HAL
open science

“ Deux droites coplanaires sont sécantes ”

Philippe Nabonnand

To cite this version:

Philippe Nabonnand. “ Deux droites coplanaires sont sécantes ”. Lise Bioesmat-Martagon. Éléments pour une biographie de l’espace projectif, Presses universitaires de Nancy - Editions de l’Université de Lorraine, p. 159-195, 2011, Histoires de géométries. hal-01081820

HAL Id: hal-01081820

https://hal.science/hal-01081820

Submitted on 11 Nov 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L’archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d’enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

« Deux droites coplanaires sont sécantes »

Philippe Nabonnand

1. Introduction

Lors de sa première polémique avec Bertrand Russell (1872-1970) au sujet du statut de la géométrie[1], Henri Poincaré (1854-1912) réfute violemment la présentation par Russell d'une axiomatique de la géométrie projective. Russell pose comme premier axiome :

> On peut distinguer différentes parties de l'espace, mais toutes ces parties sont qualitativement semblables, et ne se distinguent que par le fait immédiat qu'elles sont situées les unes en dehors des autres. [Russell, 1897, 133]

Poincaré commente cet axiome en soulignant que la similitude qualitative entre les différentes parties de l'espace exigée par le premier axiome posé par Russell concerne aussi les éléments (points, droites, plan) à l'infini.

> Il faut encore qu'«un point à l'infini» (pour parler le langage des géomètres projectifs) soit qualitativement équivalent à un point ordinaire ; l'ensemble des points à l'infini forme un «plan à l'infini» qui doit être regardé comme indiscernable d'un plan ordinaire, au point de vue qualitatif. [Poincaré, 1899, 252]

Enfin, ajoute Poincaré, les axiomes de Russell ne sont pas suffisants pour prouver qu'une droite et un plan possèdent nécessairement une intersection non vide. Poincaré propose dans sa réponse, une nouvelle liste d'axiomes susceptibles de fonder la géométrie projective.

> En résumé, il est nécessaire de compléter la liste des axiomes, et de modifier les énoncés en remplaçant les expressions un peu vagues et ambiguës de M. Russell par d'autres plus précises. On arrive ainsi à la liste suivante :
>
> 1° L'espace est une multiplicité (variété, *Mannigfaltigkeit*, *manifold*) continue à trois dimensions.
>
> 2° Les points de cette multiplicité, tant à distance finie qu'à distance infinie, sont qualitativement indiscernables les uns des autres.
>
> 3° Par deux points passe une droite et une seule.
>
> 4° Par trois points, non en ligne droite, passe un plan, et un seul, qui contient les droites qui joignent ces trois points deux à deux.
>
> 5° Un plan et une droite se rencontrent toujours.
>
> De cette liste on ne peut rien retrancher. [Poincaré, 1899, 254]

Poincaré insiste sur le fait que dans le cadre de la géométrie projective, les éléments dits « à l'infini » ne doivent pas être distingués des éléments ordinaires et qu'en conséquence, en géométrie projective tridimensionnelle, un plan et une droite sont obligatoirement sécants. Même si Poincaré continue à considérer que l'espace projectif est obtenu en complétant l'« espace ordinaire » et à différencier dans sa présentation les éléments « à distance finie » de ceux « à distance infinie », l'espace projectif est présenté comme une entité spatiale qui du point de vue de l'incidence, a des propriétés radicalement différentes de celles de l'espace euclidien puisque

a) deux droites coplanaires se coupent et
b) un plan et une droite ont nécessairement une intersection non vide.

---

[1] Pour plus de précisions sur cette polémique, on peut consulter [Nabonnand, 2000].

L'apparition au début du 19e siècle de considérations projectives est associée à l'introduction d'éléments dits à l'infini. Cette situation perdure longtemps, le cadre dans lequel se développe la géométrie projective sera présenté comme l'espace ordinaire auquel on adjoint des points, des droites et des plans à l'infini. La plupart des auteurs ne s'embarrasse pas de considérations ontologiques mais considère l'expression « à l'infini » comme une manière de dire qu'il faut justifier d'un point de vue pratique. Pendant au moins la première moitié du 19e siècle, l'objectif principal des géomètres est de donner une bonne théorie des coniques (et des surfaces du II. ordre). Selon les auteurs, l'introduction de l'expression « à l'infini » sert à assurer les énoncé *a* et *b* ci-dessus et ce pour simplement clore les relations d'incidence comme dans le *Traité des propriétés projectives des figures* de Jean Victor Poncelet (1788-1867), pour garantir la dualité de la théorie comme dans la *Geometrie der Lage* de Karl Georg Christian von Staudt (1798-1867) ou pour définir les transformations projectives entre forme fondamentale comme dans les théories de Jakob Steiner (1796-1863) ou Staudt. Plus tard, cet axiome aura aussi pour fonction d'affirmer que l'espace est de dimension 3.

Les axiomes d'incidence *a* et *b* sont donc énoncés pour justifier de nouvelles pratiques de la géométrie. Ils apparaissent ainsi rapidement comme symptomatique du nouveau cadre projectif dans lequel se déploient les formes nouvelles du questionnement géométrique.

2. L'analyse des propriétés projectives des figures chez Poncelet

Poncelet évoque essentiellement l'introduction de l'expression « à l'infini » dans deux textes presque contemporains : dans un essai datant de 1818 soumis à l'Académie des sciences, *Considérations philosophiques et techniques sur le principe de continuité dans les lois géométriques*, le terme « à l'infini » sert à exprimer le principe de continuité dans certaines circonstances[2]. Dans les premiers chapitres du premier tome du *Traité des propriétés projectives des figures*, la notion d'élément à l'infini, même si elle reste liée au principe de continuité, sert surtout à exprimer les principes de projection[3].

Le but des *Considérations philosophique* est de convaincre le lecteur de la légitimité d'utiliser en géométrie synthétique un « principe de la continuité » ou de « permanence des relations mathématiques de la grandeur figurée[4] ». Le principe de continuité permet d'affirmer la permanence des propriétés géométriques des figures lorsque les positions relatives de leurs éléments varient continument. Tant que ces éléments restent représentables ou réels, ce principe affirme que les propriétés se conservent moyennant d'éventuels changement de signes ; l'audace théorique de Poncelet étend la permanence des propriétés dans les cas où des éléments deviennent imaginaires et les situations idéales :

> Quoiqu'il en soit, il n'y a évidemment aucune difficulté à admettre le principe pour tous les états réels et absolus d'une figure ; or, il résulte de là même qu'il ne saurait y avoir de contradiction à l'y admettre, au moins idéalement, pour tous ceux des états de cette figure où certains objets seraient devenus impossibles, pourvu qu'on ait soin de ne rien prononcer, avant un examen exact et rigoureux, sur l'existence et la nature de ces objets et de ceux qui en dérivent d'après les lois du système. Car si, après un tel examen, on a reconnu qu'en effet certains objets ou certaines grandeurs ont cessé d'être d'une manière géométrique, on sera par là même averti que l'existence qu'on leur supposait est purement hypothétique, et que la relation qui les concerne est elle-même idéale à l'égard de ces objets. [Poncelet, 1818, 338]

---

[2] [Poncelet, 1818].
[3] [Poncelet, 1822].
[4] [Poncelet, 1818, 319].
Pour plus de détails sur le principe de continuité chez Poncelet, on peut consulter [Nabonnand, 2006].

Poncelet précise alors que l'admission du principe de continuité nécessite d'introduire des « expressions figurées qui peuvent servir à caractériser les êtres de non-existence ». Il dénommera « imaginaires » les objets géométriques qui n'ont plus d'existence réelle suite à des déplacements des éléments de la figure. Par exemple, lorsque une sécante (réelle) à un cercle est déplacée jusqu'à ne plus avoir de points d'intersection réels avec le cercle, la droite et le cercle conservent néanmoins, de par le principe de continuité, deux points communs imaginaires. La sécante devient alors idéale. Poncelet introduit dans le même mouvement l'expression « à l'infini » et le terme « imaginaire » pour conserver la même description géométrique des figures subissant des déplacements relatifs de leurs éléments (principe de continuité).

Pour illustrer son propos, Poncelet propose de considérer deux droites concourantes dont l'une subit une rotation de manière que le point d'intersection des deux droites s'éloignent à l'infini :

> Si l'on vient à écarter une de ces lignes droites de sa position primitive, en lui imprimant un mouvement progressif et *continu*, toujours dans le même sens et dans le plan primitif, il arrivera bientôt que le point de leur intersection commune, après s'être écarté de son origine à une distance plus grande que toute distance donnée, finira par cesser tout à fait d'être, circonstance qui aura lieu quand ces deux droites seront devenues *parallèles* ; pour conserver, malgré cela, à ce point un signe dans le discours, qui caractérise en même temps le mode de sa non-existence géométrique, on dit qu'il est à l'infini sur le plan de sa non-existence géométrique ; or, de là dérive aussi cette notion si généralement admise[5] :
>
> Le système de deux droites parallèles a son point de concours placé à l'infini ; elles convergent à l'infini. [Poncelet, 1818, 346]

Le point à l'infini étant défini comme un point d'intersection, il s'ensuit qu'une droite ne contient qu'un seul point à l'infini :

> Puisque dans le cas examiné de deux droites situées dans un même plan, le point de leur intersection est toujours unique, il faut aussi admettre, pour la continuité, qu'il est encore unique quand ces deux droites deviennent parallèles, et de là dérive cette conséquence paradoxale, mais pourtant nécessaire :
>
> Les deux extrémités d'une droite indéfinie se rejoignent et se confondent à l'infini. [Poncelet, 1818, 347]

Poncelet poursuit son développement en argumentant de même dans le cas des plans en introduisant la notion de droite à l'infini ; comme toute droite se transportant « d'un mouvement continu et parallèlement à elle-même jusqu'à une distance infinie et sans quitter le plan » se confondra avec la droite à l'infini, il s'ensuit que « tous les points à l'infini sur un plan doivent être considérés, d'une manière idéale, comme distribués sur une seule et même ligne droite, dont la direction est d'ailleurs entièrement indéterminée[6] ».

De même, dans l'espace :

> Tous les points à l'infini de l'espace doivent être considérés, d'une manière idéale, comme distribués sur une seule et unique surface plane située à l'infini, dont la direction est d'ailleurs entièrement indéterminée. [Poncelet, 1818, 348]

Poncelet souligne que pour étranges que soient les propriétés des éléments à l'infini, elles découlent de l'application du principe de continuité et il se propose de les justifier en utilisant

---

[5] Dans sa *Géométrie descriptive*, Gaspard Monge (1746-1818) évoque, sans en faire la théorie, le fait que « deux droites parallèles peuvent être regardées comme concourantes à l'infini » [Monge, 1799, II-42].
[6] [Poncelet, 1818, 348].

des considérations tirées de la perspective (c'est-à-dire de la projection) dans un travail ultérieur.

Dans les *considérations philosophiques*, Poncelet n'examine que les conséquences de l'application du principe de continuité et décrit les propriétés des éléments à l'infini qu'il est amené à introduire pour appliquer ce principe. Dans le *Traité*, Poncelet mêle beaucoup plus étroitement les questions relatives à l'application de son principe et celles liées au propriétés projectives des figures.

