



**HAL**  
open science

## La “ quatrième géométrie ” de Poincaré

Philippe Nabonnand

► **To cite this version:**

Philippe Nabonnand. La “ quatrième géométrie ” de Poincaré. Gazette des Mathématiciens, 2012, 134, pp.76-86. hal-01081806

**HAL Id: hal-01081806**

**<https://hal.science/hal-01081806>**

Submitted on 11 Nov 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# La « quatrième géométrie » de Poincaré

Philippe Nabonnand<sup>1</sup>

## 1. Introduction

Henri Poincaré est souvent cité dans les travaux relatifs à l'histoire des géométries non euclidiennes. Tous ceux qui s'intéressent aux mathématiques du 19<sup>e</sup> siècle savent qu'il a proposé dans son mémoire sur les groupes fuchsien un modèle conforme de la géométrie hyperbolique grâce auquel il représente l'action de ces groupes<sup>2</sup> [Poincaré 1884]. Tous ceux qui s'intéressent à la philosophie des sciences ont lu le troisième chapitre de *La Science et l'hypothèse* [Poincaré 1902] dans lequel il explique à un public de profanes éclairés sa conception de la géométrie et défend un point de vue conventionnaliste sur la question du statut des axiomes de la géométrie<sup>3</sup>. Dans ce chapitre, qui est la reprise d'un article publié dans la *Revue générale des sciences pures et appliquées* publié une dizaine d'années auparavant<sup>4</sup>, Poincaré évoque d'autres géométries que les non euclidiennes ; en particulier, outre les géométries à courbure variable de Riemann et les géométries non archimédiennes<sup>5</sup> qu'il élimine du champ des applications, il considère une quatrième géométrie à laquelle, selon lui, on doit accorder un statut similaire à celui des géométries euclidienne, elliptique et hyperbolique.

Cette quatrième géométrie aux propriétés surprenantes n'a pas donné lieu à l'époque à des commentaires particuliers que ce soit de la part des mathématiciens ou des philosophes. On peut néanmoins citer une allusion dans un article d'un économiste canadien, défenseur de la théorie du libre échange :

Les principes du libre-échange n'ont pas de défenseurs au Canada. Les manufacturiers leur sont énergiquement hostiles. Les marchands et les banquiers n'y ajoutent pas foi, et les classes agricoles ont toujours soutenu les principes protectionnistes.

Tant pis pour eux. Qu'est-ce que cela prouve ?

Il existe une quatrième géométrie, aussi cohérente que celle d'Euclide, de Riemann ou de Lobatchewsky. Voici un de ses théorèmes : une droite réelle peut être perpendiculaire à elle-même. Le bon sens lui est « énergiquement hostile », les maçons et les charcutiers « n'y ajoutent pas foi », et les élèves de nos lycées « ont toujours soutenu des principes » contraires.

Qu'est-ce que cela prouve ?

---

<sup>1</sup> Laboratoire d'histoire des sciences et de philosophie – Archives Poincaré (UMR 7117 du CNRS) & MSH de Lorraine – Université de Lorraine.

Philippe.Nabonnand@univ-lorraine.fr.

<sup>2</sup> Un groupe fuchsien est un sous-groupe discret du groupe des isométries du plan hyperbolique (que l'on peut identifier à  $PSL(2, \mathbb{R})$ ).

<sup>3</sup> Sur cette question, on peut lire [Zahar 2000] ou [Nabonnand2010].

<sup>4</sup> [Poincaré 1891].

<sup>5</sup> Dans l'article original, Poincaré ne parle pas des géométries non archimédiennes. Il n'évoque celles-ci que dans le texte remanié qui constitue le chapitre 3 de *La Science et l'hypothèse*.

Que ce groupe-ci aurait besoin d'apprendre la géométrie, et, ce groupe-là d'apprendre l'économie politique. – Pas autre chose. [Macquart 1904, 66]

Poincaré, lui-même, n'insiste pas particulièrement sur ce qui semble être néanmoins une découverte qu'il expose dans un article publié en 1887 dans le *Bulletin de la Société mathématiques de France* consacré aux hypothèses fondamentales de la géométrie<sup>6</sup>.

