, 1897, 596]

¹⁴²[Enriques, 1894, 1895].

¹⁴³[Fano, 1892, 1895].

¹⁴⁴[Pieri, 1894-95, 1895-96a,-, 1896,-, 1897-98].

Pour une présentation générale de l'école italienne de géométrie projective, on peut consulter l'article de M. Avallone, A. Brigaglia et C. Zappulla ([Avellone et al., 2005]). Les articles de E. A. Marchisotto [1993, 1995, 2006] constituent une étude exhaustive sur l'œuvre géométrique de M. Pieri. Pour comprendre les enjeux philosophiques de la réception des *Vorlesungen* de Pasch par l'école de Peano, on peut consulter les travaux de S. Gandon [2005, à paraître].

¹⁴⁵[Pieri, 1901].

Lors de ce congrès, les mathématiciens axiomatiseurs des écoles italiennes interviennent avec force pour défendre la présentation des mathématiques sous forme de système hypothético-déductif : outre la conférence géométrie de Pieri, Giuseppe Peano [1901] revient dans sa conférence sur la notion de définition en mathématique, Cesare Burali-Forti [1901] étudie *les différentes méthodes logiques pour la définition du nombre réel* et Alessandro Padoa [1901] propose un *essai de théorie algébrique des nombres entiers précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque* :

Nous avons déjà vu que le point de départ nécessaire d'une théorie déductive quelconque est un système de symboles non-définis et un système de propositions non-démontrées. D'ailleurs, il est évident qu'une théorie déductive n'a aucune importance pratique, si ses symboles non-définis et ses propositions non-démontrées ne représentent pas (ou ne peuvent pas représenter) respectivement des idées ou des faits. L'origine psychologique d'une théorie déductive est donc empirique; néanmoins, son point de départ logique peut être considéré comme conventionnel. En effet, pendant la période d'élaboration d'une théorie déductive quelconque, nous choisissons les idées que nous représentons par les symboles non-définis et les faits que nous énonçons par les propositions non-démontrées; mais, lorsque nous commençons à formuler la théorie, nous pouvons imaginer que les symboles non-définis soient complètement dépourvus de signification et que les propositions non-démontrées (au lieu d'énoncer des faits, c'est-à-dire des relations entre les idées représentées par les symboles non-définis) ne soient que des conditions auxquelles les symboles non-définis sont assujettis. Alors, le système des idées que nous avons choisi d'abord n'est qu'une interprétation du système des symboles non-définis; mais, au point de vue déductif, cette interprétation peut être ignorée par le lecteur, qui peut librement la remplacer, dans sa pensée, par une autre interprétation qui vérifie les conditions énoncées par les propositions non-démontrées. Et, comme celles-ci, au point de vue déductif, n'énoncent pas des faits, mais des conditions, on ne peut les considérer comme de vrais postulats. Ainsi les questions logiques acquièrent une complète indépendance à l'égard des questions empiriques ou psychologiques (et, en particulier, du problème de la connaissance); et toute question relative à la simplicité des idées et à l'évidence des faits disparaît. Néanmoins, si l'on fait usage d'une écriture conventionnelle, il est convenable d'énoncer le système des idées qu'on a voulu représenter par le système des symboles non-définis; ou, ce qui revient au même, il convient de proposer une lecture de ces symboles, par des mots ou des phrases du langage ordinaire [...]; pourvu que tout cela ne forme qu'un commentaire à la théorie,

justification du cadre purement logique de ses diverses tentatives d'axiomatisation de la géométrie élémentaire et de la géométrie projective. Il commence par affirmer qu'il tient pour assuré que la géométrie, «dans ses parties les plus élevées comme dans les plus modestes, va en s'affirmant et en se consolidant de plus en plus *comme l'étude d'un certain ordre de relations logiques*. En soutenant qu'en même temps, la géométrie s'affranchit des liens qui l'attachent à une quelconque intuition et qu'elle revêt, comme l'arithmétique, «la forme et les qualités *d'une science idéale purement déductive et abstraite*»¹⁴⁶, la géométrie est devenue une «doctrine hypothétique» au sens qu'elle est devenue «la science de tout ce qui est figurable» au même titre que l'arithmétique est la science du numérique au sens large :

[...] rien ne nous empêche de concevoir la Géométrie tout entière comme un *système purement spéculatif et abstrait*, dont les objets sont de pures créations de notre esprit et les postulats de simples actes de notre volonté (choix de l'esprit, vérités subjectives *a priori*, vérités de définition), sans méconnaître qu'ils ont souvent leur première racine dans quelque fait extérieur ; par suite, les uns et les autres seront arbitraires, du moins en tant que nous ne les ordonnons pas en vue d'une fin préétablie qui doive guider la pensée. [Pieri, 1901, 374]

S'il ne nie pas la valeur heuristique et pédagogique des interprétations concrètes des entités géométriques, Pieri soutient qu'en aucun cas, de telles interprétations sont nécessaires à l'existence de la géométrie et que «la Géométrie peut exister indépendamment de n'importe quelle interprétation spéciale de ses concepts primitifs»¹⁴⁷ au même titre que l'arithmétique. Pour obtenir un tel objectif, il convient d'organiser le corpus des énoncés géométriques en un *système hypothético-déductif*. Pour Pieri, l'élaboration d'un système hypothético-déductif ne consiste pas seulement à distinguer les énoncés primitifs (définitions et postulats) des énoncés dérivés (théorèmes), mais aussi à «classer les notions sur

très utile pour faciliter la lecture et la compréhension du texte, mais complètement inutile au point de vue déductif ; car ce qui est nécessaire au développement logique d'une théorie déductive n'est pas la connaissance empirique des propriétés des choses, mais la connaissance formelle des relations entre les symboles. [Padoa, 1901, 317-319]

L'intérêt de recourir à un des symboles «non définis» et «complètement dépourvus de signification» est aussi souligné par Pieri (qui expose la plupart de ses axiomatiques en utilisant l'idéographie de Peano tout en en donnant une traduction en langue italienne) :

[...] on devra reconnaître l'utilité d'un bon algorithme idéographique, comme instrument propre à guider et à discipliner la pensée, à exclure les ambiguïtés, les sous-entendus, les restrictions mentales, les insinuations et autres défauts presque inséparables du langage ordinaire, tant parlé qu'écrit, et si nuisibles aux recherches spéculatives. Ainsi il faut attacher un grand prix à l'emploi des procédés formels qui appartiennent à la Logique algébrique ; et cela, non seulement pour l'efficacité des symboles en eux-mêmes, mais encore en raison des habitudes intellectuelles que les méthodes et les doctrines de cette science se montrent capables d'engendrer et de développer, et aussi pour leur valeur suggestive, qui conduit souvent à des observations et recherches où ne mènent pas d'autres voies. [Pieri, 1901, 381]

Pieri accorde à l'usage d'une idéographie non seulement une valeur linguistique (comme Peano) mais une valeur méthodologique et même épistémologique (sur ce point, voir [Avellone et al., 2005]).

¹⁴⁶[Pieri, 1901, 368].

¹⁴⁷[Pieri, 1901, 376].

lesquelles portent ces jugements, en discernant par là les *idées-mères*, primitives ou indécomposées¹⁴⁸ des notions dérivées. Pieri propose plusieurs axiomatiques qui diffèrent essentiellement par leurs éléments primitifs. Les axiomatiques de Pieri définissent la géométrie projective directement, indépendamment de toute autre géométrie. En 1894, dans sa première tentative de donner une axiomatique de la géométrie projective, *Sui principii che reggono la Geometria di Posizione*¹⁴⁹ Pieri admet comme concepts primitifs le point projectif, la droite projective et le segment projectif. Les premiers axiomes définissent les relations entre points projectifs et droites projectifs.¹⁵⁰ La notion de plan projectif sera alors dérivée à partir des notions primitives de point et de droite; Pieri commence par définir la perspective $a(bc)$ d'une droite bc à partir d'un point a (extérieur à cette droite) est définie comme l'ensemble des points des droites définies par un point de la droite bc et a . Puis il montre que $a(bc)$ et $b(ca)$ sont des classes de points identiques ce qui motive l'introduction de la notion de plan projectif abc . La notion dérivée de plan projectif est l'objet de postulats, le premier affirmant qu'étant donné un plan, il existe un point à l'extérieur de celui-ci. Pieri signale que le second axiome des plans permet d'affirmer que la variété (c'est-à-dire la multiplicité des points projectifs ainsi définie) est de dimension 3 :

Une droite projective et un plan projectif ont toujours au moins un point en commun.¹⁵¹

La notion primitive de segment projectif permet à Pieri de traiter des questions de séparation des éléments d'une forme de première espèce sans considérer les notions de mouvement ou de sens d'une forme de première espèce comme primitives.¹⁵² Selon Pieri, l'intérêt de la notion de segment projectif (définie implicitement par cinq postulats) par rapport à celle d'ordre des points d'une

¹⁴⁸[Pieri, 1901, 378].

¹⁴⁹[Pieri, 1894-95].

¹⁵⁰Comme dans la plupart de ses articles, Pieri énonce les axiomes et les théorèmes en reprenant l'idéographie de Peano et en donnant une traduction en italien.

¹⁵¹«Una retta proiettiva e un piano proiettivo hanno sempre almeno un punto in comune,, [Pieri, 1894-95, 624]

¹⁵²Pieri fait référence aux travaux de Enriques [1894], de Fano [1892] et de Vailati [1892].

droite¹⁵³ (en tant que notion primitive) est d'être plus élémentaire et «et même pour ainsi dire, plus primitive»¹⁵⁴ puisque le concept d'ordre naturel des points d'une droite «implique déjà une correspondance entre les points et les classes des points»¹⁵⁵ :

Au moyen du segment projectif, on peut définir immédiatement la séparation des couples [de points] ainsi qu'un ordre naturel et le sens d'une droite [...].¹⁵⁶

Dans son article *i principii della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo*¹⁵⁷, Pieri réduit les concepts primitifs au nombre de deux : le *point projectif* et la *jonction*¹⁵⁸ de deux points. L'axiomatique que Pieri propose comporte dix-huit axiomes qui lui permettent de démontrer le théorème fondamental de la géométrie projective. La première série de postulats concernent les entités primitives. Les deux premiers postulats expriment l'existence (postulat 1) d'une classe non-vide (postulat 2), la classe $[O]$ des points projectifs. Le postulat 3 affirme qu'il existe au moins deux points projectifs. Les deux postulats suivants permettent de définir la jonction ab de deux points projectifs a et b qui ne coïncident pas comme une classe (postulat 4) de points projectifs (postulat 5). Le postulat 6 affirme que si a et b sont des points différents, les jonctions ab et ba coïncident et le postulat 7 que la jonction ab contient le point a (et donc le point b). Le postulat 8 assure que la jonction ab contient au moins un autre point que a et b . Le postulat 9 permet de définir une jonction à partir de deux de ses points différents : si c est un point de la jonction ab de a avec b et si c ne coïncide pas avec a , alors b appartient à la jonction de a avec c et le postulat 10 affirme que sous les mêmes hypothèses la jonction ac est contenue dans la jonction ab et donc que les deux jonctions coïncident. Le postulat 11 assure qu'il y a des points qui n'appartiennent pas à la jonction ab . Pieri intro-

¹⁵³Enriques introduit dans son article de 1894 ([Enriques, 1894]) et dans son traité ([Enriques, 1898]) une notion primitive d'ordre naturel des éléments d'une forme de première espèce :

On peut penser les espèce dans une disposition circulaire naturelle qui a deux sens inverses l'un de l'autre, de telle manière que :

1. Étant donné un élément quelconque A de la forme, il existe un ordre naturel de la forme qui a un sens déterminé et A comme premier élément et dans lequel :
 - a) de deux éléments B et C , l'un, par exemple B , se trouve toujours avant l'autre (et alors C se trouve après B);
 - b) si B se trouve avant C et si C se trouve avant D , B se trouve toujours avant D ;
 - c) entre B et C il y a une infinité d'éléments intermédiaires;
 - d) il n'existe pas un *dernier* élément.
2. Les deux ordres naturels de la forme qui ont même premier élément et sont de sens contraire différents sont inverses l'un de l'autre.
3. Deux ordres naturels de la forme qui ont même sens et des premiers éléments différents, respectivement A et B , se déduisent l'un de l'autre par la permutation circulaire qui porte A en B . [Enriques, 1898, 23]

¹⁵⁴«per così dire, anche più primitivo», [Pieri, 1894-95, 626].