Dans son *Traité des propriétés projectives des figures*, Poncelet introduit l'expression « à l'infini » dans le cadre de sa discussion sur la nécessité « d'étendre le langage et les conceptions de la Géométrie ordinaire[7] ». L'expression apparaît d'abord au détour d'une note précisant les liens entre la définition traditionnelle des coniques comme sections d'un cône à base circulaire et le point de vue des projections :

> […] il est aisé de voir que l'hyperbole a deux points à l'infini avec deux tangentes en ces points nommées asymptote, et que, pour la parabole, ces deux points et ces deux tangentes se confondent en un seul point et une seule tangente située tout entière à l'infini[8]. [Poncelet, 1822, 5]

Le premier élément « à l'infini » que Poncelet introduit est celui de la sécante commune à deux hyperboles homothétiques[9].

> Considérons d'abord le système de deux ou plusieurs hyperboles s. et s. p. (c'est-à-dire *semblables et semblablement placées*) sur un plan ; ces hyperboles ont évidemment leurs asymptotes parallèles ; donc elles ont deux points communs situés à l'infini sur ces asymptotes ; ou, en d'autres termes, *elles ont une sécante commune à l'infini*. [Poncelet, 1822, 46]

Poncelet généralise la notion de sécante commune à l'infini en précisant que des ellipses homothétiques ont, elles aussi une sécante commune joignant « deux points imaginaires communs à l'infini ». De manière corollaire, deux cercles coplanaires ont quatre points communs, deux points réels ou imaginaires par lesquels passe une sécante réelle ou idéale et deux points imaginaires à l'infini (points cycliques) par lesquels passe une sécante à l'infini. Cette sécante à l'infini n'a pas de direction et est le lieu des points à l'infini :

> En général, quand une ligne droite se transporte d'un mouvement continu, mais d'ailleurs quelconque, jusqu'à une distance infinie, sans quitter le plan de la figure à laquelle elle appartient, elle devient nécessairement indéterminée de direction à l'égard des autres objets de la figure : c'est du moins ce qui résulte de l'admission du principe de continuité, qui veut que les points à l'infini d'un plan puisse être considérés idéalement comme distribués sur une droite unique, située elle-même à l'infini sur ce plan. [Poncelet, 1822, 49]

A ce stade, la droite à l'infini reste une notion « purement métaphysique[10] » (ou relevant des fondements). Pour la justifier géométriquement, c'est-à-dire expliquer comment on s'en sert, Poncelet développe une série de principes de projection des figures.

---

[7] [Poncelet, 1822, 35].

[8] La manière de présenter la notion d'élément à l'infini pourrait laisser penser qu'elle est commune. *A priori*, il n'en est rien. Poncelet est le premier, sinon à l'introduire, au moins à s'en servir systématiquement.

[9] Poncelet n'utilise pas le terme « homothétique » mais l'expression « semblable et semblablement placé ». Après avoir décrit les propriétés des similitudes, il ajoute que « si de plus, les droites homologues sont parallèles dans les figures élémentaires qui construisent les proposées, la même chose aura lieu dans celle-ci ; en sorte qu'elles ne seront plus simplement semblables, mais semblables et semblablement placées entre elles » [Poncelet, 1822, 21].

[10] [Poncelet, 1822, 49]

En effet, Poncelet met en place des méthodes générales d'étude des propriétés dites « projectives », c'est-à-dire qui se conservent par projection centrale. Un des outils proposés par Poncelet est décrit sous forme de « principes relatifs à la projection des figures planes les unes dans les autres ». Un des principes les plus généraux consiste à « envoyer » certains éléments à l'infini :

> Une figure plane quelconque, qui renferme un système de droites ou de courbes ayant un point commun d'intersection, peut toujours être regardée comme la projection d'une autre, du même genre ou ordre, dans laquelle le point d'intersection est passé à l'infini et les lignes correspondantes sont devenues parallèles. [Poncelet, 1822, 51]
>
> Réciproquement :
>
> Une figure plane qui renferme un système de lignes droites ou courbes, parallèles ou concourantes à l'infini, a en général pour projection, sur une plan quelconque, une figure du même genre, dans laquelle les lignes correspondantes concourent en un point commun à distance finie, projection de celui du premier système.

Une application immédiate de ces principes de projection est de donner une interprétation géométrique du fait que des droites parallèles concourent en un point à l'infini. De la même manière, ces principes permettent de comprendre géométriquement pourquoi les points à l'infini sont distribués sur une droite puisque « tous ces points sont représentés, en projection, par ceux d'une ligne droite unique située, en général, à distance donnée et finie[11] ». Mais les éléments à l'infini conserve la marque de leur construction ; par exemple, comme on l'a vu plus haut, la droite à l'infini n'a pas de direction puisque une droite quelconque d'un plan peut 'tendre' vers la droite à l'infini et cette indétermination est en quelque sorte le symptôme de sa construction puisqu'elle est inhérente à l'idée de projection centrale à partir d'un point. En effet, si l'on considère la projection d'un plan (P) à partir d'un centre S extérieur au plan, le plan qui projette une droite (réelle) d (appartenant au plan P) est le plan (Sd) déterminé par la droite d et le point S. L'indétermination de la direction de la droite à l'infini provient de l'indétermination du plan de projection lorsque la droite part à l'infini et des multiples manières que celui-ci a de devenir parallèle au plan (P) :

> L'indétermination, observée dans la direction de la droite à l'infini, vient précisément de l'indétermination même qui existe dans celle du plan qui projette cette droite, au moment où il va devenir parallèle au plan de la figure donnée ; mais on voit aussi que cette indétermination n'a lieu que parce qu'on persiste à donner mentalement une existence réelle à la droite de leur intersection commune, quand ils sont devenus tout à fait parallèles. Au reste, l'indétermination n'existe réellement que dans la loi ou la construction primitive, qui donnait cette droite lorsqu'elle était à distance finie, et non dans sa direction même, puisque réellement elle cesse d'exister d'une manière absolue et géométrique. [Poncelet, 1822, 52-53]

En 1822, l'expression « à l'infini » apparaît en acte, c'est-à-dire pour montrer comment se servir du principe de continuité. Les éléments à l'infini sont présentés au fur et à mesure des besoins de la mise en place du cadre géométrique dans lequel Poncelet nous propose d'évoluer. L'expression « à l'infini » sert à marquer des éléments qui s'éloignent à l'infini lors de projection ou d'une évolution continue des positions relatives des éléments de la figure. Les conclusions que Poncelet tirent sur les propriétés des éléments à l'infini en utilisant le principe de continuité sont qualifiées de métaphysique alors que celles que l'on obtient par des considérations de projection relèvent de la représentation géométrique.

---

[11] [Poncelet, 1822, 52].

3. L'introduction des formes fondamentales par Steiner

Le titre du traité de géométrie de Steiner, *Développement systématique de la dépendance mutuelle des figures géométriques eu égard aux travaux des géomètres anciens et contemporains sur les porismes, les méthodes projectives, la géométrie de positions, les transversales, la dualité et la réciprocité, etc.*[12], annonce ses ambitions : exposer et organiser autour de principes fondamentaux simples l'ensemble du corpus de la géométrie ancienne et contemporaine. Pour cela, Steiner subordonne l'analyse de « la dépendance des figures » à l'étude des relations projectives entre formes fondamentales. Avec Steiner, l'objet central de la géométrie n'est plus la figure mais devient la notion de formes fondamentales ; en effet, l'outil essentiel pour étudier les coniques et les surfaces du second ordre sera la notion de relations projectives entre formes.

Les notions primitives de la géométrie restent l'espace, le plan, la droite et le plan mais les concepts fondamentaux à partir desquels Steiner se propose de déduire la géométrie sont la droite vue comme un ensemble de points, le faisceau plan de droites, le faisceau de plans, le plan vu comme un ensemble de points et de droite, le faisceau spatial de rayons et l'espace vu comme un ensemble de points, de droites et de plans. Les éléments à l'infini apparaissent de manière explicite dans la description des relations projectives fondamentales sans que Steiner ne cherche à les définir. Ainsi, la relation qui associe à chaque rayon d'un faisceau plan de droites son point d'intersection avec une droite donnée nécessite d'introduire la notion de point à l'infini d'une droite pour trouver un point correspondant à la droite du faisceau parallèle à la droite donnée. Steiner précise qu'une droite possède un unique point à l'infini. Il note à cet égard que l'on peut se convaincre de l'unicité du point à l'infini d'une droite en considérant l'exemple de l'asymptote d'une hyperbole, l'argument étant que le point de contact d'une tangente avec l'hyperbole ne peut qu'être unique. Steiner donne cet argument sans commentaire, ni précision, preuve qu'un certain savoir autour de la notion de point à l'infini semble être acquis en 1832 sans pour autant que les propriétés de cette notion ait fait l'objet d'une théorie.

Une droite et un faisceau de droites dont les éléments sont appariés de telle manière que chaque droite du faisceau est associée à son point d'intersection avec la droite sont dits *en position perspective*. Steiner généralise la notion de relation projective en considérant des formes *en position oblique*, c'est-à-dire des formes qui peuvent être ramenées par un mouvement continu en position oblique. Cette définition est équivalente à la propriété de conservation du birapport. La notion de point à l'infini est de nouveau utilisée par Steiner pour caractériser les affinités d'une droite comme la classe des relations projectives qui conservent le point à l'infini.

L'espace considéré par Steiner reste euclidien. Il n'introduit la notion de point à l'infini que pour obtenir la définition des relations projectives entre formes fondamentales. Dans la suite du développement, les points ordinaires et les points à l'infini ne sont plus distingués car l'outil principal utilisé par Steiner est la relation projective entre formes fondamentales. En particulier, Steiner admet que deux droites coplanaires sont sécantes, deux plans se coupent le long d'une droite et qu'une droite et un plan ont un point d'intersection.

L'introduction de la notion d'éléments à l'infini garantit en outre la symétrie des énoncés de la géométrie, c'est-à-dire la dualité de la théorie. Comme le précise Steiner, les éléments

[12] [Steiner, 1832].

a) de la droite et du faisceau plan de rayons
b) de la droite et du faisceau de plans
c) du faisceau plan de rayons et du faisceau de plans
d) du plan et du faisceau spatial de rayons

peuvent être mis en relation de telle manière que les propriétés, les figures et les théorèmes relatifs à une de ces formes reçoivent naturellement une traduction dans la forme réciproque. La dualité des théorèmes de la géométrie provient de la nature de la description par les formes fondamentales des questions de géométrie :

> L'existence de cette dualité des propriétés et des théorèmes est par conséquent exigée nécessairement par les formes fondamentales elles-mêmes, c'est-à-dire par la compréhension des éléments de l'espace[i]. [Steiner, 1832, 10]

4. Von Staudt

En 1847 , von Staudt poursuit, avec sa *Geometrie der Lage*[13], l'essentiel du projet de Steiner en le radicalisant. En effet, il se propose d'exposer la géométrie sans utiliser la moindre considération de mesure et en ne faisant appel qu'à des arguments d'incidence. Ainsi, au contraire de Steiner qui introduit la notion de birapport pour caractériser les relations projectives entre formes, von Staudt les définit comme les relations qui conservent les formes harmoniques, elles-mêmes obtenues de manière purement incidente à partir du théorème du quadrilatère complet[14]. De même que Steiner, von Staudt reprend sans commentaires le vocabulaire de la géométrie euclidienne (point, droite, plan, espace) et introduit la notion de forme fondamentale en distinguant les *formes fondamentales de première espèce* (ou uniforme) qui sont le déploiement d'une seule catégorie d'élément : la ponctuelle, le faisceau plan de droites et le faisceau de plans, les *formes fondamentales de deuxième espèce* qui sont le déploiement de deux catégories d'élément : le système plan et la gerbe[15], et enfin l'espace, la *forme fondamentale de troisième espèce*. La notion de relation projective entre formes fondamentales de même espèce permet à von Staudt de développer une théorie des coniques et surfaces de 2e ordre comme courbe ou surface double d'une involution réciproque.