Dans le premier paragraphe, nous expliciterons le rôle rhétorique joué par la quatrième géométrie dans le second chapitre de *La Science et l'hypothèse*, puis, nous reviendrons à l'article antérieur de Poincaré dans lequel apparaît la quatrième géométrie comme un exemple de géométrie quadratique. Puis nous nous demanderons pourquoi Poincaré ne découvre qu'une quatrième géométrie alors qu'il aurait pu dans le même geste mathématique en découvrir une cinquième puisque les géométries quadratiques sont modelées sur les quadriques.

## 2. Le troisième chapitre de *La Science et l'hypothèse*

Ce chapitre intitulé « Les géométries non euclidiennes » a pour objectif de défendre l'idée que les axiomes de la géométrie ne sont ni des vérités synthétiques a priori, ni des vérités expérimentales mais des conventions, l'expérience nous guidant dans le choix des conventions les plus commodes. Il est divisé en deux parties. Dans la première, Poincaré introduit les géométries non euclidiennes à partir de la considération de l'axiome des parallèles, ce qui l'amène à introduire la géométrie hyperbolique (appelée géométrie de Lobatchevsky) et la géométrie sphérique (appelée géométrie de Riemann) de l'espace.

Le style adopté par Poincaré n'est pas mathématique mais exige néanmoins du lecteur sinon une certaine culture mathématique, au moins une habitude à manier les concepts géométriques de base. Concernant les géométries en dimension deux, Poincaré évoque d'une part le modèle de Beltrami et d'autre part « une sorte d'opposition entre la géométrie de Riemann et celle de Lobatchevsky », la première étant réalisée sur la sphère, la seconde en partie sur la pseudo-sphère. Pour présenter ces géométries en dimension deux, il utilise la fiction « d'êtres dénués d'épaisseur » et dotés des mêmes capacités cognitives que les êtres humains. En l'absence d'autres expériences, selon que ces êtres fictifs vivent sur un plan, une sphère ou une pseudo-sphère, Poincaré conclut qu'« ils n'attribueront certainement à l'espace que deux dimensions » et seront conduits à la géométrie euclidienne dans le premier cas, à la géométrie sphérique dans le deuxième et à la géométrie hyperbolique dans le troisième. Ce raisonnement justifie selon Poincaré que l'expérience joue un rôle dans le choix de la géométrie à laquelle nous rapportons notre expérience spatiale.

Dans la mesure où il est possible d'exhiber des modèles et que l'on peut imaginer comment des êtres doués des mêmes capacités cognitives que les êtres humains pourraient être amenés à utiliser, selon leurs expériences, ces géométries pour rendre compte de leur perception spatiale, Poincaré considère qu'« ainsi s'évanouit l'objection<sup>7</sup> en ce qui concerne les géométries à deux dimensions<sup>8</sup> ». Pour justifier les géométries non euclidiennes en

---

<sup>6</sup> [Poincaré 1887].

<sup>7</sup> Il s'agit de l'objection philosophique selon laquelle les géométries non euclidiennes ne sont pas applicables à des questions de spatialité du fait de leur nature (purement logique).

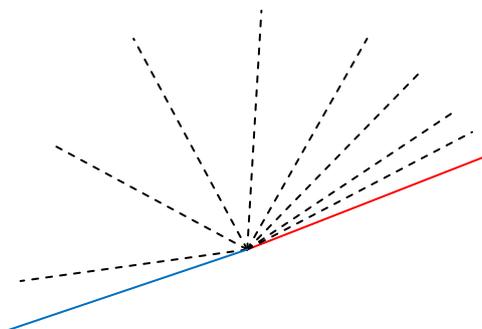
<sup>8</sup> [Poincaré 1902, 68].

dimensions 3, Poincaré se refuse à généraliser les raisonnements précédents en considérant des sphères ou des pseudo-sphères en dimension 4 et préfère une justification intrinsèque à la dimension 3. À cette fin, il propose son propre modèle de la géométrie hyperbolique ; il construit « une sorte de dictionnaire, en faisant correspondre chacun à chacun une double suite de termes écrits dans deux colonnes, de la même façon que se correspondent dans les dictionnaires ordinaires les mots de deux langues dont la signification est la même :

