HAL open science

# COHOMOLOGIE DES VARIÉTÉS DE MODULES DE HAUTEUR NULLE

Jean-Marc Drézet

**To cite this version:**

Jean-Marc Drézet. COHOMOLOGIE DES VARIÉTÉS DE MODULES DE HAUTEUR NULLE. Mathematische Annalen, 1988, 281, pp.43-85. hal-01080400

**HAL Id: hal-01080400**

**https://hal.science/hal-01080400v1**

Submitted on 5 Nov 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# COHOMOLOGIE DES VARIÉTÉS DE MODULES DE HAUTEUR NULLE

JEAN–MARC DRÉZET

Sommaire


1. Introduction 1
2. Préliminaires 5
3. Variétés de modules de hauteur nulle 9
4. Modules de Kronecker 12
5. Cohomologie des variétés $N(q,m,n)$ 17
6. Exemples 31
7. La variété $N(3,2,3)$ 34

Références 43


## 1. Introduction

Soient $r$, $c_1$, $c_2$ des entiers, avec $r \geq 1$, $M(r,c_1,c_2)$ la variété de modules des faisceaux algébriques semi-stables sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, de rang $r$ et de classes de Chern $c_1$, $c_2$ et $M_s(r,c_1,c_2)$ l'ouvert de $M(r,c_1,c_2)$ correspondant aux faisceaux stables. On pose

$$\mu \ = \ \frac{c_1}{r} \ , \qquad \Delta \ = \ \frac{1}{r}\left(c_2 - \frac{r-1}{2r}c_1^2\right) \ .$$

D'après [5] et [8] il existe une unique fonction $\delta : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telle que pour tout choix de $r$, $c_1$, $c_2$, $M(r,c_1,c_2)$ est de dimension positive si et seulement si $\Delta \geq \delta(\mu)$. Si $\Delta = \delta(\mu)$, on dit que la variété de modules $M(r,c_1,c_2)$ est *de hauteur nulle*. Les variétés de modules de ce type sont les plus faciles à étudier. Quelques-unes de leurs propriétés sont rappelées dans la section 2. Soit $P$ le polynôme $\dfrac{X^2}{2} + \dfrac{3X}{2} + 1$, et $\chi = r(P(\mu) - \Delta)$, qui est la caractéristique d'Euler-Poincaré des faisceaux cohérents de rang $r$ et de classes de Chern $c_1$, $c_2$. On suppose dans ce qui suit que $M(r,c_1,c_2)$ est une variété de modules de hauteur nulle, et que les entiers $r$, $c_1$ et $\chi$ sont premiers entre eux. Cette condition signifie que $M(r,c_1,c_2) = M_s(r,c_1,c_2)$, c'est une variété projective lisse irréductible. On se propose d'étudier la cohomologie entière de $M(r,c_1,c_2)$.

Pour cela on utilisera une description particulière de $M(r,c_1,c_2)$ ([5]). Soient $q$, $m$, $n$ des entiers, avec $q \geq 2$, $m > 0$, $n > 0$. Les applications linéaires $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^q \to \mathbb{C}^n$ sont appelées $\mathbb{C}^q$*-modules de Kronecker*. L'espace projectif $\mathbb{P}$ des droites de $W = L(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^q, \mathbb{C}^n)$ est muni d'une action évidente du groupe réductif $G = \mathrm{SL}(m) \times \mathrm{SL}(n)$, qui se prolonge à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$. On note $\mathbb{P}_{ss}$ (resp. $\mathbb{P}_s$) l'ouvert de $\mathbb{P}$ des points semi-stables (resp. stables) pour cette action. Soit $N(q,m,n)$ (resp. $N_s(q,m,n)$) le quotient algébrique de $\mathbb{P}_{ss}$ (resp. $\mathbb{P}_s$) par $G$. On démontre dans [5] qu'il existe

des entiers $q$, $m$, $n$ tels que $M(r, c_1, c_2)$ soit isomorphe à $N(q, m, n)$. La condition "$r$, $c_1$ et $c_2$ sont premiers entre eux" est équivalente à "$m$ et $n$ sont premiers entre eux". Les modules de Kronecker sont étudiés dans la section 4.

Pour étudier la cohomologie de $M(r.c_1, c_2)$ on utilisera deux méthodes, la seconde uniquement dans un cas particulier.

### 1.1 – La méthode d'Atiyah-Bott ([1], [14])

Elle a servi à étudier la cohomologie entière des variétés de modules de fibrés stables sur une courbe projective lisse.

Posons $G_0 = (\mathrm{GL}(m) \times \mathrm{GL}(n))/\mathbb{C}^*$, groupe opérant sur $W$. La cohomologie de $N(q, m, n)$ s'identifie à la cohomologie équivariante

$$H^*(N(q, m, n), \mathbb{Z}) \ \simeq \ H^*_{G_0}(W_s(q, m, n), \mathbb{Z})$$

(cf. 2.1), $W_s(q, m, n)$ désignant l'ouvert des points de $W$ dessus de $\mathbb{P}_s$. On stratifiera $W$ en strates lisses en utilisant la *filtration de Harder-Narasimhan* des modules de Kronecker. On en déduira que le morphisme de restriction

$$H^*_{G_0}(W, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^*_{G_0}(W_s(q, m, n), \mathbb{Z})$$

est surjectif et se scinde. La détermination de son noyau se ramène à celle de la cohomologie équivariante des strates non ouvertes, qui elle-même s'exprime en fonction de la cohomologie équivariante des espaces $W_s(q, m', n')$, avec $m' \leq m$, $n' \leq n$, $(m', n') \neq (m, n)$. l'espace topologique $W$ étant contractile, on a un isomorphisme

$$H^*_{G_0}(W, \mathbb{Z}) \ \simeq \ H^*(BG_0, \mathbb{Z}) \ ,$$

$BG_0$ désignant le classifiant de $G_0$ (cf. 2.1).

On obtient ainsi par récurrence sur $m$, $n$ le

**Théorème 1 :** *La cohomologie entière de $M(r, c_1, c_2)$ est nulle en degré impair et sans torsion.*

On en déduit aussi le calcul des nombres de Betti de $M(r, c_1, c_2)$. Des exemples sont donnés dans la section 6.

On définit ensuite deux fibrés vectoriels $V_1$, $V_2$ sur $M(r, c_1, c_2)$ tels que $H^*(M(r, c_1, c_2), \mathbb{Z})$ soit engendré comme $\mathbb{C}$-algèbre par les classes de Chern de $V_1$ et $V_2$. Soient
$p_M : M(r, c_1, c_2) \times \mathbb{P}_2 \to M(r, c_1, c_2)$ et $p : M(r, c_1, c_2) \times \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ les projections. Il existe sur $M(r, c_1, c_2) \times \mathbb{P}_2$ un *faisceau universel* $V$, c'est à dire que pour tout point fermé $s$ de $M(r, c_1, c_2)$, la classe d'isomorphisme du faisceau $V_s = V_{|\{s\}\times\mathbb{P}_2}$ est précisément $s$. Il existe alors des fibrés vectoriels $E$, $S$ sur $\mathbb{P}_2$ tels que

$$V_1 = R^1 p_{M*}(V \otimes p^*(E^*(-3))) \ , \qquad V_2 = R^1 p_{M*}(V \otimes p^*(S^*)) \ .$$

Les fibrés $E$ et $S$ sont dits exceptionnels, c'est à dire qu'ils sont stables et que
$\mathrm{Ext}^1(E, E) = \mathrm{Ext}^1(S, S) = \{0\}$. Leur choix dépend essentiellement de $\dfrac{c_1}{r}$. On montre dans la section 3 comment sont déterminés $E$ et $S$.

Supposons maintenant que $-1 < \dfrac{c_1}{r} \leq 0$, cas auquel on peut toujours se ramener. On peut alors, en utilisant $V_1$ et $V_2$ démontrer le

**Théorème 2 :** *La cohomologie entière de $M(r, c_1, c_2)$ est engendrée par les classes de Chern des fibrés $R^1 p_{M*}(V \otimes p^*(\mathcal{O}(-i)))$ pour $i = 0, 1, 2$.*

Ce résultat est moins bon que le précédent car on utilise trois fibrés sur $M(r, c_1, c_2)$ au lieu de deux, mais il est plus explicite.

On suppose toujours que $m$ et $n$ sont premiers entre eux. Pour éclairer les liens qui unissent $BG_0$ et les variétés $N(q, m, n)$ on va donner une construction de $BG_0$ comme "limite" des $N(q, m, n)$ quand $q$ tend vers l'infini. Plus précisément, on considère les inclusions

$$\{0\} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^2 \subset \cdots \subset \mathbb{C}^p \subset \cdots \subset \mathbb{C}^\infty = \bigcup_{p \geq 1} \mathbb{C}^p \ .$$

L'espace vectoriel $\mathbb{C}^\infty$ est muni de la norme $\| (x_i) \| = (\sum |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$. On note $W_\infty$ l'espace de Banach des applications linéaires continues $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^\infty \to \mathbb{C}^n$. Si $f : \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^q \to \mathbb{C}^n$ est une application linéaire, on peut construire son extension $\overline{f}$ à $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^\infty$ de la façon suivante : si $(e_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est la base canonique de $\mathbb{C}^\infty$, on a $f_{|\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^q} = f$ et $f_{|\mathbb{C}^m \otimes \{e_i\}} = 0$ si $i > q$. On peut ainsi considérer $W_q = L(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^q, \mathbb{C}^n)$ comme un sous-espace vectoriel de $W_\infty$. On définit ensuite un ouvert $W_\infty^s$ de $W_\infty$ : c'est l'ensemble des $f$ tels qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que la restriction de $f$ à $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^k$ soit un $\mathbb{C}^k$-module de Kronecker stable.

Le groupe $G_0$ agit librement sur $W_\infty^s$. En fait, $W_\infty^s$ est un $G_0$-fibré principal localement trivial. On note

$$N_\infty(m, n) \ = \ W_\infty^s / G_0 \ ,$$

muni de la topologie quotient. On démontre alors le

**Théorème 3 :** *Le $G_0$-fibré principal $W_\infty^s \to N_\infty(m, n)$ est universel.*

Autrement dit, $N_\infty(m, n) = BG_0$. Remarquons que l'inclusion $W_q \subset W_\infty$ permet de voir $N(q, m, n)$ comme une partie fermée de $N_\infty(m, n)$.

Le cas $m = 1$ est celui bien connu de la grassmanienne "infinie" des quotients de dimension $n$ de $\mathbb{C}^\infty$, qui est le classifiant de $\mathrm{GL}(n)$.

### 1.2 – Utilisation du théorème de Białynicki-Birula

(cf. [2])

Elle fait l'objet de la section 7. C'est la méthode employée par G. Ellingsrud et S.A. Strømme dans [9] pour étudier la cohomologie entière de $\mathrm{Hilb}^k(\mathbb{P}_2)$, le schéma de Hilbert des sous-schémas finis de longueur $k$ de $\mathbb{P}_2$.

On l'emploiera ici à l'étude des variétés de modules de dimension 6. D'après [5], une variété de modules de dimension 6 est isomorphe à $N(3, 2, 3)$ ou à $\mathrm{Hilb}^3(\mathbb{P}_2)$. C'est le premier cas qui nous intéresse.

On considère l'action de $\mathrm{GL}(q)$ sur $N(q,m,n)$ induite par l'action de $\mathrm{GL}(q)$ sur $L(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^q, \mathbb{C}^n)$. Dans le cas $(m,n,q) = (2,3,3)$ l'action d'un tore général $T \subset \mathrm{GL}(q)$ a un nombre fini de points fixes. On en déduit à l'aide du théorème de Białynicki-Birula que $N(3,2,3)$ possède une décomposition cellulaire, c'est à dire une filtration

$$X_0 = \emptyset \subset X_1 \subset \cdots \subset X_p = N(3,2,3)$$

par des sous-variétés fermées, telles que pour $1 \leq i \leq p$, $X_i \backslash X_{i-1}$ soit isomorphe à une union disjointe d'espaces affines : $X_i \backslash X_{i-1} = \coprod X_{ij}$. Il en découle que l'anneau de Chow de $N(3,2,3)$ est librement engendré comme $\mathbb{Z}$-module par les classes des $\overline{X_{ij}}$, que la cohomologie entière de $N(3,2,3)$ est nulle en degré impair, et que le morphisme canonique

$$A^*(N(3,2,3)) \longrightarrow H^{2*}(N(3,2,3),\mathbb{Z})$$

est un isomorphisme. Le théorème de Białynicki-Birula permettrait aussi de calculer les nombres de Betti de $N(3,2,3)$ et de retrouver ainsi des résultats obtenus par la méthode d'Atiyah-Bott, mais cette dernière donne en outre des générateurs de la cohomologie. Parmi les variétés de modules de hauteur nulle isomorphes à $N(3,2,3)$, citons $M(4,-1,3)$, $M(11,-4,13)$, $M(29,-11,73)$. Ces variétés lisses de dimension 6 sont les variétés de modules non triviales de la plus petite dimension possible.

J'ignore si le théorème de Białynicki-Birula peut être employé pour les variétés $N(q,m,n)$ générales. Le point-clé est ici de prouver que l'action d'un tore général $T \subset \mathrm{GL}(q)$ n'a qu'un nombre fini de points fixes.

Les nombres de Betti pairs de $N(3,2,3)$ sont 1, 1, 3, 3, 3, 1, 1, tandis que ceux de $\mathrm{Hilb}^3(\mathbb{P}_2)$ sont 1, 2, 5, 6, 5, 2, 1, d'après [9].

Pour démontrer que l'action de $T$ sur $N(3,2,3)$ possède un nombre fini de points fixes, on utilisera une description précise de $N(3,2,3)$, qui permettra en outre de montrer les liens qui existent entre les deux variétés de modules de dimension 6, $N(3,2,3)$ et $\mathrm{Hilb}^3(\mathbb{P}_2)$ :

**Théorème 4 :** *Il existe un morphisme* $\mathrm{Hilb}^3(\mathbb{P}_2) \to N(3,2,3)$ *qui est l'éclatement d'un plan projectif contenu dans* $N(3,2,3)$.

Le diviseur exceptionnel de $\mathrm{Hilb}^3(\mathbb{P}_2)$ est l'hypersurface des sous-schémas finis $Z$ de longueur 3 tels qu'il existe une droite $\ell$ de $\mathbb{P}_2$ telle que $Z \subset \ell$.

**Remarque** – Les variétés de modules $M$ de dimension $d$ au plus 5 admettent aussi une décomposition cellulaire. En effet, seuls les cas suivants peuvent se produire :

$d = 2$ : $M$ est alors isomorphe à $\mathbb{P}_2$. Par exemple, $\mathrm{Hilb}^1(\mathbb{P}_2)$, $M(3,-1,2)$.

$d = 4$ : $M$ est alors isomorphe au fibré en espaces projectifs $\mathbb{P}(S^2 T_{\mathbb{P}_2})$. Si on impose $-1 < \dfrac{c_1}{r} \leq 0$, les seules variétés de modules de dimension 4 sont $\mathrm{Hilb}^2(\mathbb{P}_2)$ et $M(2,-1,2)$.

$d = 5$ : $M$ est alors isomorphe à $\mathbb{P}_5$. Par exemple $M(2,0,2)$, $M(4,-2,4)$.

### 1.3 – Conjectures

La première conjecture est la suivante : quels que soient $r$, $c_1$, $c_2$ tels que $\dim(M(r,c_1,c_2)) > 0$, la variété $M(r,c_1,c_2)$ possède une décomposition cellulaire. Comme on l'a vu cela impliquerait que le $\mathbb{Z}$-module $A^*(M(r,c_1,c_2))$ est libre, que la cohomologie entière de $M(r,c_1,c_2)$ est nulle en degré impair et que le morphisme canonique $A^*(M(r,c_1,c_2)) \to H^*(M(r,c_1,c_2),\mathbb{Z})$ est un isomorphisme.

Le cas le plus simple serait celui des variétés de modules de hauteur nulle lisses, et plus généralement des variétés $N(q,m,n)$, $m$ et $n$ étant premiers entre eux.

Il serait intéressant d'examiner cette conjecture pour une variété de modules non lisse. Le cas le plus simple est la variété de modules de hauteur nulle $M3,0,3) \simeq N(3,3,3)$, qui est de dimension 10. La sous-variété des points singuliers est ici de dimension 7.

La seconde conjecture est la suivante : supposons que $-1 < \dfrac{c_1}{r} \leq 0$ et $r$, $c_1$ et $\chi$ premiers entre eux. Alors la cohomologie entière de $M(r,c_1,c_2)$ est engendrée par les classes de Chern des fibrés vectoriels $R^i p_{M*}(V \otimes p^*(\mathcal{O}(-i)))$ pour $i = 0,1,2$ (rappelons que $V$ désigne un fibré universel sur $M(r,c_1,c_2) \times \mathbb{P}_2$). Pour l'instant, à part les cas triviaux, cette conjecture n'est démontrée que pour les variétés de modules de hauteur nulle.

Comme dans l'étude du groupe de Picard de $M(r,c_1,c_2)$ (cf. [6]) il doit être possible de trouver un énoncé de la conjecture précédente qui soit valable même pour les variétés de modules non lisses (le problème étant dans ce cas qu'il n'existe pas de fibré universel).

## 2. Préliminaires

### 2.1 – Cohomologie équivariante

(cf. [1], [14])

Soient $X$ une variété algébrique complexe lisse irréductible, $M$ une sous-variété fermée lisse irréductible de $X$, de codimension $d > 0$. Soit $G$ un groupe de Lie connexe opérant sur $X$ (de manière $C^\infty$). On suppose que $M$ est $G$-invariante. Soit $BG$ le *classifiant* de $G$, c'est à dire que $BG$ représente le foncteur contravariant de la catégorie des espaces topologiques paracompacts dans celle des ensembles, associant à un tel espace topologique $Y$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de $G$-fibrés principaux de base $Y$.

Rappelons qu'un $G$-fibré principal $E$ de base $Y$ est *universel* (et alors $Y$ est homotopiquement équivalent à $BG$) si et seulement si $E$ est contractile. On note $EG \to BG$ un $G$-fibré principal universel.

**Remarque :** Dans tout cet article, un $G$-fibré principal est toujours supposé localement trivial.

On appelle *cohomologie équivariante* de $X$ à valeurs dans un anneau commutatif $R$ la cohomologie singulière à valeurs dans $R$ de l'espace topologique quotient

$$X_G \;=\; X \times_G EG \;=\; (X \times EG)/G \;,$$

l'action de $G$ sur $X \times EG$ étant l'action produit. On notera

$$H^n_G(X,R) \;=\; H^n(X_G,R)$$

pour tout $n \geq 0$. On obtient ainsi une $R$-algèbre $H^*_G(X,R)$ (la multiplication étant définie par le cup-produit). Rappelons la proposition (2.1) de [14] exposé 1 : si $G$ opère librement et proprement sur $X$, et si $X \to X/G$ a des sections locales, on a

$$H^*_G(X,R) \;\simeq\; H^*(X/G,R)\ ,$$

l'isomorphisme provenant du morphisme canonique $X_G \to X/G$.