Auparavant, von Staudt introduit la notion d'élément à l'infini en présentant ces notions comme des astuces langagières qui facilitent l'exposition et la démonstration de la théorie. Dans un premier temps, il reprend la notion de droites et de plans parallèles et énumérant précisément les situations d'incidence de deux droites coplanaires (sécantes ou parallèles) puis de trois droites coplanaires :

> […] si trois droites sont situées dans un même plan, alors un des quatre cas suivants doit se produire :
>
> a) Les droites se coupent en trois points.
>
> b) Les droites se coupent toutes les trois en un point.
>
> c) Deux des trois droites sont parallèles et sont coupées toutes les deux par la troisième.
>
> d) Les droites sont toutes les trois parallèles[ii]. [Staudt, 1847, 13]

Von Staudt introduit alors l'expression « avoir même *direction* » comme équivalente à « être parallèle » pour ensuite associer à chaque droite sa direction :

---

[13] [Staudt, 1847].
[14] Pour plus de précisions, on peut consulter [Nabonnand, 2006], [Nabonnand, 2008] et [Voelke, 2008].
[15] Von Staudt distingue les faisceaux (*Büschel*) qui sont des formes de première espèce de la gerbe (*Bündel*) qui est l'ensemble des points et des droites qui passent par un point.

> […] on peut aussi dire de telles lignes qu'elles ont ou qu'elles représentent une même direction. [Staudt, 1847, 14][iii]

Von Staudt en déduit que toutes les directions de l'espace peuvent être représentées par une gerbe et toutes les directions contenues dans un même plan sont représentées par un quelconque des faisceaux de droites situé dans ce plan. Il poursuit en exprimant en terme de direction les propriétés d'incidence d'une droite et d'un plan.

La notion de *position* est associée de la même manière à celle de plan :

> Des plans parallèles ont quelque chose en commun, qui peut être conçu d'après chacun d'eux et que l'on appellera leur position, de telle manière que la position d'un plan est déterminée par chacun des plans qui lui sont parallèles et que deux plans ont même position ou des positions différentes selon qu'ils sont parallèles ou qu'ils se coupent. Qu'un plan contienne ou non une direction donnée ne dépend (38) seulement que de sa position, c'est pourquoi on peut dire que la position contient la direction dans le premier cas et ne la contient pas dans le second cas[iv]. [Staudt, 1847, 16-17]

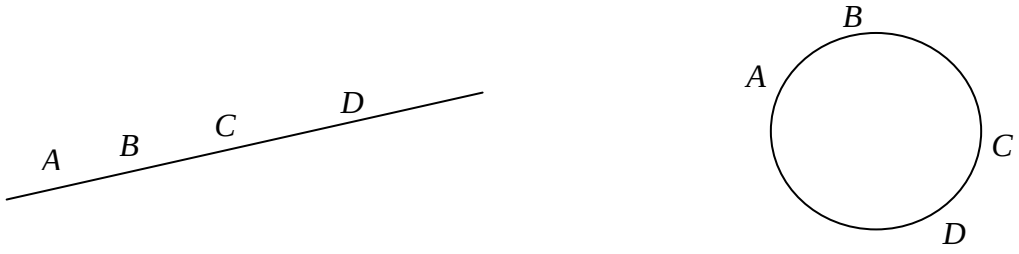
L'idée d'appartenance d'une direction à un plan ou à une position prépare le second temps de l'argumentation de von Staudt et l'introduction des expressions « points à l'infini » et « droite à l'infini ». Pour terminer la première partie de son raisonnement, il se contente de préciser que l'on peut (se) représenter l'ensemble des directions appartenant à une position par un faisceau de droite et l'ensemble des positions contenant une direction par un faisceau de plans, faisant un pas supplémentaire dans l'identification de la notion de direction avec celle de point et de la notion de position avec celle de droite. Il insiste dans cette direction en soulignant que deux directions déterminent une position (qui les contient toutes deux) et que deux positions déterminent une direction (qu'elles contiennent). Cependant, à ce stade, von Staudt ne relève pas explicitement l'analogie entre les relations liant les points et les droites et celles liant les directions et les positions, il se contente seulement d'étendre la définition des faisceaux et des gerbes aux faisceaux de droites parallèles, aux faisceaux de plans parallèles et aux gerbes de droites parallèles :

> L'ensemble de toutes les droites, qui sont situées dans un même plan suivant une direction unique s'appelle un faisceau de rayons parallèles, l'ensemble de tous les plans qui ont même position s'appelle un faisceau de plans parallèles. Les faisceaux de rayons parallèles sont à considérer comme une catégorie particulière de faisceaux de rayons, les faisceaux de plans parallèles sont à considérer comme une catégorie particulière de faisceaux de plans. Un faisceau de rayons a, d'après cela, soit un centre, soit une direction déterminée, un faisceau de plans, soit un axe, soit une position déterminée. L'ensemble de toutes les droites concevables ayant une même direction s'appellera une gerbe de rayons parallèles. Une gerbe de rayons parallèles contient non seulement une infinité de faisceaux de rayons parallèles mais aussi une infinité de faisceaux de plans parallèles. En effet, un plan appartient à toutes les gerbes de rayons dont il contient le centre ou la direction[v]. [Staudt, 1847, 17]

Les notions de faisceaux et de gerbes ainsi généralisées, von Staudt étend aussi celle de projection : une ponctuelle est projetée par rapport à une direction (différente de la sienne) par un faisceau de droites parallèles ou par rapport à une position (ne contenant pas sa direction) par un faisceau de plans parallèles. De même, un système plan sera projeté suivant une direction (non contenue dans celui-ci) par une gerbe de droites parallèles. C'est seulement après avoir montré que les théorèmes concernant les faisceaux ou gerbes propres se généralisent aux faisceaux de droites ou plans parallèles et aux gerbes de droites parallèles, que von Staudt envisage, pour des raisons de commodité d'exposition, d'introduire le vocabulaire des éléments à l'infini :

> On peut conclure […] que dans de nombreux cas, un point sera remplacé par une direction, un plan par une position et donc que la direction d'une droite fait encore partie de ses éléments, que la position d'un plan ainsi que toutes les directions qu'il contient font encore partie de ses éléments. Deux droites qui sont situées dans un même plan ont, soit un point commun, soit même direction. Deux plans ont, soit une droite commune, soit même position. Un plan contient, soit un point, soit la direction d'une droite qui n'est pas située sur lui. En conséquence, il ne sera pas inapproprié d'introduire à la place de direction et de position d'autres expressions qui rappellent immédiatement celles qu'elles remplacent, et des théorèmes qui soient non seulement des modifications particulières des autres théorèmes mais aussi se présentent de la même manière[vi]. [Staudt, 1847, 23]

Après avoir exprimé le besoin d'inventer des expressions qui permettent d'unifier les énoncés concernant les points et les droites et ceux concernant les directions et les positions, et donc de resserrer la théorie des formes fondamentales, von Staudt reprend alors l'exemple de la droite sécante à une autre droite qui tourne autour d'un point jusqu'à lui devenir parallèle, pour justifier l'appellation de *point à l'infini* pour remplacer le terme de direction. Il souligne alors en reprenant cet exemple que si l'on adjoint à une droite un point à l'infini, celle-ci apparaît comme une ligne fermée et que l'ordre des points est cyclique, c'est-à-dire que « parmi quatre points de celle-ci, seulement deux paires d'entre eux sont séparées[16] ». En effet, si l'on considère sur une droite affine dans l'ordre quatre points *A*, *B*, *C*, *D*, les paires (*A*, *D*), (*B*, *D*) et (*A*, *C*) sont séparées par un (ou deux) des autres points. Si l'on reprend la même configuration sur une droite projective, la paire (*A*, *D*) n'est plus séparée.



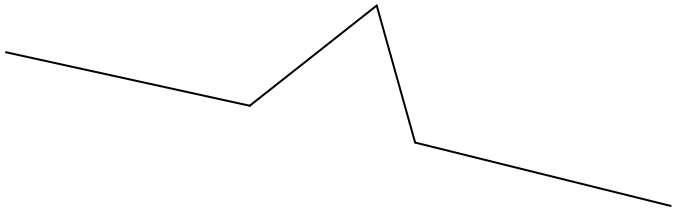
Les expressions de « droite à l'infini » et de « plan à l'infini » sont justifiées de la même manière : l'ensemble des points à l'infini d'un plan constitue une ligne (impropre) qui doit être appelée une droite puisque chaque droite du plan coupe cette ligne en un seul point, de même, la surface (impropre) constituée dans l'espace par les points à l'infini doit être appelée un plan. Von Staudt insiste alors sur l'intérêt de son point de vue pour l'énoncé des théorèmes ; la généralisation qu'il propose va permettre de réunir des théorèmes qui *a priori* sont différents :

> Selon le point de vue présenté dans ce paragraphe, que l'on qualifiera, par opposition au point de vue habituel, de perspectif, des théorèmes souvent apparemment complètement différents seront rassemblés en un seul énoncé ; de plus, les exceptions qui font fréquemment obstacle à l'établissement des principes généraux, seront écartées[vii]. [Staudt, 1847, 25]

Une fois généralisées les définitions de points, droites ou plans et celles des formes fondamentales par l'introduction des expressions *point à l'infini*, *droite à l'infini* et *plan à l'infini*, von Staudt s'intéresse aux manières de rapporter une forme à une autre. Il adopte pour cela un point de vue très général en définissant une correspondance entre formes comme une application entre les éléments des formes considérées sans faire la moindre différence entre

[16] [...] unter vier Punkten in ihr nur zwei Paar getrennte sind. [Staudt, 1847, 24]

les éléments propres et ceux à l'infini qui sont aussi qualifiés d'impropres. Dans le reste de l'exposé, la notion d'élément à l'infini n'intervient que lorsque von Staudt aborde la description des courbes et des surfaces[17]. L'introduction des éléments à l'infini permet à von Staudt de tenter une description du cadre dans lequel il va développer sa théorie géométrique. Ainsi, deux points d'une droite ainsi complétée définissent deux segments de droites alors qu'un point d'une droite ne la sépare pas en deux parties ; von Staudt exprime cette propriété en disant qu'une droite est une ligne du premier ordre. Plus généralement, une ligne fermée dans le plan est d'ordre pair ou impair selon la parité du nombre de parties en lequel une droite peut diviser cette courbe. Comme deux lignes fermées situées dans un même plan (n'ayant aucune partie commune) se coupent un nombre pair de fois si elles sont toutes les deux d'ordre pair ou si l'une est d'ordre pair et l'autre d'ordre impair, un nombre impair de fois si elles sont toutes les deux d'ordre impair, la parité de l'ordre d'une ligne (n'ayant aucune partie commune avec la droite à l'infini) est égal à celle du nombre de ses points à l'infini[18]. Von Staudt en déduit qu'une ligne qui partage le plan ne peut être que d'ordre pair et donc qu'une droite d'un plan ne le coupe pas en deux parties. De la même manière, lorsqu'il évoque la notion de triangle, il prend le soin de préciser qu'il entend par triangle une figure délimitée par 3 segments éliminant ainsi la figure formée par deux segments finis et un segment passant par l'infini[19].