<i>Espace</i> .....	Portion de l'espace située au-dessus du plan fondamental
<i>Plan</i> .....	Sphère coupant orthogonalement le plan fondamental
<i>Droite</i> .....	Cercle coupant orthogonalement le plan fondamental
<i>Sphère</i> .....	Sphère
<i>Cercle</i> .....	Cercle
<i>Angle</i> .....	Angle
<i>Distance de deux points</i> .....	Logarithme du rapport anharmonique de ces deux points et des intersections du plan fondamental avec un cercle passant par ces deux points et le coupant orthogonalement, etc. <sup>9</sup> »

Dans ces conditions, tout théorème de géométrie hyperbolique se traduit en un théorème de géométrie euclidienne et réciproquement. Poincaré rappelle que Felix Klein et lui-même ont utilisé la géométrie hyperbolique dans leurs travaux mathématiques ce qui permet à Poincaré de souligner que la géométrie hyperbolique est donc « susceptible d'interprétations concrètes, cesse d'être un vain exercice de logique et peut recevoir des applications »<sup>10</sup>.

Avant de passer à l'objet philosophique de ce chapitre, Poincaré explique que les géomètres admettent implicitement des axiomes qu'il apparaît inutile d'énoncer de fait de leur évidence. Ainsi, souvent des définitions commencent par l'égalité des figures renferment simultanément une définition et un axiome (dans le cas de l'égalité des figures, un axiome qui affirme la possibilité du mouvement d'une figure invariable). Un axiome implicitement admis dans les trois géométries euclidienne et non euclidienne est celui selon lequel on peut appliquer une droite sur elle-même par un renversement, et qui lui « semble mériter quelque attention, parce qu'en l'abandonnant, on peut construire une quatrième géométrie aussi cohérente que celles d'Euclide, de Lobatchevsky et de Riemann<sup>11</sup> ».



<sup>9</sup> [Poincaré 1902, 68].

<sup>10</sup> [Poincaré 1902, 69].

<sup>11</sup> [Poincaré 1902, 72].

Poincaré signale que les théorèmes de cette quatrième géométrie sont surprenants ; il donne l'exemple de droites qui sont orthogonales à elle-même. Cependant, insiste-t-il, cette géométrie est non contradictoire.

En exhibant cette géométrie, Poincaré montre qu'en restant dans le cadre des géométries qui admettent « le mouvement de figures invariables » – autrement dit, des géométries définies par un groupe de transformations – des géométries étranges peuvent apparaître. Celles de Lobatchevsky ou de Riemann en deviennent de ce fait moins extraordinaires et leur utilisation pour décrire des phénomènes physiques ou astronomiques plus envisageable.

Poincaré poursuit en faisant référence à la classification des groupes de transformations conservant un invariant quadratique par Lie<sup>12</sup>. Il en conclut qu'il n'y a qu'un nombre fini de géométries à examiner dès que l'on admet la possibilité du mouvement de figures invariante :

Supposons qu'on admette les prémisses suivantes :

1° L'espace a  $n$  dimensions ;

2° Le mouvement d'une figure invariable est possible

3° Il faut  $p$  conditions pour déterminer la position de cette figure dans l'espace.

*Le nombre de géométries compatibles avec ces prémisses sera limité<sup>13</sup>.*

Puis, en excluant les géométries à courbure variable et les non archimédiennes<sup>14</sup>, Poincaré arrive finalement à ne considérer comme véritablement possible pour les applications à l'espace que les trois géométries euclidienne, hyperbolique et sphérique.

Néanmoins, la quatrième géométrie, aux théorèmes aussi étranges par rapport aux autres géométries présentées par Poincaré, est une géométrie obtenue à partir des mêmes considérations générales que ces dernières ; que ce soit en discutant des axiomes ou comme Poincaré le fait dans son article publié dans la *Revue générale des sciences pures et appliquées*<sup>15</sup>, en la présentant comme une géométrie modélisée sur une quadrique, la quatrième géométrie apparaît aux yeux de Poincaré comme structurellement très proche des géométries euclidienne et non euclidiennes.

### 3. Les géométries quadratiques

Quelques années auparavant, en 1887, Poincaré avait consacré un article aux hypothèses fondamentales de la géométrie. L'intention de ce travail était « énoncer toutes les hypothèses nécessaires et [de] n'énoncer que celles-là » de la géométrie plane.