¹⁵⁵«[il] concetto di *ordinamento naturale* dei punti d'una retta [...] implica di già una corrispondenza fra punti e classi di punti. », [Pieri, 1894-95, 626]

¹⁵⁶«Per mezzo del segmento proiettivo si può tosto definire il separarsi delle coppie, come pure gli ordini naturali ed i sensi d'una retta [...]», [Pieri, 1894-95, 626]

¹⁵⁷[Pieri, 1897-98].

¹⁵⁸«congiungente»,

duit alors la *forme verbale*, « a, b, c sont alignés» pour signifier qu'il existe deux points différents x et y tels que a, b, c appartiennent à la jonction xy . De plus, le terme de *droite projective* désigne «la classe [1] de toutes les formes pour lesquelles on peut trouver deux points distincts dont elles sont la jonction».¹⁵⁹ Une droite projective est donc définie comme l'ensemble des points alignés avec deux points donnés. La notion de perspective d'une forme est définie comme une généralisation de la notion de jonction : étant donné un point projectif p et une forme ϕ , la *perspective* de ϕ par rapport à p (notée $p\phi$) est le lieu des points qui appartiennent à une jonction entre p et un point de ϕ . Le postulat 12 affirme que si a, b, c sont trois points non-alignés, a' , un point de bc différent de b et c et b' , un point de ac différent de a et c , alors les jonctions aa' et bb' se rencontrent (c'est-à-dire que l'intersection de ces jonctions n'est pas vide). Ce postulat permet de montrer que si a, b, c sont des points non-alignés, alors abc et bac coïncident ; les perspectives abc, acb, bac , etc. sont identiques et seront désignées par le terme de *plan projectif abc*. Le postulat 13 qui affirme que si a, b, c sont trois points non-alignés, il existe un point projectif extérieur au plan projectif abc permet de démontrer le théorème de Desargues et donc de définir à partir du quadrilatère complet la notion de forme harmonique. Le postulat 14 est dû à Fano et assure que si a, b, c sont trois points distincts alignés, alors le conjugué harmonique $Arm(a, b, c)$ de c par rapport à a et b ne peut être c lui-même.¹⁶⁰ En définissant la notion de segment projectif, Pieri retrouve alors le cadre qu'il avait adopté en 1894 :

Si l'on admet que a, b, c sont des points d'une droite projective r distincts l'un de l'autre, le *segment projectif abc* – noté (abc) – n'est rien autre que le lieu des points projectifs x auxquels on peut associer un point quelconque y de r distincts de a et c de telle sorte que x soit le conjugué harmonique de y par rapport à $Arm(a, c, y)$ et b .¹⁶¹

Le postulat 15 pose que si a, b, c sont trois points distincts d'une droite r et si d est un point distinct de a et c qui n'appartient pas au segment (abc) appartient au segment (bca) . Le postulat 16 affirme que si a, b, c sont trois points distincts d'une droite r , alors tout point qui appartient aux deux segments (bca) et (cab) ne peut appartenir au segment (abc) . Le postulat 17 affirme que deux segments ayant même extrémités et contenant réciproquement au moins un «point intérieur» de l'autre coïncident : soit a, b, c trois points colinéaires distincts et d est un point du segment (abc) distinct de b , alors si e est un point du segment (adc)

¹⁵⁹«Col nome di “retta proiettiva”, si rappresenta la classe o varietà di tutte le figure, per ognuna delle quali si possono trovare due punti prj distinti, dei quali essa sia la congiungente», [Pieri, 1897-98, 13]

Pieri signale que la classe [1] est une classe de classes de points.

¹⁶⁰Fano étudie cette question dans son article *sui postulati fondamentali della geometria proiettiva* [Fano, 1892]. Il montre que les points diagonaux de tous les quadrilatères complets sont soit non-alignés, soit alignés. Dans le premier cas, les formes harmoniques sont constituées de quatre points distincts alors que dans le second, elles ne sont constituées que de trois points (configuration de Fano). Il introduit alors un *nouveau* postulat :

Il existe un groupe harmonique $ABCD$ constitué de quatre points distincts.

“Esiste un gruppo armonico $ABCD$ costituito da quattro elementi distinti», [Fano, 1892, 115]

¹⁶¹«Premesso che a, b, c son punti d'una retta prj r l'un l'altro distinti, il *segmento proiettivo abc* – rappresentato dal segno “ (abc) ”, – non è altro che il luogo d'un punto prj x , a cui si può coordinar sulla r un qualche punto y diverso da a e da c , per modo che x sia l'armonico dopo y , $Arm(a, c, y)$ e b », [Pieri, 1897-98, 24]

alors e est aussi un point du segment (abc) .¹⁶² Pieri introduit alors la notion de transformation :

Comme en algèbre qui insiste avant tout sur les idées de *nombre* et de *fonction*, il en est de même pour la géométrie fondamentale avec les concepts de *forme* et de *transformation*.¹⁶³

Pieri définit de manière ensembliste la notion générale de représentation d'une classe dans une autre (ou de transformation d'une classe en une autre),¹⁶⁴ puis spécifie celle de *transformation segmentaire* :

Soit a, r' deux droites projectives, le nom de «*transformation segmentaire de r dans r'* » – qui sera quelquefois abrégé par le signe « $T_{r,r'}$ » – représente collectivement l'ensemble de toutes les transformations de r dans r' qui vérifient les conditions suivantes : 1) τ est une transformation isomorphe de r dans r' ; 2) si a, b, c sont des points projectifs distincts sur r , mais du reste arbitraires, et d un point quelconque du segment (abc) , alors le point τd est toujours situé dans le segment projectif $(\tau a, \tau b, \tau c)$.¹⁶⁵

Pieri étudie une série de propositions des transformations segmentaires qu'ils présentent comme une préparation au théorème de Staudt sur les correspondances harmoniques¹⁶⁶ ; il considère sur une droite projective r trois points a, b, c distincts et leurs correspondants a', b', c' par une transformation segmentaire τ de r sur elle-même. Il suppose de plus que le segment $(a'b'c')$ est situé entre les extrémités du segment (abc) et que le point c est à l'intérieur du segment (aca') ; il désigne enfin par \mathbf{h} l'ensemble des points x de (abc) qui vérifient les conditions : 1) l'homologue x' de x est situé dans (acx) , 2) si x_1 est un point de (abc) tel que x est situé dans (acx_1) , alors le transformé x'_1 de x_1 appartient à (acx_1) . Pieri désigne par \mathbf{k} l'ensemble complémentaire de \mathbf{h} et montre que sous ces conditions, \mathbf{h} et \mathbf{k} ne sont pas vides et que si x est un point de \mathbf{h} et y un point de \mathbf{k} , alors nécessairement $y \in (acx)$. Il introduit alors le postulat 18 que Pieri présente comme un analogue du principe des coupures de Dedekind pour les segments :

Soit a, b, c trois points d'une droite projective r distincts l'un de l'autre ; si le segment projectif (abc) est divisé en deux parties \mathbf{h} et \mathbf{k} telles que chacune d'elles contienne au moins un point et si, en désignant par x un point quelconque de \mathbf{h} et par y un point quelconque de \mathbf{k} , y est toujours situé dans le segment (acx) , il devra alors exister dans le segment (abc) au moins un point z de telle manière que 1) chaque point u de (abc) tel que z appartient au

¹⁶²Comme il l'avait annoncé dans ses premières notes, Pieri montre que l'on peut déduire de la notion de segment celles d'ordre naturel et de sens d'une droite projective.

¹⁶³«Come all'Algebra, che insiste per tutto sulle idee di *numero* e *funzione*, non altrimenti sono alla Geometria fondamentali i concetti di *figura* e di *trasformazione*.», [Pieri, 1897-98, 43]

¹⁶⁴Pieri utilise les deux termes ; il réserve celui de représentation lorsqu'il s'élève au niveau des considérations de pure logique et utilise le second en géométrie.

¹⁶⁵Essendo r, r' due rette prj, il nome di «*trasformazione segmentaria d' r in r'* », – che sarà talvolta abbreviato nel segno « $T_{r,r'}$ », – rappresenta collettivamente l'assieme di tutti le trasformazioni d' r in r' , per cui si verificano le condizioni seguenti : 1) τ sia una trasformazione isomorfa di r in r' ; 2) se a, b, c sono punti prj distinti su r , ma del resto arbitrari, e d un punto qualunque del segmento (abc) , il punto τd giaccia sempre nel segmento prj $(\tau a, \tau b, \tau c)$.», [Pieri, 1897-98, 44]

¹⁶⁶Pieri reprend dans son formalisme l'analyse de Thomae.

segment (acu) est un point de \mathbf{h} et 2) chaque point v de (abc) qui appartient au segment (acz) est un point de \mathbf{k} .¹⁶⁷

Pieri en déduit que sous les hypothèses précédentes (a, b, c trois points d'une droite r et a', b', c' leurs transformés par une transformation τ tels que $(a'b'c')$ est à l'intérieur du segment (abc)), alors il existe à l'intérieur du segment projectif $(a'b'c')$ un point z qui coïncide avec son transformé τz qui vérifie de plus que tout point u de (abc) tel que z appartient au segment (acu) est nécessairement différent de son transformé τu .