La ligne ne délimite aucune figure. Bien que constituée de 3 segments, cette ligne ne définit pas un triangle.

Par contre, dans les parties dans lesquelles von Staudt développe la théorie des relations projectives entre formes et en déduit la théorie des coniques et des surfaces du 2e ordre, la distinction entre éléments propres et impropres disparait[20].

En particulier, lorsqu'il aborde la question de la dualité qu'il présente dans un premier temps comme une symétrie entre énoncés de la géométrie, von Staudt met en vis-à-vis les deux énoncés suivants[21] :

> Deux points *A*, *B* déterminent une droite *AB* qui passe par ces points.

et

> Deux plans *A*, *B* déterminent une droite *AB*, le long de laquelle ces deux plans se coupent[viii]. [Staudt, 1847, 30]

---

[17] Le traité de von Staudt contient des chapitres dans lesquels il tente de décrire et classer les courbes et les surfaces fermées, les polyèdres en n'utilisant que des propriétés d'incidence. Il donne aussi une démonstration du théorème d'Euler plutôt satisfaisante.

[18] Von Staudt n'utilise pas la définition de l'ordre d'une courbe comme le nombre maximum de points d'intersection avec une droite sauf pour désigner les droites comme des lignes du 1er ordre et les coniques commes des courbes du IIe ordre.

[19] On notera que les triangles au sens de von Staudt vérifie l'axiome dit de Pasch.

[20] Elle ne réapparait que pour distinguer les affinités et classer les conique et les surfaces du second ordre.

[21] Von Staudt reprend ici la forme de présentation de la dualité proposée par Joseph Diaz Gergonne (1771-1859) et adoptée par Steiner.

L'expression « à l'infini » n'est aux yeux de von Staudt qu'une commodité linguistique. Il se sert de la distinction entre éléments propres et éléments impropres (à l'infini) pour décrire le nouveau cadre formé par l'adjonction de ces éléments au cadre classique et pour montrer que leur introduction permettait d'exprimer sous une forme ramassée et de généraliser plusieurs théories de géométrie élémentaire. En particulier, du fait de son radicalisme synthétique, les éléments à l'infini ne sont pas vus, ni présentés comme des éléments « à distance infinie » même si les premières conséquences de leur introduction sont justifiées en considérant des situations limites associées au parallélisme de droites ou de plans. Lorsqu'il expose la théorie des transformations projectives entre formes, des involutions et des polarités, il ne fait plus de distinction entre éléments impropres et éléments propres et fonctionne complètement à l'intérieur du cadre projectif qu'il a construit.

5. La construction de l'espace projectif par Pasch

Moritz Pasch (1843-1930) considère les théories mathématiques comme des condensations, des *Stamm*[22], d'énoncés. De son point de vue, les mathématiques se développent à partir de propriétés de base ou propositions fondamentales (obtenues empiriquement) par des procédures exclusivement déductives ; les notions et les propositions fondamentales étant posées, les définitions des nouvelles notions, les *notions dérivées*, ne seront définies qu'en utilisant des notions et des propriétés fondamentales et des notions ou des propriétés déjà démontrées. Les théorèmes seront exclusivement obtenus à partir des propriétés fondamentales et des théorèmes précédemment démontrés :

> Les théorèmes seront déduits des propositions de base de telle manière que tout ce qui est nécessaire à l'établissement des théorèmes doit t, sans exception, se trouver intégralement dans les propositions de base[ix]. [Pasch, 1882, 5]

La forme d'exposition adoptée par Pasch est résolument axiomatique pour des raisons liées à son engagement empiriste ; en effet, il espère par là bannir tout recours à l'intuition puisque dans la démarche axiomatique, l'utilisation d'une notion dérivée n'implique que sa définition ; de fait, Pasch n'utilise la plupart du temps que des définitions qualifiées d'implicites qui n'expriment que la possibilité d'utiliser un terme ou une tournure[23]. Pour les même raisons, les notions fondamentales initiales ne sont pas définies puisqu'irréductibles, leur compréhension relevant nécessairement d'un renvoi à un objet naturel. De la même manière, les propositions fondamentales ne se fondent que sur des observations et expériences répétées qui s'imposent plus nettement que d'autres[24]. Pasch est ici d'un empirisme très classique : la genèse des propositions fondamentales relève d'un processus de schématisation d'expériences communes.

L'objectif de Pasch est donc de garantir l'origine empirique de la géométrie par une présentation rigoureusement formelle. Pasch défendra de la même manière ce point de vue quelques quarante années plus tard :

> Il s'agissait par conséquent de combler les lacunes dans le système traditionnel de la géométrie, d'obtenir une vue d'ensemble complète sur les représentations et les connaissances utilisées par la géométrie, en particulier sur celles qui sont inapparentes et

---

[22] « *Stamm* » signifie souche. Pasch utilise ce terme au sens de « faire souche ». « *Stammtisch* » signifie par extension « table d'hôte », la table où l'on se réunit.

[23] Comme on le verra dans la suite, la notion de droite est introduite à partir de celle de segment en autorisant l'expression « *C* se trouve sur la droite *AB* » dès que l'un des trois points *A*, *B*, *C* se trouve sur le segment défini par les deux autres.

[24] Pasch précise à cet égard que les propositions fondamentales sont les seules qui nécessitent un recours à une figure représentative pour être comprises.

> cachées et, par conséquent, de réunir celles semblant appropriées pour être « les notions et les propositions fondamentales » en un « noyau », à partir duquel *tout* ce qui relève de la géométrie sera extrait[x]. [Pasch, 1924, 231]

Dans cette optique, Pasch commence par traiter d'une géométrie spatialement limitée. En effet, notre expérience étant bornée, les concepts et les propositions fondamentales que l'on peut abstraire à partir de celle-ci ne peuvent concerner que des objets (formels) spatialement limités et bornés[25]. Par exemple, Pasch décrit d'abord comme notion fondamentale le segment pour en déduire formellement celle de droite. Il développe ainsi à partir du noyau, c'est-à-dire de l'ensemble des notions et des propositions de base une première théorie jusqu'à obtenir déductivement les concepts et les axiomes qui servent ordinairement de fondements à la géométrie projective. Ce corpus de théorèmes s'organisent alors en une souche (*Stamm*) à partir de laquelle la théorie classique de la géométrie projective synthétique se développe :

> La géométrie projective apparaît à partir d'une « souche » obtenue par déduction à partir du noyau de la géométrie en séparant dans le champ de la géométrie, sa partie projective[xi]. [Pasch, 1924, 231]

Les notions et les propositions de base[26] sont données empiriquement alors que les notions-souche et propositions-souche[27] sont construites formellement. Les théories mathématiques comme la géométrie projective apparaissent comme des théories-souches qui acquièrent une autonomie relative en s'organisant autour d'une souche. Avec cette conception, Pasch peut à la fois défendre des thèses empiriques concernant l'origine des notions géométriques, ne rien céder au rôle d'une quelconque intuition et en même temps retrouver les théories géométriques les plus sophistiquées développées à son époque.

Les notions et principes de base

Pour Pasch, l'exigence couramment admise par les géomètres que par deux points, il passe une droite « ne correspond à aucun objet sensible[28] » puisque cet axiome oblige à penser les droites comme illimitées. Les axiomes de la ligne ne concernent donc que les notions de segment et de point appartenant à un segment et sont obtenus à partir d'observations très simples. Pasch énonce huit propositions fondamentales permettant d'étudier les positions relatives de points situés sur un même segment. Le premier affirme qu'entre deux points, on peut toujours tracer un et seul segment, le second que l'on peut toujours désigner un point situé à l'intérieur d'un segment. Les 6 autres concernent l'ordre linéaire. Ainsi le 7e axiome affirme :

> Si le point *B* se trouve à l'intérieur du segment *AC* et du segment *AD*, alors soit le point *C* se trouve à l'intérieur du segment *AD*, soit le point *D* se trouve à l'intérieur du segment *AC*.

Pasch définit à partir de la notion de segment et de ses propriétés fondamentales, la notion de prolongement (Si *B* appartient au segment *AC*, *BC* est un prolongement du segment *AB*) et de série linéaire pour désigner trois points dont l'un appartient au segment formé par les deux autres. La droite est alors définie de manière implicite :

> Si *A*, *B*, *C* constitue une série linéaire, on dit que *C* se trouve sur la droite *AB*.

---

[25] Pasch suit en cela une proposition de Felix Klein (1849-1925). En effet, lorsqu'il présente sa théorie des modèles projectifs des géométries non-euclidiennes, Klein propose de développer la géométrie projective à partir d'un cadre limité afin d'assurer son « indépendance » vis-à-vis de l'axiome des parallèles [Klein, 1871].

[26] « *Kernbegriff* » et « *Kernsatz* ».

[27] « *Stammbegriff* » et « *Stammsatz* ».

[28] Diese Forderung entspricht keinem wahrnehmbaren Object. [Pasch, 1882, 4]

Pasch donne ainsi une première définition de la notion de droite sans définir réellement un nouvel objet. A ce stade, il n'étend le vocabulaire de la géométrie que pour décrire des situations concernant des éléments du domaine initial, c'est-à-dire des éléments relevant de notre expérience. La définition de la droite ne résulte pas de l'ajout à un segment de points impropres ; définir la notion de droite consiste uniquement à définir la propriété de colinéarité de trois points :

> Le passage du segment droit à la ligne droite nécessitait une justification par une déduction et une définition, bien avant que l'on travaille avec des points impropres[xii]. [Pasch, 1924, 232]

Les premiers théorèmes concernant la ligne droite permettent d'affirmer qu'il passe par deux points une et une seule ligne droite, l'unicité de la droite *AB* signifiant que si A' et B' sont des points de la droite *AB*, alors dire d'un point qu'il se trouve sur la droite *AB* équivaut à dire qu'il se trouve sur la droite $A'B'$. Pasch décline alors les propriétés d'ordre des points d'une droite en caractérisant la relation « se trouver entre deux points ».

De même qu'il a défini la ligne droite à partir de la notion de segment, Pasch déduit la notion de plan à partir de celle de surface plane limitée ; la justification reste la même : puisque les notions et propositions de base ne peuvent être obtenues qu'en référence à notre expérience et que d'ordinaire, il est admis qu'un plan est illimité, Pasch ne considère dans un premier temps que des surfaces planes limitées :

> D'après cela, il sera question en premier lieu uniquement de surfaces planes et de points d'une surface plane, la notion de « plan » sera introduite seulement ensuite[xiii]. [Pasch, 1882, 20]

Pasch énonce quatre propositions de base concernant les surfaces planes dont l'affirmation que par trois points, il passe une surface plane et son célèbre axiome[29] :

> Soit trois points *A*, *B*, *C* d'une surface plane reliée deux à deux par les segments *AB*, *AC*, *BC* et dans la même surface une droite *DE* passant à l'intérieur du segment *DE* ou un prolongement de celui-ci passe soit par un point du segment *AC*, soit par un point du segment *BC*[xiv]. [Pasch, 1882, 21]

Après avoir montré que si une surface plane contient les quatre points *A*, *B*, *C*, *D*, alors il existe une surface plane qui contient les quatre points *A*, *B*, *C*, *D* et les points de toute surface plane contenant les points *A*, *B*, *C*, la notion de « plan » est définie implicitement en donnant un sens à l'expression « se trouver dans le plan *ABC* » :

> Etant donné trois points non-alignés *A*, *B*, *C* et *D* un point quelconque. S'il existe une surface plane contenant *A*, *B*, *C*, *D*, on dit que *D* se trouve dans le plan *ABC*.