On peut définir la *classe d'Euler équivariante* du fibré normal $N$ de $M$, qui est un élément $e_M$ de $H^{2d}_G(M,\mathbb{Z})$, et on a une suite exacte

$$\cdots H^{n-2d}_G(M,\mathbb{Z}) \xrightarrow{i_n} H^n_G(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^n_G(X\backslash M,\mathbb{Z})\cdots$$

(*suite exacte de Gysin équivariante*) où $i_n$ est tel que la composée $\phi$

$$\begin{tikzcd} H^{n-2d}(M,\mathbb{Z}) \arrow[r, "i_n"] \arrow[dr, "\phi"'] & H^n_G(X,\mathbb{Z}) \arrow[d, "restriction"] \\ & H^n_G(M,\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

est la multiplication par $e_M$.

La sous-variété $M$ est dite *parfaite* si pour tout nombre premier $p$, $e_M$ n'est pas diviseur de zéro dans $H^*_G(M,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

Dans ce qui suit on suppose qu'il existe un tore complexe $T \subset G$ agissant trivialement sur $M$. On obtient alors, pour tout point fermé $m$ de $M$ une représentation de $T$ dans $N_m$ (fibre en $m$ du fibré normal $N$ à $M$). Cette représentation $\sigma$ se décompose en somme directe de représentations de $T$ de rang 1. On dit que $\sigma$ est *primitive* si aucune de ces représentations de rang 1 n'est une puissance d'exposant au moins 2 d'une autre représentation de $T$. Cette propriété est indépendante du point $m$ de $M$. D'après [1], on a

**Proposition 5 :** *Supposons que $\sigma$ soit primitive et $H^*(G,\mathbb{Z})$ sans torsion. Alors $M$ est une sous-variété parfaite de $X$.*

Dans le cas où $M$ est parfaite, si pour tout entier $n$, $i_n : H^{n-2d}_G(M,\mathbb{Z}) \to H^n_G(X,\mathbb{Z})$ est injective, et si $H^{n-2d}_G(M,\mathbb{Z})$ et $H^n_G(X,\mathbb{Z})$ sont libres et de type fini, il en est de même du conoyau de $i_n$ isomorphe à $H^n_G(X\backslash M,\mathbb{Z})$ (cf. lemme 1.8 de [14] exposé 5).

*Changement du groupe structural* – On rencontrera la situation suivante : on prend pour $G$ un groupe algébrique du type $G = \mathrm{GL}(m) \times \mathrm{GL}(n)$, avec $n > 0$, $m > 0$. Le sous-groupe de $G$ constitué des $(tI_m, tI_n)$, $t$ parcourant $\mathbb{C}^*$, est isomorphe à $\mathbb{C}^*$. Posons $G_0 = G/\mathbb{C}^*$. On suppose que $\mathbb{C}^*$ agit trivialement sur $X$, qui est donc muni d'une action de $G_0$, et que cette action est propre et libre. On a un morphisme canonique $\Phi : X_G \to X_{G_0}$.

Dans le cas la plus simple, où $X = G_0$, muni de l'action évidente de $G$, on a $X_G = EG/\mathbb{C}^* = B\mathbb{C}^*$, et $X_{G_0} = EG_0$, qui est homotopiquement équivalent à un point. Dans le cas général, le morphisme $\Phi$ est une fibration de fibre $B\mathbb{C}^*$ :

$$B\mathbb{C}^* \xrightarrow{i} X_G \xrightarrow{\Phi} X_{G_0} \equiv X/G_0$$

(où $\equiv$ signifie homotopiquement équivalent)

On va donner une condition suffisante pour que cette fibration soit "triviale pour la cohomologie entière", c'est à dire sa suite spectrale de Cartan-Serre à coefficients dans $\mathbb{Z}$ dégénère, pour donner un isomorphisme

$$H^*(X_G, \mathbb{Z}) \ \simeq \ H^*(B\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) \otimes H^*(X_{G_0}, \mathbb{Z}) \ .$$

Etant donné que $H^*(B\mathbb{C}^*, \mathbb{Z})$ est libre et de type fini en chaque degré, il suffit d'après [14], exposé 5, de vérifier que

$$i^* : H^*(X_G, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(B\mathbb{C}^*, \mathbb{Z})$$

est surjectif. Il suffit pour cela de trouver un $G$-fibré topologique complexe $L$ de rang 1 sur $X$ tel que l'action de $\mathbb{C}^*$ sur chaque fibre de $L$ soit simplement la multiplication.

*Le classifiant de* $\mathrm{GL}(m)$ – Soient $V$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $m > 0$, $H$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie, $S(H, V)$ l'ouvert de l'espace de Hilbert $L(H, V)$ (applications linéaires continues) des applications surjeclives. On a une action évidente de $\mathrm{GL}(V)$ sur $S(H, V)$, et le quotient est $\mathrm{Gr}^m(H)$, la grassmannienne des sous-espaces vectoriels fermés de $H$ de codimension $m$. En fait, le $\mathrm{GL}(V)$-fibré principal $S(H, V)$ de base $\mathrm{Gr}^m(H)$ fait de $\mathrm{Gr}^m(H)$ le classifiant de $\mathrm{GL}(V)$. Soit $Q_m$ le fibré quotient canonique de $\mathcal{O} \otimes H$ sur $\mathrm{Gr}^m(H)$, et pour $1 \leq i \leq m$, $c_i$ la $i$-ième classe de Chern de $Q_m$, élément de $H^{2i}(\mathrm{Gr}^m(H), \mathbb{Z})$. Alors, l'algèbre $H^*(\mathrm{Gr}^m(H), \mathbb{Z})$ est librement engendrée par les $c_i$. Autrement dit on a

$$H^*(\mathrm{Gr}^m(H), \mathbb{Z}) \ \simeq \ \mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_m]$$

(cf. [14], exposé 3). Il en découle en particulier que le polynôme de Poincaré de $B\,\mathrm{GL}(m)$ est

$$P(B\,\mathrm{GL}(m)) \ = \ \frac{1}{\displaystyle\prod_{1 \leq i \leq m} (1 - T^{2i})} \ .$$

*Notations* – Pour tout espace topologique $Y$ dont la cohomologie rationnelle est de type fini en chaque degré, on note $P(Y)$ le polynôme de Poincaré de $Y$. Si $X$ est une variété sur laquelle opère le groupe $G$ comme précédemment. et si la cohomologie rationnelle de $X_G$ est de type fini en chaque degré, on note $P_G(X)$ le polynôme de Poincaré de $X_G$. Donc $P_G(X) = P(X_G)$.

## 2.2 – Notations

Soit $E$ un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_2$, de rang $r > 0$, de classes de Chern $c_1$, $c_2$. On pose

$$\mu(E) \ = \ \frac{c_1}{r} \ \text{(la } \textit{pente} \text{ de } E\text{)}, \qquad \Delta(E) \ = \ \frac{1}{r}\left(c_2 - \frac{r-1}{2r}c_1^2\right) \ \text{(le } \textit{discriminant} \text{ de } E\text{)} \ .$$

On a vu que les conditions d'existence de faisceaux stables de rang $r$ et de classes de Chern $c_1$, $c_2$ s'exprimaient simplement en fonction des variables $\mu$ et $\Delta$. Le théorème de Riemann-Roch

prend aussi la forme élégante suivante : si $\chi(E)$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré de $E$, on a

$$\chi(E) \ = \ r(P(\mu(E)) - \Delta(E)) \ ,$$

$P$ désignant comme dans l'Introduction le polynôme $\dfrac{X^2}{2} + \dfrac{3X}{2} + 1$.

On note $Q$ le fibré quotient canonique sur $\mathbb{P}_2$. C'est le conoyau du morphisme canonique $\mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O} \otimes H^0(\mathcal{O}(1))^*$.

### 2.3 – Faisceaux semi-stables

Soit $E$ un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_2$. On dit que $E$ est *semi-stable* (resp. *stable*) s'il est sans torsion et si pour tout sous-faisceau propre $F$ de $E$ on a $\mu(E) \geq \mu(F)$, et en cas d'égalite $\Delta(E) \leq \Delta(F)$ (resp. $<$). Cette notion de stabilité est celle de Gieseker [11] reprise par Maruyama [16].

Les faisceaux semi-stables de rang $r$ et de classes de Chern $c_1$, $c_2$ ont une variété de modules $M(r, c_1, c_2)$, qui est une variété projective localement factorielle (cf. [6]).

Soit $\chi$ la caractéristique d'Euler-Poincaré des faisceaux cohérents de rang $r$ et de classes de Chern $c_1$, $c_2$. Si $r$, $c_1$ et $\chi$ sont premiers entre eux, les notions de semi-stabilité et de stabilité sont équivalentes pour les faisceaux de rang $r$ et de classes de Chern $c_1$, $c_2$, et dans ce cas $M(r, c_1, c_2)$ est lisse. En général, seul l'ouvert $M_s(r, c_1, c_2)$ de $M(r, c_1, c_2)$ correspondant aux faisceaux stables est lisse.

### 2.4 – Le théorème de Białynicki-Birula

(cf. [2])

On dit qu'une variété algébrique X a une *décomposition cellulaire* s'il existe une filtration $\emptyset = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_p = X$ par des sous-variétés fermées, telle que pour $1 \leq i \leq p$, $X_i \backslash X_{i-1}$ soit isomorphe à une union disjointe d'espaces affines :

$$X_i \backslash X_{i-1} \ = \ \coprod_j X_{ij} \ , \quad X_{ij} \ \simeq \mathbb{C}^{n_{ij}} \ .$$

Les sous-variétés localement fermées $X_{ij}$ s'appellent les *cellules* de la décomposition.

Si $X$ possède une décomposition cellulaire comme la précédente, on montre que la cohomologie entière de $X$ est nulle en degré impair, que l'anneau de Chow $A^*(X)$ est librement engendré comme $\mathbb{Z}$-module par les classes des $\overline{X_{ij}}$, et qu'enfin le morphisme canonique $A^*(X) \to H^{2*}(X, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme (cf. [10], 19.1).

Soit maintenant $X$ une variété algébrique projective lisse sur laquelle opère (algébriquement) le groupe $\mathbb{C}^*$. Supposons qu'il n'y ait qu'un nombre fini de points fixes pour cette action. Alors on peut en déduire une décomposition cellulaire de $X$ (théoréme de Białynicki-Birula). Si $x_1, \ldots, x_p$ sont les points fixes, les cellules de cette décomposition sont les variétés

$$Y_i \ = \ \left\{ x \in X; \ \lim_{t \to 0} (tx) = x_i \right\} \ .$$

En particulier, la caractéristique de Poincaré de $X$ est égale à $p$.

Une étude de l'action de $\mathbb{C}^*$ sur l'espace tangent $TX_{x_i}$ permet en outre de calculer la dimension de $Y_i$, donc les nombres de Betti de $X$, mais on n'uti1isera pas cette possibilité.

Supposons maintenant qu'un tore complexe de dimension supérieure à 1 opère algébriquement sur X avec un nombre fini de points fixes. Dans ce cas on peut montrer qu'il existe un tore de dimension 1 contenu dans le tore initial tel que les points fixes de l'action des deux tores soient les mêmes. En particulier, il y en a un nombre fini et on peut appliquer le théorème de Białynicki-Birula.

## 3. Variétés de modules de hauteur nulle

### 3.1 – Fibrés exceptionnnels

(cf. [8])

Un fibré vectoriel algébrique $E$ sur $\mathbb{P}_2$ est dit *exceptionnel* s'il est stable et rigide (c'est à dire $\mathrm{Ext}^1(E,E)=\{0\}$). Dans ce cas la variété de modules de faisceaux semi-stables correspondant à $E$ est réduite à un point, la classe d'isomorphisme de $E$. D'après [8] cette classe est entièrement déterminée par la pente de $E$. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des pentes des fibrés exceptionnels. Si $\alpha\in\mathcal{E}$, on notera $E_\alpha$ un fibré exceptionnel de pente $\alpha$. Posons

$$r_\alpha \;=\; \mathrm{rg}(E_\alpha), \qquad \Delta_\alpha \;=\; \Delta(E_\alpha)\ .$$

Alors on a

$$\Delta_\alpha \;=\; \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r_\alpha^2}\right)\ ,$$

et $r_\alpha$ n'est autre que le dénominateur de $\alpha$, c'est à dire le plus petit entier $n>0$ tel que $n\alpha$ soit entier.

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des nombres rationnels diadiques, c'est à dire pouvant se mettre sous la forme $\dfrac{p}{2^q}$, avec $p$, $q$ entiers, $q\geq 0$. On construit dans [8] une bijection croissante $\epsilon:\mathcal{D}\to\mathcal{E}$. Pour tout couple $(\alpha,\beta)$ de nombres rationnels tel que $3+\alpha-\beta\neq 0$, on pose

$$\alpha.\beta \;=\; \frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\Delta_\beta-\Delta_\alpha}{3+\alpha-\beta}\ .$$

Alors la bijection $\epsilon$ est entièrement déterminée par les relations suivantes :

$\epsilon(k)=k$ pour tout entier $k$,

$\epsilon\left(\dfrac{2p+1}{2^{q+1}}\right)=\epsilon\left(\dfrac{p}{2^q}\right).\epsilon\left(\dfrac{p+1}{2^q}\right)$ pour tous entiers $p$, $q$ avec $q\geq 0$.

En particulier, pour tout entier $k$ et tout nombre diadique $t$, on a $\epsilon(t+k)=\epsilon(t)+k$ (et $E_{\epsilon(t+k)}\simeq E_{\epsilon(t)}(k)$). D'après [8] on a, si $\alpha=\epsilon\left(\dfrac{p}{2^q}\right)$ et $p$ impair si $q>0$, $r_\alpha\geq 2^q$ et les relations précédentes permettent de trouver aisément, pour tout entier n, tous les fibrés exceptionnels de rang $r\leq n$ (c'est à dire de trouver leurs rang et classes de Chern). On peut même donner une construction explicite des fibrés exceptionnels (cf. [4]) en partant des isomorphismes $E_k=\mathcal{O}(k)$ pour tout entier $k$.

Soient $r$, $c_1$, $c_2$ des entiers tels que $\dim(M(r,c_1,c_2))>0$, $\chi$ la caractéristique d'Euler-Poincaré des faisceaux cohérents de rang $r$ et de classes de Chern $c_1$, $c_2$. On suppose que $r$, $c_1$ et $\chi$ sont premiers entre eux. Dans ce cas, $M(r,c_1,c_2)$ est lisse et il existe un fibré universel $V$ sur $M(r,c_1,c_2)\times\mathbb{P}_2$. Supposons que $-1<\dfrac{c_1}{r}\leq 0$. Soient $p_M : M(r,c_1,c_2)\times\mathbb{P}_2\to M(r,c_1,c_2)$, $p : M(r,c_1,c_2)\times\mathbb{P}_2\to\mathbb{P}_2$ les projections. Alors on a $R^jp_{M*}(V\otimes p^*(\mathcal{O}(-i)))=0$ pour $i=0,1,2$ et $j\neq 1$, et $R^1p_{M*}(V\otimes p^*(\mathcal{O}(-i)))$ est un faisceau localement libre sur $M(r,c_1,c_2)$. On note $A_0$ la sous-algèbre de $H^*(M(r,c_1,c_2),\mathbb{Z})$ engendrée par les classes de Chern des fibrés $R^1p_{M*}(V\otimes p^*(\mathcal{O}(-i)))$, $i=0,1,2$.

**Lemme 6 :** *Soit $\alpha\in\mathcal{E}$ tel que $-1<\alpha\leq 0$. Alors, pour tout entier $j\neq 1$ on a $R^jp_{M*}(V\otimes p^*(E_\alpha))=0$ et $R^1p_{M*}(V\otimes p^*(E_\alpha))$ est un faisceau localement libre sur $M(r,c_1,c_2)$ dont les classes de Chern appartiennent à $A_0$.*

*Démonstration.* Ce résultat utilise la construction des fibrés exceptionnels effectuée dans [4].

Pour montrer que $R^jp_{M*}(V\otimes p^*(E_\alpha))=0$ pour $j\neq 1$ et que $R^1p_{M*}(V\otimes p^*(E_\alpha))$ est localement libre, il suffit de prouver que pour tout faisceau stable $E$ sur $\mathbb{P}_2$ de rang $r$ et de classes de Chern $c_1$, $c_2$, on a $h^0(E\otimes E_\alpha)=h^2(E\otimes E_\alpha)=0$.

On a $\mathrm{Hom}(E_\alpha^*,E)=\{0\}$ parce que $E$ est stable, que $\mu(E_\alpha^*)\geq 0\geq\mu(E)$, et qu'en cas d'égalité on a $\Delta(E_\alpha^*)<1/2<\Delta(E)$ (d'après [8]). Donc $h^0(E\otimes E_\alpha)=0$.

Par dualité de Serre, on a $h^2(E\otimes E_\alpha)=h^0(E^*\otimes E_\alpha^*(-3))$. On a $\mathrm{Hom}(E_\alpha(3),E)=\{0\}$ car $E$ est stable et $\mu(E_\alpha(3))>\mu(E)$. Donc $h^0(E^*\otimes E_\alpha^*(-3))=0$.

Montrons maintenant que les classes de Chern de $R^1p_{M*}(V\otimes p^*(E_\alpha))$ appartiennent à $A_0$. Posons $\alpha=\epsilon\left(\dfrac{p}{2^q}\right)$, avec $p$ impair et $q\geq 0$. L'assertion précédente se démontre par récurrence sur $q$. Pour $q=0$ c'est évident car alors $E_\alpha=\mathcal{O}(-1)$ ou $\mathcal{O}$. Supposons qu'elle soit vraie pour $q-1\geq 0$. D'après [4] il existe une suite exacte

$$0\longrightarrow E_\alpha\longrightarrow E_\beta\otimes\mathrm{Hom}(E_\beta,E_\gamma)\xrightarrow{\mathrm{ev}}E_\gamma\longrightarrow 0,$$

ou bien une suite exacte

$$0\longrightarrow E_\beta\xrightarrow{\mathrm{ev}^*}E_\gamma\otimes\mathrm{Hom}(E_\beta,E_\gamma)^*\longrightarrow E_\alpha\longrightarrow 0,$$

(ev, ev$^*$ étant les morphismes canoniques), où $\beta,\gamma$ sont des éléments de $\mathcal{E}$ tels que $-2\leq\beta,\gamma\leq 0$, pouvant s'écrire

$$\beta=\epsilon\left(\frac{p'}{2^{q-1}}\right),\quad \gamma=\epsilon\left(\frac{p''}{2^{q-1}}\right)\ ,$$

et $-1\leq\beta,\gamma\leq 0$ sauf si $\alpha=-\dfrac{1}{2}$ (et on a alors la suite exacte $0\to\mathcal{O}(-2)\to\mathcal{O}(-1)\otimes\mathbb{C}^3\to E_{-\frac{1}{2}}\to 0$). Dans tous les cas il résulte de l'hypothèse de récurrence qu'on a une suite exacte

$$0\to R^1p_{M*}(V\otimes p^*(E_\alpha))\longrightarrow R^1p_{M*}(V\otimes p^*(E_\beta))\otimes\mathrm{Hom}(E_\beta,E_\gamma)\longrightarrow R^1p_{M*}(V\otimes p^*(E_\gamma))\to 0\ .$$

ou bien une suite exacte

$$0\to R^1p_{M*}(V\otimes p^*(E_\beta))\longrightarrow R^1p_{M*}(V\otimes p^*(E_\gamma))\otimes\mathrm{Hom}(E_\beta,E_\gamma)^*\longrightarrow R^1p_{M*}(V\otimes p^*(E_\alpha))\to 0\ .$$

Puisque les classes de Chern des fibrés $R^1p_{M*}(V \otimes p^*(E_\beta))$ et $R^1p_{M*}(V \otimes p^*(E_\gamma))$ appartiennent à $A_0$ il en est de même de celles de $R^1p_{M*}(V \otimes p^*(E_\alpha))$. Ceci démontre le lemme 6. □

### 3.2 – Variétés de modules de hauteur nulle

Les résultats qui suivent proviennent de [5].