Pieri note alors que la notion de quatrième harmonique de trois points donnés permet de définir «une classe remarquable de transformations segmentaires d'une droite projective en elle-même»¹⁶⁸ : étant donné deux points a et b d'une droite r , on associe à chaque point x le point $Arm(a, b, x)$. Pieri note cette transformation $Arm(a, b, r)$.¹⁶⁹ Il déduit immédiatement de la définition de la notion d'harmonicité que si $x' \equiv Arm(a, b, x)$ et $y' \equiv Arm(a, b, y)$, alors y' est situé à l'intérieur du segment (xyx') et donc, si a, b, c, d sont quatre points d'une droite projective r tels que d soit un point de (abc) qui ne coïncide pas avec c , alors il existe un point x de r qui vérifie la formule :

$$x \equiv Arm(c, d, Arm(a, b, x)).$$

En traduisant en termes communs cette dernière propriété, Pieri retrouve la propriété de Darboux :

Si deux couples de points distincts (a, b) et (c, d) ne se séparent pas, il existe au moins un couple de points qui les séparent harmoniquement tous les deux.¹⁷⁰

Pieri en déduit qu'une transformation harmonique est segmentaire et obtient alors le théorème fondamental de la géométrie projective par une démonstration qui est essentiellement identique à celles données par Darboux (en tenant compte de la correction de Klein) ou par Thomae. Pieri termine son axiomatique de la géométrie projective de l'espace en posant le postulat 19 qui assure la tridimensionalité de l'espace en affirmant qu'une droite et un plan ont nécessairement au moins un point commun.¹⁷¹ Il signale en guise d'annexe que l'on peut de même obtenir une axiomatique de la géométrie de dimension 4 en

¹⁶⁷«Essendo a, b, c tre punti d'una retta proiettiva r l'un l'altro distinti; se il segmento proiettivo (abc) sarà diviso in parti \mathbf{h} e \mathbf{k} tali che ciascuna abbia in sè almeno un punto e che, designando per x un punto qualunque di \mathbf{h} e per y qualunque di \mathbf{k} , y stia sempre nel segmento (acx) : allora nel segmento (abc) dovrà esistere almeno un punto z si fatto che 1) ogni punto u di (abc) purchè z appartenga al segmento (acu) , sia sempre un punto di \mathbf{h} ; e 2) ogni punto v di (abc) , purchè appartenente al segmento (acz) , sia sempre un punto di \mathbf{k} ., [Pieri, 1897-98, 45-46]

¹⁶⁸«una classe notevole di trasform. segmentarie d'una retta prj in sè stessa., [Pieri, 1897-98, 49].

¹⁶⁹Pieri note que par définition on a la relation

$$x = Arm(a, b, Arm(a, b, x))$$

pour tout x de la droite ab .

¹⁷⁰«Se due coppie di punti distinti (a, b) e (c, d) non si separano, esiste almeno una coppia di punti che le separa entrambe armonicamente., [Pieri, 1897-98, 49-50]

¹⁷¹Whitehead fait à cet égard une erreur dans son livre sur *les axiomes de la géométrie projective* :

L'axiome qui limite la géométrie à trois dimensions est donné maintenant. Il n'est pas posé par Pieri, qui n'y fait jamais appel dans ses raisonnements.

«The axiom which limits the Geometry to three dimensions will now be given.

postulant qu'il y a toujours un point extérieur à un hyperplan de dimension 3 («de 3^e espèce») et que tout hyperplan de dimension 3 («de 3^e espèce») et une droite se rencontrent nécessairement. Il généralise au cas d'une dimension quelconque en introduisant la classe des hyperplans de n^{e} espèce (notée $[n]$). Pieri présente plusieurs autres axiomatiques de la géométrie projective ; en particulier, en 1898, il propose *un nouveau moyen de développer déductivement la géométrie projective*¹⁷² dans lequel la notion d'homographie sert d'idée primitive.¹⁷³ Pieri justifie une telle présentation en remarquant que les transformations qui laissent invariantes une propriété projective caractéristique ont toujours été auparavant introduites «par le biais de définitions nominales ou formelles»¹⁷⁴. La notion d'homographie est dérivée à partir d'autres entités géométriques comme le point, la droite, le segment, ... Au yeux de Pieri, un tel constat n'est pas particulièrement étonnant puisque la notion de transformation homographique apparaît difficilement comme le résultat de l'expérience immédiate ou d'une quelconque intuition :

[...] la transformation homographique – au moins pour les formes spatiales – est un concept qui ne s'engendre pas en nous aussi facilement de l'observation du monde extérieur que ces autres concepts ; on ne peut pas non plus dire avec certitude qu'il apparaisse comme produit de l'intuition bien qu'il n'en manque de traces très claires dans les arts représentatifs (perspective, scénographie, bas-relief, etc.).¹⁷⁵

Pieri rappelle qu'au contraire, en raison de leur évidence intuitive, les transformations de la géométrie élémentaire (euclidienne) ont toujours été considérée comme «quelque chose d'originel et assignée *a priori*»¹⁷⁶. De toute manière, quelque soit les avantages ou les inconvénients pratiques de considérer les transformations projectives comme notions primitives ou comme notions dérivées, il n'y a pas de raison d'ordre logique qui permette de préférer une des deux méthodes :

En géométrie projective, la première des deux méthodes est encore à essayer ; [...] Nous nous proposons ici de tenter la voie nouvelle : établir en somme la géométrie des transformations homographiques sur le concept d'homographie défini exclusivement par postulats.¹⁷⁷

It is not stated by Pieri, who never requires it in his reasonings." [Whitehead, 1906, 15]

¹⁷²[Pieri].

¹⁷³Même si Pieri ne cite que Lie et Helmholtz, on peut penser que l'idée de présenter l'homographie comme une entité primitive de l'axiomatique est certainement inspirée par le programme d'Erlangen de Klein [Klein, 1872] (qui avait été republié dans les *Mathematische Annalen* en 1893). En effet, en prenant comme entité primitive la notion de transformation projective, Pieri montre que le point de vue présenté par Klein dans son programme est réductible à celui des système hypothético-déductif. Pieri utilise certains termes du vocabulaire de Klein comme «groupe fondamental» pour désigner le groupe des transformations d'une géométrie axiomes à donner à la classe des homographies une stabilité par composition et inversion.

¹⁷⁴«per via di definizioni nominali o formali», [Pieri, 780].

¹⁷⁵«[...] la trasformazione omografica – per figure solide almeno – è tal concetto, che non si genera in noi così facilmente all'osservazione del mondo esterno, come quelli dianzi nominati : e nemmeno si può dir con certezza ch'esso abbia luogo realmente allo stato chiarissime nelle arti rappresentative (prospettiva, scenografia, bassorilievi, etc.)», [Pieri, 780]

¹⁷⁶«qualcosa di primordiale e di assegnato a priori», [Pieri, 780].

¹⁷⁷«E nella Geometria proiettiva il primo di que' due modi è tuttavia da provare ; [...] Qui appunto ci proponremo di tentar la via nuova : di stabilire in somma la Geometria delle tras-

Pieri propose d'exposer la géométrie projective à partir de deux notions projectives : les homographies et les points projectifs. Les deux notions seront reliées par le fait que les homographies sont des transformations ponctuelles et sont déterminées par une série d'axiomes qui permettent de montrer le théorème fondamental de la géométrie projective que Pieri appelle comme à son habitude théorème de Staudt. Pieri reconnaît que le système qu'il développe est insuffisamment intuitif car il est difficile de donner au départ une interprétation concrète des transformations projectives mais ce défaut est compensé par de nombreuses simplifications ; il souligne l'exemple du théorème de Staudt : définir la notion d'homographie par l'intermédiaire de postulats est « plus simple et mieux adapté » pour déterminer les concepts avec lesquels on peut démontrer naturellement ce théorème. Plus généralement, cette manière de présenter les propriétés des homographies permet, selon Pieri, de déterminer quelle part de la géométrie dépend des axiomes de continuité :

Un autre avantage non moins important est la capacité de traiter la géométrie projective des formes du 1^{er}, 2^e, 3^e, ... ordre – au moins la plus grande part – indépendamment d'une quelconque notion de continuité ; il n'est nul besoin de distinction entre points rationnels et irrationnels, excepté pour représenter la droite projective par le continu numérique réel (ordinaire) : une représentation qui, encore plus qu'ailleurs, se révèle comme superflue et presque étrangère aux visées essentielles de la géométrie de position¹⁷⁸

Pieri désigne par $[0]$ la classe des points projectifs et par Ω celle des transformations homographiques (postulat 1). Les postulats 2 et 3 affirment que la classe des points projectifs est non-vidue (postulat 2) et qu'elle contient au moins deux points (postulat 3). Une homographie est une transformation de la classe des points projectifs dans elle-même (postulat 4). L'opération inverse d'une homographie (postulat 5) et la composition de deux homographies (postulat 6) sont des homographies. Pieri signale qu'avec les quatre premiers postulats, les homographies constituent un groupe de transformations qui sera caractérisé par les postulats 7, 8, 13, 14 et 15. Le postulat 7 affirme que si a et b sont des points projectifs distincts, il existe une forme u telle que :

1. au moins un point projectif est situé en dehors de la forme, autrement dit u ne coïncide pas avec la classe des points projectifs $[0]$ et diffère de l'espace projectif ;
2. au moins un point projectif différent de a et b est situé dans u ; u contient donc outre a et b , un autre point ;
3. u se transforme en elle-même (c'est-à-dire chaque point de u se change en un point de u) par toute homographie qui transforme a et b en eux-mêmes.

Le postulat 8 pose l'unicité de la forme définie par le postulat 7 par rapport au choix du point différent de a et b . Les postulats 7 et 8 permettent de définir la

formazioni omografiche sul concetto di omografia, non definito altrimenti che per postulati., [Pieri, 781]

¹⁷⁸«Altro e non meno rilevante vantaggio si è la facoltà di trattare la Geometria proiettiva delle forme di 1^e, 2^e, 3^e, ... ordine – per la più parte almeno – indipendentemente da qualunque nozione di continuità ; non occorrendo mai distinzione fra punti razionali e irrazionali, fuorchè per rappresentare la retta proiettiva sul continuo numerico reale (ordinario) : rappresentazione che qui, meglio forse che altrove, si manifesta come superflua e quasi straniera agli uffici essenziali della Geometria di posizione., [Pieri, 783]

notion de *jonction* de a et b . Les postulats 9 et 10 affirment si c appartient à la jonction de a et b sans coïncider avec a , alors b appartient à la jonction de a et c (postulat 9) et cette jonction est contenue dans celle de a et b (postulat 10), ce qui justifie l'expression a, b et c sont alignés pour exprimer qu'il existe deux points x et y tels que a, b, c appartiennent à la jonction de x et y . Pieri étend alors comme dans son précédent mémoire la notion de jonction à celle entre point projectif et droite projective pour introduire la notion de plan projectif. Le postulat 11 affirme le caractère projectif de la géométrie en posant que deux droites projectives dans un même plan se coupent :

Soit a, b, c des points projectifs non-alignés, si a' est un point de bc différent de b et c et si b' est un point de ac différent de a et c , alors la jonction de a et a' et celle de b et b' se rencontrent.¹⁷⁹

Le postulat 12 assure que l'espace est au moins de dimension 3 (en posant qu'il existe toujours un point extérieur à un plan) ; il sera complété par le postulat 17 qui affirme qu'une droite et un plan se rencontrent toujours.