Pasch en déduit alors qu'il passe un plan par trois points (non-alignés) ou par une droite et un point (non-situé sur cette droite). Il introduit la notion de figure plane définie comme constituée de points et de droites se trouvant dans un même plan. Il ajoute que si l'on a djoint à la figure des éléments obtenus par construction, on ne sort pas du plan et l'on obtient donc une nouvelle figure plane. L'étude des propriétés de la notion de plan s'achève par une série de théorèmes d'incidence.

Pasch introduit les notions de faisceau et de gerbe de rayons en se référant à l'expérience que nous avons des rayons lumineux émanant d'une source ponctuelle : deux droites *l* et *m*

---

[29] Cet axiome est vérifié dans la partie de la géométrie qui dépend immédiatement du noyau (*Kern*) initial. L'axiome de Pasch n'est pas vérifié en géométrie projective. Comme on va le voir, à partir du noyau (*Kern*), Pasch déduit des modifications du sens des mots utilisés en géométrie de telle manière que lorque l'on se restreint au *Stamm* de la géométrie projective, nous retrouvons leur signification projective.

concourantes (respectivement concourantes et coplanaires) en un point *S* définissent une gerbe (resp. un faisceau) de rayons notée *lm*. Le point *S* est appelé le sommet de la gerbe ou du faisceau. Pasch montre un certain nombre de théorème comme le théorème du quadrilatère de von Staudt et en déduit un critère de coplanarité des droites ce qui lui permet de considérer la gerbe définie par deux droites coplanaires même lorsqu'on ne connaît pas leur point d'intersection et d'étendre ainsi la notion de gerbe :

> *Définition étendue de la gerbe* : Si les droites *efg* sont deux à deux liées par un plan, sans que les trois le soient par un même plan ou si les droites *efg* sont contenues dans un plan et peuvent être liées par un plan avec une droite extérieure à leur plan, alors on dit […] que *g* est une droite de la gerbe *ef*[xv]. [Pasch, 1882, 35]

Pasch caractérise ainsi implicitement les ensembles de droites qui, du point de habituel, s'intersecteraient en dehors du domaine limité considéré. Il caractérise en même temps les gerbes dont le sommet est (du point de vue habituel) en dehors du domaine initial et les gerbes de rayons parallèles. L'intérêt de la démarche de Pasch est de permettre de retrouver la notion usuelle de gerbe uniquement par des considérations limitées au domaine borné initial ; il n'a besoin ni de prolonger les segments de droites, ni d'introduire des éléments impropres[30]. En quelque sorte, Pasch réussit à « sortir » du domaine limité initial sans introduire (ni considérer) le moindre élément « extérieur ». De plus, la définition étendue de la gerbe n'est pas seulement formelle car la notion de coplanarité utilisée par Pasch pour étendre la définition de la notion de gerbe est effective. En effet, Pasch prend le soin d'établir un critère (n'utilisant que des propriétés de la géométrie dérivée du noyau) de coplanarité. La nouvelle définition de la gerbe vérifie une série de propriétés qui vont justifier l'extension de l'acception du mot « point » :

> Si les droites *g* et *h* sont dans la gerbe *ef*, alors elles sont coplanaires.
>
> Si les droites *g* et *h* sont dans la gerbe *ef*, alors les droites *e* et *f* sont dans la gerbe *gh*.
>
> Si e' est une droite de la gerbe *ef* différente de *f*, alors la gerbe de droites *ef* coïncide avec $e'f$.
>
> Si e' et f' sont des droites quelconques de la gerbe *ef*, alors les gerbes *ef* et $e'f'$ sont identiques
>
> Deux droites quelconques coplanaires déterminent une gerbe.
>
> Chaque gerbe est déterminée par deux quelconques de ses droites.

Une droite *g* se trouvant dans deux gerbes (propres) désignées par leur sommet respectif, *S* et *T*, est caractérisée par cette propriété. On peut donc désigner cette droite par *ST* et pasch propose de dire « *S* est une gerbe de la droite *g* ou *S* appartient à la droite *g*[31] ». La question de savoir si deux gerbes quelconques déterminent une droite reste encore ouverte : si une des gerbes est propre, il n'y a pas de problème. Par contre, Pasch n'est pas encore tout à fait en mesure de donner une réponse dans le cas général. De même, si un plan *P* contient une droite d'une gerbe *S*, Pasch propose de dire que *S* est une gerbe de *P* et démontre quelques propositions qui généralisent des propriétés élémentaires du plan et en même confirment que la gerbe est devenue l'objet central de l'étude :

> Toute droite qui a deux gerbes en commun avec un plan appartient à ce plan.

---

[30] Pasch n'utilise pas dans son développement le terme « impropre ». Au contraire, il qualifie de « propre » les gerbes qui vérifient la définition initiale. De même, lorsqu'il étendra les acceptions des mots de la géométrie, les éléments pour lesquels les acceptions initiales s'appliquent seront qualifiés de « propres ».

[31] […] *S* ist ein Strahlenbündel der Geraden *g* ; das Bündel *S* gehört zur Geraden *g* […].

> On peut toujours trouver un plan passant par une droite donnée et par une gerbe donnée.
>
> Deux droites qui ont une gerbe en commun sont coplanaires.

L'extension de l'acception des mots de la géométrie

Après avoir centré son étude sur la notion de gerbe, Pasch opère une translation linguistique qui va lui permettre de retrouver à partir de la géométrie des gerbes qu'il vient en grande partie d'établir la théorie-souche (*Stamm*) de la géométrie projective ; il propose d'étendre l'acception du mot « point » à celle qu'avait jusqu'à présent l'expression « gerbe de rayons ». Il y a en effet identité entre les points et les gerbes propres. En d'appeler « point » ce qui jusqu'à présent été appelé « gerbe », Pasch étend le domaine de son étude et accède à l'espace projectif sans adjoindre à l'espace ordinaire des points à l'infini, ni même des points en dehors du domaine initial :

> Nous avons la conviction que le mot « point » ne doit plus être utilisé dans un sens étroit, qu'au contraire l'expression « *le point S se trouve sur la droite g* » doit être synonyme de l'expression « *la gerbe de droites S appartient à la droite g* » et que le point *S* doit être appelé point propre là où la gerbe de droites *S* était qualifiée de propre[xvi]. [Pasch, 1882, 40]

Bien entendu, la modification de l'extension des mots de la géométrie va occasionnée certaines difficultés : en particulier, certains théorèmes établis antérieurement devront être reformulés en terme de « points propres ». Certains théorèmes établis pour les gerbes restent valides avec les nouvelles acceptions mais plusieurs propriétés de la relation « entre » ou certaines concernant les propriétés d'incidence entre point, droite et plan doivent être modifiées (tant que les mots « droite » et « plan » n'auront pas reçu à leur tour une nouvelle définition. Ainsi, le théorème « par deux points, on peut toujours tracer une droite » devient « par un point quelconque et un point propre, on peut toujours tracer une droite ». De même, on établit que trois points non-alignés dont un est propre déterminent un plan ou que deux plans ont nécessairement un point commun. Le changement d'acception du mot point permet de montrer qu'un droite et un plan ont toujours un point commun (et donc que deux droites coplanaires ont-elles-aussi toujours un point commun). L'extension du domaine des points permet d'assurer qu'il y a suffisamment de points pour que deux droites coplanaires se coupent mais à ce stade du développement de Pasch, le domaine des droites et des plans n'est pas assez étendu.

En effet, il reste néanmoins de nombreuses questions en suspens : peut-on tracer une droite entre deux points quelconques ? les points communs à deux plans constituent-ils une droite, est-ce que trois points non-alignés suffisent-ils à déterminer un plan ? Pour apporter des réponses à ces questions dont il est indispensable qu'un exposé raisonnable de géométrie les élucide, Pasch propose de faire évoluer la signification du mot « droite » de la même manière qui avait mise en œuvre pour le mot « point ».

Dans un premier temps, Pasch généralise de manière *ad hoc* la notion de faisceau de plans :

> Si trois plans *P, Q, R* ont deux points en commun, on dira que le plan R se trouve dans le faisceau de plans *PQ*.

Bien entendu, si les plans possèdent un axe, c'est-à-dire une droite en commun, le faisceau est qualifié de *propre*. Avec cette nouvelle définition de la notion de faisceau de plans et la nouvelle signification du mot « point », il est aisé d'établir des propositions comme :

> On peut toujours faire passer un faisceau de plans par deux plans quelconques.
>
> Un faisceau de plans est déterminé par deux quelconques de ses plans

> Un point qui appartient à deux plans d'un faisceau de plans appartient à tous les plans du faisceau.

La dernière proposition justifie que l'on dise d'un point qui appartient à deux points d'un faisceau qu'« il appartient au faisceau » ; de plus, la similitude des propriétés vérifiées par les faisceaux et les droites motivent que l'on opère le même glissement sémantique du mot « droite » :

> Nous définissons l'expression « *A* est un point de la droite *g* » comme synonyme de « *A* est un point du faisceau de plans *g* »[xvii]. [Pasch, 1882, 51]

La droite sera dite propre lorsque le faisceau qui la définit est lui-même propre, autrement dit l'expression « droite propre » réfèrent aux droites qui étaient désignées par le sens initial du mot « droite ». Les théorèmes précédemment énoncés par Pasch se généralisent en même temps que le terme « propre » disparait en partie, ne subsistant essentiellement que dans certains théorèmes impliquant les plans comme :

> On peut faire passer un plan par une droite propre et un point quelconque. De même, par une droite quelconque et un point propre.

Pour notre propos, le mot « droite » a maintenant une extension suffisante pour que par deux points (quelconques), il passe une et une seule droite tout en conservant la propriété d'intersection entre une droite et un plan ou entre deux droites coplanaires.

Par contre, Pasch fait le constat qu'il est nécessaire aussi d'étendre l'acception du mot « plan » car pour l'instant, il n'est pas encore en mesure de montrer que trois points quelconques non-alignés, une droite et un point extérieur à celle-ci ou deux droites quelconques sécantes déterminent un plan sans ajouter une hypothèse de propreté sur un point ou une droite. Pour généraliser l'acception du mot « plan », il applique sa méthode de généralisation : il va exhiber une propriété vérifiée par trois points coplanaires (au sens originel du terme) et montrer que cette propriété est plus large que celle (initiale) de coplanarité. Il ne reste plus qu'à poser cette propriété comme nouvelle définition du mot « plan ». Pour cela, il considère trois points *A*, *B*, *C* (au sens généralisé) coplanaires (au sens initial). Les droites *AB*, *AC* et *BC* appartiennent donc au plan *ABC*. En désignant par *D* un point de *AB* (distinct de *A* et *B*) et par *E*, un point de *AC* (distinct de *A* et *C*), les droites *DE* et *BC* sont sécantes car coplanaires. En projetant sur un plan, Pasch montre alors que l'hypothèse de coplanarité est superflue :

> Soit *A*, *B*, *C*, *D* quatre points quelconques tels que le droites *BC* et *AD* se coupent, alors les droites *CA* er *BD*, ainsi que les droites *AB* et *CD* sont aussi sécantes[32].