Le problème est décomposé en deux questions : 1) Déterminer les hypothèses communes à toutes les géométries quadratiques (les géométries que l'on peut modéliser sur les quadriques), puis 2) caractériser la géométrie euclidienne parmi les géométries quadratiques. La réponse à

---

<sup>12</sup> Voir [Nabonnand 2010].

<sup>13</sup> [Poincaré 1891, 772-773] & [Poincaré 1902, 72-73].

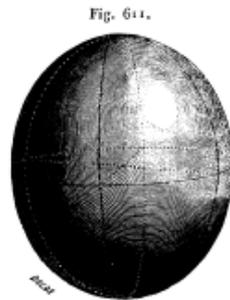
Ces hypothèses sont analogues à celles que Poincaré avaient déterminées pour caractériser en 1887 les géométries quadratiques (voir [Poincaré 1887, 213-214]).

<sup>14</sup> Poincaré exclut ces géométries pour rendre compte de notre expérience car il considère que nous appréhendons la spatialité à partir de notre capacité à former des groupes continus de transformations. Ainsi, selon Poincaré, les géométries à courbure variable « ne pourraient donc jamais être que purement analytiques et ne se prêteraient pas à des démonstrations analogues à celle d'Euclide ».

<sup>15</sup> [Poincaré 1887].

la première question est une application des méthodes de Lie pour classer les groupes de transformations géométriques.

Pour identifier les géométries quadratiques, Poincaré part du constat que la géométrie de Riemann (dans laquelle par un point donné, il ne passe aucune parallèle à une droite donnée) « est susceptible d'une interprétation très simple », à savoir la géométrie sphérique, « pourvu que l'on convienne de donner le nom de *droites* aux grands cercles de la sphère »<sup>16</sup>. Il se propose de généraliser cette méthode d'interprétation aux géométries euclidienne et hyperbolique. Pour cela, il suffit de considérer la géométrie des sections planes des surfaces du second ordre (quadriques) en convenant « de donner le nom de *droites* aux sections planes diamétrales<sup>17</sup> de cette surface et le nom de *circonférences* aux sections planes non diamétrales »<sup>18</sup>.



L'ellipsoïde [Comberousse-Rouché 1891, 490]

Pour définir l'angle de deux droites en un point, Poincaré considère les deux tangentes aux deux sections planes diamétrales et les deux droites génératrices qui passent par ce point<sup>19</sup>

Ces quatre droites (au sens ordinaire du mot) ont un certain rapport anharmonique. L'angle que nous cherchons à définir sera alors le logarithme de ce rapport anharmonique si les deux génératrices sont réelles, c'est-à-dire si la surface est un hyperboloïde à une nappe<sup>20</sup> ; dans le cas contraire, notre angle sera ce même logarithme divisé par  $\sqrt{-1}$ <sup>21</sup>.

Poincaré reprend ici par exemple les théories de Laguerre<sup>22</sup> en les réinterprétant à partir de l'espace tangent des quadriques. Dans la même veine, il définit la distance entre deux points en considérant le birapport de ces deux points avec les deux points à l'infini situé sur une section diamétrale qui contient ces deux points :

Considérons un arc de conique faisant partie d'une section plane diamétrale (c'est ce que nous sommes convenus d'appeler un *segment de droite*). Les deux extrémités de l'arc et les deux points à l'infini de la conique ont un certain rapport harmonique comme tout système de quatre points situés sur une conique. Nous conviendrons alors d'appeler longueur du segment considéré le logarithme de ce rapport si la conique est une hyperbole et ce même logarithme divisé par  $\sqrt{-1}$  si la conique est une ellipse<sup>23</sup>.

<sup>16</sup> [Poincaré 1887, 205].

<sup>17</sup> Une section diamétrale est une section plane qui passe par le centre de la quadrique étant entendu que le centre des paraboloides est le point à l'infini de leur axe.

<sup>18</sup> [Poincaré 1887, 205]

<sup>19</sup> Les quadriques possèdent deux systèmes de génératrices rectilignes imaginaires ou réelles.

<sup>20</sup> On notera que Poincaré ne cite pas le paraboloides hyperbolique.