Pieri pose alors trois axiomes qui caractérisent les homographies ; il admet d'abord comme postulat une proposition analogue au théorème fondamental de la géométrie projective pour les points d'une droite (postulat 13) et pour les droites d'un faisceau (postulat 14)¹⁸⁰ :

Toute homographie qui transforme en eux-même chacun des trois points a, b, c distincts l'un de l'autre et appartenant tous à une droite projective r , doit également laisser fixe tout point de r .

Soit, sur une droite projective r , a, b, c trois points distincts ainsi que d un autre point ; soit o un point extérieur à r , alors toute homographie qui transforme en elle-même chacune des droites oa, ob, oc doit également laisser fixe l'autre droite od .¹⁸¹

Pieri ajoute un troisième postulat (postulat 15) qui permet de caractériser une homographie dès que l'on connaît les transformés de quatre points non-coplanaires¹⁸² :

Soit les points a, b, c, d d'une part, et les points a', b', c', d' d'autre part ; si aucun plan ne passe par les quatre premiers, ni par les quatre autres, alors il existe une homographie qui transforme dans l'ordre les premiers en les autres.¹⁸³

Le postulat 16 qui affirme que les points diagonaux d'un quadrangle complet ne sont pas alignés est celui de Fano ; Pieri signale que les postulats 1-16 suf-

¹⁷⁹«Se a, b, c son punti proiettivi non allineati, e inoltre a' è un bc diverso da b e da c , b' è un ac diverso da a e da c , allora le congiungenti a con a' e b con b' s'incontrano., [Pieri, 789]

¹⁸⁰Veblen and Young [1910] reprendront au début du premier volume de leur traité la stratégie d'admettre le théorème fondamentale de la géométrie projective comme axiome.

¹⁸¹«Qual si voglia omografia che trasformi in sè stesso ciascuno dei punti a, b, c l'un l'altro distinti, e tutti e tre appartenenti ad una retta projectiva r , dovrà tener fermo eziando qualunque altro punto di r .

Sopra una retta proiettiva r giacciono i punti distinti a, b, c e un quarto punto d ; poscia o sia un punto escluso da r : qualunque omografia che trasformi in sè stessa ciascuna delle oa, ob, oc dovrà eziando tener ferma l'altra retta od , [Pieri, 790]

¹⁸²Pieri ne donne comme pour les autres postulats une version de ce postulat dans le symbolisme de Peano. Une des raisons est que pour Pieri ce postulat n'est pas irréductible et devrait être décomposé propositions.

¹⁸³«Dati i punti a, b, c, d e da una parte, e dall'altra i punti a', b', c', d' ; e posto che nessun piano passi per quattro di quelli o per quattro di questi : esiste un'omografia che trasforma gli uni negli altri ordinatamente., [Pieri, 790]

fisent pour obtenir les propriétés les plus importantes contenues dans les traités habituels sur les homographies des formes fondamentales de 1^{re}, 2^e et 3^e espèce. Les postulats 18 et 19 caractérisent les propriétés des points doubles des homographies. Le postulat 18 pose que étant donné a, b, c, d quatre points d'une droite r et μ et ν des homographies qui transforment, la première, les points a, b, c en les points b, a, d , la seconde, les b, c, a en les points c, b, d , si μ n'a pas de point double dans r , alors ν n'en a pas non plus. Le postulat 19 affirme que si a, b, c, d, μ, ν sont définis comme dans le postulat 18 et si ρ est une homographie qui transforme c, a, b en les points a, c, d , alors si μ et ν admettent un point double sur r , ρ ne peut pas en avoir.

Le postulat 20 de Dedekind permet à Pieri de considérer une transformation harmonique de r sur r' comme la restriction d'une homographie.

8.3 Whitehead

En 1906, A. N. Whitehead publie un opuscule intitulé *The Axioms of Projective Geometry*¹⁸⁴ dont l'ambition explicite est d'être «un supplément à un cours avancé de géométrie»¹⁸⁵. L'intention de Whitehead est de présenter une introduction à l'étude des différentes questions liées aux diverses axiomatiques de la géométrie projective : la spécificité du point de vue projectif¹⁸⁶, la question de l'harmonicité, la définition des projectivités, les questions de l'ordre et de la continuité, celle de la démonstration du théorème fondamental, l'introduction des déterminations numériques. À ses yeux, le problème de l'introduction des coordonnées en géométrie pure est incontournable ; Whitehead fait à ce propos crédit à von Staudt de l'inspiration principale :

Je fais référence aux théorèmes par lesquels il est prouvé que les coordonnées numériques, avec leurs propriétés habituelles, peuvent être définies sans introduire la distance comme une idée fondamentale. L'établissement de ce résultat est un des triomphes de la pensée mathématique moderne. Il a été mené à bien en développant une des nombreuses et brillantes conceptions géométriques qui sont dues au génie de von Staudt.¹⁸⁷

Whitehead suit les conceptions défendues par Russell dans les *Principles of Mathematics*¹⁸⁸ En particulier, les entités géométriques primitives comme les points

¹⁸⁴[Whitehead, 1906].

¹⁸⁵«a supplement to an advanced school course of Geometry.» [Whitehead, 1906, 1].

¹⁸⁶Whitehead caractérise la géométrie projective (plane ou spatiale) par la condition que deux droites projectives coplanaires se coupent. Il appelle les géométries non-projectives *géométries descriptives* («descriptive geometry») et consacre aux *axiomes de la géométrie descriptive* un autre ouvrage [Whitehead, 1907] qui suit celui sur les axiomes de la géométrie projective.

¹⁸⁷«I refer to the theorems, by which it is proved that numerical coordinates, with the usual properties, can be defined without the introduction of distance as a fundamental idea. The establishment of this result is one of the triumphs of modern mathematical thought. It has been achieved by the development of one of the many brilliant geometrical conceptions which we owe to the genius of von Staudt.» [Whitehead, 1906, 1]

¹⁸⁸[Russell, 1903].

Russell avait consacré en 1897 un ouvrage sur les fondements de la géométrie [Russell, 1897] dans lequel il défendait la thèse que les axiomes de la géométrie projective constituent la part synthétique *a priori* de la géométrie. Ce livre avait provoqué une polémique avec Poincaré (sur cette polémique, on peut consulter [Nabonnand, 2000]). Au cours de cette discussion, Russell

ne forment pas une classe spécialement déterminée d'entités. «Au contraire, elles sont en fait n'importe quelles entités qui se trouvent être mutuellement reliées de telle manière que les axiomes sont vrais quand ils sont considérés comme référant ces entités et leurs relations mutuelles»¹⁸⁹. Puisque les classes d'entités primitives ne sont pas déterminées, les axiomes ne sont pas des propositions mais des fonctions propositionnelles et en tant que telles ne sont ni vrais, ni faux. Le th ensemble d'axiomes est la proposition selon laquelle il existe des entités mutuellement reliées de telle façon que les axiomes soient vrais.¹⁹⁰ Whitehead précise que si le théorème d'existence est déduit à partir de prémisses purement logiques, c'est un théorème de mathématiques pures alors que si le théorème d'existence est induit à partir d'expérience, c'est un théorème de science physique. Whitehead défend l'idée qu'il est souhaitable de limiter le nombre d'entités primitives. De plus, les axiomes doivent être simples «dans le sens où chaque axiome doit énoncer une et une seule affirmation»¹⁹¹; ils doivent aussi être consistants (syntaxiquement), c'est-à-dire que l'on ne doit pas pouvoir en déduire une contradiction,¹⁹² et indépendants.

Whitehead définit la géométrie comme une partie de la science générale de la classification :

Cette science générale peut être définie ainsi : étant donnée une classe d'entités K , les sous-classes de K forment une nouvelle classe de classes, la science de la classification est l'étude des ensembles de classes choisies dans cette nouvelle classe de manière à posséder une certaine propriété donnée.¹⁹³

En géométrie, la classe fondamentale K est celle des points, la sélection de sous-classes est celles des droites. Chaque paire de points est située sur une droite et chaque droite possède au moins trois points. Ces propriétés des droites sont communes à toutes les théories géométriques mais, précise Whitehead, aucune théorie géométrique intéressante n'existe sans poser d'autres axiomes. Ainsi, la plupart des géométries importantes comportent, «soit comme une relation fondamentale indéterminée, ou comme une relation définis en termes des concepts fondamentaux, l'idée d'ordre des points sur une ligne»¹⁹⁴. Whitehead

propose une présentation axiomatique de la géométrie projective très inspirée des conceptions de Whitehead à l'époque (sur cette question, on peut consulter [Gandon, 2004]).

¹⁸⁹“But they are in fact any entities whatever, which happen to be inter-related in such a manner, that the axioms are true when they are considered as referring to those entities and their inter-relations.” [Whitehead, 1906, 2]

¹⁹⁰En logique moderne, on dirait plutôt que le système d'axiomes est sémantiquement consistant.

¹⁹¹“[The axioms] should be simple, in the sense that each axiom should enunciate one and only one statement.” [Whitehead, 1906, 3]

¹⁹²Whitehead précise que si un système d'axiomes n'est pas consistant (syntaxiquement), il ne peut être satisfait par aucun système d'entités :

Donc le théorème d'existence pour un ensemble d'axiomes prouve sa consistance.
“Thus the existence theorem for a set of axioms proves their consistency.” [Whitehead, 1906, 3]

¹⁹³“This general science may be defined thus : given any class of entities K , the subclasses of K form a new class of classes, the science of classification is the study of sets of classes selected from this new class so as to possess certain assigned properties.” [Whitehead, 1906, 4]

¹⁹⁴“Most of important Geometries include, either as an undefined fundamental relation or as a relation defined in terms of the fundamental concepts, the idea of the order of points on a line”. [Whitehead, 1906, 5]

voit comme une des différences essentielles entre les géométries le fait que les droites soient considérées comme des suites fermées ou ouvertes. Une autre division est obtenue en différenciant les géométries *projectives*, dans lesquelles deux droites coplanaires se coupent nécessairement, des géométries *descriptives* qui ne vérifient pas cette propriété.