Cette propriété permet à Pasch de poser une nouvelle définition (implicite) du mot plan :

> L'expression « *D* se trouve dans le plan *ABC* » n'exprime rien d'autre que la propriété selon laquelle les droites *BC* et *AD*, et par suite les droites *CA* et *BD*, ainsi que les droites *AB* et *CD*, se coupent.

La construction déductive du domaine de la géométrie projective, la mise en place de l'espace projectif s'achève en définissant la notion de plan à partir de la propriété pour les droites coplanaires de se couper. Pasch obtient une série de théorèmes qui constituent la base habituelle de la géométrie projective vue comme géométrie d'incidence :

> On peut faire toujours passer une droite par deux points.

---

[32] Rappelons que pour l'instant, nous ne sommes pas dans un cadre projectif et donc que deux droites sécantes ne définissent pas encore un plan. La démonstration de ce théorème n'est pas très difficile mais est assez longue et laborieuse.

> Toute droite est déterminée par deux quelconques de ses points.
>
> Toute droite qui contient un point propre est une droite propre.
>
> On peut faire toujours passer un plan par trois points.
>
> Tout plan est déterminé par trois de ses points, qui ne sont pas alignés.
>
> Tout plan qui contient un point propre, est un plan propre.
>
> Une droite qui a deux points communs avec un plan, est toute entière contenue dans le plan.
>
> On peut faire toujours passer un plan par une droite et un point.
>
> Tout plan est déterminé si on connaît une de ses droites et un de ses points en dehors de la droite.
>
> On peut toujours faire passer un plan par deux droites qui ont un point en commun.
>
> Tout plan est déterminé par deux de ses droites.
>
> Deux droites coplanaires ont toujours un point commun.
>
> Une droite et un plan ont toujours un point commun.
>
> Deux plans ont toujours une droite commune.
>
> Trois plans ont toujours un point ou une droite en commun. [Pasch, 1882, 60-61]

Avec en filigrane la dualité entre géométrie projective et géométrie des gerbes établie par ses prédécesseurs, Pasch construit à partir d'un noyau de considérations géométriques élémentaires abstraites de notre expérience un fragment de la géométrie des gerbes, puis opérant des glissements sémantiques du sens des mots de la géométrie suggérés par la dualité (nécessairement partielle) entre la géométrie des points et celle des gerbes, il obtient un groupe de théorèmes qui peuvent servir de fondement (de souche) à la géométrie projective. L'axiomatique de la géométrie projective proposée par Pasch définit un cadre dans lequel les objets droites et plans vérifient les axiomes *a* et *b*. Si l'espace projectif n'est pas encore nommé, il devient nécessaire de la définir pour caractériser le *Stamm* constitué des théorèmes de la géométrie projective.

6. Les axiomatiques

Dans sa conférence au congrès international de philosophie de Paris en 1900, Mario Pieri (1860-1913) expose avec force sa conviction que la géométrie doit être envisagée comme un système purement logique. En effet, défend-il, la géométrie « dans ses parties les plus élevées comme dans les plus modestes, va en s'affirmant et se consolidant de plus en plus comme l'étude d'un certain ordre de relations logiques ». Dans le même temps, la géométrie s'affranchit des liens qui l'attachent à une quelconque intuition (empirique ou *a priori*) et acquiert, comme l'arithmétique, « la forme et les qualités d'une science idéale purement déductive et abstraite »

> […] rien ne nous empêche de concevoir la Géométrie tout entière comme un *système purement spéculatif et abstrait*, dont les objets sont de pures créations de notre esprit et les postulats de simples actes de volonté (choix de l'esprit, vérités subjectives *a priori*, vérités de définition), sans méconnaître qu'ils ont souvent leur première racine dans quelque fait extérieur ; par suite, les uns et les autres seront arbitraires, du moins en tant que ne les ordonnerons pas en vue d'une fin préétablie qui doive guider la pensée. [Pieri, 1901, 374]

Si les interprétations concrètes des entités géométriques peuvent avoir une valeur heuristique et pédagogique, « la Géométrie peut exister indépendamment de n'importe quelle

interprétation de ses concepts primitifs[33] ». Pour obtenir un tel objectif, il convient d'organiser le corpus des énoncés géométriques en un *système hypothético-déductif*[34]. Pour Pieri, l'élaboration d'un système hypothético-déductif ne consiste pas seulement à distinguer les énoncés primitifs des énoncés dérivés mais aussi à « classer les notions sur les lesquelles portent ces jugements, en discernant par là les idées-mères, primitives et indécomposées[35] » des notions dérivées. Pieri propose entre 1894 et 1900 plusieurs axiomatiques qui diffèrent par le choix des éléments primitifs. Les axiomatiques de Pieri comportent très peu d'éléments primitifs (deux ou trois) et définissent la géométrie projective indépendamment de toute autre géométrie. Les axiomes proposés par Pieri déterminent donc l'espace projectif directement sans s'appuyer sur la connaissance d'un autre espace qu'il conviendrait de compléter.

En 1894, dans sa première tentative de donner une axiomatique de la géométrie projective, *Sui principii che reggono la Geometria di Posizione*[36], Pieri admet comme concepts primitifs, le point projectif, la droite projective et le segment projectif. Après avoir posé avec les premiers axiomes les relations d'incidence entre points projectifs et droites projectives, Pieri définit la notion de perspective $a(bc)$ d'une droite bc à partir d'un point a (extérieur à bc) comme l'ensemble des points des droites définies par a et un point de la droite bc. L'introduction de la notion de plan projectif abc est motivée par l'identité des classes de points $a(bc)$ et $b(ca)$. Cette nouvelle notion est l'objet d'axiomes : le premier affirme l'existence d'un point à l'extérieur d'un plan et le second qu'une droite projective et un plan projectif ont toujours au moins un point en commun. Ces deux axiomes sont présentés par Pieri comme permettant d'affirmer que la dimension de la multiplicité de points ainsi obtenue est de dimension 3[37]. Puisque la présentation de la géométrie projective à partir des notions de point et de droite projective s'effectue sans référence à un quelconque cadre géométrique antérieur, il n'y a plus besoin de voir dans ce dernier axiome la garantie qu'il y a suffisamment de points pour affirmer la clôture des axiomes d'incidence.

La notion primitive de segment projectif permet à Pieri de traiter des questions de séparation des éléments d'une forme de première espèce sans introduire comme primitives des notions de mouvement ou de sens (comme Enriques, Fano ou Vailati). Au yeux de Pieri, la notion de segment projectif est plus élémentaire et « même, pour ainsi dire, plus primitive » que celle d'ordre naturel des points d'une droite car cette dernière « implique déjà une correspondance entre les points et les classes de points[38] ».

Un peu plus tard en 1897[39], Pieri réduit les concepts primitifs au nombre de deux : le point projectif et la jonction de deux points. A partir de ces deux notions, Pieri développe un système de dix-huit axiomes qui lui permettent d'obtenir le théorème fondamental de la géométrie projective. La jonction de deux points peut être vue comme une relation entre deux points différents dont les premiers axiomes définissent les propriétés : ainsi, le postulat 6 affirme que si a et b sont des points différents, les jonctions ab et ba coïncident, le postulat 7 que la jonction ab contient le point a et le postulat 8 qu'elle contient un autre point que a et b. Les postulats 9 et 10 permettent de définir une jonction à partir de deux quelconques de ses points. Pieri introduit alors l'expression « a, b, c sont alignés » pour signifier qu'il existe deux points différents x et y tels que a, b, c appartiennent à la jonction xy. Le terme de droite

---

[33] [Pieri, 1901, 376].
[34] Cette expression est introduite par Pieri en 1899.
[35] [Pieri, 1901, 378].
[36] [Pieri, 1894].
[37] Pieri propose en 1896 une axiomatique de la géométrie projective des hyperespaces [Pieri, 1896].
[38] [Pieri, 1894, 626].
[39] [Pieri, 1897].

projective désigne « la classe […] de toutes les formes pour lesquelles on peut trouver deux points projectifs distincts dont elles sont la jonction[40] ». La notion de perspective apparaît alors comme une généralisation de celle de perspective : étant donnés un point projectif p et une forme ϕ, la perspective (notée $p\phi$) de ϕ par rapport à p est le lieu des points qui appartiennent à une jonction entre p et un point de ϕ. Plusieurs postulats régissent les propriétés des points et des jonctions dans une perspective. En particulier, pour pouvoir conclure à l'identité des perspectives $a\,bc$ et $c\,ab$ introduit un postulat qui assure le caractère projectif de la notion de plan qui se déduit de celle de perspective : si a, b, c ne sont pas alignés, a' un point de bc différent de b et c, b' un point de ac différent de a et c, alors les jonctions aa' et bb' se rencontrent.

Pieri poursuit la présentation de son axiomatique en posant une série d'axiomes de la notion de plan projectif qui permettent de montrer le théorème de Desargues, le théorème du quadrilatère complet et d'introduire à la manière de von Staudt la notion d'harmonicité ce qui lui permet de retrouver une définition des segments projectifs. Il retrouve ainsi le cadre qu'il avait adopté en 1894. Les axiomes suivants permettent à Pieri de développer une théorie des transformations harmoniques et d'obtenir avec l'axiome 18 de continuité de Dedekind le théorème fondamental de la géométrie projective. Il ajoute un 19e axiome qui assure la tridimensionnalité de l'espace en affirmant qu'une droite et un plan ont au moins un point commun :

> Si a, b, c, d sont des points projectifs non-coplanaires, alors pour chaque point projectif e, non situé sur aucun des plans abc, abd, acd, bcd, il doit toujours exister un point commun à ae et bcd[xviii]. [Pieri, 1897, 54]

Le point de vue de Pieri est repris explicitement par Alfred North Whitehead (1861-1947) en 1906 dans son livret sur les axiomes de la géométrie projective[41]. Dans l'introduction, il pose comme caractéristique des géométries projectives la propriété des droites colinéaires d'être sécantes. Aux yeux de Whitehead, cette propriété permet de distinguer deux types de géométries :

> Here again a division among Geometries is reached, according as any two coplanar lines are, or are not, necessarily to intersect.
>
> A Geometry will be called 'projective' if two coplanar lines necessarily intersect. Thus Euclidean Geometry is not projective, but becomes so when the various entities called the points at infinity on the various lines have been defined, and added to the other points on the lines. [Whitehead, 1906, 5-6]

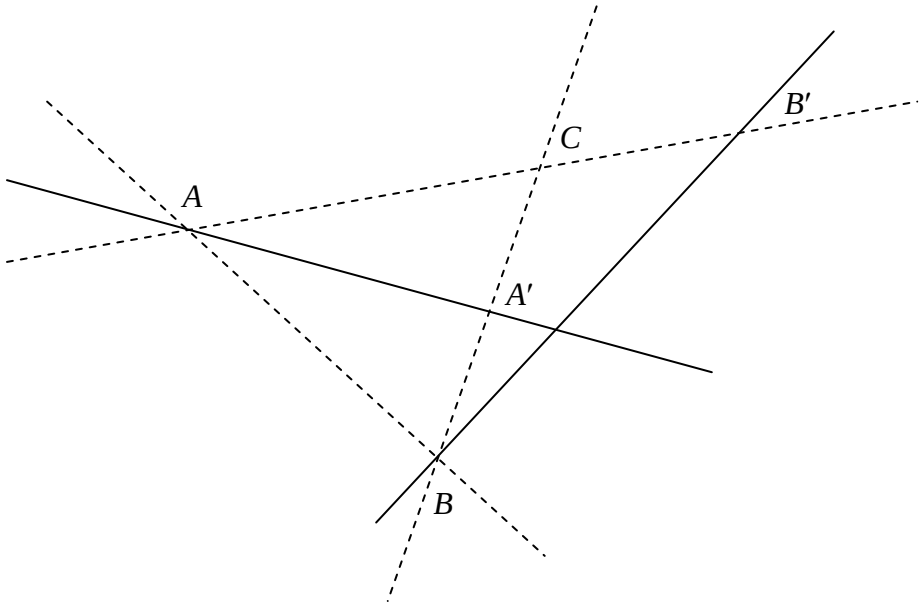
Whitehead associe les géométries projectives à l'ordre circulaire des droites et les géométries descriptives à l'ordre linéaire des droites. En 1907, dans un second livret consacré aux axiomes des géométries descriptives[42], Whitehead étudie comment les relations d'incidence des géométries descriptives sont clôturées par l'adjonction d'éléments idéaux (construits à la manière de Pasch). Whitehead désigne sous l'expression 'les éléments projectifs', l'ensemble des éléments initiaux complété par les éléments idéaux. L'objectif du livret sur la géométrie descriptive est de prouver que l'on peut prouver les axiomes de la géométrie projective sur l'ensemble des éléments projectifs et plus généralement comment s'articulent aux moyens des éléments idéaux les considérations de correspondance géométrique, de congruence ou de géométrie métrique entre les deux types de géométrie.