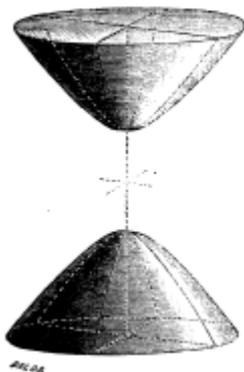
<sup>21</sup> [Poincaré 1887, 205].

<sup>22</sup> Voir par exemple la note d'Edmond Laguerre publiée dans les *Nouvelles annales de mathématiques* [Laguerre 1853] ou la recension de travaux de Laguerre publiée par Eugène Rouché [1887].

<sup>23</sup> [Poincaré 1887, 205].

Poincaré dénomme ces géométries obtenues sur les quadriques, géométries quadratiques. Il souligne qu'« il y a plusieurs géométries quadratiques, car il y a plusieurs espèces de surfaces du second ordre ». Il annonce que la géométrie construite sur l'ellipsoïde est celle de Riemann, sur l'hyperboloïde à deux nappes, la géométrie de Lobatchevsky et sur le paraboloidé elliptique, la géométrie euclidienne.

Fig. 613.



L'hyperboloïde à deux nappes [Comberousse-Rouché 1891]

Ces trois cas n'épuisent pas bien sûr « la liste des géométries quadratiques » puisque en particulier, celui de l'hyperboloïde à une nappe n'a pas été étudié, ni même évoquée.

Fig. 607.



L'hyperboloïde à une nappe [Comberousse-Rouché 1891, 483]

Poincaré ajoute :

Nous pouvons donc dire qu'il y a trois géométries quadratiques, qui correspondent aux trois espèces de surfaces du second ordre à centre.

Nous devons y ajouter d'ailleurs les géométries qui correspondent aux cas limites et parmi lesquelles prendra rang la géométrie d'Euclide<sup>24</sup>.

Fig. 612.



Le paraboloidé elliptique [Comberousse-Rouché 1891, 492]

<sup>24</sup> [Poincaré 1887, 206].

Poincaré explique que la géométrie modelée sur l'hyperboloïde à une nappe n'a pas été remarquée par les mathématiciens car ses propriétés sont tellement déconcertantes qu'elles ont été toujours implicitement écartées :

Comment se fait-il donc que la géométrie de l'hyperboloïde à une nappe ait jusqu'ici échappé aux théoriciens ? C'est qu'elle entraîne les propositions suivantes :

1° La distance de deux points situés sur une même génératrice rectiligne de la surface fondamentale est nulle.

2° Il y a deux sortes de droites correspondants, les premières aux sections diamétrales elliptiques, les autres aux sections diamétrales hyperboliques ; il est impossible, par aucun mouvement réel, de faire coïncider une droite de la première sorte avec une droite de la seconde.

3° Il est impossible de faire coïncider une droite avec elle-même par une rotation réelle autour d'un de ses points, ainsi que cela a lieu dans la géométrie d'Euclide quand on fait tourner une droite de  $180^\circ$  autour d'un de ses points<sup>25</sup>.

Tous les géomètres ont implicitement supposé que ces trois propositions sont fausses, et vraiment ces trois propositions sont trop contraires aux habitudes de notre esprit pour qu'en les niant les fondateurs de la géométrie aient cru faire une hypothèse et aient songé à l'énoncer<sup>26</sup>.

De nombreux commentateurs qui s'arrêtent simplement aux propriétés de la quatrième géométrie énoncées par Poincaré identifient celle-ci avec la géométrie de Minkowski en dimension deux. Schlomo Sternberg ne s'y trompe pas et reconnaît une géométrie de De Sitter<sup>27</sup> :

So now we see exactly what this fourth geometry of Poincaré was referring to is, it is the two-dimension version of the geometry of the De Sitter space. That is, one can regard the group  $SO(1,2)$  as the group of isometries of the usual Lobachevski geometry –  $SO(1,2)/SO(2)$  but we can also regard this same group as the group of automorphisms of the two-dimensional De Sitter space  $SO(1,2)/SO(1,1)$ . One of the degeneracies of this single-sheeted hyperboloid is of course the hyperbolic paraboloid. The corresponding geometry of course is nothing other than two-dimensional Minkowski space<sup>28</sup>.