Whitehead pose alors une première série d'axiomes qualifiés de classification qui concernent les deux «idées indéfinies», le point et la droite joignant deux points :

- I. Les points forment une classe d'entités.
- II. Il y a au moins un point.
- III. Si A est un point, il y a un point non identique à A .
- IV. et V. Si A et B sont des points distincts, la droite AB est une classe et tous ces éléments sont des points.
- VI. Si A et B sont des points distincts, la droite AB est contenue dans la droite BA .
- VII. Si A et B sont des points distincts, A est un élément de la droite AB .
- VIII. Si A et B sont des points distincts, la droite AB possède au moins un point distinct de A et B .
- IX. Si A et B sont des points distincts, et si C est un point distinct de A situé sur la droite AB , alors B est situé sur la droite AC .
- X. Si A et B sont des points distincts, et si C est un point distinct de A situé sur la droite AB , alors la droite AC est contenue dans la droite AB .
- XI. Si A et B sont des points distincts, il y a au moins un point qui n'est pas situé sur la droite AB .
- XII. Si A, B, C sont trois points non-colinéaires, A' un point de BC distinct de B et C , et B' un point de CA distinct de C et A , alors les droites AA' et BB' possède un point en commun.

Whitehead peut alors définir une nouvelle classe, celle des plans. Il précise en outre que les onze premiers axiomes sont communs à toutes les géométries qu'elles soient projectives ou descriptives. Par contre, l'axiome XII est caractéristique de la géométrie projective. Whitehead déduit la notion d'harmonicité comme la propriété de quatre points alignés sur lesquels s'appuie deux paires de côtés opposés d'un quadrangle complet. Il note $Harm(ABCD)$ la propriété pour $ABCD$ d'être une forme harmonique. Pour montrer l'unicité du quatrième harmonique de trois points alignés (le théorème du quadrangle complet), Whitehead est amené à utiliser le théorème sur les triangles perspectifs de Desargues. À cette fin, il ajoute un axiome qui assure que la géométrie est de dimension au moins trois¹⁹⁵ :

XIII. Si A, B, C sont trois points quelconque non-alignés, alors il existe au moins un point extérieur au plan ABC .

Whitehead rappelle que Fano a montré que les axiomes déjà posés n'entraînent pas que les points B et D d'une forme harmonique $ABCD$ soient distincts. Il ajoute donc un axiome de Fano :

¹⁹⁵En dimension supérieure ou égale à trois, les théorèmes de Desargues sont une conséquence des axiomes d'incidence. En dimension deux, ce n'est pas le cas comme le montre l'existence des géométries non-arguésiennes satisfaisant les axiomes d'incidence.

XIV. Si $Harm(ABCD)$ est vérifié, alors B et D sont des points distincts.¹⁹⁶

Whitehead termine cette première série d'axiomes en posant que la géométrie qu'il développe est tridimensionnelle :

XV. Il existe un plan α et un point A non situé sur α tel toute point est situé sur une droite passant par A et un point de α .

Whitehead définit deux classes de relations projectives entre formes : deux formes transformées l'une en l'autre par une série de n transformations perspectives¹⁹⁷ sont dites «projectivement reliées». Une telle relation est notée¹⁹⁸ :

$$ABC \dots \bar{\lambda}_n A'B'C' \dots$$

Une propriété préservée par les correspondances projectives est dite projective. Whitehead précise que la définition de relation projective qu'il vient de donner n'est pas celle donnée par von Staudt :

La définition ci-dessus n'est celle de von Staudt. Selon sa définition, les points de deux droites (qui peuvent être identiques) sont projectivement reliés s'il existe entre eux une correspondance bijective telle que si A, B, C, D sont quatre points d'une des droites et A', B', C', D' leurs correspondants sur l'autre droite, alors $Harm(ABCD)$ et $Harm(A'B'C'D')$ s'impliquent mutuellement. Appelons une telle correspondance une relation *harmoniquement projective* entre les droites.¹⁹⁹

Whitehead signale qu'il y a deux théorèmes à démontrer : le premier est le théorème fondamental de la géométrie projective (à savoir qu'une correspondance projective entre deux droites est déterminée par la donnée de trois paires de points correspondants) ; le second consiste à montrer qu'une correspondance harmoniquement projective entre deux droites est une correspondance projective.²⁰⁰ Il rappelle que la démonstration du théorème fondamental peut être obtenue à partir des théorèmes de Desargues et Pappus²⁰¹ et que réciproquement si l'on admet le théorème fondamental, on peut obtenir le théorème de

¹⁹⁶Whitehead signale qu'une forme équivalente de cet axiome est de poser que les points d'intersection des diagonales d'une quadrilatère complet – les points harmoniques – ne sont pas alignés. Il affirme que l'équivalence entre les deux variantes de l'axiome de Fano est évidente à partir d'une figure.

¹⁹⁷Whitehead n'introduit pas de manière formelle la notion de perspective. La discussion autour des notions de relations projectives a pour fonction de justifier l'introduction des axiomes d'ordre et de continuité. Whitehead donne un exemple de ce que l'on peut une pratique ouverte de l'axiomatique : il cherche autant à légitimer l'introduction des axiomes d'un point de vue pratique qu'à donner une reconstruction axiomatique de la géométrie.

¹⁹⁸Whitehead montre immédiatement que si les supports des points $ABC \dots$ et $A'B'C' \dots$ sont différents, alors la relation $ABC \dots \bar{\lambda}_n A'B'C' \dots$ implique la relation $ABC \dots \bar{\lambda}_2 A'B'C' \dots$. Il signale qu'il reprend la démonstration donnée par Veblen de ce théorème.

¹⁹⁹The above is not v. Staudt definition of projectivity. According to his definition, the points on two lines (which may be identical) are projectively related when there is a one-one correspondance between them, such that if A, B, C, D are any four points on one line, and A', B', C', D' are their correspondents on the other line, then $Harm(ABCD)$ and $Harm(A'B'C'D')$ imply each other. Let us call such a correspondance a 'Harmonically Projective' relation between the lines." [Whitehead, 1906, 16]

²⁰⁰Whitehead note que puisque la construction du quadrilatère complet est projective (relève des seuls axiomes d'incidence), la notion d'harmonicité est projective et donc qu'une correspondance projective est harmoniquement projective.

²⁰¹Whitehead, qui cite pourtant la littérature la plus récente, n'a visiblement pas retenu ou lu la démonstration de Hessenberg [1905b] qui montre le théorème de Desargues à partir du théorème de Pappus.

Pappus. Whitehead évoque la démonstration donnée par Schur²⁰² à partir des résultats de Dandelin sur les hyperboloïdes et rappelle surtout que Hilbert a montré que les axiomes d'incidence ne suffisent pas pour montrer le théorème de Pappus. Whitehead préfère exposer une preuve directe inspirée par celle originale de von Staudt :

Mais il y a une manière entièrement différente de montrer le théorème fondamental que l'on peut appeler la *preuve par continuité de von Staudt*.

Cette preuve dans sa forme originale contient une lacune qui a été signalée en premier par Klein. La démonstration sera donnée ici dans une forme rectifiée. Elle requiert que les relations d'ordre entre les points d'une droite soient introduites.²⁰³

Après avoir ainsi motivé systématiquement et historiquement l'introduction des axiomes d'ordre, Whitehead définit la notion de segment en suivant la méthode de Pieri : étant donné trois points colinéaires A, B, C , le segment $segm(ABC)$ est l'ensemble des points X de la droite ABC pour lesquels il existe une paire de points y et y' tels que $Harm(AyCy')$ et $Harm(ByXy')$. Le complémentaire dans la droite ABC de $segm(ABC)$ est noté $Segm(\hat{A}BC)$.²⁰⁴ Il est possible à partir des quinze premiers axiomes de montrer quelques propriétés attendues de la notion de segment (comme l'équivalence entre D appartient au segment ABC est équivalent à C appartient au segment ADC) mais, pour retrouver toutes les propriétés ordinaires des segments comme le fait que le complémentaire d'un segment projectif est un segment, il est nécessaire d'introduire une série d'axiomes d'ordre (que Whitehead reprend de Pieri²⁰⁵) :

XVI. Si A, B, C sont trois points colinéaires distincts et si D est distinct de A et C et appartient à $segm(\hat{A}BC)$ alors D appartient à $segm(BCA)$.

XVII. Si A, B, C sont trois points colinéaires distincts, tout point D qui appartient à la fois à $segm(BCA)$ et $segm(CAB)$ n'appartient pas à $(segm(ABC))$.

XVIII. Si A, B, C sont trois points colinéaires distincts et si D est un point distinct de B , appartenant à $segm(ABC)$, alors $segm(ADC)$ est contenu dans $segm(ABC)$.

La notion de séparation pour les paires de points d'une droite est dérivée de la notion de segment : A et C séparent B et D (ce que Whitehead propose de noter $S(ABCD)$) si D appartient au complémentaire de $segm(ABC)$. Whitehead affirme que la relation de séparation ainsi définie vérifie les propriétés de l'ordre fermé tel qu'il a été étudié par Vailati²⁰⁶ et Russell²⁰⁷ :

(α) $S(ABCD)$ est équivalent à $S(BADC)$.

(β) $S(ABCD)$ est équivalent à $S(ADCB)$.

²⁰²[Schur, 1899].

²⁰³"But there is an entirely different line of proof (requiring further axioms) of the fundamental theorem, which may be called 'von Staudt's continuity proof.'

This proof in its original form contains an oversight, which was first pointed out by Klein. The proof will be given here in its amended form. The proof requires that relations of order among points on lines should have been introduced." [Whitehead, 1906, 23]

²⁰⁴Whitehead explique qu'une motivation de cette définition est de donner un sens projectif à l'idée euclidienne du segment AC qui contient le point B .

²⁰⁵[Pieri].

²⁰⁶[Vailati, 1895a, b].

²⁰⁷[Russell, 1903].

(γ) $S(ABCD)$ exclut $S(ACBD)$.

(δ) Si P, Q, R, S sont quatre points en situation quelconque de la droite projective (ou de la courbe fermée), alors on a soit $S(PQRS)$, soit $S(PRQS)$, soit $S(PRSQ)$.

(ϵ) Si $(S(ABCD)$ et $(S(ACBE)$, alors $S(ADBE)$.²⁰⁸

Whitehead montre alors que des considérations géométriques élémentaires associées aux propriétés de la relation de séparation des paires de points permettent de montrer trois théorèmes sur la séparation des points harmoniques (qui joue le même rôle dans la démonstration du théorème fondamental que le théorème de Darboux) :

(α) Si A, B, C sont trois points distincts d'une droite, alors $Harm(ABCD)$ implique $S(ABCD)$.

(β) $Harm(ABCD)$ et $Harm(AB_1CD_1)$ impliquent que $S(ABB_1C)$ et $S(ADD_1C)$ sont équivalents.

(γ) $Harm(ABCD)$ et $Harm(ABC_1D_1)$ impliquent que $S(ABCC_1)$ et $S(ABDD_1)$ sont équivalents.

