



HAL
open science

**UN MODÈLE PLATONICIEN
(EUCLIDIEN-PROJECTIF) POUR LA THÉORIE DE
LA RELATIVITÉ RESTREINTE A Platonic model
(Euclidean-projective) for the special theory of relativity**

Alain Jégat

► **To cite this version:**

Alain Jégat. UN MODÈLE PLATONICIEN (EUCLIDIEN-PROJECTIF) POUR LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE A Platonic model (Euclidean-projective) for the special theory of relativity. 2014. hal-01081576

HAL Id: hal-01081576

<https://hal.science/hal-01081576v1>

Preprint submitted on 9 Nov 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UN MODÈLE PLATONICIEN (EUCLIDIEN-PROJECTIF)

POUR LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE

A Platonic model (Euclidean-projective) for the special theory of relativity

Alain Jégat - LTP Saint Joseph Hasparren

Résumé

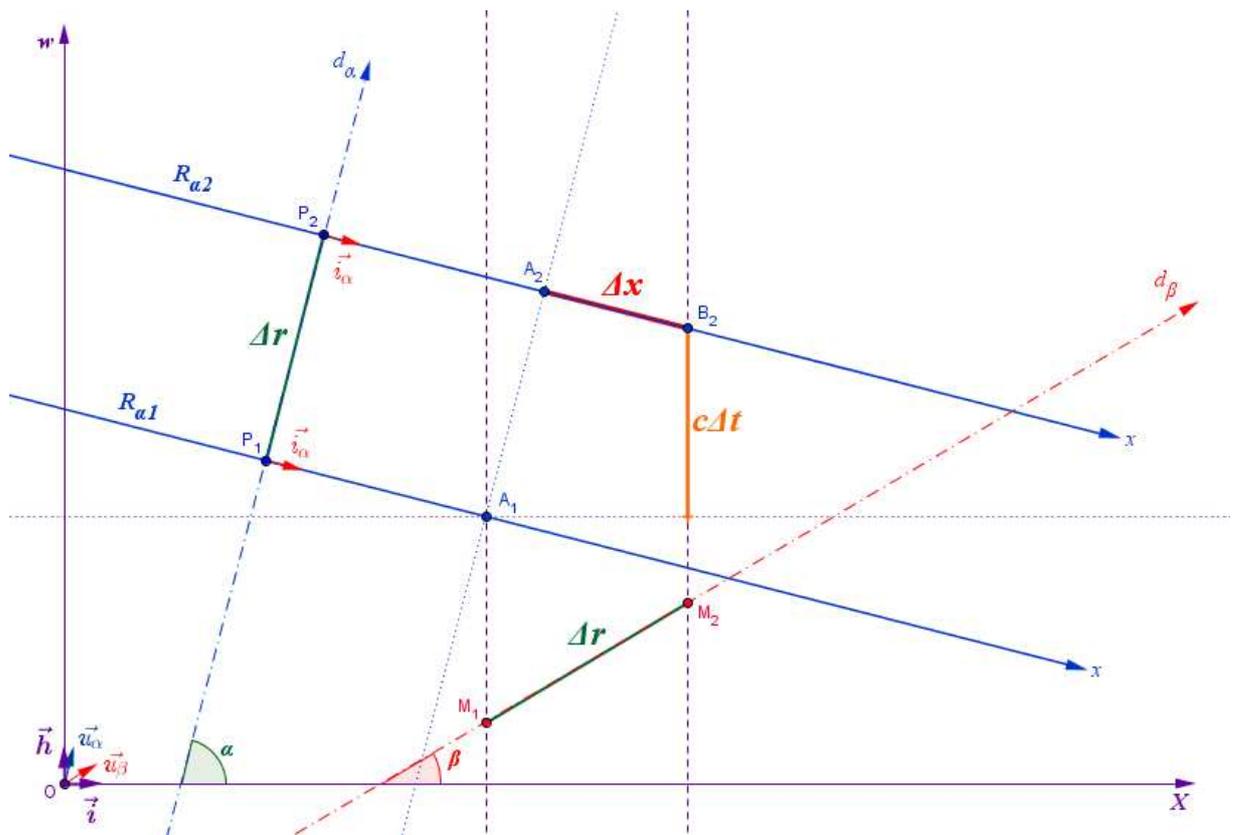
Le cadre géométrique usuel de la Relativité Restreinte est l'espace-temps *pseudo-euclidien* de Minkowski. Cet article a pour but d'exposer un modèle différent. Le cadre en est un espace *euclidien* de dimension quatre, dans lequel les objets *se déplacent de façon uniforme* (c'est-à-dire qu'entre deux observations, quelle que soit leur trajectoire, *ils parcourent tous la même distance*), mais où *les événements sont vus en projection* selon une direction privilégiée, comme nous allons l'expliquer. La remarque, assez surprenante, qui fait l'objet de cet article est qu'on retrouve ainsi les transformations de Lorentz et toutes les formules de la Relativité Restreinte.