Pour tout $\alpha \in \mathcal{E}$ on note $x_\alpha$ la plus petite solution de l'équation $X^2 - 3X + \dfrac{1}{r_\alpha^2} = 0$.

Soit $\mu$ un nombre rationnel. D'après [5] il existe un unique $\alpha \in \mathcal{E}$ tel que $|\mu - \alpha| < x_\alpha$. Soient $r$, $c_1$, $c_2$ des entiers, avec $r \geq 1$, et $\mu = \dfrac{c_1}{r}$. L'unique $\alpha \in \mathcal{E}$ tel que $|\mu - \alpha| < x_\alpha$ et le fibré exceptionnel $E_\alpha$ sont dits *associés* à $M(r, c_1, c_2)$. Dans [4] on distingue des triplets particuliers de fibrés exceptionnels appelés *triades*. Il en existe au moins une de la forme $(E, G, E_\alpha)$. Par exemple, si $\alpha = \epsilon\left(\dfrac{p}{2^q}\right)$ avec $p$ impair, on peut prendre $E = E_\beta$, $G = E_{\beta.\alpha}$, avec $\beta = \epsilon\left(\dfrac{p-1}{2^q}\right)$

On suppose que $M(r, c_1, c_2)$ est de hauteur nulle (cf. Introduction). Supposons que $\mu \leq \alpha$. Il existe alors des entiers $m$, $n$ ne dépendant que de $r$, $c_1$, $c_2$ tels que tout faisceau semi-stable $U$ de rang $r$ et de classes de Chern $c_1$, $c_2$ sur $\mathbb{P}_2$ soit isomorphe au conoyau d'un morphisme injectif de faisceaux

$$\Phi : E \otimes \mathbb{C}^m \longrightarrow G \otimes \mathbb{C}^n \ .$$

Soit $S$ le conoyau du morphisme canonique injectif de fibrés $G \to E_\alpha \otimes \mathrm{Hom}(G, E_\alpha)^*$. C'est encore un fibré exceptionnel et on a $m = -\chi(U, E)$, $n = -\chi(S, U)$. Le morphisme $\Phi$ provient d'une application linéaire

$$\mathbb{C}^m \otimes \mathrm{Hom}(E, G)^* \longrightarrow \mathbb{C}^n \ ,$$

qui est en fait un $\mathrm{Hom}(E, G)^*$-module de Kronecker semi-stable (cf. chap. 4). On a $\dim(\mathrm{Hom}(E, G)) = 3r_\alpha$. Rappelons que $N(q, m, n)$ désigne la variété de modules des $\mathbb{C}^q$-modules de Kronecker semi-stables $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^q \to \mathbb{C}^n$. C'est simplement le quotient algébrique par $\mathrm{SL}(m) \times \mathrm{SL}(n)$ de l'ouvert des points semi-stables de l'espace projectif des droites de $L(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^q, \mathbb{C}^n)$ (cf. chap. 4). En associant à $U$ l'image de $\Phi$ on obtient un isomorphisme $M(r, c_1, c_2) \simeq N(3r_\alpha, m, n)$. Si $\mu > \alpha$, on a un résultat analogue mais il faut prendre une triade du type $(E_\alpha, E', G')$ et les faisceaux semi-stables de rang $r$ et de classes de Chern $c_1$, $c_2$ sont isomorphes à des noyaux de morphismes surjectifs $E' \otimes \mathbb{C}^m \to G' \otimes \mathbb{C}^n$. Dans toute la suite on supposera implicitement qu'on est dans le cas $\mu \leq \alpha$. Les démonstrations à faire dans l'autre cas sont analogues.

Soit $M(r, c_1, c_2)$ une variété de modules de hauteur nulle, et $\alpha$ l'élément de $\mathcal{E}$ associé. Alors il existe une variété de modules de hauteur nulle $M(r', c_1', c_2')$ isomorphe à $M(r, c_1, c_2)$, telle que $|\dfrac{c_1'}{r'} - \alpha| < \dfrac{1}{3r_\alpha^2}$. Une telle variété de modules est dite *initiale*. Cette notion est intéressante car on peut prouver qu'il existe au plus un nombre fini de variétés de modules de hauteur nulle initiales $M(r, c_1, c_2)$ de dimension donnée et vérifiant $-1 < \dfrac{c_1}{r} \leq 0$. On donne dans [5] un algorithme permettant de toutes les déterminer. Le premier pas est de limiter les $\alpha \in \mathcal{E}$ à considérer : pour cela on utilise le fait que si $M(r, c_1, c_2)$ est de hauteur nulle, de dimension $d$, et si l'élément de $\mathcal{E}$ qui lui est associé est $\alpha$, on a $d \geq 3r_\alpha - 1$. Et comme d'après 3.1, si

$\alpha = \epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right)$ avec $p$ impair, on a $r \geq 2^q$, on voit qu'il n'y a qu'un nombre fini de couples $(p,q)$ possibles.

## 4. Modules de Kronecker

### 4.1 – Modules de Kronecker semi-stables

Soient $H_0$, $L$, $H_1$ des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie, avec $\dim(L) \geq 3$. Soit $W = L(H_0 \otimes L, H_1)$, sur lequel agit le groupe algébrique réductif $G_0 = (\mathrm{GL}(H_0) \times \mathrm{GL}(H_1))/\mathbb{C}^*$ de la façon suivante :

$$G_0 \times W \longrightarrow W$$

$$\big(\mathbb{C}^*(g_1,g_2), f\big) \longmapsto g_2 \circ f \circ (g_1 \otimes I_L)^{-1}.$$

Soit $P_0$ l'espace projectif des droites de $W$. On déduit de l'action de $G_0$ sur $W$ une action de $\mathrm{SL}(H_0) \times \mathrm{SL}(H_1)$ sur $P_0$, munie d'une linéarisation évidente. Suivant Hulek ([13]) les éléments de $W$ seront appelés *$L$-modules de Kronecker*, ou s'il n'y a pas d'ambiguïté *modules de Kronecker*. Un module de Kronecker non nul sera dit *semi-stable* (resp. *stable*) si son image dans $P_0$ l'est (au sens de Mumford [17], cf. aussi [5]). Rappelons le résultat de [5] :

**Proposition 7 :** *Soit $\tau : H_0 \otimes L \to H_1$ un module de Kronecker non nul. Alors $\tau$ est semi-stable (resp. stable) si et seulement si pour tous sous-espaces vectoriels $H_0'$, $H_1'$ de $H_0$, $H_1$ respectivement tels que $H_0' \neq \{0\}$, $H_1' \neq H_1$ et $\tau(H_0' \otimes L) \subset H_1'$, on a*

$$\frac{\dim(H_1')}{\dim(H_0')} \geq \frac{\dim(H_1)}{\dim(H_0)} \quad (\textit{resp. } >) \ .$$

On pose $N(L,H_0,H_1) = P_0^{ss}/\!\!/(\mathrm{SL}(H_0) \times \mathrm{SL}(H_1))$, $P_0^{ss}$ désignant l'ouvert de $P_0$ constitué des points semi-stables. On peut aussi voir $N(L,H_0,H_1)$ comme un quotient algébrique de $W^{ss}$ par $G_0$, $W^{ss}$ désignant l'ouvert de $W$ des modules de Kronecker semi-stables. On pose $N_s(L,H_0,H_1) = P_0^s/(\mathrm{SL}(H_0) \times \mathrm{SL}(H_1)) = W^s/G_0$, $P_0^s$ (resp. $W^s$) désignant l'ouvert de $P_0$ (resp. $W$) des points (resp. modules de Kronecker) stables. C'est un ouvert de $N(L,H_0,H_1)$. En fait, ces quotients ne dependent à isomorphisme près que des dimensions de $L$, $H_0$, $H_1$. Si $m = \dim(H_0)$, $n = \dim(H_1)$, $q = \dim(L)$, on notera plus simplement $N(q,m,n) = N(L,H_0,H_1)$, $N_s(q,m,n) = N_s(L,H_0,H_1)$. La variété $N(q,m,n)$ est projective, normale et irréductible, et $N_s(q,m,n)$ est un ouvert lisse.

On appelle *morphisme* d'un module de Kronecker $t : H_0 \otimes L \to H_1$ dans un autre $t' : H_0' \otimes L \to H_1'$ un couple $(f_0,f_1)$ d'applications linéaires, $f_i : H_i \to H_i'$ pour $i = 0,1$, tel que $f_1 \circ t = t' \circ (f_0 \otimes I_L)$. On appelle *sous-module de Kronecker* de $t$ un module de Kronecker $t'' : H_0'' \otimes L \to H_1''$, $H_0''$ (resp. $H_1''$) étant un sous-espace vectoriel de $H_0$ (resp. $H_1$), tels que $t(H_0'' \otimes L) \subset H_1''$, $t''$ étant la restriction de $t$. On définit de même un *module de Kronecker quotient* de $t$. Le *noyau* (resp. *conoyau*) de $(f_0,f_1)$ est le sous-module de Kronecker (resp. module de Kronecker quotient) $\ker(f_0) \otimes L \to \ker(f_1)$ (resp. $\mathrm{coker}(f_0) \otimes L \to \mathrm{coker}(f_1)$). Soit $\mu$

un nombre rationnel. Avec les notions précédentes, il est immédiat que les modules de Kronecker semi-stables $H_0 \otimes L \to H_1$, $L$ étant fixé, $H_0$, $H_1$ variables mais astreints à la condition $\dim(H_0) = \mu \dim(H_1)$ constituent une catégorie abélienne artinienne et noetherienne. Les objets simples de cette catégorie sont précisément les modules de Kronecker stables. Tout module de Kronecker semi-stable possède donc une filtration de Jordan-Hölder, dont le gradué $\mathrm{Gr}(t)$ est une somme directe de modules de Kronecker stables. Soit $\pi : W^{ss} \to N(q,m,n)$ le morphisme quotient. On montre aisément que pour tout point fermé $t$ de $W^{ss}$, $\pi^{-1}(\pi(t))$ est constitué des modules de Kronecker ayant un gradué isomorphe à celui de $t$.

Si $t : H_0 \otimes L \to H_1$ est un module de Kronecker tel qu'un au moins des espaces vectoriels $H_0$, $H_1$ soit non nul, on pose

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \frac{\dim(H_0)}{\dim(H_1)} \quad \text{si} \quad H_1 \neq \{0\}, \\ &= +\infty \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Alors $t$ est semi-stable (resp. stable) si et seulement si pour tout sous-module de Kronecker $t'$ de $t$ avec $0 \subsetneqq t' \subsetneqq t$ on a $\mu(t') \leq \mu(t)$ (resp. $<$).

**Remarques : 1** – Si $m$ et $n$ sont premiers entre eux, on a $W^{ss} = W^s$, donc $N(q,m,n) = N_s(q,m,n)$, et $N(q,m,n)$ est lisse.

**2** – En général, on peut montrer que $N(q,m,n)$ est localement factorielle. La démonstration de ce résultat est analogue à celle du fait que les variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2$ sont localement factorielles (cf. [6], [7]). On montre aussi que $\mathrm{Pic}(N(q,m,n))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ (si $\dim(N(q,m,n)) > 0$). En fait $\mathrm{Pic}(N(q,m,n))$ s'identifie naturellement au groupe des caractères de $G_0$.

**3** – Si $\dim(N(q,m,n)) > 0$ et si $m$ et $n$ ne sont pas premiers entre eux, l'ouvert des points lisses de $N(q,m,n)$ est en général égal à $N_s(q,m,n)$. Les exceptions sont des variétés $N(q,m,n)$ isomorphes à $\mathbb{P}_5$, la plus simple d'entre elles étant $N(3,2,2)$.

Par abus de language, on dira que l'application nulle $H \otimes L \to \{0\}$ (resp. $\{0\} \otimes L \to H$), $H$ étant un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, est un L-module de Kronecker semi-stable, stable si $\dim(H) = 1$.

### 4.2 – Périodicité

Si $N(q,m,n)$ est non vide, on peut s'attendre à ce que sa dimension soit égale à

$$\dim(L(H_0 \otimes L, H_1)) - \dim(G_0) \ = qmn - m^2 - n^2 + 1 \ .$$

Posons $\phi(m,n) = m^2 + n^2 - qmn$. On a

$$\phi(m,n) \ = \ \left(m - \frac{qn}{2}\right)^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2 (q^2 - 4) \ .$$

Donc $\phi(m,n)$ n'est autre que la norme de l'élément $\alpha(m,n) = m - \dfrac{qn}{2} + \dfrac{n}{2}\sqrt{p}$ du corps quadratique $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$, avec $p = q^2 - 4$. L'élément $\epsilon = \dfrac{q}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{p}$ est une unité de $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$, et on a donc, en notant $\| \ \|$ la norme dans $Q[\sqrt{p}]$, $\|\epsilon\alpha(m,n)\| = \|\alpha(m,n)\|$.

On a $\epsilon\alpha(m,n) = \alpha(qm-n,m)$, ce qui suggère le résultat suivant :

**Proposition 8 :** *Supposons que* $\dim(N(q,m,n)) > 0$. *Alors on a un isomorphisme* $N(q,m,n) \simeq N(q,qm-n,m)$.

(cf [5], proposition 21).

L'isomorphisme de la proposition 8 est obtenu en associant au $L$-module de Kronecker $t : H_0 \otimes L \to H_1$ le $L^*$-module de Kronecker $\ker(t) \otimes L^* \to H_0$ déduit de $t$. Pour être plus précis on obtient donc des isomorphismes canoniques $N(L,\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^n) \simeq N(L^*,\mathbb{C}^{qm-n},\mathbb{C}^m)$.

*Périodicité des variétés de modules de hauteur nulle.* Ce qui précède suggère que les variétés de modules de hauteur nulle peuvent être rangées en suites infinies de variétés de modules isomorphes deux à deux. Soit $M(r,c_1,c_2)$ une variété de modules de hauteur nulle, et $\alpha$ l'élément de $\mathcal{E}$ qui lui est associé. On supposera que $\mu = \dfrac{c_1}{r} \leq \alpha$, l'autre cas étant analogue. D'après 3-1e choix d'une triade de la forme $(E,G,E_\alpha)$ permet de définir un isomorphisme canonique $M(r,c_1,c_2) \simeq N(3r_\alpha,m,n)$. À $N(3r_\alpha,n,qn-m)$, qui est isomorphe à $N(3r_\alpha,m,n)$, correspond une autre variété de modules de hauteur nulle $M(r',c_1',c_2')$ isomorphe à $M(r,c_1,c_2)$, avec

$$\alpha - x_\alpha \ < \ \frac{c_1'}{r'} \ < \ \mu \ \leq \ \alpha \ .$$

On note $M(r',c_1',c_2') = \wedge^+(M(r,c_1,c_2))$. En itérant ce procédé on obtient une suite infinie $(\wedge^{+p}(M(r,c_1,c_2)))$ de variétés de modules de hauteur nulle isomorphes à $M(r,c_1,c_2)$. S'il n'existe pas de variété de modules de hauteur nulle $M'$ telle que $M(r,c_1,c_2) = \wedge^+(M')$, on dit que $M(r,c_1,c_2)$ est *initiale*. En général on peut toujours écrire, et d'une façon unique, $M(r,c_1,c_2) = \wedge^{+p}(M')$, avec $p \geq 0$ et $M'$ initiale. Conformément à la définition d'une variété de modules de hauteur nulle initiale donnée dans le chap. 3, on peut montrer que $M(r,c_1,c_2)$ est initiale si et seulement si on a $\alpha - \mu < \dfrac{1}{3r_\alpha^2}$.

### 4.3 – Conditions d'existence des modules de Kronecker semi-stables

Soit $y_q$ la solution inférieure à 1 de l'équation $X^2 - qX + 1 = 0$ (donc $\dfrac{1}{y_q}$ est l'unité $\epsilon$ de $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ de 4.2). On dira que $N(q,m,n)$ et $N(q,m',n')$ sont *associés* s'il existe un entier $k$ tel que $T^k(m,n) = (m',n')$, $T$ désignant la transformation $(m,n) \mapsto (qm-n,m)$.

**Proposition 9 : 1** – *On a* $\dim(N(q,m,n)) > 0$ *si et seulement si* $y_q < \dfrac{m}{n} < \dfrac{1}{y_q}$. *Dans ce cas* $N_s(q,m,n)$ *est dense dans* $N(q,m,n)$ *et donc* $\dim(N(q,m,n)) = qmn - m^2 - n^2 + 1$.

**2** – *On a* $\dim(N(q,m,n)) = 0$ *si et seulement si* $N(q,m,n)$ *est associé à une variété du type* $N(q,p,0)$ *ou* $N(q,0,p)$. *Dans ce cas* $N(q,m,n)$ *est réduit à un point, et* $N_s(q,m,n)$ *est non vide si et seulement si* $p = 1$.

*Démonstration.* On a toujours $\dim(N(q,m,n)) \leq -\phi(m,n)+1$. Donc si $\dim(N(q,m,n)) > 0$, on a aussi $\phi(m,n) \leq 0$, donc $qmn - m^2 - n^2 \geq 0$, ce qui entraine $y_q < \dfrac{m}{n} < \dfrac{1}{y_q}$. Supposons réciproquement que $y_q < \dfrac{m}{n} < \dfrac{1}{y_q}$. La démonstration du lemme 24 de [5] montre que $\mathrm{codim}_W(W \backslash W^s) \geq 1$. Donc $W$ n'est pas vide. Ceci démontre 1-.

Démontrons 2-. Supposons que $\dim(N(q,m,n)) = 0$. Quitte à diviser $m$ et $n$ par un même entier, on peut supposer que $W^s \neq \emptyset$. Alors on a $\dim(N(q,m,n)) = 1 - \phi(m,n)$. donc $\phi(m,n) = 1$. La théorie des corps quadratiques (cf. [3]) montre que si $\Omega$ désigne l'ensemble des nombres de la forme $\phi(m,n)$, $m$ et $n$ étant des entiers tels que $\phi(m,n) = 1$, alors $\Omega$ est un groupe (pour la multiplication) et $\Omega/\{1,-1\}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Ce groupe est engendré par l'image de $\phi(0,1)$ (car c'est un nombre dont la valeur absolue du coefficient de $\sqrt{p}$ est minimale). On a $\phi(0,1) = -\dfrac{1}{\epsilon}$, et $\phi(m,n) \in \Omega$ on peut donc écrire $\phi(m,n) = \pm\epsilon^k$, pour un entier $k$. On en déduit 2- immédiatement. □

**Remarques : 1 –** On démontre dans [5] que si $y_q < \dfrac{m}{n} < \dfrac{1}{y_q}$, on a $\mathrm{codim}_{N(q,m,n)}(N(q,m,n) \backslash N_s(q,m,n)) \geq 2$, sauf si $N(q,m,n)$ est associé à $N(3,2,2)$. Si $N(q,m,n)$ est associé à $N(3,2,2)$, on a $N(q,m,n) \simeq \mathbb{P}^5$, espace des coniques planes, et $N(q,m,n) \backslash N_s(q,m,n)$ est l'espace des coniques dégénérées.