#### 4. Pourquoi Poincaré n'a pas découvert une cinquième géométrie

Il est surprenant que Poincaré n'ait pas découvert au moins une cinquième géométrie. Il sait parfaitement qu'il y a cinq quadriques (non dégénérées) ; on trouve leur description par exemple dans le classique traité de géométrie de Rouché et de Comberousse<sup>29</sup>. Après avoir défini les surfaces du second ordre comme les surfaces dont les sections planes sont des coniques (réelles ou imaginaires), les deux auteurs distinguent cinq types de surfaces du

---

<sup>25</sup> Dans un article consacré aux fondements de la géométrie, Poincaré [1898] utilise la classification par Lie des 12 groupes de transformations de  $\mathbb{R}^3$  possédant un invariant quadratique. Pour sélectionner parmi ceux-ci les géométries euclidiennes et non euclidiennes, Poincaré utilise la propriété de posséder un sous-groupe de rotation d'ordre 3.

<sup>26</sup> [Poincaré 1887, 206].

<sup>27</sup> Les géométries de Minkowski et de De Sitter ont toutes les deux des métriques lorentziennes, la première étant de courbure nulle et celle de De Sitter de courbure  $\pm 1$ . Pour plus de détails sur la géométrie de De Sitter, on peut consulter l'article de H. S. M. Coxeter [1943], A Geometrical Background for De Sitter World.

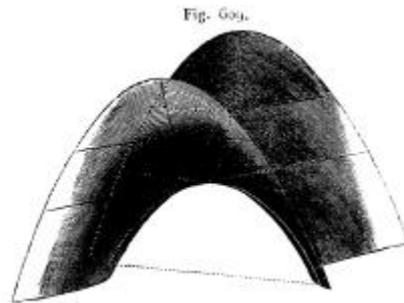
<sup>28</sup> [Sternberg 2006, 68].

Je remercie Scott Walter de m'avoir indiqué cette référence.

<sup>29</sup> [Comberousse-Rouché 1891].

Poincaré rédigera en 1900 pour la 7<sup>e</sup> édition de ce traité classique une note sur les géométries non euclidiennes.

second ordre « proprement dites » : les surfaces du second ordre réglées (hyperboloïde à une nappe et paraboloïde elliptique) apparaissent comme le lieu d'intersection des plans homologues de deux faisceaux de plan projectifs. L'hyperboloïde à une nappe a une section plane à l'infini non dégénérée alors que la section plane à l'infini du paraboloïde hyperbolique se réduit à deux droites. Comberousse et Rouché classent les surfaces du second ordre « proprement dites » non réglées selon leur intersection avec le plan à l'infini. Ces surfaces sont donc bien connues et font même l'objet dans les années 1880 d'un chapitre d'un cours standard de géométrie de l'espace.



Le paraboloïde hyperbolique [Comberousse-Rouché 1891, 486]

Comme la citation ci-dessus de son article de 1887 l'indique, Poincaré considère que les trois géométries quadratiques modelées sur les trois quadriques à centre (ellipsoïde, hyperboloïde à une et deux nappes) constituent en quelque sorte les trois cas génériques et que celles modelées sur les autres quadriques ne sont que des cas dégénérés. Poincaré indique bien qu'à chaque quadrique dégénérée correspond une géométrie, que la géométrie modelée sur le paraboloïde elliptique est la géométrie euclidienne. Pour quelles raisons Poincaré n'a pas au moins signalé une cinquième géométrie modelée sur le paraboloïde hyperbolique, dotée des mêmes propriétés que celles pointées par Poincaré pour la quatrième<sup>30</sup> ?

Une première réponse est à chercher dans le projet de Poincaré au moment où il écrit ses articles en 1887 et 1891. En 1887, Poincaré se propose de déterminer « les prémisses de la Géométrie, les propositions indémontrables sur lesquelles repose cette science, en excluant, bien entendu, les propositions qui sont déjà nécessaires pour fonder l'Analyse »<sup>31</sup>. La caractérisation de la géométrie euclidienne que recherche Poincaré exclut certainement les axiomes non spécifiquement géométriques mais se doit d'explicitier « le grand nombre d'hypothèses que l'on fait implicitement au début de la démonstration des différents théorèmes ». Ces hypothèses implicites sont nombreuses et difficiles à lister :

Mais ces hypothèses échappent généralement au lecteur, à moins qu'il ne soit particulièrement attentif ; car, bien qu'elles ne soient pas évidentes, au point de vue de la pure logique, elles nous semblent telles par suite d'habitudes invétérées de nos sens et de notre esprit<sup>32</sup>.