Abstract

The usual framework for Einstein's special theory of relativity is the *pseudo-euclidean* spacetime proposed by Hermann Minkowski. This article aims at proposing a different model. The framework is an *euclidean* four-dimensional space in which *all the objects move regularly* (it means that, between two observations, whatever their trajectories, *they cover the same distance*), but where *the events are seen in projection* according to a privileged direction, as we are going to explain. The remark, rather surprising, which is the object of this article is that we so find the Lorentz transformation and all the equations of the special relativity.

1. Repérage dans cet espace. Mouvement rectiligne uniforme. Mesure de la vitesse.

On rapporte l'espace quadridimensionnel euclidien à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{h})$, dont les axes sont notés (OX) , (OY) , (OZ) , (Ow) ; la direction de la projection est celle du vecteur \vec{h} . On considère un mobile ponctuel P en déplacement rectiligne uniforme. Nous associerons à ce mobile P l'hyperplan H_P le contenant et orthogonal à la direction de son déplacement. Les points de cet hyperplan, qui ont ainsi des trajectoires parallèles à celle de P , constitueront ce que nous nommerons par la suite les « observateurs » du référentiel lié à P . Pour alléger les schémas suivants, nous ne considérerons que des mobiles dont le déplacement s'effectue dans le plan (XOw) , ainsi que les « observateurs » liés à P situés dans ce plan. Nous noterons d_α la droite parcourue par P , \vec{u}_α son vecteur directeur unitaire (orienté dans le sens du déplacement), R_α le référentiel lié à P , où α est l'angle $(\vec{i}, \vec{u}_\alpha)$.



Sur le schéma ci-dessus, figure l'observation par le référentiel R_α d'un second mobile ponctuel M dont la trajectoire rectiligne d_β est dirigée par le vecteur \vec{u}_β , avec $(\vec{i}, \vec{u}_\beta) = \beta$; M est observé par le référentiel R_α en M_1 et en M_2 . On supposera ici que α n'est pas un multiple de π .

L'événement « M est en M_1 » survient alors que le mobile P est en P_1 : en projection, cet événement est perçu par l'observateur A_1 . L'événement « M est en M_2 » survient alors que le mobile P est en P_2 : en projection, cet événement est perçu par l'observateur B_2 , alors que l'observateur A_1 est maintenant en A_2 . Entre les deux observations, les deux mobiles ont parcouru la même distance $\Delta r = P_1P_2 = M_1M_2$, par hypothèse (cf. le résumé). Dans ce référentiel R_α , nous définirons :

1. **la distance algébrique** Δx séparant les deux événements « M est en M_1 » et « M est en M_2 » à partir de la distance euclidienne A_2B_2 , affectée d'un signe positif ou négatif selon les situations (on utilisera en fait la relation $\overline{A_2B_2} = \Delta x \vec{i}_\alpha$, où $\vec{i}_\alpha = \sin \alpha \vec{i} - \cos \alpha \vec{h}$) ;
2. **l'intervalle de temps** Δt séparant ces deux événements **dans** R_α par la relation : $c\Delta t = w(B_2) - w(A_1)$, où c est une constante strictement positive (dont nous verrons qu'elle correspond à la célérité de la lumière dans le vide).

Identifiant les vecteurs avec leurs colonnes de coordonnées dans la base (\vec{i}, \vec{h}) :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} \Delta r \cos \beta \\ \Delta r \sin \beta \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{A_1A_2} = \begin{pmatrix} \Delta r \cos \alpha \\ \Delta r \sin \alpha \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{A_2B_2} = \Delta x \vec{i}_\alpha = \begin{pmatrix} \Delta x \sin \alpha \\ -\Delta x \cos \alpha \end{pmatrix};$$

$$\text{d'où : } \overrightarrow{A_1B_2} = \begin{pmatrix} \Delta r \cos \alpha + \Delta x \sin \alpha \\ \Delta r \sin \alpha - \Delta x \cos \alpha \end{pmatrix}. \text{ De plus : } X(\overrightarrow{M_1M_2}) = X(\overrightarrow{A_1B_2}),$$

$$\text{donc } \Delta r \cos \alpha + \Delta x \sin \alpha = \Delta r \cos \beta;$$

$$\text{c'est-à-dire } \Delta x = \frac{\cos \beta - \cos \alpha}{\sin \alpha} \Delta r; \quad \text{ce qui conduit à : } \overrightarrow{A_1B_2} = \begin{pmatrix} \Delta r \cos \beta \\ \Delta r \frac{1 - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, la relation $c\Delta t = (w(B_2) - w(A_1))$ devient :