**2 –** Les variétés $N(q,m,n)$ de dimension 0 sont les suivantes : les $N(q, km_p, km_{p-1})$ et $N(q, km_{p-1}, km_p)$, $p, k \geq 1$, la suite $(m_p)_{p\geq 0}$ étant définie par les relations

$$m_0 = 0,\ m_1 = 1,\ m_{p+1} = qm_p - m_{p-1}\ .$$

**3 –** Dans l'étude des variétés de modules $N(q,m,n)$ de dimension positive, on peut toujours se ramener au cas où $1 \leq \dfrac{m}{n} < q-1$. On a aussi un isomorphisme évident $N(q,m,n) \simeq N(q,n,m)$, obtenu en associant à $t : H_0 \otimes L \to H_1$ le module de Kronecker "dual" $H_1^* \otimes L \to H_0^*$. On peut donc toujours se ramener au cas où $1 \leq \dfrac{m}{n} < \dfrac{q}{2}$.

## 4.1 – Modules de Kronecker universels

Les entiers $m$ et $n$ sont supposés premiers entre eux. On appelle *module de Kronecker universel* sur $N(q,m,n)$ un morphisme $\tau : E_0 \otimes L \to E_1$, $E_0$, $E_1$ étant des fibrés vectoriels sur $N(q,m,n)$ de rangs respectifs $m$, $n$, tel que pour tout point fermé $t$ de $N(q,m,n)$, le $L$-module de Kronecker $\tau_t : E_{0t} \otimes L \to E_{1t}$ soit isomorphe aux modules de Kronecker de $\pi^{-1}(t)$ ($\pi$ désignant comme précédemment le morphisme quotient $W^s \to N(q,m,n)$).

**Lemme 10 :** *Soient* $E_0 \otimes L \to E_1$, $\tau' : E'_0 \otimes L \to E'_1$ *des modules de Kronecker universels sur* $N(q,m,n)$. *Alors il existe un fibré en droites* $\Lambda$ *sur* $N(q,m,n)$ *et des isomorphismes*

$\gamma_i : E'_i \otimes \Lambda \to E_i$, $i = 0, 1$, *tels que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{tikzcd} E_0 \otimes L \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\gamma_0 \otimes I_L"] & E_1 \arrow[d, "\gamma_1"] \\ (E'_0 \otimes \Lambda) \otimes L \arrow[r, "\tau' \otimes I_\Lambda"] & E'_1 \otimes \Lambda. \end{tikzcd}$$

*Démonstration.* Soit $f : \mathcal{H}om(E'_0, E_0) \oplus \mathcal{H}om(E'_1, E_1) \to \mathcal{H}om(E'_0 \otimes L, E_1)$ le morphisme de fibrés sur $N(q, m, n)$ défini par : pour tous $t \in N(q, m, n)$, $\alpha_i \in \mathrm{Hom}(E'_{it}, E_{it})$, $i = 0, 1$, on a $f_t(\alpha_0, \alpha_1) = \tau_t \circ (\alpha_0 \otimes I_L) - \alpha_1 \circ \tau'_t$. Puisque les seuls endomorphismes d'un module de Kronecker stable sont les couples d'homothéties de même rapport, $\ker(f)$ est un fibré en droites $\Lambda$, $f$ est de rang constant, et pour $i = 0, 1$, la projection de $\Lambda$ sur $\mathcal{H}om(E'_0, E'_1)$ est un morphisme injectif de fibrés vectoriels. En remplaçant $E'_i$ par $E'_i \otimes \Lambda$, pour $i = 0, 1$, et $\tau'$ par $\tau' \otimes \Lambda$, on voit qu'on peut supposer que $\Lambda = \mathcal{O}_{N(q,m,n)}$. On a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{Hom}(E'_0, E_0) \oplus \mathrm{Hom}(E'_1, E_1) \xrightarrow{H^0(f)} \mathrm{Hom}(E'_0 \otimes L, E_1).$$

Il suffit de prendre $(\gamma_0, \gamma_1)$ dans $\ker(H^0(f)) \backslash \{0\}$. Ceci démontre le lemme 10. □

On pose $\Delta_0 = \mathcal{O}_{W^s} \otimes \wedge^m H_0$, $\Delta_1 = \mathcal{O}_{W^s} \otimes \wedge^n H_1$. Ce sont des $G$-fibrés en droites sur $W^s$. Soient $a_0$, $a_1$ des entiers tels que $am + bn = 1$, et $\Delta = \Delta_0^{a_0} \otimes \Delta_1^{a_1}$. L'action du sous-groupe $\mathbb{C}^*$ de $G$ sur chaque fibre de $\Delta$ est la multiplication. Les fibrés $\mathcal{O}_{W^s} \otimes H_0$ et $\mathcal{O}_{W^s} \otimes H_1$ sont aussi munis d'une structure évidente de $G$-fibré. On pose

$$F_i \ = \ (\mathcal{O}_{W^s} \otimes H_i) \otimes \Delta^{-1} \ , \quad i = 0, 1 \ ,$$

munis de l'action induite de $G$. Il est clair que $\mathbb{C}^*$ agit trivialement sur $F_0$ et $F_1$. On en déduit par la méthode de descente habituelle des fibrés vectoriels $E_0$, $E_1$ sur $N(q, m, n)$, tels qu'on ait des $G_0$-isomorphismes $\pi^*(E_i) \simeq F_i$ pour $i = 0, 1$.

Le $G_0$-morphisme canonique $F_0 \otimes L \to F_1$ déduit du module de Kronecker canonique sur $W^s$ par tensorisation par $\Delta^{-1}$ passe aussi au quotient et définit un module de Kronecker universel $E_0 \otimes L \to E_1$.

On déduit aisément du lemme 10 que tout module de Kronecker universel sur $N(q, m, n)$ s'obtient de la façon précédente.

**Remarque :** Il découle aisément de l'existence d'un module de Kronecker universel sur $N(q, m, n)$ que $\pi : W^s \to N(q, m, n)$ possède des sections locales et que par conséquent $W^s$ est un $G_0$-fibré principal (localement trivial) de base $N(q, m, n)$.

## 5. Cohomologie des variétés $N(q,m,n)$

### 5.1 – Filtration de Harder-Narasimhan d'un module de Kronecker

(cf. [14], exposé 4])

Soit $t : H_0 \otimes L \to H_1$ un module de Kronecker, avec $\dim(H_0) = m$, $\dim(H_1) = n$. Il existe un sous-module de Kronecker $t' : H'_0 \otimes L \to H'_1$ de $t$ tel que

(i) $\mu(t')$ soit maximal.

(ii) Si $t'' : H''_0 \otimes L \to H''_1$ est un autre sous-module de Kronecker de $t$ tel que $\mu(t'') = \mu(t')$, alors on a $\dim(H'_0) + \dim(H'_1) \geq \dim(H''_0) + \dim(H''_1)$.

On posera $\mu_{\max}(t) = \mu(t')$.

**Lemme 11 :** *Le sous-module de Kronecker $t'$ est unique.*

*Démonstration.* On peut supposer que $t \neq t'$. Montrons alors que $\mu_{\max}(t/t') < \mu_{\max}(t)$. Soit $t''/t' \subset t/t'$ un sous-module de Kronecker non nul, avec $\mu(t''/t') = \mu_{\max}(t/t')$. On a alors une suite exacte de modules de Kronecker $0 \to t' \to t'' \to t''/t' \to 0$, avec $\mu(t') = \mu_{\max}(t)$, $\mu(t'') < \mu_{\max}(t)$ car $t' \subsetneq t''$. Donc $\mu(t''/t') = \mu_{\max}(t/t') < \mu_{\max}(t)$. Soit maintenant $t_0$ un sous-module de Kronecker non nul de $t$ tel que $\mu(t_0) = \mu_{\max}(t)$. Alors $t_0$ est semi-stable, et puisque $\mu_{\max}(t/t') < \mu(t_0)$, on a $\mathrm{Hom}(t_0, t/t') = \{0\}$. Donc le composé $t_0 \to t \to t/t'$ est nul, et $t_0 \subset t'$. Ceci prouve l'unicité de $t'$. □

On appelle $t'$ le *sous-module de Kronecker maximal* de $t$. En analogie avec [14], exposé 4, on posera $G(t) = t'$. Dans toute la suite on suppose que $m > 0$ et $n > 0$. Par convention on pose $\mu(0) = +\infty$.

**Proposition 12 :** *Soit $t : H_0 \otimes L \to H_1$ un module de Kronecker. Alors*

**1 –** *Si $t''$ est un module de Kronecker semi-stable, on a*

$$\mathrm{Hom}(t'', t) \;=\; \{0\} \quad \text{si} \quad \mu(t'') > \mu_{\max}(t)\ .$$

$$\mathrm{Hom}(t'', t) \;=\; \mathrm{Hom}(t'', G(t)) \quad \text{si} \quad \mu(t'') = \mu_{\max}(t)\ .$$

**2 –** *Soit $t''$ sous-module de Kronecker semi-stable de $t$. Alors on a $t'' = G(t)$ si et seulement si $\mu_{\max}(t/t'') < \mu_{\max}(t)$.*

*Démonstration.* Soit $u : t'' \to t$ un morphisme non nul. On a alors, puisque $t''$ est semi-stable, $\mu(t'') \leq \mu(\mathrm{im}(u))$. D'autre part, puisque $\mathrm{im}(u) \subset t$, on a $\mu(\mathrm{im}(u)) \leq \mu_{\max}(t)$, donc $\mu(t'') \leq \mu_{\max}(t)$, ce qui démontre la première assertion de 1-.

Démontrons la seconde. Supposons que $\mu(t'') = \mu_{\max}(t)$, et soit $u : t'' \to t$ un morphisme. Alors le morphisme composé $t'' \to t \to t/G(t)$ est nul, d'après la première assertion de 1- et le fait que $\mu_{\max}(t/G(t)) < \mu(t'')$ (d'après la démonstration du lemme 11). Donc $\mathrm{im}(u) \subset G(t)$, ce qui prouve la seconde assertion de 1-.

Démontrons maintenant 2-. On a dejà vu dans la démonstration du lemme 11 que $\mu_{\max}(t/G(t)) < \mu_{\max}(t)$. Supposons que $t'' \subset t$ soit semi-stable, distinct de $t$ et tel que $\mu_{\max}(t/t'') < \mu_{\max}(t)$. Alors puisque G(t) est semi-stable, d'après -1 le morphisme composé

$G(t) \to t \to t/t''$ est nul, donc $G(t) \subset t''$. Puisque $t''$ est semi-stable, on a $\mu(G(t)) \leq \mu(t'') \leq \mu_{\max}(t) = \mu(G(t))$, donc $\mu(G(t)) = \mu(t'')$, et par définition de $G(t)$ on a finalement $t'' = G(t)$. Ceci prouve 2- et achève la démonstration de la proposition 12. □

**Definition :** On appelle *filtration de Harder-Narasimhan* du module de Kronecker $t$ une filtration

$$0 = t_0 \subset t_1 \subset \cdots \subset t_p = t$$

telle que pour $1 \leq i \leq p$, $t_i/t_{i-1}$ soit semi-stable et que $\mu(t_i/t_{i-1}) < \mu(t_j/t_{j-1})$ si $1 \leq j < i \leq p$.

(On a une définition analogue dans la théorie des fibrés vectoriels semi-stables sur une courbe algébrique, cf. [18]).

**Proposition 13 :** *Tout module de Kronecker $t$ admet une filtration de Harder-Narasimhan unique.*

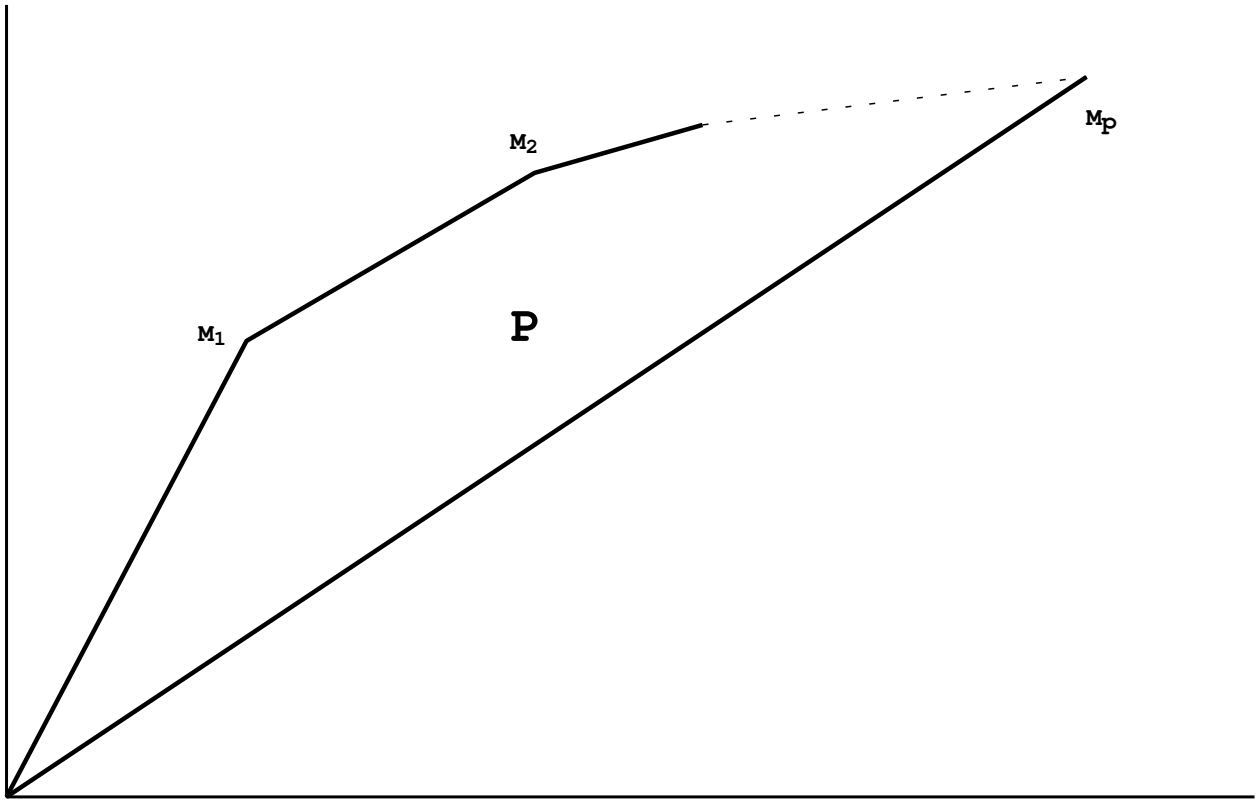
Cette filtration sera notée $D(t)$.

*Démonstration. Existence.* On prend la filtration $0 = t_0 \subset t_1 \subset \cdots \subset t_p = t$ où pour $1 \leq i \leq p$, $t_i$ est défini par récurrence sur $i$ par $t_i/t_{i-1} = G(t/t_{i-1})$.

*Unicité.* Soit $0 = t_0 \subset t_1 \subset \cdots \subset t_p = t$ une filtration de Harder-Narasimhan de $t$. A1ors $0 \subset t_2/t_1 \subset \cdots \subset t_p/t_1$ est une filtration de Harder-Narasimhan de $t/t_1$. En raisonnant par récurrence, il suffit donc de montrer que $t_1 = G(t)$. L'hypothèse de récurrence entraine que $t_2/t_1 = G(t/t_1)$, et donc $\mu_{\max}(t/t_1) = \mu(t_2/t_1) < \mu(t_1) \leq \mu_{\max}(t)$, et d'après la proposition 12, 2-, on a $t_1 = G(t)$. Ceci démontre la proposition 13. □

## 2 – Polygone de Harder-Narasimhan d'un module de Kronecker

Soient $t : H_0 \otimes L \to H_1$ un module de Kronecker, $0 = t_0 \subset t_1 \subset \cdots \subset t_p = t$ la filtration de Harder-Narasimhan de $t$, avec $t_i : H_{0i} \otimes L \to H_{1i}$. Posons $h_{0i} = \dim(H_{0i})$, $h_{1i} = \dim(H_{1i})$ pour $1 \leq i \leq p$. Considérons le polygone du plan $\mathbb{R}^2$ dont les sommets consécutifs sont $M_0 = (0,0)$, $M_1 = (t_{11}, t_{01}), \ldots, M_p = (h_{1p}, h_{0p})$, $(0,0)$.




Posons $m = \dim(H_0)$, $n = \dim(H_1)$. Alors le polygone $P$ précédent possède les propriétés suivantes :

(i) Les sommets de $P$ sont a coordonnées entières.

(ii) $P$ est contenu dans la triangle de sommets $(0,0), (0,m), (n,m)$, et un de ses cotés est le segment d'extremités $(0,0), (n,m)$.

(iii) $P$ est strictement convexe : il est convexe et aucun de ses sommets n'est situé sur le segment joignant deux autres sommets.

(iv) Pour tout coté de $P$ de pente $\alpha$, on a $y_q < \alpha < \dfrac{1}{y_q}$ (cf. 4-), ou bien $\alpha$ est de la forme $\dfrac{m_k}{m_{k-1}}$, ou $\dfrac{m_{k-1}}{m_k}$, avec $k \geq 1$ (la suite $(m_i)$ est définie dans la remarque 2 de 4,3-).

On dit que $P$ est le *polygone de Harder-Narasimhan* de $t$, et on le note $P(t)$. On note aussi $(n,m) = M(t)$.

**Proposition 14 :** *Soient $t$ un module de Kronecker, $t'$ un sous-module de Kronecker de $t$ tel que $\mu(t') \geq \mu(t)$. Alors $M(t')$ est situé dans la polygone $P(t)$. Si de plus $M(t')$ est situé sur le segment $M_{i-1}M_i$, on a $t_{i-1} \subset t' \subset t_i$.*

*Démonstration.* Démonstration par récurrence sur $p$ (le nombre de termes non nuls dans la filtration de Harder-Narasimhan de $t$). Si $p = 1$, $t$ est semi-stable, donc $\mu(t') = \mu(t)$, et la proposition 14 est évidente. Supposons donc $p > 1$ et que la proposition 14 soit vraie pour $p - 1$. Si $\mu(t') = \mu_{\max}(t)$, on a d'après la proposition 13, 2-, $t' \subset t_1$, d'où le résultat ($M(t')$ est sur

le segment $M_0M_1$). Supposons donc que $\mu(t') < \mu_{\max}(t)$. Soit $u : t' \to t/t_1$ la restriction de la projection. On a dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} M(t') &= M(\ker(u)) + M(\mathrm{im}(u)) \\ &= (M(\ker(u)) - M(t_1)) + (M(t_1) + M(\mathrm{im}(u))) \ . \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{im}(u) \subset t/t_1$, $M(\mathrm{im}(u)) + M(t_1)$ est situé d'après l'hypothèse de récurrence au dessous de la ligne polygonale $M_1M_2 \dots M_p$. Le vecteur $M(\ker(u)) - M(t_1)$ est de pente négative et de valeur absolue supérieure à $\mu_{\max}(t)$ (car $t_1 = G(t)$ est semi-stable). Donc, $P(t)$ étant convexe, $M(t)$ est situé sous $M_0M_1 \dots M_p$. Ceci démontre la première partie de la proposition 14.