Les axiomes d'ordre permettent de parler des deux segments complémentaires définis par deux points. La notion de segment est étendue de manière à comprendre les ensembles de points qui ne coïncident pas avec la droite entière (le complémentaire d'un segment n'est pas vide), qui comprennent au moins deux points, et qui contiennent un des deux segments complémentaires définis par deux quelconques de leurs éléments. Whitehead introduit deux définitions pour mieux faire comprendre les difficultés liées à la démonstration du théorème fondamental : un ensemble de points d'une droite est dit *compact* si tout segment entre deux éléments distincts de cet ensemble contient au moins un autre élément de cet ensemble. Un ensemble de points d'une droite est dit *partout dense* si tout segment de la droite contient au moins un élément de cet ensemble. Whitehead précise qu'un ensemble peut être compact sans être partout dense. Le système harmonique de trois points distincts d'une droite sera noté (ABC) . Puisque la notion d'harmonicité est projective, il s'ensuit que deux systèmes harmoniques sont projectifs et le premier des théorèmes précédents montrent qu'un système harmonique est compact. En effet, soit A et B deux points d'un système harmonique, comme un système harmonique contient au moins trois points, un des segments définis par A et B contient un autre point D du système. Le conjugué harmonique de D par rapport à A et B appartient à l'autre segment. Selon Whitehead, l'erreur de von Staudt est d'avoir cru que la compacité des systèmes harmoniques suffisait pour assurer leur densité. Whitehead appelle théorème de Luroth-Zeuthen²⁰⁹ la propriété selon laquelle la compacité des ensembles de points implique leur densité. La démonstration de ce théorème requiert l'adoption d'un nouvel axiome : l'axiome de continuité de Dedekind que Whitehead énonce de la manière suivante :

XIX. Si u est un segment quelconque d'une droite, il y a deux points A et B tel que, si P est un élément de u distinct de A et B , alors

²⁰⁸Whitehead montre aussi que l'on peut retrouver la notion de sens sur une droite telle qu'elle a été définie par von Staudt dans les *Beiträge*.

²⁰⁹[Klein, 1874].

$segm(APB)$ est tout u à l'éventuelle exception de A et/ou B qui peuvent par conséquent appartenir à u .²¹⁰

Whitehead donne une démonstration du théorème de Lüroth-Zeuthen (largement inspirée de celle de Darboux et Schur) qui utilise la notion de sens héritée des axiomes d'ordre, et en déduit immédiatement le théorème fondamental. Le théorème fondamental permet aussi de montrer que toute correspondance harmoniquement projective est projective (c.-à-d. une composition de perspectives) puisque en fait la démonstration du théorème fondamental s'applique aussi à la classe des correspondances harmoniquement projectives.

Whitehead poursuit en développant la théorie des involutions, c'est-à-dire des systèmes de points alignés sur lesquels peuvent s'appuyer les trois paires de côtés opposés d'un quadrangle complet²¹¹. Il note $Invol_q(AA', BB', CC')$ pour signifier que α) les trois paires de points sont colinéaires, β) qu'elles sont situées sur les paires de côtés opposés d'un quadrangle complet et γ) que les points A, B, C sont situés sur trois côtés de ce quadrangle passant par un même sommet. En particulier, Whitehead montre que le théorème selon lequel $Invol_q(AD, BC, OU)$ et $Invol_q(AD, BC_1, OU)$ impliquent la coïncidence de C et C_1 est un pur théorème d'incidence (ne dépend pas du théorème fondamental).²¹² Il définit alors la notion de *transformation quadrangulaire* des points d'une droite comme la correspondance qui associe les points X_1 et X tels que $Invol_q(AX_1, XA_1, OU)$; une telle transformation est bien définie, associe A et A_1 et admet O et U comme points doubles. Lorsque O et U coïncident, on a une *prospectivité* que Whitehead note AA_1U^2 .

Whitehead reprend alors la théorie qui associe à toute géométrie un système algébrique.²¹³ Il reprend la notion de *système complet de grandeur* de Burali-Forti²¹⁴ défini comme un semi-groupe commutatif $(G_0, +)$ muni d'une relation d'ordre total $<$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :

a) Si a est différent de l'élément neutre, alors la classe θa des éléments plus petits que a contient au moins un élément différent de l'élément neutre ; b) Toute sous-classe bornée de G_0 possède une limite supérieure.

Le dernier axiome est analogue à celui de Dedekind et un tel système vérifie le principe d'Archimède. Whitehead montre alors que les prospectivités ayant même point double peuvent être munies d'une structure de système de gran-

²¹⁰«If u is any segment of a line, there are two points A and B , such that, if P be any member of u distinct from A and B , $segm(APB)$ is all of u with the possible exception of either or both of A and B which may also belong to u . [Whitehead, 1906, 30]

Pour Whitehead, l'axiome de Dedekind affirme que la notion étendue de segment se ramène à celle des segments définis par deux points.

²¹¹La notion introduite par Whitehead est la même que celle définie par Veblen sous le terme d'«ensemble quadrangulaire» («quadrangular set»). Whitehead utilise quant à lui le terme de «quadrangular involution» et associe de plus cette notion à la notion d'involution au sens de von Staudt, c.-à-d. d'une transformation projective qui échangent les paires de points.

²¹²Puisqu'il considère les involutions comme des cas particuliers de transformations projectives, Von Staudt fait dépendre ce théorème du théorème fondamental.

Par contre le théorème qui affirme que $Invol_q(AD, BC, OU)$ et $Invol_q(AD, BC, U_1O)$ impliquent que U et U_1 sont identiques requiert le théorème de Pappus qui est équivalent au théorème fondamental.

²¹³Whitehead consacre une longue note dans laquelle il retrace les grands traits de l'histoire de l'introduction des coordonnées projectives en géométrie. Il fait remonter la théorie aux travaux de von Staudt sur les jets et signale qu'il simplifie l'exposition de Schur [1902] grâce aux résultats de Burali-Forti.

²¹⁴[Burali-Forti, 1899].

deur²¹⁵ et que l'on peut en choisissant une projectivité unité arbitraire (OEU^2) associer au point O le nombre 0, au point E , le nombre 1, à U , ∞ et ainsi à tout point de la droite une coordonnée x .

Whitehead reprend donc, sous forme de système formel, toute l'histoire de la démonstration du théorème fondamental et de l'introduction des coordonnées en géométrie pure. Il accomplit ainsi le fondement formel de la géométrie en introduisant de manière motivée chacun des axiomes et en analysant l'importance de chacun d'entre dans le processus d'algébrisation de la géométrie pure. Son traité est explicitement inspiré des enseignements de Veblen. Il a l'avantage sur la *Projective Geometry* de Veblen et Young d'être beaucoup plus court et beaucoup plus explicite sur l'intérêt d'introduire certains axiomes. En ce sens c'est aussi un exemple pédagogique de ce que devrait être un travail d'axiomatisation des théories.

²¹⁵Les axiomes de groupe ne dépendent que des axiomes d'incidence, ceux de la relation d'ordre nécessitent les axiomes d'ordre et la propriété de borne supérieure des ensembles bornés dérive de l'axiome de Dedekind.

Bibliographie

- Maurizio Avellone, Aldo Brigaglia, and Carmela Zappulla. The Foundations of projective Geometry in Italy from De Paolis to Pieri. *Archives for History of Sciences*, 2005.
- Bruno Belhoste. Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques. *Revue d'histoire des mathématiques*, 4 :289–304, 1998.
- Joseph Bertrand. Éloge historique de Jean-Victor Poncelet. *Mémoire de l'Académie des sciences*, 41 :I–XXV, 1879.
- Karl Bobek. *Einleitung in die Projektivische Geometrie der Ebene*. Teubner, Leipzig, 1889.
- Charles Julien Brianchon. Sur les Surfaces courbes du second Degré. *Journal de l'École Polytechnique*, 1806.
- Charles Julien Brianchon. *Mémoires sur les lignes du second ordre*. Bachelier, Paris, 1817.
- Charles Julien Brianchon. *Application de la théorie des transversales*. Bachelier, Paris, 1818.
- Cesare Burali-Forti. Sur les différentes méthodes logiques pour la définition du nombre réel. In *Bibliothèque du congrès international de philosophie : logique et histoire des sciences*, pages 289–307, Paris, 1901. Armand Colin.
- Cesare Burali-Forti. Les propriétés formelles des opérations algébriques. *Rivista di Matematica*, 1899.
- Lazare Carnot. *Lettre du citoyen Carnot au citoyen Bossut, concernant quelques vues nouvelles sur la trigonométrie*, chapter in Bossut, Charles, *Cours de mathématiques, géométrie et application de l'algèbre à la géométrie* (Nouvelle éd., t. II, 1800), pages 401–421. 1800.
- Lazare Carnot. *De la Corrélacion des figures de géométrie*. Paris : J.B.M. Duprat, 1801.
- Lazare Carnot. *Géométrie de position*. Paris : J.B.M. Duprat, 1803.

- Lazare Carnot. *Mémoire sur la Relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace; suivi d'un essai sur la théorie des transversales*. Paris : Courcier, 1806.
- Ernst Cassirer. *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*. Berlin, 1910.
- Augustin-Louis Cauchy. Sur un mémoire relatif aux propriétés projectives des sections coniques. *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 11 : 69–83, 1820-1821. édité dans le second tome des *Applications d'analyse et de géométrie*, Poncelet, Paris : Gauthier-Villars, 1864, 553-569.
- Augustin-Louis Cauchy. *Rapport à l'académie royale des sciences de l'institut sur un mémoire relatif aux propriétés des centres de moyennes harmoniques, présenté en mars 1824 par M. Poncelet*. in [Ponc1866], 351-357.
- Michel Chasles. Mémoire sur la transformation des relations métriques. *Correspondance mathématique et physique de M. Quételet*, pages 293–294, 1829.
- Michel Chasles. Mémoire de géométrie pure sur les propriétés générales des cônes du second degré. *Mémoires de l'Académie royale de Bruxelles*, 6 :1–60, 1830.
- Michel Chasles. *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie I*. Bruxelles : Hayez, 1837a.
- Michel Chasles. *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie II – Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science : la dualité et l'homologie*. Bruxelles : Hayez, 1837b.
- Michel Chasles. Discours d'inauguration du cours de géométrie supérieure. publié en annexe du Cours de géométrie supérieure [1852], 547-585, 1846.
- Michel Chasles. *Traité de Géométrie supérieure*. Bachelier, Paris, 1852.
- Michel Chasles. *Traité des sections coniques*. Gauthier-Villars, Paris, 1865.
- Karine Chemla. The background to gergonne's treatment of duality : Spherical trigonometry in the late century. In Academic Press, editor, *The History of Modern Mathematics, Ideas and Their Reception*, volume 1, pages 331–359. Boston, 1989.
- Karine Chemla. *Remarques sur les recherches géométriques de Lazare Carnot*, chapter in [Charnay 1990], pages 525–541. 1990.
- Karine Chemla. Le rôle joué par la sphère dans la maturation de l'idée de dualité au début du 19e siècle. les articles de gergonne entre 1811 et 1827, , lille, 1990, lille : Irem, 1994, 57-72. In IREM, editor, *Actes de la quatrième université d'été d'histoire des mathématiques – Lille, 1990*, pages 57–72, Lille, 1994.
- Karine Chemla. Lazare Carnot et la généralité en géométrie. Variations sur le théorème dit de menelaus. *Revue d'histoire des mathématiques*, 4 :163–190, 1998.
- Walter S. Contro. Von Pasch zu Hilbert. *Archives for History of Sciences*, 15 : 283–295, 1975.