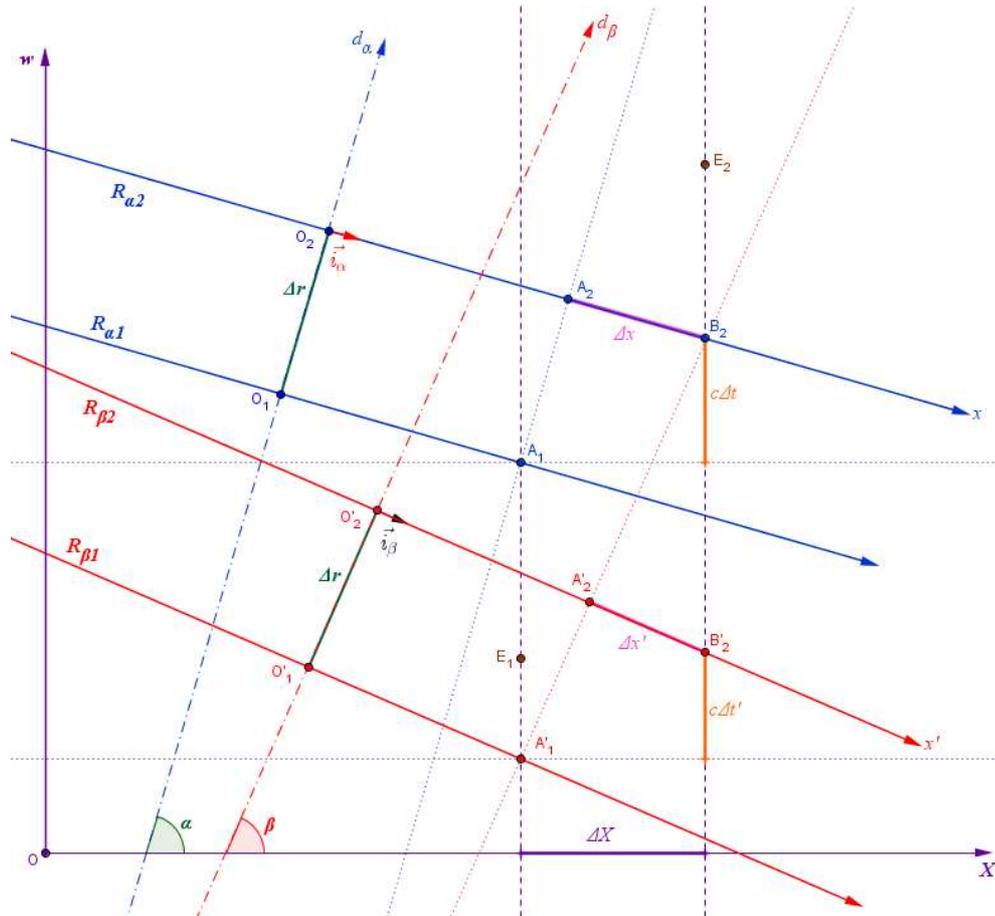
$$c\Delta t = \frac{1 - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha} \Delta r. \quad (1)$$

$$\text{Ainsi, la vitesse } v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ de } M \text{ perçue par } R_\alpha \text{ est : } v = c \frac{\cos \beta - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha \cos \beta}. \quad (2)$$

On constate qu'on a toujours $|v| \leq c$. À noter que, quel que soit le référentiel d'observation R_α , on obtient $v = c$ pour $\beta = 0$ et $v = -c$ pour $\beta = \pm\pi$ (mod. 2π); et que dans les cas limites où $\alpha = m\pi$ (m entier relatif), quel que soit β non multiple de π les valeurs de Δx et Δt tendent vers l'infini mais que leur rapport conduit à $v = -c$ pour $\alpha = 0$ et $v = c$ pour $\alpha = \pm\pi$ (mod. 2π).

2. Transformation de Lorentz

Nous considérons ici deux référentiels R_α et R_β en translation uniforme (c'est-à-dire dont les trajectoires sont *rectilignes*), observant deux événements E_1 et E_2 .
 Pour la commodité des calculs, nous nous référerons aux notations indiquées sur le schéma ci-dessus, et nous poserons $\Delta X = X(E_2) - X(E_1)$.