Supposons que $M(t')$ soit situé sur $M_{i-1}M_i$. Dans ce cas on doit avoir $M(\ker(u)) - M(t_1) = 0$, donc $t_1 \subset t'$, et $t_{i-1}/t_1 \subset t'/t_1 \subset t_i/t_1$ d'après l'hypothèse de récurrence. Donc $t_{i-1} \subset t' \subset t_i$, ce qui achève la démonstration de la proposition 14. □

### 5.3 – Stratification de $W$

Rappelons que $W = L(H_0 \otimes L, H_1)$. Soit $\Pi = \Pi(m,n)$ l'ensemble fini des polygones fermés du plan vérifiant les propriétés (i) à (iv) de 5.2. On munit $\Pi$ de la relation d'ordre définie par l'inclusion : $P \leq Q \Leftrightarrow P \subset Q$. Pour tout $P \in \Pi$ posons $I_P = \{Q \in \Pi; Q \geq P\}$. Si $J \subset \Pi$ est non vide, soit $W_J = \{t \in W; P(t) \in J\}$. Si $J$ est réduit à un polygone $P$, on notera $W_J = W_P$. En général, on note $\overline{J}$ le sous-ensemble de $\Pi$ constitué des polygones qui sont supérieurs ou égaux à au moins un élément de $J$. On dit que $J$ est *fermé* (resp. *ouvert*) si pour tous $P \in J$ et $Q \in \Pi$ tels que $Q \geq P$ (resp. $P \geq Q$), $Q$ est aussi dans $J$. Ainsi, $J$ est fermé si et seulement si $\overline{J} = J$.

**Proposition 15 :** *Soit $J$ une partie non vide de $\Pi$. Alors, si $W^{ss}$ est non vide on a*

**1** – *$W_J$ est une sous-variété localement fermée de $W$.*

**2** – *On a $\overline{W_J} \subset W_{\overline{J}}$.*

**3** – *Si $J$ est ouverte, $W_J$ est un ouvert de $W$.*

*Démonstration.* Soit $P \in \Pi$. On note $D_P$ la variété des drapeaux de polygone associé $P$ : c'est la variété des couples $((H_{1i})_{0\leq i\leq p}, (H_{0i})_{0\leq i\leq p})$, $\{0\} = H_{00} \subset H_{01} \subset \cdots H_{0p} = H_0$ (resp. $\{0\} = H_{10} \subset H_{11} \subset \cdots H_{1p} = H_1$) étant une filtration de $H_0$ (resp. $H_1$) par des sous-espaces vectoriels, les sommets distincts de $P$ étant les points $(\dim(H_{1i}), \dim(H_{0i}))$, $0 \leq i \leq p$. On note $W'_P$ l'ensemble des modules de Kronecker $t$ de $W$ admettant une filtration de polygone associé $P$, c'est à dire tels qu'il existe $((H_{1i})_{0\leq i\leq p}, (H_{0i})_{0\leq i\leq p}) \in D_P$ tel que $t(H_{0i} \otimes L) \subset H_{1i}$ pour $1 \leq i \leq p$.

L'ensemble $Y$ des couples $(t, \gamma)$ de $W \times D_P$ tels que $t$ préserve $\gamma$ (c'est à dire que si $\gamma = ((H_{1i})_{0\leq i\leq p}, (H_{0i})_{0\leq i\leq p})$, on ait $t(H_{0i} \otimes L) \subset H_{1i}$ pour $1 \leq i \leq p$) est une sous-variété fermée de $W \times D_P$. La projection $\pi : W \times D_P \to W$ étant propre, $W'_P = \pi(Y)$ est une sous-variété fermée de $W$. En fait, $W_P$ est un ouvert de $W'_P$ : pour le voir on remarque que $W'_P \backslash W_P \subset \bigcup_{Q>P} W'_Q$ (car d'après la proposition 14, si $t \in W'_P$, on a $P \leq P(t)$). Donc

$$W'_P \backslash W_P \ = \ W'_P \cap \left( \bigcup_{Q>P} W'_Q \right) \ ,$$

qui fermé dans $W'_P$.

Démontrons maintenant 1-. On a $W_J = \bigcup_{P\in J} W_P$, donc $J$ étant fini et chaque $W_P$ étant localement fermé, $W_J$ est aussi localement fermé.

Pour prouver 2-, on peut se limiter au cas où $J$ est réduit au point P. On a vu que

$$\overline{W_P} \subset W'_P \subset \bigcup_{Q\geq P} W'_Q = \bigcup_{Q\geq P} W_Q = W_J ,$$

ce qui démontre 2-.

Prouvons 3- : on note $P^{ss}$ le polygone réduit au segment d'extrémités $(0,0)$, $(n,m)$. Alors, si $J$ est ouverte, on a $P^{ss} \in J$, donc $W_{P^{ss}} \subset W_J$. Mais $W_{P^{ss}} = W^{ss}$, qui est ouvert, donc $W_J$ est ouvert. Ceci démontre 3- et achève la démonstration de la proposition 15. □

Il découle de la proposition 15 que si $k$ désigne le nombre d'éléments de $\Pi$, il existe une bijection

$$\begin{aligned} \{1,\dots,k\} &\longrightarrow \Pi \\ p &\longmapsto Q(p) \end{aligned}$$

telle que pour tout entier $p$ tel que $1 \leq p \leq k$, $W_{Q(p)}$ soit fermé dans $\bigcup_{q\leq p} W_{Q(q)}$. Le polygone $Q(k)$ est le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,m)$, $(n,m)$, et $Q(1) = P^{ss}$.

### 5.4 – Étude des strates

Soit $P \in \Pi$. On se propose d'étudier la variété $W_P$. Soit $Y$ une variété réduite. On appelle *famille de modules de Kronecker* paramétrée par $Y$ un morphisme de fibrés vectoriels sur $Y$

$$t : \mathbb{H}_0 \otimes L \longrightarrow \mathbb{H}_1$$

Dans ce qui suit on suppose que $\mathrm{rg}(\mathbb{H}_0) = m$ et $\mathrm{rg}(\mathbb{H}_1) = n$.

**Proposition 16 :** *Supposons que pour tout point fermé $y$ de $Y$, on ait $P(t_y) = P$. Alors il existe des filtrations de $\mathbb{H}_0$ et $\mathbb{H}_1$ :*

$$\mathbb{H}_{00} = 0 \subset \mathbb{H}_{01} \subset \cdots \mathbb{H}_{0p} = \mathbb{H}_0, \quad \mathbb{H}_{10} = 0 \subset \mathbb{H}_{11} \subset \cdots \mathbb{H}_{1p} = \mathbb{H}_1$$

*par des sous-fibrés vectoriels, telles que pour tout point fermé $y$ de $Y$, $((\mathbb{H}_{0i})_{0\leq i\leq p}, (\mathbb{H}_{1i})_{0\leq i\leq p})$ soit le couple de filtrations associé à la filtration de Harder-Narasimhan de $t_y$.*

En raisonnant par récurrence sur $p$ on voit qu'on est ramené à prouver l'existence des sous-fibrés $\mathbb{H}_{01}$ et $\mathbb{H}_{11}$ de $\mathbb{H}_0$ et $\mathbb{H}_1$ respectivement, tels que pour tout point fermé y de Y, on ait $t_y(\mathbb{H}_{01,y} \otimes L) \subset \mathbb{H}_{11,y}$, et que la restriction de $t_y : \mathbb{H}_{01,y} \otimes L \to \mathbb{H}_{11,y}$ soit le sous-module de Kronecker maximal de $t_y$. En considérant des trivialisations locales de $\mathbb{H}_0$ et $\mathbb{H}_1$ on se ramène au cas où $Y$ est un ouvert de $W_P$, $t$ étant la restriction du module de Kronecker canonique. On a alors $\mathbb{H}_i = \mathcal{O}_Y \otimes H_i$ pour $i = 0, 1$.

Soient $m'$, $n'$ les rangs que devront avoir $\mathbb{H}_{01}$ et $\mathbb{H}_{11}$ respectivement (c'est à dire que les sommets de $P$ sont dans l'ordre $(0,0)$, $(n',m'),\dots,(n,m)$). Soit $\mathrm{Gr}_0 = \mathrm{Gr}^{m'}(H_0)$ (resp. $\mathrm{Gr}_1 = \mathrm{Gr}^{n'}(H_1)$ la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de $H_0$ (resp. $H_1$) de dimension $m'$ (resp. $n'$), et soit $Z$ la sous-variété de $\Gamma = \mathrm{Gr}_0 \times \mathrm{Gr}_1 \times W$ constituée des $(H_{01}, H_{11}, t)$ tels que $t(H_{01} \otimes L) \subset H_{11}$.

Soient $K_0$ le sous-fibré universel de $\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0} \times H_0$, $Q_1$ le fibré quotient universel de $\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_1} \otimes H_1$, et $p_0$, $p_1$ les projections $\Gamma \to \mathrm{Gr}_0$, $\Gamma \to \mathrm{Gr}_1$. On a un morphisme canonique

$$\Phi : p_0^*(K_0) \longrightarrow p_1^*(Q_1) \ .$$

En tout $\gamma = (H_{01}, H_{11}, t) \in \Gamma$, $\Phi_\gamma$ est la composée

$$H_{01} \otimes L \hookrightarrow H_0 \otimes L \xrightarrow{t} H_1 \twoheadrightarrow H_1/H_{11}.$$

Alors $Z$ n'est autre que l'ensemble des $\gamma \in \Gamma$ tels que $\Phi_\gamma = 0$. D'après [10],[12] on a en tout point $\gamma = (H_{01}, H_{11}, t)$ de $Z$ un morphisme canonique

$$d\Phi_\gamma : T\Gamma_\gamma \longrightarrow L(H_{01} \otimes L, H_1/H_{11})$$

($T\Gamma_\gamma$ désignant l'espace tangent de $\Gamma$ en $\gamma$). On a

$$T\Gamma_\gamma \ = \ L(H_{01}, H_0/H_{01}) \times L(H_{11}, H_1/H_{11}) \times W \ .$$

et pour tout $\alpha = (\phi, \psi, t_0) \in T\Gamma_\gamma$, on a

$$d\Phi_\gamma(\alpha) \ = \ \bar{t} \circ (\phi \otimes I_L) + \eta \circ t_{0|H_{01}\otimes L} + \psi \circ t' \ ,$$

où $\bar{t} : (H_0/H_{01}) \otimes L \to H_1/H_{11}$ est induit par $t$, $\eta$ est la projection $H_1 \to H_1/H_{11}$ et $t' : H_{01} \otimes L \to H_{11}$ est le sous-module de Kronecker de $t$.

La sous-variété $Z$ de $\Gamma$ est lisse : pour le voir il suffit pour cela de vérifier que pour tout $\gamma \in Z$, $d\phi_\gamma$ est surjective. C'est déjà vrai de sa restriction à $W$.

Soit $W_0$ le sous-ensemble de $W$ des modules de Kronecker $t$ tels que le sous-module de Kronecker maximal de $t$, $G(t) : H_0'' \otimes L \to H_1''$, soit tel que $\dfrac{\dim(H_0'')}{\dim(H_1'')} \leq \dfrac{m'}{n'}$, et qu'en cas d'égalité on ait $\dim(H_0'') \leq m'$. C'est un ouvert de $W$ d'après la proposition 15, car $W_0$ est la réunion des $W_Q$, $Q$ parcourant un ouvert de $\Pi$. On note $\Gamma_0 = \mathrm{Gr}_0 \times \mathrm{Gr}_1 \times W_0$, et $Z_0 = Z \cap \Gamma_0$. Alors, pour tout $(H_{01}, H_{11}, t) \in Z_0$, la restriction $H_{01} \otimes L \to H_{11}$ de $t$ est le sous-module de Kronecker maximal de $t$.

Soit $p_W$ la projection $\Gamma_0 \to W_0$. C'est un morphisme propre, donc $p_W(Z_0)$ est une sous-variété fermée $Z_0'$ de $W_0$. En fait, la restriction de $p_W$, $\Theta : Z_0 \to Z_0'$ est un morphisme bijectif, par unicité du sous-module de Kronecker maximal d'un module de Kronecker.

Soit $K_i$ le sous-fibré universel de $\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_i} \otimes H_i$. Pour démontrer la proposition 16, il faut prouver que $p_i^*(K_{i|Z_0})$ peut être "descendu" à $Z_0'$. Pour cela, il suffit de montrer que $\Theta$ est un isomorphisme. On sait déjà que c'est un morphisme bijectif. Il reste à prouver que pour tout $\gamma = (H_{01}, H_{11}, t) \in Z_0$, la restriction de l'application tangente $Tp_W : T\Gamma_{0\gamma} \to TW_{0t}$ à $TZ_{0\gamma}$ est injective. Mais $TZ_{0\gamma}$ n'est autre que le noyau de l'application $d\Phi_\gamma$ explicitée plus haut, et $Tp_W$ est la projection $T\,\mathrm{Gr}_{0,H_{01}} \times T\,\mathrm{Gr}_{1,H_{11}} \times W \to W$. Il reste en définitive à démontrer le

**Lemme 17 :** *Soient $t : H_0 \otimes L \to H_1$ un module de Kronecker, $t' : H_0' \otimes L \to H_1'$ le sous-module de Kronecker maximal de $t$, $\bar{t} = t/t' : (H_0/H_0') \otimes L \to H_1/H_1'$ et $\phi : H_0' \to H_0/H_0'$, $\psi : H_1' \to H_1/H_1'$ des applications linéaires. Alors, si $\psi \circ t' = \bar{t} \circ (\phi \otimes I_L)$, on a $\phi = 0$ et $\psi = 0$.*

*Démonstration.* Cela découle immédiatement de la proposition 12, 1-. □

**Corollaire 18 :** *Pour tout $P \in \Pi$, $W_P$ est lisse.*

*Démonstration.* Comme dans 5.4, $D_P$ désigne l'ensemble des couples $(d_0, d_1)$, où $d_i = (H_{ij})_{1\leq j\leq p}$ étant un drapeau de $H_i$ pour $i = 0, 1$, associé à $P$, c'est à dire que les sommets de $P$ sont les couples $(\dim(H_{1j}), \dim(H_{0j}))$, $0 \leq j \leq p$. Soit $\phi : W_P \to D_P$ l'application associant à un module de Kronecker le couple de drapeaux défini par sa filtration de Harder-Narasimhan. D'après la proposition 16, $\phi$ est un morphisme de variétés algébriques. On va montrer que $\phi$ est localement trivial et que ses fibres sont lisses. Puisque $D_P$ est lisse, ceci entraine la lissité de $W_P$.

Soit $\alpha \in D_P$. Le groupe $G_0 = (\mathrm{GL}(H_0) \times \mathrm{GL}(H_1))/\mathbb{C}^*$ agit de manière évidente sur $D_P$ et $\phi$ est un $G_0$-morphisme. Soit $G_1'$ le stabilisateur de $\alpha$. Le morphisme

$$\begin{aligned} f : G_0 &\longrightarrow D_P \\ g &\longmapsto g\alpha \end{aligned}$$

admet des sections locales, $D_P$ s'identifiant à $G_0/G_1'$. Soit $U$ un ouvert de $D_P$ contenant $\alpha$ tel qu'on ait une section $s : U \to G_0$ de $f$. Alors le morphisme

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(U) &\longrightarrow \phi^{-1}(\alpha) \times U \\ t &\longmapsto \big(s(\phi(t))^{-1}t, \phi(t)\big) \end{aligned}$$

est un isomorphisme, l'isomorphisme réciproque étant

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(\alpha) \times U &\longrightarrow \phi^{-1}(U) \\ (t, \alpha') &\longmapsto s(\alpha').t \ . \end{aligned}$$

Ceci montre que $\phi$ est localement trivial.

Montrons maintenant que $\phi^{-1}(\alpha)$ est lisse : ceci est immédiat, car si $\alpha = ((H_{0j}), (H_{1j}))$, on a un isomorphisme

$$\phi^{-1}(\alpha) \ \simeq \mathbb{C}^a \times \prod_{1\leq j\leq p} L(H_{0j} \otimes L, H_{1j})^{ss} \ ,$$

$a$ étant un entier convenable. Pour le voir, on représente les éléments de $\phi^{-1}(\alpha)$ sous la forme de matrices d'éléments de $L^*$, relativement à des bases de $H_0$ et $H_1$ compatibles avec les filtrations $(H_{0j})$ et $(H_{1j})$ : on obtient des matrices triangulaires de matrices. La condition pour qu'une matrice de ce type soit dans $\phi^{-1}(\alpha)$ est que ses termes diagonaux soient des modules de Kronecker semi-stables.

Ceci achève la démonstration du corollaire 18. □

On pose $G = \mathrm{GL}(H_0) \times \mathrm{GL}(H_1)$, groupe dont l'action sur $W$ et $D_P$ provient de celle de $G_0 = G/\mathbb{C}^*$. Soit $\alpha \in D_P$, $G_1$ le sous-groupe de $G$ stabilisateur de $\alpha$. Posons $W_P^0 = \phi^{-1}(\alpha)$.

**Proposition 19 :** *On a un homéomorphisme* $W_P \simeq W_P^0 \times_{G_1} G$.

*Démonstration.* On désigne par $W_P^0 \times_{G_1} G$ l'espace topologique quotient $(W_P^0 \times G)/G_1$, l'action de $G_1$ sur $W_P^0 \times G$ étant définie par

$$\begin{aligned} G_1 \times (W_P^0 \times G) &\longrightarrow W_P^0 \times G \\ \big(g_1, (t, g)\big) &\longmapsto (g_1 t, g g_1^{-1}) \ . \end{aligned}$$

On a un morphisme évident $\beta : W_P^0 \times_{G_1} G \to W_P$ qui à la classe de $(t, g)$ modulo $G_1$ associe $gt$. Comme dans le corollaire 18, on définit au voisinage de chaque $\alpha' \in D_P$ une section locale $s : U \to G$ du morphisme

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & D_P \\ g & \longmapsto & g\alpha' \end{array} .$$

On en déduit une trivialisation locale de $\phi : \phi^{-1}(U) \simeq \phi^{-1}(\alpha') \times U$. Soit $g \in G$ tel que $g\alpha' = \alpha$. On peut alors définir le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \phi^{-1}(U) \simeq \phi^{-1}(\alpha') \times U & \longrightarrow & W_P^0 \times_{G_1} G \\ (t, u) & \longmapsto & (gt, s(u)g^{-1}) \bmod G_1 \end{array} .$$

Ces morphismes se recollent et définissent un inverse de $\beta$. qui est donc un isomorphisme. Ceci démontre la proposition 19. □

Avec les notations de 2.1, on a donc des équivalences d'homotopie

$$(W_P)_G \;=\; W_P \times_G EG \;\simeq\; (W_P^0 \times_{G_1} G) \times_G EG \;=\; W_P \times_{G_1} EG \;,$$

et comme $EG = EG_1$ (comme $G_1$-fibrés principaux), on obtient $(W_P)_G \simeq (W_P^0)_{G_1}$. Par conséquent on a $H_G^*(W_P, \mathbb{Q}) \simeq H_{G_1}^*(W_P^0, \mathbb{Q})$.