La quatrième géométrie exhibée par Poincaré sert essentiellement à illustrer ce propos. La discussion autour du postulat des parallèles ne suffit pas et l'étude des diverses géométries non euclidiennes ne permet pas d'identifier toutes les hypothèses implicites admises en géométrie. En utilisant un cadre général pour construire les diverses géométries, Poincaré en

<sup>30</sup> Bien entendu, cette cinquième géométrie serait celle du plan de Minkowski.

<sup>31</sup> [Poincaré 1887, 203].

<sup>32</sup> [Poincaré 1887, 204].

fait émerger une, construite exactement de la même manière que les géométries euclidienne et non euclidiennes et qui est pourtant totalement hétérodoxe, au moins du point de vue de notre expérience. Avoir exhibé cette quatrième géométrie justifie l'introduction de deux axiomes en sus de ceux qui caractérisent les géométries quadratique, deux axiomes qui excluent cette quatrième géométrie et qui permettent de ne retenir que la géométrie euclidienne et les deux non-euclidiennes :

Faisons encore les deux hypothèses suivantes :

D. La distance de deux points ne peut être nulle que si ces deux points coïncident ;

E. Lorsque deux droites se coupent, on peut faire tourner l'une d'elles autour du point d'intersection de façon à la faire coïncider avec l'autre.

Ces deux hypothèses sont liées nécessairement l'une à l'autre ; il suffit d'admettre l'une d'elles pour être obligé d'admettre l'autre et d'exclure la géométrie de l'hyperboloïde à une nappe<sup>33</sup>.

De même, dans l'article publié en 1891 dans la *Revue générale des sciences pures et appliquées*<sup>34</sup>, la mention de la quatrième géométrie précède un paragraphe consacré à la classification par Lie des groupes de transformation.

En conclusion, bien que l'on s'aperçoive aisément que les géomètres ont admis nombre d'hypothèses implicites qui ne sont pas pour autant neutres, – l'oubli de la quatrième géométrie en étant une bonne illustration – la tâche de caractériser exactement les géométries n'est pas pour autant irréalisable puisque les géométries envisageables sont en nombre fini. Poincaré n'a donc pas besoin d'exhiber une cinquième géométrie qui n'apporterait rien à son propos.

Une seconde réponse relève du contexte mathématique. À la fin du 19<sup>e</sup> siècle, les notions de courbure d'une surface dans l'espace euclidien ou d'espace riemannien sont bien connues et sans nul doute Poincaré les domine parfaitement<sup>35</sup>. Par contre, la notion de métrique lorentzienne et a fortiori, celle de courbure d'une surface dans un espace lorentzien ne sont pas explicitées à cette période<sup>36</sup>. Il n'y a aucune raison pour que Poincaré (ou quelque mathématicien de l'époque) puisse identifier l'hyperboloïde à une nappe comme une surface à courbure constante non nulle d'un espace lorentzien et le paraboloid hyperbolique comme une surface à courbure nulle de ce même espace. Même si Poincaré a fait les calculs et constaté que les métriques qu'il obtenait sur ces deux surfaces étaient différentes, le contexte théorique ne lui offrait rien pour vraiment identifier des géométries différentes, d'autant plus que les propriétés de ces géométries que Poincaré met en exergue leur sont communes<sup>37</sup>. Que

---

<sup>33</sup> [Poincaré 1887, 214].

<sup>34</sup> [Poincaré 1891].

<sup>35</sup> Poincaré a commandé et reçu en 1883 les *Werke* de Riemann (voir [http://www.univ-nancy2.fr/poincare/chp/image/mayer\\_muller1b.jpg](http://www.univ-nancy2.fr/poincare/chp/image/mayer_muller1b.jpg)).