Nous avons alors, à partir de : $\overline{A_1 B_2} = \begin{pmatrix} \Delta r \cos \alpha + \Delta x \sin \alpha \\ \Delta r \sin \alpha - \Delta x \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta X \\ c \Delta t \end{pmatrix}$,

les relations suivantes : $\Delta x = \frac{\Delta X - \Delta r \cos \alpha}{\sin \alpha}$ et $c \Delta t = \frac{\Delta r - \Delta X \cos \alpha}{\sin \alpha}$; (3)

et, de même : $\Delta x' = \frac{\Delta X - \Delta r \cos \beta}{\sin \beta}$ et $c \Delta t' = \frac{\Delta r - \Delta X \cos \beta}{\sin \beta}$. (4)

Ainsi, avec $\frac{v}{c} = \frac{\cos \beta - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha \cos \beta}$, (cf. (2)) nous obtenons : $\Delta x - \frac{v}{c} c \Delta t = \frac{(\Delta X - \Delta r \cos \beta) \sin \alpha}{1 - \cos \alpha \cos \beta}$;

puis, remarquant (en utilisant (2)) que $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{1 - \cos \alpha \cos \beta}$, sous la condition

$\sin \alpha \sin \beta > 0$ (que nous supposons satisfaite), nous arrivons à :

$$\frac{\Delta x - \frac{v}{c} c \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta X - \Delta r \cos \beta}{\sin \beta}, \text{ i.e. } \Delta x' = \frac{\Delta x - v \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (5)$$

De même, on a : $c \Delta t - \frac{v}{c} \Delta x = \frac{(\Delta r - \Delta X \cos \beta) \sin \alpha}{1 - \cos \alpha \cos \beta}$,

$$\text{d'où découle : } \frac{c \Delta t - \frac{v}{c} \Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta r - \Delta X \cos \beta}{\sin \beta}, \text{ i.e. } c \Delta t' = \frac{c \Delta t - \frac{v}{c} \Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (6)$$

Remarques :

1. Les formules de Lorentz (5)-(6) peuvent aussi s'écrire de la façon suivante :

$$\Delta x' = \frac{(1 - \cos \alpha \cos \beta) \Delta x - (\cos \beta - \cos \alpha) c \Delta t}{\sin \alpha \sin \beta}; \quad (7)$$

$$c \Delta t' = \frac{(1 - \cos \alpha \cos \beta) c \Delta t - (\cos \beta - \cos \alpha) \Delta x}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

(Contrairement à ce que les formules (7) pourraient laisser penser, les relations (4) montrent clairement que les quantités $\Delta x'$ et $c \Delta t'$ mesurant l'espace et le temps séparant les événements E_1 et E_2 dans le référentiel R_β sont indépendantes du référentiel R_α .)

2. A partir de ces résultats, on retrouve toutes les formules bien connues de la Relativité Restreinte. En particulier, la formule d'**addition des vitesses** découle de l'identité suivante :

$$1 + \frac{\cos \beta - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha \cos \beta} \cdot \frac{\cos \gamma - \cos \beta}{1 - \cos \beta \cos \gamma} = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha \cos \gamma}.$$

3. Si un mobile ponctuel M décrit, dans l'espace euclidien quadridimensionnel, une trajectoire courbe (i.e. l'angle β dépend de r), à la même vitesse linéique que les autres mobiles, il sera vu dans un référentiel R_α en translation uniforme comme un mobile en **mouvement accéléré**. Son accélération a_α mesurée par le référentiel R_α sera donnée (vu (1) et (2)) par :

$$\frac{a_\alpha}{c^2} = \frac{d\left(\frac{v}{c}\right)}{cdt} = \frac{-d\beta(r)}{dr} \cdot \frac{\sin^3 \alpha \sin \beta(r)}{(1 - \cos \alpha \cos \beta(r))^3};$$

c'est-à-dire $\frac{a_\alpha}{c^2} = \frac{-d\beta(r)}{dr} \frac{1}{\sin^2 \beta(r)} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}$ où v désigne la vitesse de M mesurée dans R_α ;

ce qui conduit, pour deux tels référentiels R_α et R_γ , à : $a_\alpha = a_\gamma \frac{\sin^3 \alpha (1 - \cos \gamma \cos \beta(r))^3}{\sin^3 \gamma (1 - \cos \alpha \cos \beta(r))^3}$, ou

encore: $a_\alpha = a_\gamma \left(1 - \frac{v_\alpha^2}{c^2}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{v_\gamma^2}{c^2}\right)^{-3/2}$ (où v_α et v_γ désignent les vitesses de M dans R_α et R_γ).

3. Conclusion

Ce modèle propose une formulation **géométrique** de la Relativité Restreinte différente de celle de Minkowski. Il soulève toutefois **physiquement** deux interrogations centrales :

1. La première concerne le mouvement des objets (mobiles observés, référentiels) : on leur impose de parcourir une même distance entre deux observations, quelle que soit leur trajectoire. Cette contrainte n'est pas sans évoquer des phénomènes ondulatoires (où la célérité des ondes est fixée par le milieu de propagation).
2. La seconde, bien sûr, concerne la projection utilisée : dans ce modèle, tout se passe comme si un événement E était perçu de la même façon par un référentiel donné quelle que soit sa coordonnée w (cf. fig. 2, où les deux événements observés E_1 et E_2 sont perçus en A_1 et B_2 quelle que soit leur coordonnée w).