Posons $\alpha = ((H_{0j})_{O \leq j \leq p}, (H_{1j})_{0 \leq j \leq p})$. Pour $1 \leq j \leq p$, $i = 0, 1$, soit $K_{ij}$ un sous-espace vectoriel de $H_i$ tel que $H_{ij} = H_{i,j-1} \oplus K_{ij}$. Soit $G_2$ le sous-groupe de $G_1$ des éléments $(g_0, g_1)$ tels que $g_i$ laisse invariants tous les $K_{ij}$, pour $i = 0, 1$. Alors $G_1/G_2$ est contractile, donc

$$H_{G_1}^*(W_P^0, \mathbb{Q}) \;\simeq\; H_{G_2}^*(W_P^0, \mathbb{Q}) \;.$$

Soit $X_P$ la sous-variété $G_2$-invariante de $W_P^0$ des modules de Kronecker $t$ tels que $t(K_{0j} \otimes L) \subset K_{1j}$ pour $1 \leq j \leq p$. Si on représente les modules de Kronecker de $W$ comme des matrices d'éléments de $L^*$, relativement à des bases de $H_0$ et $H_1$ compatibles avec les décompositions en somme directe $H_i = K_{i1} \oplus \cdots \oplus K_{ip}$, $i = 0, 1$, on voit que les éléments de $W_P^0$ sont des matrices triangulaires de matrices, et ceux de $X_P$ des matrices diagonales de matrices. Soit $\Phi : W_P^0 \to X_P$ le morphisme associant à $t \in W_P^0$ le module de Kronecker représenté par une matrice diagonale de matrices dont les termes diagonaux sont ceux de $t$. Il est clair que $\Phi$ est un fibré vectoriel sur $X_P$. Il en est donc de même du morphisme induit par $\Phi : (W_P^0)_{G_2} \to (X_P)_{G_2}$. On a par conséquent un isomorphisme $H_{G_2}^*(W_P^0, \mathbb{Q}) \simeq H_{G_2}^*(X_P, \mathbb{Q})$.

On notera $W^{ss} = W^{ss}(H_0, H_1)$, pour spécifier les espaces vectoriels $H_0, H_1$. Posons $W_j^{ss} = W^{ss}(K_{0j}, K_{1j})$, $G(j) = \mathrm{GL}(K_{0j}) \times \mathrm{GL}(K_{1j})$ pour $1 \leq j \leq p$. On a alors des isomorphismes

$$G_2 \;\simeq\; \prod_{1 \leq j \leq p} G(j) \;, \quad X_P \;\simeq\; \prod_{1 \leq j \leq p} W_j^{ss} \;,$$

l'action de $G_2$ sur $X_P$ étant l'action produit. On en déduit une équivalence d'homotopie

$$(X_P)_{G_2} \;\simeq\; \prod_{1 \leq j \leq p} (W_j^{ss})_{G(j)} \;,$$

donc d'après la formule de Künneth, on a

$$H_{G_2}^*(X_P, \mathbb{Q}) \;\simeq\; \bigotimes_{1 \leq j \leq p} H_{G(j)}^*(W_j^{ss}, \mathbb{Q}) \;.$$

### 5.5 – Séries de Poincaré

Avec les notations de 4-, on a, pour $1 \leq i \leq k$, une *suite exacte de Gysin*

$$\cdots \longrightarrow H_G^{p-2d_i}(W_{Q(i)}, \mathbb{Q}) \longrightarrow H_G^p\left(\bigcup_{j\leq i} W_{Q(j)}, \mathbb{Q}\right) \longrightarrow H_G^p\left(\bigcup_{j<i} W_{Q(j)}, \mathbb{Q}\right) \cdots$$

(avec $d_i = \operatorname{codim}_W(W_{Q(i)})$). On verra dans 5.6 que $W_{Q(i)}$ est une sous-variété parfaite de $\bigcup_{j\leq i} W_{Q(j)}$ (cf. 2.1). On en déduit pour les séries de Poincaré, éléments de $\mathbb{C}[[T]]$,

$$P_G\left(\bigcup_{j\leq i} W_{Q(j)}\right) \;=\; P_G\left(\bigcup_{j<i} W_{Q(j)}\right) + T^{2d_i} P_G(W_{Q(i)}) \ ,$$

d'où

$$P_G(W) \;=\; \sum_{1\leq i\leq k} T^{2d_i} P_G(W_{Q(i)}) \ .$$

Puisque $W$ est contractile, $W_G$ est homotopiquement équivalent à $BG$. On obtient finalement, puisque $W_{Q(1)} = W^{ss}$,

$$P_G(W^{ss}) \;=\; P(BG) - \sum_{2\leq i\leq k} T^{2d_i} P_G(W_{Q(i)}) \ . \tag{1}$$

Posons $W^{ss} = W^{ss}(m,n)$, pour spécifier les dimensions de $H_0, H_1$. Soit $i$ un entier tel que $2 \leq i \leq k$. Supposons que les sommets de $Q(i)$ soient dans l'ordre $(0,0) = (h_{10}, h_{00})$, $(h_{11}, h_{01})$, $\ldots$, $(h_{1p}, h_{0p}) = (n,m)$. Posons $h_j = h_{0j} - h_{0,j-1}$, $k_j = h_{1j} - h_{1,j-1}$, et soit $G(j)$ le groupe analogue à $G$ opérant sur $W^{ss}(h_j, k_j)$, pour $1 \leq j \leq p$. On a d'après 5.4,

$$P_G(W_{Q(i)}) \;=\; \prod_{1\leq j\leq p} P_{G(j)}(W^{ss}(h_j, k_j)) \ , \tag{2}$$

et $d_i = q\sum_{r<j} h_r k_j - \sum_{r<j}(h_r h_j + k_r k_j)$, avec $q = \dim(L)$.

*Principe du calcul de $P_G(W^{ss})$.* Les formules (1) et (2) ramènent le calcul de $P_G(W^{ss}(m,n))$ à celui des polynômes analogues correspondant à des entiers $m'$, $n'$ tels que $m' \leq m$, $n' \leq n$, $m' + n' < m + n$. La récurrence débute avec les couples $(m,n)$ pour lesquels le nombre $k$ de polygones de Harder-Narasimhan possibles est égal à 1, On a alors nécessairement $m = 0$ ou $n = 0$ et dans ce cas, $W^{ss}(m,n)$ est réduit à un point, d'où on déduit $P_G(W^{ss}(m,n)) = P(BG) = P(B\,\mathrm{GL}(r))$, où $r = \sup(m,n)$.

### 5.6 – Absence de torsion dans $H^*(W^{ss})$

**Proposition 20 :** *Pour tout entier $j$ tel que $2 \leq j \leq k$, $W_{Q(j)}$ est une sous-variété parfaite de $\bigcup_{i\leq j} W_{Q(i)}$.*

*Démonstration.* Il faut montrer que la classe d'Euler équivariante $e_G(N)$ n'est pas un diviseur de zéro dans $H_G^*(W_{Q(j)}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, pour tout nombre premier $p$ ($N$ désignant le fibré normal de $W_{Q(j)}$). Avec les notations et résultats de 5.4, cela revient à montrer que $e_{G_2}(N_{|X_{Q(j)}})$ n'est pas un diviseur de zéro dans $H_{G_2}^*(X_{Q(j)}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Pour cela, puisque $H^*(G, \mathbb{Z})$ est sans torsion, il

suffit d'après 2.1 de trouver un tore complexe $\mathbb{T} \subset G_2$ agissant trivialement sur $X_{Q(j)}$, et tel que pour tout $t \in X_{Q(j)}$, la représentation de $\mathbb{T}$ dans $N_t$ déduite de l'action de $\mathbb{T}$ soit primitive.

Il suffit pour cela de considérer à la place de $N$ le fibré normal $N'$ de $X_{Q(j)}$, car $N_{|X_{Q(j)}}$ est un quotient de $N'$. On a, en tout point $t$ de $X_{Q(j)}$,

$$N'_t \;=\; \bigoplus_{r \neq s} L(K_{0r} \otimes L, K_{1s}) \ ,$$

et

$$G_2 \;=\; \prod_{1 \leq r \leq p} \big( \mathrm{GL}(K_{0r}) \times \mathrm{GL}(K_{1r}) \big) \ .$$

Le tore $\mathbb{T}$ en question est le produit des sous-groupes des homothéties des facteurs de $G_2$. Ceci démontre la proposition 20. □

En partant du fait que la cohomologie entière des espaces du type $B\,\mathrm{GL}(r)$ est sans torsion et de type fini en chaque degré, on déduit de 2.1 et de la proposition 20 que $H^*_G(W^{ss}, \mathbb{Z})$ est libre et de type fini en chaque degré.

### 5.7 – Cohomologie entière de $N(q, m, n)$ lorsque $m$ et $n$ sont premiers entre eux

On a, si $m$ et $n$ sont premiers entre eux, $W^{ss} = W^s$, donc $G_0 = G/\mathbb{C}^*$ agit librement sur $W^{ss}$ et par conséquent

$$H^*_{G_0}(W^{ss}, \mathbb{Z}) \;\simeq\; H^*(N(q, m, n), \mathbb{Z}) \ .$$

On vient de trouver le moyen de calculer $H^*_G(W^{ss}, \mathbb{Z})$. Il reste à relier $H^*_G(W^{ss}, \mathbb{Z})$ et $H^*_{G_0}(W^{ss}, \mathbb{Z})$. L'énoncé précis est la

**Proposition 21 :** *On a* $P(N(q, m, n)) = (1 - T^2)P_G(W^{ss})$, *et* $H^*(N(q, m, n), \mathbb{Z})$ *est libre et de type fini en chaque degré.*

*Démonstration.* Pour cela, il suffit de montrer que la fibration $W^{ss}_G \to W^{ss}_{G_0}$ de fibre $B\mathbb{C}^*$ est triviale pour la cohomologie entière (cf. 2.1). Il suffit de trouver un $G$-fibré topologique complexe $L$ de rang 1 sur $W^{ss}$ tel que l'action de $\mathbb{C}^*$ sur chaque fibre de $L$ soit simplement la multiplication. Si $a$, $b$ sont des entiers tels que $am + bn = 1$, on prend

$$L \;=\; (\wedge^m H_0)^{\otimes a} \otimes (\wedge^n H_1)^{\otimes b} \ .$$

Ceci démontre la proposition 21. □

Le théorème 1 est donc démontré.

### 5.8 – Générateurs

**Proposition 22 :** *Soit* $\tau : \mathbb{H}_0 \otimes L \to \mathbb{H}_1$ *un* $L$*-module de Kronecker universel sur* $N(q, m, n)$. *Alors les classes de Chern de* $\mathbb{H}_0$ *et* $\mathbb{H}_1$ *engendrent l'algèbre* $H^*(N(q, m, n), \mathbb{Z})$.

*Démonstration.* Rappelons (cf. 2.1) que

$$\begin{aligned} EG &= S(H,H_0)\times S(H,H_1),\\ BG &= B\,\mathrm{GL}(H_0)\times B\,\mathrm{GL}(H_1)\\ &= \mathrm{Gr}^m(H)\times \mathrm{Gr}^n(H),\\ H^*(BG,\mathbb{Z}) &\simeq H^*(\mathrm{Gr}^m(H),\mathbb{Z})\otimes H^*(Gr^n(H),\mathbb{Z})\\ &\simeq \mathbb{Z}[\alpha_1,\dots,\alpha_m,\beta_1,\dots,\beta_n], \end{aligned}$$

où $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ (resp. $\beta_1,\dots,\beta_n$) sont les classes de Chern du fibré quotient canonique $Q_0$ (resp. $Q_1$) de $\mathrm{Gr}^m(H)\times H$ (resp. $\mathrm{Gr}^n(H)\times H$). il est clair que pour $i=0,1$, $Q_i$ est le quotient par $\mathrm{GL}(H_i)$ du fibré trivial $S(H,H_i)\times H_i$. On note $p_W$ la projection $W^s\times EG\to W^s$, $p_N$, $p_B$ les morphismes canoniques $W^s_G\to N(q,m,n)$, $W^s_G\to BG$, et $p_i$, $i=0,1$, les projections $BG\to B\,\mathrm{GL}(H_i)$.

Si $\pi : W^s\to N(q,m,n)$ est le morphisme canonique, on a un $G$-isomorphisme

$$\Delta\otimes\pi^*(\mathbb{H}_i)\ \simeq\ \mathcal{O}_{W^s}\otimes H_i\ ,\quad i=0,1\ ,$$

de fibrés vectoriels sur $W^s$, $\Delta$ étant un $G$-fibré en droites sur $W^s$ tel que l'action de $\mathbb{C}^*$ sur chaque fibre de $\Delta$ soit la multiplication (cf. 4.4). Il en découle qu'on a dans $W^s_G$ un isomorphisme

$$\big(p_W^*(\Delta)/G\big)\otimes p_N^*(\mathbb{H}_i)\ \simeq\ p_B^*(p_i^*(Q_i))\ ,\quad i=0,1\ .$$

D'après la proposition 20, $p_B^* : H^*(BG,\mathbb{Z})\to H^*(W^s_G,\mathbb{Z})$ est surjectif. En effet, pour $1\le j\le k$, la restriction

$$H^*_G\left(\bigcup_{i<j}Q(j),\mathbb{Z}\right)\longrightarrow H^*_G\left(\bigcup_{i<j-1}Q(j),\mathbb{Z}\right)$$

est un morphisme surjectif. Il en découle que les classes de Chern des fibrés $p_B^*(p_i^*(Q_i))$, $i=0,1$, engendrent l'algèbre $H^*(W^s_G,\mathbb{Z})$. D'autre part, dans la fibration

$$B\mathbb{C}^*\xrightarrow{\ i\ }W^s_G\longrightarrow W^s_{G_0}\equiv N(q,m,n)\ ,$$

$c_1(i^*(p_W^*(\Delta)/G))$ engendre $H^*(B\mathbb{C}^*,\mathbb{Z})$. Il en découle, puisque tous les groupes de cohomologie en question sont libres et de type fini, et que

$$H^*(W^s_G,\mathbb{Z})\ \simeq\ H^*(N(q,m,n),\mathbb{Z})\otimes H^*(B\mathbb{C}^*,\mathbb{Z})$$

que les classes de Chern de $\mathbb{H}_0$ et $\mathbb{H}_1$ engendrent $H^*(N(q,m,n),\mathbb{Z})$. Ceci démontre la proposition 22. □

*Application aux variétés de modules de hauteur nulle.* Soit $M(r,c_1,c_2)$ une variété de modules de hauteur nulle telle que $r$, $c_1$ et $\chi$ soient premiers entre eux. Ainsi qu'on l'a vu dans 3.2, $M(r,c_1,c_2)$ est isomorphe à une variété du type $N(q,m,n)$ : pour définir un tel isomorphisme, on utilise deux fibrés exceptionnels $E$, $F$, tels que tout faisceau stable de rang $r$ et de classes de Chern $c_1$, $c_2$ sur $\mathbb{P}_2$ soit isomorphe au conoyau d'un morphisme injectif de faisceaux $\Phi : E\otimes\mathbb{C}^m\to F\otimes\mathbb{C}^n$, ou alors que tout tel faisceau soit isomorphe au noyau d'un morphisme surjectif de tels fibrés. Dans ce qui suit on se place dans le premier cas (l'autre cas est analogue).

L'isomorphisme $M(r,c_1,c_2)\simeq N(q,m,n)$ s'obtient en associant à la classe d'isomorphisme du faisceau précédent la classe du module de Kronecker $\mathbb{C}^m\otimes\mathrm{Hom}(E,F)^*\to\mathbb{C}^n$ déduit de

$\Phi$. Ici, on a donc $q = \dim(\mathrm{Hom}(E,F)) = 3r_\alpha$, $\alpha$ désignant l'unique élément de $\mathcal{E}$ vérifiant $|\frac{c_1}{r} - \alpha| < x_\alpha$.

Soit $\tau : \mathbb{H}_0 \otimes \mathrm{Hom}(E,F)^* \to \mathbb{H}_1$ un module de Kronecker universel sur $N(q,m,n)$. On en déduit un morphisme de fibrés vectoriels sur $N(q,m,n) \times \mathbb{P}_2$

$$A : \mathbb{H}_0 \boxtimes E \longrightarrow \mathbb{H}_1 \boxtimes F$$

(avec $\mathbb{H}_0 \boxtimes E = p_N^*(\mathbb{H}_0) \otimes p_2^*(E)$, $\mathbb{H}_1 \boxtimes F = p_N^*(\mathbb{H}_1) \otimes p_2^*(F)$ où $p_N$ et $p_2$ sont les projections $N(q,m,n) \times \mathbb{P}_2 \to N(q,m,n)$ et $N(q,m,n) \times \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$). Le morphisme de faisceaux $A$ est injectif sur chaque fibre de $p_N$ et $V = \mathrm{coker}(A)$ est un faisceau universel sur $M(r,c_1,c_2) \times \mathbb{P}_2$. On a des isomorphismes

$$\mathbb{H}_0 \simeq R^1 p_{N*}(V \otimes p_2^*(E^*(-3)) \ , \quad \mathbb{H}_1 \simeq R^1 p_{N*}(V \otimes p_2^*(S^*)) \ ,$$

$S$ désignant le conoyau du morphisme canonique $F \to \mathrm{Hom}(F, E_\alpha)^* \otimes E_\alpha$ ($S$ est aussi un fibré exceptionnel). Réciproquement, d'un faisceau universel sur $M(r,c_1,c_2) \times \mathbb{P}_2$ on déduit un module de Kronecker universel sur $N(q,m,n)$. On obtient donc immédiatement le théorème 2 à partir de la proposition 22 et du lemme 6,

### 5.9 – Le classifiant de $G_0$

Les entiers $m$, $n$ sont toujours supposés premiers entre eux. On considère la suite d'inclusions

$$0 \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^2 \subset \cdots \subset \mathbb{C}^\infty = \bigcup_{p \geq 1} \mathbb{C}^p \ ,$$

$\mathbb{C}^\infty$ étant muni de la norme $\|(x_i)\| = (\sum |x_i|^2)^{1/2}$. Soit $W_\infty$ l'espace de Banach des applications linéaires continues $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^\infty \to \mathbb{C}^n$, qu'on peut appeler des $\mathbb{C}^\infty$-*modules de Kronecker*. Soit $W_\infty^s$ le sous-ensemble de $W_\infty$ constitué des $f$ telles qu'il existe un entier $q \geq 1$ tel que la restriction de $f$ à $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^q$ soit un $\mathbb{C}^q$-module de Kronecker stable. C'est un ouvert, car les restrictions $r_q : W_\infty \to W_q = L(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^q, \mathbb{C}^n)$ sont des applications continues. Voici une définition plus intrinsèque de $W_\infty^s$ :

**Proposition 23 :** *L'ouvert $W_\infty^s$ est l'ensemble des $\mathbb{C}^\infty$-modules de Kronecker $t : \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^\infty \to \mathbb{C}^n$ tels que pour tous sous-espaces vectoriels $H_0'$ de $\mathbb{C}^m$, $H_1'$ de $\mathbb{C}^n$, avec $H_0' \neq \{0\}$, $H_1' \neq \mathbb{C}^n$, $t(H_0' \otimes \mathbb{C}^\infty) \subset H_1'$, on ait*

$$\frac{\dim(H_1')}{\dim(H_0')} > \frac{n}{m} \ .$$

*Démonstration.* Si $t \in W_\infty^s$, il existe un entier $q \geq 1$ tel que $t_q \in W_q^s$. La propriété de la proposition 23 est donc vérifiée, d'après la proposition 7.