<sup>36</sup> Bien plus tard, en 1905, et dans un tout autre contexte (celui des débuts de la théorie de la relativité), Poincaré étudiera le groupe de Lorentz et fera apparaître la forme quadratique  $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$  comme invariante par les « substitutions de ce groupe » [Poincaré 1906, 168].

<sup>37</sup> En fait, comme Poincaré insiste dans son article de 1887 sur le fait que la géométrie euclidienne est un « cas limite » c'est-à-dire que l'on peut l'obtenir comme une dégénérescence de la géométrie hyperbolique, on peut penser qu'il aurait pu – si cela avait été son objectif -- s'apercevoir que la géométrie modelée sur le paraboloid hyperbolique était par rapport à celle modelée sur l'hyperboloïde à une nappe dans une relation analogue à celle

ce soit en s'appuyant une approche par les groupes de transformations comme dans l'article de 1887 ou en reprenant cette question à partir de considérations sur les axiomes comme dans sa contribution de 1891

Poincaré a indéniablement découvert un type de géométrie qu'il lie à l'abandon d'une propriété de transitivité de l'action du groupe des déplacements sur les droites ; pour autant, parce que ce n'est pas son propos et qu'il n'y ait pas incité par les dynamiques de recherche de l'époque, il ne cherche pas à explorer, et encore moins à classer ces géométries<sup>38</sup>.

#### Bibliographie

Charles de Comberousse & Eugène Rouché

[1891] *Traité de géométrie*, 6<sup>e</sup> édition, Paris : Gauthier-Villars, 1891.

Harold Scott MacDonald Coxeter

[1943] A geometrical background for De Sitter's World, *The American Mathematical Monthly*, 50 (1943), 217-228.

Edmond Laguerre

[1853] Note sur la théorie des foyers, *Nouvelles annales de mathématiques*, (1) 12 (1853), 57-66.

Émile Macquart,

[1905] Revue des principales publications économiques de l'étranger, *Journal des économistes, revue mensuelle de la science économique et de la statistique*, Paris : Librairie Guillaumin, 63<sup>e</sup> année, 5<sup>e</sup> série, tome 1, 56-74.

Philippe Nabonnand

[2010] La Théorie de l'espace de Poincaré, in P.E Bour & S. Roux (éds.), *Lambertiana*, numéro hors série de *Recherches sur la philosophie et le langage*, Paris : Vrin, 2010, 373-391.

Henri Poincaré

[1884] Théorie des groupes fuchsien, *Acta mathematica*, 1 (1884), 1-62.

[1887] Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 15 (1887), 203-216.

[1891] Les géométries non euclidiennes, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 2 (1891), 769-774.

[1898] On the Foundations of Geometry, *The Monist*, 9 (1898), 1-43 (trad. anglaise d'un manuscrit de Poincaré par T.J. Mc Cormack) ; trad. française de la version anglaise par L. Rougier, *Des Fondements de la géométrie*, Paris : Chiron, 1921 ; rééd. par L. Rollet dans H. Poincaré, *L'Opportunisme scientifique*, Basel : Birkhäuser, 2002, 5-46.

---

de la géométrie modelée sur le paraboléide elliptique par rapport à celle modelée sur l'hyperboléide à deux nappes.

<sup>38</sup> Je remercie Caroline Ehrhardt, Philippe Henry et Laurent Rollet dont les lectures attentives et critiques ont permis d'améliorer une première version de ce texte.

[1902] *La Science et l'hypothèse*, Flammarion : Paris, 1902 ; cité d'après la rééd. Flammarion : Paris, 1968 (avec une préface de J. Vuillemin).

[1906] La dynamique de l'électron, *Rendicontidelcircolomatematico di Palermo*, 21 (1906), 129-176.

Eugène Rouché

[1887] Edmond Laguerre, sa vie et ses travaux, *Nouvelles annales de mathématiques*, (3) 6 (1887), 105-173.

Shlomo Sternberg

[1986] Review of *Imagery in Scientific Thought* by Arthur I. Miller, *The MathematicalIntelligencer*, 8 (2) (1986), 64-74.

Elie Zahar

[2000] Les fondements de la géométrie selon Poincaré, *PhilosophiaScientiæ*, 1 (2000), 145-186.