---

[40] Col nome « retta projecttiva » si rappresenta la classe […] di tutte le figure, per ognuna delle quali si posson trovare due punti prj distinti, dei quali essa sia la congiungente. [Pieri, 1897, 13]
[41] [Whitehead, 1906].
[42] [Whitehead, 1907].

Whitehead dans l'exposé des axiomes de la géométrie projective assure le caractère projectif de sa géométrie en posant un axiome analogue à celui posé par Pieri au sujets des jonctions :

> If *A*, *B*, *C* are non-collinear points, and *A′* is a point on *BC*, distinct from *B* and *C*, and *B′* is a point on *CA*, distinct from *C* and *A*, then the lines *AA′* and *BB′* possess a point in common. [Whitehead, 1906, 7]



Il ajoute deux axiomes : le premier pour affirmer que l'espace est au moins de dimension 3 pour assurer de manière incidente le théorème de Desargues et le second qu'il présente comme nouveau[43] pour limiter à trois le nombre de dimensions de l'espace

7. Les espaces projectifs dans tous leurs états : la géométrie projective générale de Veblen et Young

Pour justifier le terme de « générale » par lequel ils qualifient la géométrie projective dont ils se proposent de donner une axiomatique dans leur traité[44], Oswald Veblen (1880-1960) et John Wesley Young (1879-1932) font référence aux résultats initiés par la théorie des jets de von Staudt[45] : ce qu'ils appellent *géométrie projective générale* est la géométrie associée à un corps de nombres général[46].

Dans cette intention, ils insistent sur le fait que tous les théorèmes qu'ils montrent dans le premier volume de leur traité sont valides non seulement dans le cas des espaces réels et complexes mais aussi dans le cas des espaces finis (les espaces des géométries modelées sur les corps finis) ou dans celui de « l'espace rationnel ordinaire » (l'espace modelé sur le corps des rationnels).

La présentation de Veblen et Young est axiomatique. Ils présentent les premiers axiomes de la géométrie projective générale d'un espace de dimension trois en les regroupant en deux groupes, ceux dits d'*alignement* (A) et ceux dit d'*extension* (E). Les axiomes d'alignements

---

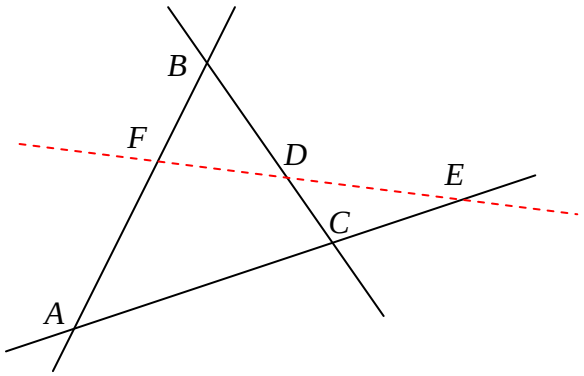
[43] Pieri pose en axiome dans son article de 1897 qu'il existe un point en dehors d'un plan et qu'une droite et un plan ont une intersection non vide pour assurer la tridimensionalité de l'espace.
[44] [Veblen-Young, 1910 & 1917]
[45] Von Staudt a montré que les séquences ordonnées de quatre éléments d'une forme élémentaire peuvent munies d'une structure de corps de manière purement géométrique. Pour plus de précisions, on peut consulter [Nabonnand, 2008].
[46] [Veblen-Young, 1910, iv]

sont au nombre de trois :

A1 Si A et B sont des points distincts, il y a au moins une droite sur A et B.

A2 Si A et B sont des points distincts, il n'y a pas plus d'une droite à la fois sur A et B.

A3 Si A, B, C sont des points non-alignés et si D et E ($D \neq E$) sont des points tels que B, C, D et C, A, E sont alignés, alors il y a un point F tel que A, B, F et aussi D, E, F soient alignés.



Les axiomes d'extension expriment qu'il y a au moins trois points sur chaque droite (E0), qu'il existe au moins une droite (E1), que tous les points ne sont ni alignés (E2), ni coplanaires (E3) et que tous les points sont contenus dans l'espace (E3′). Les axiomes (A) et (E0) permettent de montrer que deux droites coplanaires s'intersectent en un point et que deux plans s'intersectent le long d'une droite. Ils suffisent par ailleurs pour définir les notions de projections, de section et de perspectivité (centrale et axiale). Les projectivités entre formes fondamentales de première espèce sont définies comme composition de perspectivités. Veblen et Young montrent que les seuls axiomes (A) et (E) permettent de montrer l'existence d'une projectivité entre formes de première espèce qui associent trois paires quelconques d'éléments de ces formes[47] et que toute projectivité entre deux ponctuelles de supports différents peut être obtenue comme composition de deux perspectivités. Les axiomes (A) et (E) sont ceux de l'espace projectif général.

Veblen et Young définissent à la suite de Klein la notion de réseau linéaire de rationalité définis par trois points alignés A, B, C (noté R(ABC)) comme l'ensemble des points de la droite qui sont harmoniquement reliés à A, B, C[48]. Le réseau de rationalité R(ABC) consiste en l'ensemble des points de la droite AB que l'on peut construire à partir de A, B, C au moyen de droites et de points. La notion de réseau linéaire de rationalité se généralise à celle de réseau plan et de réseau spatial (ou espace de rationalité) ; un réseau plan est donné par deux réseaux linéaires ayant des supports différents et un point commun. Un réseau plan vérifie les axiomes d'incidence de la géométrie projective, en particulier, l'intersection de deux droites d'un réseau plan est un point du réseau plan et les points d'un réseau plan qui appartiennent à une

[47] La difficulté est de montrer l'unicité de la projectivité ainsi obtenue. Pour plus de détails, on peut consulter [Voelke, 2008] et [Nabonnand, 2006].

[48] Un point P d'une droite est dit harmoniquement relié à trois points distincts donnés A, B, C de la ligne droite si P est un point d'une suite A, B, C, H_1, H_2, H_3, … de points de la ligne, finie en nombre, telle que H_1 est le conjugué harmonique d'un des points A, B, C par rapport aux deux autres et tel que chaque autre point H_i est conjugué harmonique avec trois points de l'ensemble A, B, C, H_1, H_2, …, H_{i-1}. [Veblen & Young, 1910, 84]

droite du réseau plan forment un réseau linéaire. Les espaces de rationalités sont définis de même :

> Un réseau de rationalité dans l'espace est un espace satisfaisant les axiomes A et E, si « droites » est interprété par « réseau linéaire » et « plan » par « réseau plan ».

La question du théorème fondamental de la géométrie projective (c'est-à-dire de l'unité de la projectivité qui associe trois paires d'éléments donnés de deux formes de première espèce) pour les réseaux est résolue puisque les projectivités laissent invariantes les quaternes harmoniques et donc les réseaux linéaires. Veblen et Young introduisent alors l'axiome (P)[49] ce qui dans un premier temps de l'exposé les dispensent de discuter des questions « quelque peu ennuyeuses[50] » d'ordre et de continuité :

> (P) Si une projectivité laisse invariant chacun de trois points d'une droite, alors elle laisse invariant chaque point de la droite.

La discussion se poursuit dans le second tome (rédigé uniquement par Veblen) en analysant une série d'axiomes qui entraînent l'hypothèse (P). La condition (K) qui affirme que le corps associé est isomorphe au corps des réels entraîne évidemment l'axiome (P) puisque le corps des réels est commutatif. Cette dernière condition est déclinée selon trois propositions notées H, C et R. Veblen et Young s'inspire de la discussion autour de l'axiome de continuité de Dedekind et distinguent dans un réseau linéaire deux types de coupure : les coupures fermées définies par des points du réseau et les coupures ouvertes qui ne le sont pas. L'axiome Q impose que toutes les coupures soient fermées en affirmant qu'il n'y a pas plus d'un réseau de rationalité dans une droite. Les géométries vérifiant l'axiome Q seront dites rationnelles, faisant apparaître la notion espace projectif rationnel.

L'axiome H affirme qu'aucun réseau linéaire (ou suite harmonique selon la terminologie de Klein) n'est pas constituée d'un nombre fini de points[51]. Les espaces qui vérifient A, E, H sont dits non-modulaires et ceux qui vérifient les axiomes A, E et la négation $\overline{\mathrm{H}}$ de H, non-modulaires. Les réseaux linéaires des espaces non-modulaires sont composés de p+1 points, p étant un nombre premier. Les axiomes C et R assurent l'existence et l'unicité de chaines, c'est-à-dire d'un système de points isomorphes au corps des réels dans les droites[52]. Les géométries qui vérifient C et R sont dites réelles. La négation de l'axiome R permet à Veblen d'envisager des espaces dont les droites contiendraient plusieurs chaines. L'axiome I assure aux droites d'un espace ne vérifiant pas l'axiome R une structure isomorphe à l'ensemble des nombres complexes

> Par un point P d'une chaîne quelconque C d'une droite l et par un point J de l qui n'appartient pas à C, il n'y a pas plus d'une chaîne de l qui n'a pas d'autre point que P en commun avec C.

Les géométries qui vérifient la négation de R et I sont dites complexes et peuvent être aussi introduites par un axiome J qui assure que le corps associé est isomorphe à celui des nombres complexes. La dernière classe de géométries envisagées par Veblen est celle associée au axiome de la notion d'ordre ou de sens.

La classification des espaces est résumée par un tableau

Axiomes	*Espaces*

[49] Veblen et Young montrent en n'utilisant que les axiomes (A, E) que cet axiome est équivalent à la commutativité du corps associé, c'est-à-dire du corps défini par l'addition et la multiplication des points.
[50] « Somewhat tedious » [Veblen & Young, 1910, 94]
[51] Cette condition est introduite par Fano [1892].
[52] Les chaines sont constituées de l'ensemble des points rationnels et des coupures ouvertes d'une droite.