Réciproquement, supposons que $t \notin W_\infty^s$. D'après la proposition 7, pour tout $q \geq 1$, i1 existe des sous-espaces vectoriels $H_{0q}'$ de $\mathbb{C}^m$, $H_{1q}'$ de $\mathbb{C}^n$ tels que $H_{0q}' \neq \{0\}$, $H_{1q}' \neq \mathbb{C}^n$, $t(H_{0q}' \otimes \mathbb{C}^q) \subset H_{1q}'$ et

$$\frac{\dim(H_{1q}')}{\dim(H_{0q}')} \leq \frac{n}{m} \ .$$

Il existe des entiers $\nu_0$, $\nu_1$, et une infinité d'entiers $q$ tels que $\dim(H'_{iq}) = \nu_i$ pour $i = 0, 1$. Notons les $q_1 < q_2 < \cdots < q_p < \cdots$. Puisque les grassmanniennes sont compactes, la suite $(H'_{0q_i}, H'_{1q_i})_{i\geq 1}$ admet un point d'accumulation $(H'_0, H'_1)$. Par continuité de $t$ on a $t(H'_0 \otimes \mathbb{C}^\infty) \subset H'_1$ et

$$\frac{\dim(H'_1)}{\dim(H'_0)} \leq \frac{n}{m} ,$$

donc $t$ ne vérifie pas la propriété de la proposition 23. Celle ci est donc démontrée. □

Le groupe $G_0 = (\mathrm{GL}(m) \times \mathrm{GL}(n))/\mathbb{C}^*$ opère librement sur $W^s_\infty$. On note $N_\infty(m,n) = W^s_\infty/G_0$, muni de la topologie quotient.

**Lemme 24 :** *Le morphisme quotient* $p : W^s_\infty \to N_\infty(m,n)$ *est un* $G_0$*-fibré principal.*

*Démonstration.* Il faut en fait montrer que $p$ est localement trivial. On a une suite d'ouverts $G_0$-invariants

$$0 \subset r_1^{-1}(W^s_1) \subset \cdots \subset r_q^{-1}(W^s_q) \subset \cdots \subset W^q_\infty ,$$

et la réunion des $r_q^{-1}(W^s_q)$ est $W^s_\infty$. On a donc dans $N_\infty(m,n)$ une suite d'ouverts

$$0 \subset p\left(r_1^{-1}(W^s_1)\right) \subset \cdots \subset p\left(r_q^{-1}(W^s_q)\right) \subset \cdots$$

dont la réunion est $N_\infty(m,n)$. Il suffit de montrer que pour tout $q \geq 1$, $p : r_q^{-1}(W^s_q) \to p\left(r_q^{-1}(W^s_q)\right)$ est localement trivial. Soit

$$\overline{r}_q : p\left(r_q^{-1}(W^s_q)\right) \longrightarrow N(q,m,n)$$

le quotient de $r_q$. Puisque le morphisme canonique $\pi_q : W^s_q \to N(q,m,n)$ est localement trivial, pour tout $x \in p\left(r_q^{-1}(W^s_q)\right)$, il existe un voisinage $U$ de $\overline{r}_q(x)$ et un $G_0$-isomorphisme $\pi_q^{-1}(U) \simeq G_0 \times U$. Soit $\mathbb{C}^{\infty-q}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^\infty$ engendré par les $e_i$, $i > q$. On a donc $\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C}^q \oplus \mathbb{C}^{\infty-q}$. Soit $W_{\infty-q}$ l'espace des applications linéaires continues $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^{\infty-q} \to \mathbb{C}^n$. Il est clair qu'on a

$$r_q^{-1}(W^s_q) \simeq W^s_q \times W_{\infty-q} ,$$

donc on a un $G_0$-isomorphisme

$$r_q^{-1}(\pi_q^{-1}(U)) \simeq G_0 \times U \times W_{\infty-q} = Y ,$$

le groupe $G_0$ agissant ici sur les deux facteurs $G_0$ et $W_{\infty-q}$ de $Y$. Soit $X$ le $G_0$-fibré $G_0 \times U \times W_{\infty-q}$, l'action de $G_0$ s'effectuant uniquement sur $G_0$. On a un $G_0$-isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ (g,u,w) & \longmapsto & (g,u,g^{-1}w) \end{array} ,$$

Par conséquent $r_q^{-1}(\pi_q^{-1}(U))$ est $G_0$-isomorphe au $G_0$-fibré trivial $G_0 \times (U \times W_{\infty-q})$. Ceci démontre le lemme 24. □

**Remarque.** On a, pour tout $q \geq 1$, un $G_0$-morphisme $i_q : W^s_q \to W^s_\infty$, associant à un $\mathbb{C}^q$-module de Kronecker son extension à $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^\infty$ (cf. Introduction). On en déduit

$$\overline{i_q} : N(q,m,n) \longrightarrow N_\infty(m,n)$$

qui permet de considérer $N(q,m,n)$ comme une sous-variété fermée de $N_\infty(m,n)$. En fait, la démonstration du lemme 24 montre que $\overline{r}_q$ est un fibré vectoriel (de rang infini) sur $N(q,m,n)$. En particulier, $p(r_q^{-1}(W_q^s))$ a le même type d'homotopie que $N_\infty(m,n)$. Ceci permet de voir $N_\infty(m,n)$ comme la "limite" des $N(q,m,n)$ quand $q$ tend vers l'infini.

Pour démontrer le théorème 3, i1 reste à prouver le

**Lemme 25 :** *l'espace topologique $W_\infty^s$ est contractile.*

*Démonstration.* Puisque $W_\infty^s$ est un ouvert d'un espace de Banach, il suffit de prouver que $W_\infty^s$ est *faiblement contractile*, c'est à dire que pour tout entier $i \geq 1$, on a $\pi_i(W_\infty^s) = 0$ (cf. [14], exposé 3). Considérons la suite d'ouverts

$$0 \subset r_1^{-1}(W_1^s) \subset \cdots \subset r_q^{-1}(W_q^s) \subset \cdots \ ,$$

dont la réunion est $W_\infty^s$. Si $\sigma : S^i \to W_\infty^s$ est une application continue ($S^i$ désignant la sphère unité de dimension $i$), il existe un entier $q$ tel que $\sigma(S^i) \subset r_q^{-1}(W_q^s)$ (car $\sigma(S^i)$ est compact). Il suffit donc de prouver que $\pi_i(r_q^{-1}(W_q^s)) = 0$ si $q$ est assez grand. Puisque $r_q^{-1}(W_q^s)) \simeq W_q^s \times W_{\infty-q}$, il suffit de montrer que $\pi_i(W_q^s) = 0$ si $q$ est assez grand.

On note $\Pi_q$ l'ensemble des polygones de Harder-Narasimhan possibles pour les $\mathbb{C}^q$-modules de Kronecker $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^q \to \mathbb{C}^n$. Il est clair qu'il existe un entier $j \geq 1$ tel qu'on ait $\Pi_q = \Pi_j$ pour tout $q \geq j$.

D'après les paragraphes précédents, $W_q^s$ s'obtient à partir de $W_q$ en otant à celui-ci un certain ensemble de strates lisses paramétré par $\Pi_q$. D'après 5.5, on peut écrire

$$\mathrm{codim}_{W_q}(W_q \backslash W_q^s) \ = \ Cq - B \ ,$$

$C$ et $B$ étant des constantes indépendantes de $q$, et $C > 0$. Il en découle que si q est assez grand, on a $\pi_i(W_q^s) = \pi_i(W_q)$, et ce dernier est nul car $W_q$ est contractile. Ceci démontre le lemme 25. □

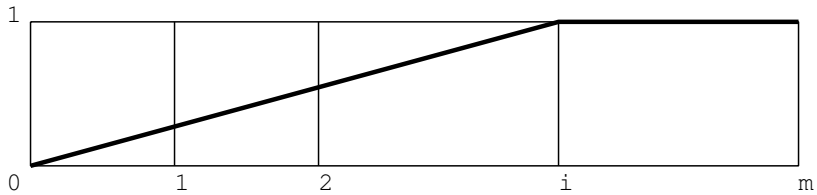
**Remarque.** On construit aisément sur $N_\infty(m,n)$ un module de Kronecker universel $\tau : \mathbb{H}_0 \otimes \mathbb{C}^\infty \to \mathbb{H}_1$, induisant sur chaque $N(q,m,n)$ un module de Kronecker universel. Comme dans le cas fini, $\tau$ est défini par la donnée de deux entiers $a$, $b$ tels que $am + bn = 1$. L'algèbre $H^*(N_\infty(m,n),\mathbb{Z})$ est engendrée par les classes de Chern $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ de $\mathbb{H}_0$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ de $\mathbb{H}_1$ avec l'unique relation $a\alpha_1 + b\beta_1 = 0$. Pour les polynômes de Poincaré on a

$$\begin{aligned} P(N_\infty(m,n)) &= P(BG_0) \\ &= (1-T^2)P(B\,\mathrm{GL}(m)).P(B\,\mathrm{GL}(n)) \\ &= \frac{1-T^2}{\prod_{1\leq k\leq m}(1-T^{2k}).\prod_{1\leq k\leq n}(1-T^{2k})} \ . \end{aligned}$$

## 6. Exemples

### 6.1 – Les variétés $N(q,1,m)$

La condition pour que $\dim(N(q,1,m)) > 0$ est $1 \leq m \leq q-1$, et dans ce cas on a un isomorphisme $N(q,1,m) \simeq \mathrm{Gr}^m(\mathbb{C}^q)$ (ce dernier désignant la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^q$ de dimension $m$). On note $P_{q,m} = P(\mathrm{Gr}^m(\mathbb{C}^q))$. Les polygones de Harder-Narasimhan possibles sont les suivants :




$Q(m-i+1)$,

pour $0 \leq i \leq m$. On a

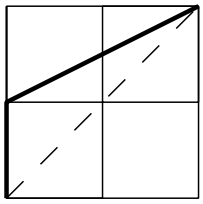
$$\begin{aligned}(1-T^2)P_G(W_{Q(m-i+1)}) &= P_{q,i}.P(B\,\mathrm{GL}(m-i)) \\ &= \frac{P_{q,i}}{\prod\limits_{1\leq j\leq m-i}(1-T^{2j})},\end{aligned}$$

et $d_i = \mathrm{codim}_W(W_{Q(m-i+1)}) = (q-i)(m-i)$, d'où la formule de récurrence

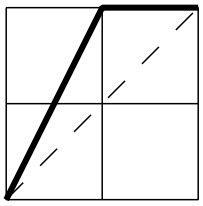
$$P_{q,m} = \frac{1-T^{2qm}}{\prod\limits_{1\leq j\leq m}(1-T^{2j})} - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{T^{2(q-i)(m-i)}}{\prod\limits_{1\leq j\leq m-i}(1-T^{2j})} P_{q,i}\ .$$

### 6.2 – Les variétés $N(q,2,3)$

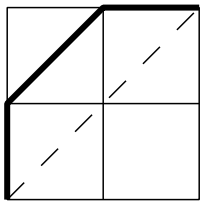
*a) Calcul de* $P_{G_1}(W^{ss}(2,2))$. (avec $G_1 = \mathrm{GL}(2)\times\mathrm{GL}(2)$). Ce polynôme intervient dans le traitement d'une strate de $L(\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^q,\mathbb{C}^3)$ (la strate $Q(3)$, voir plus loin).



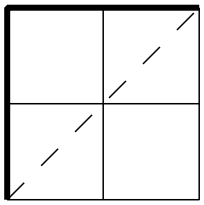
Strate $Q(2)$ : $d_2 = 2q-1$, $P_{G_1}(W_{Q(2)}) = \dfrac{P_{q,2}}{(1-T^2)^2}$.



Strate $Q(3)$ : $d_3 = 2q-1$, $P_{G_1}(W_{Q(3)}) = P_{G_1}(W_{Q(2)})$.



Strate $Q(4)$ : $d_4 = 3q-2$, $P_{G_1}(W_{Q(4)}) = \dfrac{1-T^{2q}}{(1-T^2)^4}$.

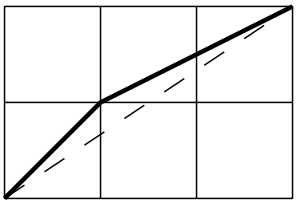


Strate $Q(5)$ : $d_5 = 4q$, $P_{G_1}(W_{Q(5)}) = \dfrac{1}{(1-T^2)^2(1-T^4)^2}$.

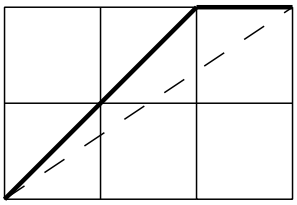
On en déduit

$$P_{G_1}(W^{ss}(2)) \;=\; \frac{1-T^{8q}}{(1-T^2)^2(1-T^4)^2} - \frac{T^{6q-4}(1-T^{2q})}{(1-T^2)^4} - \frac{2T^{4q-2}(1-T^{2q})(1-T^{2q-2})}{(1-T^2)^3(1-T^4)}\ .$$

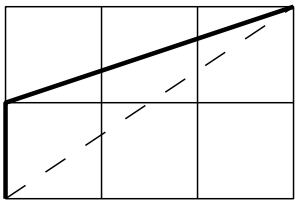
*b) Les différentes strates de $L(\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^q,\mathbb{C}^3)$.*



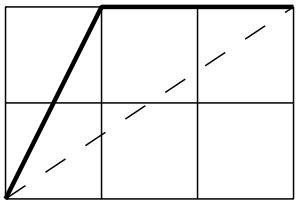
Strate $Q(2)$ : $d_2 = 2q-3$, $P_G(W_{Q(2)}) = \dfrac{P_{q,1}P_{q,2}}{(1-T^2)^2}$.



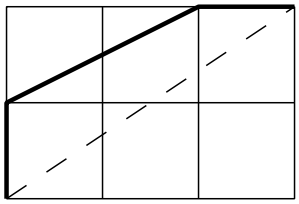
Strate $Q(3)$ : $d_3 = 2q-2$, $P_G(W_{Q(3)}) = \dfrac{P_{G_1}(W^{ss}(2,2))}{1-T^2}$.



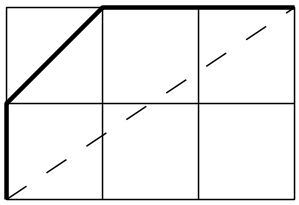
Strate $Q(4)$ : $d_4 = 3q-1$, $P_G(W_{Q(4)}) = \dfrac{P_{q,3}}{(1-T^2)^2}$.



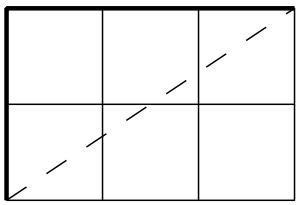
Strate $Q(5)$ : $d_2 = 4q-2$, $P_G(W_{Q(5)}) = \dfrac{P_{q,2}}{(1-T^2)^2(1-T^4)}$.



Strate $Q(6)$ : $d_2 = 4q-3$, $P_G(W_{Q(2)}) = \dfrac{P_{q,2}}{(1-T^2)^3}$.



Strate $Q(7)$ : $d_2 = 5q-3$, $P_G(W_{Q(2)}) = \dfrac{1-T^{2q}}{(1-T^2)^4(1-T^4)}$.



Strate $Q(8)$ : $d_2 = 6q$, $P_G(W_{Q(2)}) = \dfrac{1}{(1-T^2)^2(1-T^4)^2(1-T^6)}$.

On en déduit que

$$P(N(q,2,3)) \;=\; \frac{R(T)}{(1-T^2)(1-T^4)^2(1-T^6)}\ ,$$

avec

$$\begin{aligned} R(T) \;=\; & 1 - T^{4q+6} - 3T^{4q-4} - 3T^{4q-2} - 2T^{4q} + T^{6q-8} + 4T^{6q-6} + 6T^{6q-4} + 4T^{6q-2} + T^{6q} \\ & -2T^{8q-8} - 3T^{8q-6} - 3T^{8q-4} - T^{8q-2} + T^{12q-8}\ . \end{aligned}$$

**Exemples de variétés de modules de hauteur nulle** – $N(3,2,3)$ : cette variété est de dimension 6. Ses nombres de Betti $b_{2i}$, $0 \le i \le 3$ sont 1,1,3,3.

Varietés de modules isomorphes à $N(3,2,3)$ : $M(4,-1,3)$, $M(11,-4,13)$, $M(29,-11,73)$, $M(76,-29,453),\ldots$ .

$N(6,2,3)$ : cette variété est de dimension 24. Ses nombres de Betti $b_{2i}$, $0 \le i \le 12$ sont 1, 1, 3, 4, 7, 9, 14, 17, 24, 28, 34, 36, 39.

Variétés de modules isomorphes à $N(6,2,3)$ : $M(13,-6,24)$, $M(77,-32,544)$, $M(449,-186,17484)$,..., $M(43,-18,180)$, $M(251,-104,5512)$, $M(1463,-606,184224),\ldots$ .

**Autres exemples** – $N(4,2,3)$ : cette variété est de dimension 12. Ses nombres de Betti $b_{2i}$, $0 \leq i \leq 6$ sont 1, 1, 3, 4 7, 8, 10.

$N(5,2,3)$ : cette variété est de dimension 18. Ses nombres de Betti $b_{2i}$, $0 \leq i \leq 9$ sont 1, 1, 3, 4, 7, 9, 14, 16, 20, 20.

## 7. La variété $N(3,2,3)$

### 7.1 – Description de $N(3,2,3)$

Soit $L$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3. On posera $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(L)$, espace projectif des droites de $L$. Posons $U = \mathrm{Gr}^2(\mathbb{C}^3 \otimes L)$ (grassmannienne des plans de $\mathbb{C}^3 \otimes L$). On sait que

$$N(3,2,3) \simeq N(3,3,2) \simeq U^s / \mathrm{GL}(3) ,$$

où $U^s$ désigne l'ouvert de $\mathrm{Gr}^2(\mathbb{C}^3 \otimes L)$ constitué des plans correspondant aux $L^*$-modules de Kronecker stables. Plus précisément, à tout $L^*$-module de Kronecker surjectif $\tau : \mathbb{C}^{3*} \otimes L^* \to \mathbb{C}^2$ on associe $\mathrm{im}({}^t\tau)$, qui est un plan de $\mathbb{C}^3 \otimes L$. Réciproquement, si $P$ est un plan de $\mathbb{C}^3 \otimes L$, on lui associe un $L^*$-module de Kronecker $(\mathbb{C}^3 \otimes L)^* \to P^*$ (la transposée de l'inclusion $P \to \mathbb{C}^3 \otimes L$). Les plans de $\mathbb{C}^3 \otimes L$ correspondant aux $L^*$-modules de Kronecker stables sont dits *stables*. On montre aisément que ce sont exactement les points stables au sens de Mumford [17] pour l'action de $\mathrm{GL}(3)$ sur $U$, munie de la linéarisation évidente.