- Luigi Cremona. *Elementi di geometria proiettiva*. ?, Turin, 1873. trad. fr. par E. Dewulf, *Elements de géométrie projective*, Paris : Gauthier-Villars, 1875 ; trad. all., *Elemente der projectivischen Geometrie*, Stuttgart : Cotta ; trad. angl., *Elements of Projective Geometrie*, Oxford : ?, 1893.
- G. Dandelin. Recherches nouvelles sur les sections du cône et sur les hexagones inscrits et circonscrits à ces sections. *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 15(387-396), 1824-1825.
- Gaston Darboux. Sur le théorème fondamental de la géométrie projective, extrait d'une lettre à m. Klein. *Mathematische Annalen*, 17 : 55–61, 1880.
- Gaston Darboux. *Principes de géométrie analytique*. Gauthier-Villars, Paris, 1917.
- Richard Dedekind. *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Braunschweig, 1872.
- J. Dhombres and M. Otero. Les Annales de mathématiques pures et appliquées : le journal d'un homme seul au profit d'une communauté enseignante. In Siglo XXI de España Editore, editor, *Messengers of Mathematics : European Mathematical Journals (1800-1946)*, pages 3–70. E. Ausejo and M. Hormigon, 1993.
- Federigo Enriques. Sui fondamenti della geometria proiettiva. *Rendiconti dell'Istituto Lombardo*, 27 :550–567, 1894.
- Federigo Enriques. Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva (correspondance avec G. Fano). *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 9 :79–85, 1895.
- Federigo Enriques. *Lezioni di geometria proiettiva*. Zanichelli, Bologne, 1898. 2e éd., 1904 ; trad. all. 1903 ; cité d'après la trad. fr., P. Laberenne, Paris : Gauthier-Villars.
- Federigo Enriques. Sull' importanza scientifica e didattica delle questioni che si riferiscono ai principii della geometria. In Zanichelli, editor, *Questioni riguardanti la Geometria Elementare*, pages 1–31, Bologna, 1900. Enriques, Federigo.
- Federigo Enriques. Prinzipien der Geometrie. In *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, volume III, A, B1, pages 1–129. 1907. trad. fr. Principes de la géométrie in *Encyclopédie des sciences mathématiques*, III-1, 1-147.
- Gino Fano. Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni. *Giornale di matematiche*, 30 : 106–132, 1892.
- Gino Fano. Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva (deux lettres adressées à F. Enriques). *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 9 : 84–85, 1895.
- Fiedler. *Darstellende Geometrie*. Teubner, Leipzig, 1871.

- Hans Freudenthal. The Impact of von Staudt's Foundations of Geometry. In Peter Plaumann and Karl Stambach, editors, *Geometry – von Staudt's Point of View*, pages 401–425, Dordrecht, 1980.
- Sébastien Gandon. Russell et l'universal algebra de whitehead : la géométrie projective entre ordre et incidence (1898-1903). *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 10 :187–256, 2004.
- Sébastien Gandon. Pasch entre Klein et Peano : empirisme et idéalité en géométrie. *Dialogue*, 44 :653–692, 2005.
- Sébastien Gandon. La réception des Vorlesungen über neue Geometrie de Pasch par Peano. *Revue d'histoire des mathématiques*, à paraître.
- Joseph Diaz Gergonne. Réflexions sur l'analyse d'un mémoire présenté à l'Académie royale des Sciences par poncelet. *Annales de mathématiques pures et appliquées*, XVII :272–276, 1826-1827a. republié dans [Ponc1866], 390-393.
- Joseph Diaz Gergonne. Considérations philosophiques sur les éléments de la science de l'étendue. *Annales de mathématiques pures et appliquées*, XVI : 209–231, 1825-1826.
- Joseph Diaz Gergonne. Recherches sur quelques lois générales qui régissent les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres. *Annales de mathématiques pures et appliquées*, XVII :214–252, 1826-1827b.
- Joseph Diaz Gergonne. Géométrie de situation. Rectifications de quelques théorèmes énoncés dans les Annales. *Annales de mathématiques pures et appliquées*, XVIII :149–154, 1827-1828.
- Charles C. Gillespie. *Lazare Carnot Savant*, chapter in [Gillespie-Youschkevitch 1979], pages 15–165. 1979.
- Jeremy Gray. *Worlds out of Nothing ; A Course in the History of Geometry in the 19th Century*. Springer, 2007.
- Jeremy J. Gray. *Ideas of Space, Euclidean, non-Euclidean and relativistic*. Oxford University Press, 1989.
- Guidi. *Cours complet de mathématiques et de physique*. Bruyset aîné & Cie., Lyon, 1801. trad. fr. P. Aubert.
- Michael Hallett and Ulrich Majer, editors. *David Hilbert's Lecture on the Foundations of Geometry, 1891-1902*. Springer, Berlin-Heidelberg, 2004.
- Hermann Hankel. *Die Elemente der projectivischen Geometrie*. Teubner, Leipzig, 1875.
- Gerhard Hessenberg. Desargues'scher Satz und Centralcollineation. *Archiv der Mathematik und Physik*, 6 : 123–127, 1904.
- Gerhard Hessenberg. Über einen geometrischen Calcul. *Acta Mathematica*, 29 : 1–23, 1905a.
- Gerhard Hessenberg. Beweis des Desargueschen satzes aus dem pascalschen. *Mathematische Annalen*, 61 :161–172, 1905b.

- David Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*. Teubner, Leipzig, 1^{re} éd. édition, 1899. cité d'après l'édition de *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry* [Hallet and Majer, 2004]; trad. fr. L. Laugel, *Fondements de la géométrie*, Paris : Gauthier-Villars, 1900.
- O. Hölder. Die Zahlenskala auf der projektiven Geraden und die independente Geometrie dieser Geraden. *Mathematische Annalen*, (65) :161–260, 1908.
- Felix Klein. Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie (erster Aufsatz). *Mathematische Annalen*, 4, 1871. cité d'après Werke 1, [254-305].
- Felix Klein. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen, 1872. rééd. avec des notes additionnelles, *Mathematische Annalen*, 21 (1893), 63-100; Werke, 1, 460-497.
- Felix Klein. Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie (zweiter Aufsatz). *Mathematische Annalen*, 6 : 112–145, 1873. Cité d'après Werke 1, [311-343].
- Felix Klein. Nachtrag zu dem „zweiten Aufsatz über Nicht-Euklidische Geometrie. *Mathematische Annalen*, 7 : 531–537, 1874. Werke 1, 344-350.
- Felix Klein. Über die geometrische definition derProjektivität auf den Grundgebilden erster Stufe. *Mathematische Annalen*, 17 : 52–54, 1880. Werke 1, 351-352.
- Felix Klein. Nicht-euklidische geometrie i. Göttingen, 1892. Vorlesung gehalten während des Wintersemesters 1889-1890.
- Felix Klein. Gutachten, betreffend den dritten band der theorie der transformationsgruppen von s. lie anlässlich der ersten vertheilung des lobatschewsky-preises. *Mathematische Annalen*, 50 :583–600, 1897.
- Félix Klein. *Conférences sur les mathématiques*. Hermann, Paris, 1898. cité d'après la traduction de Laugel.
- Jacob Lüroth. Ueber das Rechnen mit Würfeln. *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen*, 27 : 767–779, 1873.
- Jacob Lüroth. Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfeln. darstellung der v.Staud'schen Theorie. *Mathematische Annalen*, 8 : 145–214, 1875.
- Jacob Lüroth. Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfeln. (Zweite Abhandlung. *Mathematische Annalen*, 11 : 84–110, 1876.
- Elena Anne Corie Marchisotto. Mario Pieri and his contributions to geometry and foundations of mathematics. *Historia Mathematica*, 20 :285–303, 1993.
- Elena Anne Corie Marchisotto. In the shadow of giants : The work of Mario Pieri in the foundations of mathematics. *Journal of History and Philosophy of Logic*, 16 :107–119, 1995.
- Elena Anne Corie Marchisotto. The projective geometry of Mario Pieri : A legacy of Georg Karl Christian von Staudt. *Historia Mathematica*, 33 :277–314, 2006.

- August Ferdinand Möbius. *Der barycentrische Calcul – ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie dargestellt und insbesondere auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und die Entwicklung mehrere Eigenschaften der Kegelschnitte angewendet*. Verlag von Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1827. cité d'après l'édition des *Gesammelte Werke*, t. 1, 1-388.
- Gaspard Monge. *Géométrie descriptive*. Baudouin, Imprimeur du Corps législatif et de l'Institut national, Paris, 1799.
- F.R. Moulton. A simple non-desarguesian plane geometry. *Transactions of American Mathematical Society*, 3 :192–195, 1902.
- Philippe Nabonnand. La polémique entre Poincaré et Russell au sujet du statut des axiomes de la géométrie. *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 6 :219–269, 2000.
- Alessandro Padoa. Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque. In *Bibliothèque du congrès international de philosophie : logique et histoire des sciences*, pages 309–365, Paris, 1901. Armand Colin.
- Moritz Pasch. *Vorlesungen über neuere Geometrie*. Teubner, Leipzig, 1882a.
- Moritz Pasch. Der Ursprung des Zahlbegriffs.
- Moritz Pasch. *Vorlesungen über neuere Geometrie*. Teubner, Leipzig, 1882b. 1^{ère} éd.
- Moritz Pasch. Ueber die projective Geometrie und die analytische Darstellung der geometrischen Gebilde. *Mathematische Annalen*, 30 : 127–131, 1887.
- Moritz Pasch. *Veränderliche und Funktion*. Teubner, Leipzig und Berlin, 1914.
- Moritz Pasch. Grundfragen der Geometrie. 1917.
- Moritz Pasch. Die natürliche Geometrie. *Mathematische Zeitschrift*, 21 :151–153, 1924.
- Moritz Pasch. *Vorlesungen über neuere Geometrie*. Springer, Berlin, 1926. 2^e éd. avec un supplément de Max Dehn, *Die Grundlegung der Geometrie in Historischer Entwicklung*.
- Giuseppe Peano. Les définitions mathématiques. In *Bibliothèque du congrès international de philosophie : logique et histoire des sciences*, pages 279–288, Paris, 1901. Armand Colin.
- Mario Pieri. Sui principii che reggono la geometria di posizione (i). *Atti della Regia Accademia delle Scienze di Torino*, 30 :607–641, 1894-95.
- Mario Pieri. Sui principii che reggono la geometria di posizione (ii). *Atti della Regia Accademia delle Scienze di Torino*, 31 :381–399, 1895-96a.
- Mario Pieri. Sui principii che reggono la geometria di posizione (iii). *Atti della Regia Accademia delle Scienze di Torino*, 31 :457–470, 1895-96b.