A, E	Espace projectif
A, E, P	Espace projectif propre
A, E, H	Espace projectif non-modulaire
A, E, $\overline{H}$	Espace projectif modulaire
A, E, S	Espace projectif ordonné
A, E, H, Q	Espace projectif modulaire rationnel
A, E, $\overline{H}$, Q	Espace projectif modulaire rationnel
A, E, H, C, R ou A, E, K	Espace projectif réel
A, E, H, C, $\overline{R}$, I ou A, E, J	Espace projectif complexe

Bibliographie

Klein, Felix

[1871] Über die sogennanteNicht-Euklidische Geometrie, *Mathematische Annalen*, 4 (1871), 573-625 ; *Werke* 1, 254-310.

Monge, Gaspard

[1799] *Géométrie descriptive, leçons données aux écoles normales, l'an 3 de la République*, Paris : Baudouin ; cité d'après l'édition, Paris : Gauthier-Villars, 2 tomes, 1922.

Nabonnand, Philippe

[2000] La polémique entre Poincaré et Russell au sujet du Statut des axiomes de la Géométrie, *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 6 (2000), 219-269

[2006] Contributions à l'histoire de la géométrie projective au 19e siècle, (à paraître).

[2008] La théorie des Würfe de von Staudt : une irruption de l'algèbre dans la géométrie, *Archive for History of Science*, 62 (2008), 201-242.

Pasch, Moritz

[1882] *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig : Teubner, 1882; rééd. avec un supplément de M. Dehn, Berlin: Springer, 1926.

[1924] Betrachtungen zur Begründung der Mathematik, *Mathematische Zeitschrift*, 20 (1924), 231-240.

Pieri, Mario

[1894] Sui principii che reggono la geometria di posizione (i), *Atti della Regia Academia delle Scienze di Torino*, 30 (1894-1895), 607-641.

[1896] Un sistema di postulati per la geometria projettiva degli iperspazii, *Rivista di Mathematica*, 6 (1896), 9-16.

[1897] I principii della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo, *Memorie della Regia Accademiadelle Scienze di Torino*, 48 (2) (1897-98), 1-62.

[1901] Sur la géométrie envisagée comme un système purement logique, in *Bibliothèque du congrès international de philosophie : logique et histoire des sciences*, Paris : Colin, 1901, 367-404.

Poncelet, Jean Victor

[1818] Considérations philosophiques et techniques sur le principe de continuité dans les lois géométriques, in [Poncelet 1864], 296-362.

[1822] Traité des propriétés projectives des figures, Metz-Paris, 1822 ; 2e éd., Traité des propriétés projectives des figures (tome 1), Paris : Gauthier-Villars, 1865.

[1864] Applications d'analyse et de géométrie qui ont servi de principal fondement au Traité des propriétés projectives des figures, vol. 2, Paris : Gauthier-Villars, 1864.

Poincaré, Henri

[1899] Des Fondements de la géométrie, à propos d'un livre de M. Russell, *Revue de métaphysique et de morale*, 7 (1899), 251-279.

Russell, Bertrand

[1897] *An Essay on the Foundations of Geometry*, Cambridge : Cambridge University Press, 1897 ; London and New York : Routledge, 1996 ; trad. fr. A. Cadenat, Paris : Gauthier-Villars, 1901.

von Staudt, Georg

[1847] *Geometrie der Lage*, Nuremberg : Verlag von Bauer und Raspe, 1847 ; trad. en italien par M. Pieri (avec une présentation des travaux de von Staudt par C. Segre), *Geometria di posizione*, Turin : Bocca, 1889 ; trad. en français par P. Nabonnand, à paraître chez Hermann.

Steiner, Jacob

[1832] *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*, Berlin, 1832; cité d'après l'édition Ostwald's Klassiker der Exakten Wissenschaften, 82 (1ère partie), Leipzig : Akademie Verlagsgesellschaft M.B.H.

Voelke, Jean Daniel

[2008] Le théorème fondamental de la géométrie projective : évolution de sa preuve entre 1847 et 1900, *Archive for History of Science*, 62 (2008), 243-296.

Veblen, Oswald &Young, John Wesley

[1910] *Projective Geometry*, volume 1, Boston : Ginn and Co., 1910.

[1917] *Projective Geometry*, volume 2, Boston : Ginn and Co., 1917.

Whitehead, Albert North

[1906] *The axioms of Projective Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics n° 4, New York : Hafner Publishing Co, 1906.

[1907] *The axioms of Descriptive Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics n° 5, New York : Hafner Publishing Co, 1907.

---

[i] Das Wesen dieser Dualität von Eigenschaften und Sätzen ist also durch die Grundgebilde selbst, d. h. durch die umfassende Vorstellung der Raumelemente.

[ii] Da hiernach zwei sich schneidende Gerade nicht zu einer und derselben dritten Geraden parallel seyn können, so muss, wenn drei Gerade in einerlei Ebene liegen, einer von folgenden vier Fällen statt finden:
Die Geraden schneiden sich in drei Punkten.
Die Geraden schneiden sich alle drei in einem Punkte.
Zwei von den drei Geraden sind zu einander parallel, werden aber beide von der dritten geschnitten.
Die Geraden sind alle drei zu einander parallel.

[iii] […] so kann von solchen Linien auch gesagt werden, dass sie einerlei Richtung haben oder darstellen.

[iv] Parallele Ebenen haben etwas Gemeinschaftliches, was an jeder derselben aufgefasst werden kann und ihre Stellung heissen soll, so dass also die Stellung einer Ebene durch jede zu ihr parallele Ebene bestimmt ist, und zwei Ebenen einerlei order verschiedene Stellungen haben, je nachdem sie parallel sind oder sich schneiden. Ob in einer Ebene eine gegebene Richtung enthalten oder nicht enthalten ist, hängt nur von der Stellung der Ebene ab, daher man sagen kann, dass diese Stellung in dem einen Falle jene Richtung enthälte, im andern aber sie nicht enthalte.

[v] Der Inbegriff von allen Geraden, welche nach einerlei Richtung in einer und derselben Ebene liegen, heisst ein Parallelstahlenbüschel, der Inbegriff von allen Ebenen aber, welche einelei Stellung haben, ein Parallelebenenbüschel. Der Parallelstrahlenbüschel ist als eine besondere Art von Strahlenbüschel, der Parallelebenenbüschel ist als eine besondere Art von Ebenenbüschel zu betrachten. Ein Strahlenbüschel hat hiernach entweder einen Mittelpunkt oder eine bestimmte Richtung, ein Ebenenbüschel aber entweder eine Axe oder eine bestimmte Stellung.
Der Inbegriff von allen nun denkbaren Geraden, welche eine und dieselbe Richtung haben, soll ein Parallelstrahlenbünden heissen. In einem Parallelstrahlenbündel sind also nicht nur unendlich viele Parallelstrahlenbüschel und Parallelebenenbüschel enthalten. Eine Ebene gehört nämlich jedem Strahlenbündel an, dessen Mittelpunkt order Richtung sie enthält.

[vi] [...] ist zu ersehen, dass in vielen Fällen ein Punkt durch eine Richtung, eine Gerade aber durch eine Stellung vertreten wird, und dass also zu den Elementen einer Geraden auch noch ihre Richtung, zu den Elementen einer Ebene aber auch noch ihre Stellung und alle in derselben enthalten Richtungen gehören. Zwei Gerade, welche in einerlei Ebene liegen, haben entweder einen Punkt gemein oder einerlei Richtung. Zwei Ebenen haben entweder einen Punkt gemein oder einerlei Stellung. Eine Ebene enthält von einer nicht in ihr liegenden Geraden entweder nur einen Punkt oder nur die Richtung. Es wird hiernach nicht unzweckmässig seyn für Richtung und Stellung noch andere Ausdrücke einzuführen, welche an das, was sie vertreten, unmittelbar erinnern und Sätze, welche nur besondere Modificationen von andern sind, auch als solche bezeichnen.

[vii] Durch die in diesem §. aufgestellte Ansicht, welche im Gegensatze zur gewöhnlichen die perspektivische

heissen soll, werden oft anscheinend ganz verschieden Sätze in eine Aussage zusammengefasst und die Ausnahmen beseitigt, welche ausserdem der Aufstellung allgemeiner Gesetze hâufig im Wege stehen würden.

[viii] Durche zwei Punkte A, B ist eine Gerade bestimmt, welche nämlich durch beide Punkte geht.
Durch zwei Ebenen A, B ist eine Gerade AB bestimmt, in welcher nämlich die beiden Ebenen sich schneiden.

[ix] Die Lehrsâtze werden aus den Grundsätzen deducirt so dass alles, was zur Begründung der Lehrsätze gehört, ohne Ausnahme sich in der Grundsätzen niedergelegt finden muss.

[x] Es galt also, die Lücken in dem überlieferten Lehrgebaüde der Geometrie zu ergründen, über die von der Geometrie verarbeiteten Vorstellung und Erkenntnisse, besonders die unscheinbaren und verstecken, eine vollständige übersicht zu gewinnen und schliesslich daraus die geeignet scheinenden als « Kernbegriffe » und « Kernsätze » zu einem « Kern » zu vereinigen, aus dem alles, was zur Geometrie gehört, herauswächst.

[xi] Die projektive Geometrie entspringt aus einem « Stamm », der auf dem Boden der Geometrie vor der Abspaltung ihres projektiven Teiles gewonnen ist, durch Deduktion aus dem Kern der Geometrie.

[xii] Der Übergang von der geraden Strecke zur geraden Linie bedurfte der Rechtfertigung durch eine Deduktion und eine Definition, noch bevor man mit uneigentlichen Punkten arbeitete.

[xiii] Demgemäss wird zunächst nur von der ebenen Fläche und von Punkten einer ebenen Fläche die Rede sein der Begriff "Ebene" aber erst nachher eingeführt werden.

[xiv] Sind in einer ebenen Fläche drei Punkte *A*, *B*, *C* durch die geraden Strecken *AB*, *AC*, *BC* paarweise verbunden, und ist in derselben ebenen Fläche die gerade Strecke *DE* durch einen innerhalb der Strecke *AB* gelegenen Punkt gezogen, so geht die Strecke *DE* oder einer Verlängerung derselben entweder durch einen Punk der Strecke *AC* oder durch einen Punkt der Strecke *BC*.

[xv] Wenn die Strahlen *efg* paarweise durch eine Ebene verbunden werden, aber nicht alle drei durch eine Ebene, oder wenn die Strahlen *efg* in einer Ebene enthalten sind und mit einer von ihrer Ebene ausgeschlossenen Geraden durche Ebenen verbunden können, so sagt man […] *g* ist ein Strahl des Bundels *ef*.

[xvi] Wir treffen in der That die Bestimmung, dass das Wort « Punkt » nicht mehr in der bisherigen Bedeutung angewendet werden soll, dass vielmehr mit der Aussage « des Strahlenbündel *S* gehörtzur Geraden *g*" fortan gleichbeteutend sein soll die Aussage "der Punkt *S* liegt in der Geraden *g*", und dass, wo das Strahlenbündel *S* als eigentliches bezeichnet wird, auch der Punkt *S* ein *eigentlicher Punkt* gennant werden soll".

[xvii] […] wir definieren die Ausdruckweise „*A* ist ein Punkt der Geraden *g*" als gleichbedeutend mit „*A* ist ein Punkt des Ebenenbüschels *g*".

[xviii] Se *a*, *b*, *c* sono punti proj. non complanari, per ciascun punto proj. *e*, non situato in alcuno dei piani *abc*, *abd*, *acd*, *bcd*, dovrà esistere almeno un punto comune alle figure *ae*, *bcd*.