- Mario Pieri. Un sistema di postulati per la geometria proiettiva degli iperspazii. *Rivista di Matematica*, 6 :9–16, 1896.
- Mario Pieri. Sugli enti primitivi della geometria proiettiva astratta. *Atti della Regia Accademia delle Scienze di Torino*, 32 :343–351, 1896-97.
- Mario Pieri. I principii della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo. *Memorie della Regia Accademia delle Scienze di Torino*, 48 (2) : 1–62, 1897-98.
- Mario Pieri. Nuovo modo di svolgere deduttivamente la geometria proiettiva. *Rendiconti del Regio Istituto Lombardo di Scienze*.
- Mario Pieri. Sui principii che reggono la geometria delle rette. *Atti della Regia Accademia delle Scienze di Torino*, 36 :335–350, 1900-01.
- Mario Pieri. Sur la géométrie envisagée comme un système purement logique. In *Bibliothèque du congrès international de philosophie : logique et histoire des sciences*, pages 367–404, Paris, 1901. Armand Colin.
- Henri Poincaré. Des fondements de la géométrie, à propos d'un livre de M. Russell. *Revue de métaphysique et de morale*, 7 : 251–279, 1899.
- Jean Victor Poncelet. Lemmes de géométrie synthétique : sur les systèmes de cercle situés dans un même plan. in *Applications d'analyse et de géométrie qui ont servi de principal fondement au traité des propriétés projectives des figure*, tome 1, Paris : Gauthiers-Villars, 1862, 1-55, 1813.
- Jean Victor Poncelet. Sur la loi des signes de position en géométrie, la loi et le principe de continuité. in *Applications d'analyse et de géométrie qui ont servi de principal fondement au traité des propriétés projectives des figure*, tome 2, Paris : Gauthiers-Villars, 1864, 167-295, 1815a.
- Jean Victor Poncelet. Méthode des transversales appliquée à la recherche et à la démonstration des propriétés des lignes et surfaces géométriques. in *Applications d'analyse et de géométrie qui ont servi de principal fondement au traité des propriétés projectives des figure*, tome 2, Paris : Gauthiers-Villars, 1864, 67-166, 1815b.
- Jean Victor Poncelet. Réflexions sur l'usage de l'analyse algébrique en géométrie, et solutions de divers problèmes dépendant de la géométrie de la règle. *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 8, 1817-1818.
- Jean Victor Poncelet. Considérations philosophiques et techniques sur le principe de continuité dans les lois géométrique. in *Applications d'analyse et de géométrie qui ont servi de principal fondement au traité des propriétés projectives des figure*, tome 2, Paris : Gauthiers-Villars, 1864, 296-362, 1818.
- Jean-Victor Poncelet. *Lettre adressée à Terquem*. Paris, 14 octobre 1819. in [Poncelet 1864], 543-552.
- Jean Victor Poncelet. Essai sur les propriétés projectives des sections coniques. in *Applications d'analyse et de géométrie qui ont servi de principal fondement au traité des propriétés projectives des figure*, tome 2, Paris : Gauthiers-Villars, 1864, 365-454, 1820.

- Jean Victor Poncelet. *Traité des propriétés projectives des figures*, volume 1. Metz-Paris, 1822. 2^e édition avec des annotations et des suppléments, Paris : Gauthier-Villars, 1865.
- Jean-Victor Poncelet. Analyse d'un mémoire présenté à l'Académie royale des Sciences. *Annales de mathématiques pures et appliquées*, XVII :265–272, 1826–1827. republicé dans [Ponc1866], 324–331.
- Jean-Victor Poncelet. Note sur divers articles du Bulletin des sciences de 1826 et de 1827, relatifs à la Théorie des polaires réciproques, à la dualité des propriétés de situation de l'étendue, etc. *Annales de mathématiques pures et appliquées*, XVIII :125–149, 1827–1828.
- Jean Victor Poncelet. Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 3 :213–272, 1828a. réédité in [Ponc1866], 1–50.
- Jean-Victor Poncelet. Sur la dualité de situation et sur la théorie des polaires réciproques. *Bulletin des Sciences de Ferrussac*, IX :292–320, 1828b. cité d'après la republication in [Ponc1866], 369–376.
- Jean Victor Poncelet. Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 4 :1–71, 1829. réédité in [Ponc1866], 57–121.
- Jean Victor Poncelet. Analyse des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives des lignes et surfaces géométriques. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 8 :21–41, 1832. réédité in [Ponc1866], 122–141.
- Jean Victor Poncelet. *Applications d'analyse et de géométrie qui ont servi de principal fondement au traité des propriétés projectives des figures*, volume 2. Gauthier-Villars, Paris, 1864.
- Jean Victor Poncelet. *Traité des propriétés projectives des figures*, volume 2. Paris : Gauthier-Villars, 1866, 1866.
- Theodor Reye. *Geometrie der Lage, Erste Abtheilung*. 1866.
- Theodor Reye. *Geometrie der Lage, Erste Abtheilung (Zweite vermehrte Auflage. a.*
- Theodor Reye. *Geometrie der Lage, Erste Abtheilung (Dritte vermehrte Auflage. b.*
- David Rowe. In search of Steiner's Ghosts : Imaginary elements in nineteenth-century geometry. In Éditions de la Maison des Sciences de l'Homme, editor, *Le nombre, une hydre à n visages – Entre nombres complexes et vecteurs*, pages 193–208. Flament, Dominique, Paris, 1998.
- Bertrand Russell. *An Essay on the Foundations of Geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1897. London and New York : Routledge, 1996; trad.fr. de A. Cadenat, Paris : Gauthier-Villars.

- Bertrand Russell. *The Principles of Mathematics*. University Press, Cambridge, 1903.
- Erhard Scholz. *Symmetrie-Gruppe-Dualität. Zur Beziehung zwischen theoretischer Mathematik und Anwendung in Kristallographie und Baustatik des 19. Jahrhunderts*. Birkhäuser, 1989.
- Ernst Schröder. Ueber v. Staudt's Rechnung mit Würfeln und verwandte Prozesse. *Mathematische Annalen*, 10 : 289–317, 1876.
- Friedrich Schur. Ueber den Fundamentalsatz der projectivischen Geometrie. *Mathematische Annalen*, 18 : 252–254, 1881.
- Friedrich Schur. Ueber den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie. *Mathematische Annalen*, 51 : 401–409, 1899.
- Friedrich Schur. Ueber die Grundlagen der Geometrie. *Mathematische Annalen*, 55 : 265–292, 1902.
- Friedrich Schur. *Grundlagen der Geometrie*. Teubner, Leipzig und Berlin, 1909.
- F.-J. Servois. *Solutions peu connues de différents problèmes de géométrie pratique pour servir de supplément aux Traités connus de cette Science*. Devilly & Courcier, Metz-Paris, 1804. (An XII).
- Georg von Staudt. *Geometrie der Lage*. Verlag von Bauer und Raspe, Nuremberg, 1847. Trad. it. de M. Pieri, *Geometria di posizione* di Giorgio von Staudt avec une présentation des travaux de von Staudt de C. Segre, Turin : Bocca, 1889 ; trad. fr. de P. Nabonand, à paraître.
- Georg von Staudt. *Beiträge zur Geometrie der Lage, I*. Verlag von Bauer und Raspe, 1856.
- Georg von Staudt. *Beiträge zur Geometrie der Lage, II*. Verlag von Bauer und Raspe, 1857.
- Georg von Staudt. *Beiträge zur Geometrie der Lage, III*. Verlag von Bauer und Raspe, 1860.
- Jacob Steiner. Démonstration de quelques théorèmes. *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 19 : 1–8, 1828.
- Jacob Steiner. *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*. G. Fincke, Berlin, 1832. cité d'après l'édition Ostwald's Klassiker der Exakten Wissenschaften 82 (1^{re} partie) et 83 (2^e partie), Leipzig : Akademische Verlagsgesellschaft M.B.H.
- Jacob Steiner. *Vorlesungen über Synthetische Geometrie, zweiter Theil : Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektivische Eigenschaften*. publié par Heinrich Schröter, G. Teubner, Leipzig, 1867.
- Rud. Sturm. Ueber die v. Staudt'schen Würfe. *Mathematische Annalen*, 9 : 333–346, 1875.
- O. Terquem. *Lettre adressée à Poncelet*. Paris, 21 janvier 1819. in [Ponc1864], 539–541.

- O. Terquem. *Lettre adressée à Poncelet*. Paris, septembre 1819. in [Poncelet 1864], 541-543.
- Johannes Thomaë. *Ebene geometrische Gebilde erster und zweiter Ordnung vom Standpunkte der Geometrie der Lage*. Verlag von Louis Nebert, Halle, 1873.
- G. Vailati. Sui principi fondamentali della geometria della retta. *Rivista matematica*, 2 :71-75, 1892.
- G. Vailati. Sulle relazioni di posizione tra punti d'una linea chiusa. *Rivista di Matematica*, (5), 1895a.
- G. Vailati. Sulle proprietà caratteristiche delle varietà a una dimensione. *Rivista di Matematica*, (5), 1895b.
- Oswald Veblen and John Wesley Young. A Set of Assumptions for Projective Geometry. *American Journal of Mathematics*, 30 : 347-380, 1908.
- Oswald Veblen and Wesley Young, John. *Projective Geometry*, volume 1. Ginn and Compagny, Boston, 1910.
- Oswald Veblen and Wesley Young, John. *Projective Geometry*, volume 1. Ginn and Compagny, Boston, 1917.
- Giuseppe Veronese. *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare*. Tipografia del Seminario, Padova, 1891. cité d'après la traduction allemande de A. Schepp, Grunzüge der Geometrie, Leipzig : Teubner, 1894.
- Jean-Daniel Voelke. Le théorème fondamental de la géométrie projective : évolution de sa preuve entre 1847 et 1900. *Archives for History of sciences*, 2007.
- Karl Weierstrass. *Rein geometrischer Beweis des Hauptsatzes der projectivischen Geometrie*, volume 3, chapter 9, pages 161-174. Werke, Berlin, 1903.
- Alfred North Whitehead. *The Axioms of Projective Geometry*. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 4. Hafner Publishing Co., New York, 1906.
- Alfred North Whitehead. *The Axioms of Descriptive Geometry*. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 5. Hafner Publishing Co., New York, 1907.
- H. Wiener. Ueber Grundlagen und Aufbau der Geometrie. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (Erster Band 1890-91)*, 1892.
- H.-G. Zeuthen. Nouvelle démonstration du théorème fondamental de la géométrie projective. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 125 :638-640, 1897a.
- H.-G. Zeuthen. Sur le théorème fondamental de la géométrie projective. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 125 :858-859, 1897b.
- H.-G. Zeuthen. Sur le fondement de la géométrie projective. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 126 :213-215, 1898.