**Lemme 26 :** *Soit $P$ un plan de $\mathbb{C}^3 \otimes L$. Alors $P$ est stable si et seulement si*

*(i) Pour tout plan $K$ de $\mathbb{C}^3$, $K \otimes L$ ne contient pas $P$.*

*(ii) $P$ ne contient pas d'élément décomposable non nul.*

*Démonstration.* En effet, si $t$ est un $L^*$-module de Kronecker correspondant à $P$, (i) signifie que si $\Delta$ est une droite de $\mathbb{C}^{3*}$, on a $t(\Delta \otimes L^*) \neq \{0\}$, et (ii) que si $D$ est un plan de $\mathbb{C}^{3*}$, on a $\dim(t(D \otimes L^*)) > 1$. □

On se propose d'appliquer le théorème de Białynicki-Birula (cf. 2.4) à l'action d'un tore maximal de $\mathrm{GL}(L)$ sur $N(3,3,2)$. Ce tore maximal est le sous-groupe des automorphismes dont la matrice relativement à une base fixée $(v_0, v_1, v_2)$ est diagonale. On note $M(3) = L(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$.

### 7.2 – Description d'un ouvert de $N(3,3,2)$

On peut définir la *longueur* d'un élément non nul $u$ de $\mathbb{C}^3 \otimes L$. C'est le plus petit entier $k$ tel que $u$ soit la somme de $k$ éléments décomposables. La longueur de $u$ est soit 1 (et alors $u$ est décomposable), soit 2 ou 3. Soit $U_0$ l'ouvert de $U$ des plans contenant au moins un élément de longueur 3. Soient $(e_0, e_1, e_2)$ une base de $\mathbb{C}^3$, $H$ la sous-variété fermée de $U$ des plans P contenant

$$u_I = e_0 \otimes v_0 + e_1 \otimes v_1 + e_2 \otimes v_2 .$$

Alors $H \subset U_0$ et $\mathrm{GL}(3)H = U_0$. Posons $U_0^s = U_0 \cap U^s$. Soit $P \in H$. Un élément de $P$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$u_\phi \;=\; \phi(e_0) \otimes v_0 + \phi(e_1) \otimes v_1 + \phi(e_2) \otimes v_2 \ ,$$

($\phi$ étant un endomorphisme de $\mathbb{C}^3$). Les vecteurs $u_I, u_\phi$ engendrent $P$ si et seulement si $\phi$ n'est pas une homothétie. On pourra noter dans ce cas $P = P_\phi$. On a $P_\phi = P_{\phi'}$ si et seulement si il existe des scalaires $\lambda, \mu, \lambda \neq 0$, tels que $\phi' = \lambda\phi + \mu I$. L'endomorphisme $\phi$ tel que $P = P_\phi$ est unique à une constante près si on impose la condition $\mathrm{Tr}(\phi) = 0$. Il en découle aisément que $H$ est isomorphe à $\mathbb{P}(\mathbb{H})$, espace projectif des droites de $\mathbb{H}$, sous-espace vectoriel de $M(3)$ des endomorphismes de trace nulle.

Soit $\phi \in \mathbb{H}\backslash\{0\}$. La propriété (i) du lemme 26 est vérifiée par $P_\phi$. Examinons (ii). Les éléments de $P_\phi$ sont de la forme $u_{\lambda\phi+\mu I}$. Un tel élément est décomposable si et seulement si $\lambda\phi + \mu I$ est de rang au plus 1. Il en découle que $H^s = H \cap U^s$ s'identifie à l'ouvert de $\mathbb{P}(\mathbb{H})$ des droites $\mathbb{C}\phi$, $\phi$ étant un endomorphisme non nul de $\mathbb{C}^3$ dont les sous-espaces propres sont de dimension 1.

*Une stratification de* $\mathbb{H}^s$. On divise $H^s$ en sous-variétés localement fermées :
$H^s = X_1 \coprod X_2 \coprod X_3$. Par définition, $X_i$ est l'ensemble des $P_\phi$, $\phi$ étant un endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ possédant $i$ valeurs propres distinctes. On a $\mathrm{GL}(3)X_i \cap H^s = X_i$, ou encore $U_0 := \coprod_{1\leq i\leq 3} \mathrm{GL}(3)X_i$. Cela signifie que $X_i$ est la trace sur $H^s$ d'une sous-variété localement fermée $\mathrm{GL}(3)$-invariante de $U_0$. Il en découle que si $\pi : U^s \to N(3,3,2)$ désigne le morphisme canonique, $\pi(X_i)$ est une sous-variété localement fermée de $N(3,3,2)$. En particulier, $\pi(X_3)$ est ouvert.

## 7.3 – Étude de l'action de $\mathrm{GL}(3)$

Bien entendu, $H^s$ n'est pas stable par $\mathrm{GL}(3)$. On va cependant déterminer les traces sur $H^s$ des orbites de l'action de $\mathrm{GL}(3)$ sur $U$.

**Lemme 27 :** *Soit $P_\phi \in H^s$. Alors les points de $H^s \cap (\mathrm{GL}(3)P_\phi)$ distincts de $P_\phi$ sont les $P_{\phi'}$, $\phi'$ étant un automorphisme de $\mathbb{C}^3$ tel qu'il existe des scalaires $\lambda, \mu$, avec $\lambda \neq 0$, tels que $\phi'^{-1} = \lambda\phi + \mu I$.*

*Démonstration.* Si $T \in \mathrm{GL}(3)$, pour tous scalaires $\lambda, \mu$, avec $\lambda \neq 0$, $TP_\phi$ est engendré par

$$\sum_{0\leq i\leq 2} T(e_i) \otimes v_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{0\leq i\leq 2} T((\lambda\phi + \mu I)(e_i)) \otimes v_i \ .$$

Si $\lambda\phi + \mu I$ est inversible, et si $T$ est son inverse, $TP_\phi$ est donc engendré par

$$u_I \;=\; \sum_{0\leq i\leq 2} e_i \otimes v_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{0\leq i\leq 2} (\lambda\phi + \mu I)^{-1}(e_i) \otimes v_i \ ,$$

c'est à dire $TP_\phi = P_{(\lambda\phi+\mu I)^{-1}}$.

Réciproquement, supposons que $P_{\phi'} \in H^s \cap (\mathrm{GL}(3)P_\phi)$, et $P_{\phi'} \neq P_\phi$. On peut écrire $P_{\phi'} = TP_\phi$ avec $T \in \mathrm{GL}(3)$. Alors $T(u_I)$ n'est pas un multiple de $u_I$, car sinon $T$ serait une homothétie et $P_{\phi'} = P_\phi$. Il existe donc des scalaires $\lambda', \mu'$, avec $\lambda' \neq 0$, tels que

$$u_I \;=\; T(u_{\lambda'\phi+\mu' I}) \;=\; u_{T\circ(\lambda'\phi+\mu' I)} \ .$$

On a donc $T \circ (\lambda'\phi + \mu' I) = I$, d'où $T = (\lambda'\phi + \mu' I)^{-1}$, ce qui démontre le lemme 27. $\square$

### 7.4 – Étude de $X_3$

Soit $P_\phi \in X_3$. Cela signifie que $\phi$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont distinctes deux à deux. Relativement à une base convenable de $\mathbb{C}^3$, on peut donc écrire

$$\phi \;=\; \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} .$$

D'après le lemme 27, un élément $P_{\phi'}$ de $H^s \backslash \{P_\phi\}$ est dans l'orbite de $P_\phi$ si et seulement si on a

$$\phi' \;=\; \begin{pmatrix} \alpha + \frac{1}{\lambda\lambda_0+\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + \frac{1}{\lambda\lambda_1+\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + \frac{1}{\lambda\lambda_2+\mu} \end{pmatrix} ,$$

$\alpha, \lambda, \mu$ étant des scalaires tels que $\lambda \neq 0$, $\lambda\lambda_i + \mu \neq 0$ pour $i = 0, 1, 2$.

**Lemme 28 :** *Pour tout triplet $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ de nombres complexes distincts deux à deux tels que*

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & 1 & \lambda_0 \\ \alpha_1 & 1 & \lambda_1 \\ \alpha_2 & 1 & \lambda_2 \end{vmatrix} \;\neq\; 0 ,$$

*le système d'équations* $\alpha + \dfrac{1}{\lambda\lambda_i + \mu} = \alpha_i$, *$i = 0, 1, 2$, d'inconnues $\alpha, \lambda$, a une solution unique.*

*Démonstration.* Il suffit de prouver qu'il existe un unique scalaire $\alpha$ distinct des

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_0-\alpha} & 1 & \lambda_0 \\ \frac{1}{\alpha_1-\alpha} & 1 & \lambda_1 \\ \frac{1}{\alpha_2-\alpha} & 1 & \lambda_2 \end{vmatrix} \;=\; 0 . \qquad (*)$$

Cette équation équivaut à la suivante :

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 - \alpha & (\alpha_0 - \alpha)\lambda_0 \\ 1 & \alpha_1 - \alpha & (\alpha_1 - \alpha)\lambda_1 \\ 1 & \alpha_2 - \alpha & (\alpha_2 - \alpha)\lambda_2 \end{vmatrix} \;=\; 0 . \qquad (**)$$

En effet, $(**)$ se déduit de $(*)$ en multipliant les lignes 1, 2, 3 par $\alpha_0 - \alpha$, $\alpha_1 - \alpha$ et $\alpha_2 - \alpha$ respectivement, donc si $(*)$ est vérifiée, $(**)$ l'est aussi. Réciproquement, supposons $(**)$ vérifiée. Pour montrer que $(*)$ l'est, il suffit de prouver que $\alpha_i - \alpha \neq 0$ pour $i = 0, 1, 2$. Montrons que $\alpha_0 - \alpha \neq 0$ (les autres cas sont analogues). Si $\alpha = \alpha_0$, $(**)$ se réduit à

$$(\alpha_1 - \alpha_0)(\alpha_2 - \alpha_0)(\lambda_2 - \lambda_1) \;=\; 0 ,$$

ce qui est faux par hypothèse. Donc $(**)$ est équivalente à $(*)$.

Notons que $(**)$ équivaut à

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & (\alpha_0 - \alpha)\lambda_0 \\ 1 & \alpha_1 & (\alpha_1 - \alpha)\lambda_1 \\ 1 & \alpha_2 & (\alpha_2 - \alpha)\lambda_2 \end{vmatrix} \;=\; 0 .$$

Donc l'équation $(**)$ se met sous la forme $A\alpha + B = 0$, avec

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_0 & 1 & \lambda_0 \\ \alpha_1 & 1 & \lambda_1 \\ \alpha_2 & 1 & \lambda_2 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Donc $(**)$ admet une solution unique. Ceci démontre le lemme 28. □

D'après le lemme 28, tous les $P_\phi$, $\phi$ étant, relativement à une base donnée, une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont distincts deux à deux, sont dans la même orbite de l'action de GL(3).

Soit $Y$ la variété des repères projectifs non ordonnés de $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(L)$, qu'on peut aussi voir comme 1'ouvert de $\mathrm{Hilb}^3(\mathbb{P}_2)$ des ensembles de trois points non alignés. On peut voir $u_I$ comme un isomorphisme $\alpha : \mathbb{C}^3 \to L^*$. Si $P_\phi \in X_3$, soit $(f_0, f_1, f_2)$ une base de $\mathbb{C}^3$ constituée de vecteurs propres de $\phi$. Alors l'ensemble $\{\mathbb{C}f_0, \mathbb{C}f_1, \mathbb{C}f_2\}$ ne dépend que de $P_\phi$. On définit donc un morphisme $\Theta : X_3 \to Y$ en associant à $P_\phi$ le repère de $\mathbb{P}_2$ déduit de $\{\mathbb{C}f_0, \mathbb{C}f_1, \mathbb{C}f_2\}$ à l'aide de $\alpha$ (c'est à dire que $\Theta(P) = \{\mathbb{C}\delta_0, \mathbb{C}\delta_1, \mathbb{C}\delta_2\}$, $(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$ désignant la base de $L$ duale de $(\alpha(f_0), \alpha(f_1), \alpha(f_2))$).

En fait, ce morphisme se prolonge de manière naturelle à $\mathrm{GL}(3)X_3$. En effet, pour tout $P \in \mathrm{GL}(3)X_3$, il existe un unique repère $\{\mathbb{C}h_0, \mathbb{C}h_1, \mathbb{C}h_2\}$ de $\mathbb{P}(L)$ tel qu'il existe une base $(u_0, u_1, u_2)$ de $\mathbb{C}^3$ et des scalaires $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ tels que $P$ soit engendré par $\sum_{0\leq i\leq 2} u_i \otimes h_i$ et $\sum_{0\leq i\leq 2} \lambda_i u_i \otimes h_i$. L'extension de $\Theta$ associe alors à $P$ le repère $\{\mathbb{C}h_0, \mathbb{C}h_1, \mathbb{C}h_2\}$. En particulier, elle ne dépend pas du choix de $u_I$. On en déduit par passage au quotient un morphisme $\sigma : \pi(X_3) \to Y$, qui est bijectif d'après le lemme 28, et $\mathrm{GL}(L)$-invariant. L'action de $\mathrm{GL}(L)$ étant transitive sur $Y$, on en déduit que $\sigma$ est un isomorphisme.

*Points fixes de* $\pi(X_3)$ – Il n'y en a qu'un, le repère $\{\mathbb{C}v_0, \mathbb{C}v_1, \mathbb{C}v_2\}$.

## 7.5 – Étude de $X_2$

Soit $P \in X_2$. On peut écrire $P = P_\phi$, où, relativement à une base $B$ de $\mathbb{C}^3$, on a

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Comme dans le lemme 28, on montre que relativement à $B$, les $\phi'$ tels que $P_{\phi'}$ soit dans l'orbite de $P_\phi$ sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$, avec $\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq 0$. Il en découle comme dans 7.4 que $\pi(X_2)$ est isomorphe à la variété des triplets $(\Delta, \Delta', D)$, où $D$ est un plan de $L$, $\Delta$, $\Delta'$ des droites de $L$ tels que $\Delta \subset D$, $\Delta' \cap D = \{0\}$ : $\Delta'$ et $D$ sont les deux sous-espaces spectraux de $\phi'$, et $\Delta$ le sous-espace propre de $\phi'$ contenu dans $D$. L'isomorphisme précédent est $\mathrm{GL}(L)$-invariant.

*Points fixes de* $\pi(X_2)$ – Il y en a 6 : les triplets $(\mathbb{C}v_{\epsilon(0)}, \mathbb{C}v_{\epsilon(1)}, \mathbb{C}v_{\epsilon(0)} \oplus \mathbb{C}v_{\epsilon(2)})$, $\epsilon$ parcourant l'ensemble des permutations de $\{0,1,2\}$.

## 7.6 – Étude de $X_1$

Soit $P \in X_1$. On peut écrire $P = P_\phi$, où, relativement à une base $B$ de $\mathbb{C}^3$, on a

$$\phi \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Comme dans le lemme 28, on montre que relativement à $B$, les $\phi'$ tels que $P_{\phi'}$ soit dans l'orbite de $P_\phi$ sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha & \beta \\ 0 & \lambda & \alpha \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, avec $\alpha \neq 0$. Posons $F_B = \mathrm{GL}(3)P_\phi \cap X_1$. On peut alors définir, comme fonctions de $B$ :

– l'unique sous-espace propre commun à tous les éléments de $F_B$, noté $\Delta$.

– l'image $D$ des $\phi - \lambda_\phi I$, $\phi$ parcourant $F_B$ ($\lambda_\phi$ désignant l'unique valeur propre de $\phi$).

Si $\phi \in F_B$, soit $u$ (resp. $\overline{v}$, $\overline{w}$) une base de $\Delta$ (resp. $D/\Delta$, $L/D$), telles que si $v$ (resp. $w$) est un élément de $L$ au dessus de $\overline{v}$ (resp. $\overline{w}$), on ait

$$(\phi - \lambda_\phi)(v) \;=\; u \;, \qquad (\phi - \lambda_\phi)(w) \;\equiv v \;(\mathrm{mod}\ \Delta) \;.$$

On définit alors un isomorphisme

$$\begin{aligned} \sigma : \Delta^* \otimes (D/\Delta) &\longrightarrow (D/\Delta)^* \otimes (L/D) \\ (u \mapsto \overline{v}) &\longmapsto (\overline{v} \mapsto \overline{w}). \end{aligned}$$

Cet isomorphisme ne dépend en fait que de la base $B$ (il met en évidence le fait que si $(a_{ij})$ est la matrice relativement à $B$ d'un élément de $F_B$, on a $a_{12} = a_{23}$). On a un morphisme

$$\begin{aligned} X_1 &\longrightarrow Y_1 \\ \phi &\longmapsto (\Delta, D, \sigma), \end{aligned}$$

qui est GL(3)-invariant, $Y_1$ désignant la variété des triplets $(\Delta, D, \sigma)$, $\Delta$ étant une droite de $L$, $D$ un plan de $L$ contenant $\Delta$ et $\sigma$ un isomorphisme $\Delta^* \otimes (D/\Delta) \simeq (D/\Delta)^* \otimes (L/D)$. Comme dans 7.4, on montre que ce morphisme induit un isomorphisme $\pi(X_1) \simeq Y_1$, qui est $\mathrm{GL}(L)$-invariant.

*Points fixes de* $\pi(X_1)$ – Il n'y en a aucun.

## 7.7 – Étude de $U^s \backslash U_0^s$

Les points de $U^s \backslash U_0^s$ sont des plans de $\mathbb{C}^3 \otimes L$ ne contenant que des éléments de longueur 2. La sous-variété fermée $U^s \backslash U_0^s$ de $U^s$ est GL(3)-invariante, donc $\pi(U^s \backslash U_0^s)$ est fermé dans $N(3,3,2)$. Les éléments $P$ de $U^s \backslash U_0^s$ sont de deux types :

Type 1 : pour tout plan $D$ de $L$, $P$ n'est pas contenu dans $\mathbb{C}^3 \otimes D$.

Type 2 : il existe un plan $D$ de $L$ tel que $P \subset \mathbb{C}^3 \otimes D$.

*Étude des éléments de type 1* – Soit $X_4$ l'ensemble des éléments de type 1. Considérons la sous-variété fermée $Z$ de $U^s \times \mathbb{P}(L^*)$ constituée des couples $(P, D)$, $D$ étant un plan de $L$, tels que $P \subset \mathbb{C}^3 \otimes D$. Alors, si $\pi_0$ désigne la projection $U^s \times \mathbb{P}(L^*) \to U^s$, on a $(U^s \backslash U_0^s) \backslash X_4 = \pi_0(Z)$, d'où il découle que $X_4$ est un ouvert de $U^s \backslash U_0^s$, donc une sous-variété localement fermée de $U^s$. Comme $X_4$ est aussi GL(3)-invariante, $\pi(X_4)$ est une sous-variété localement fermée de $N(3,3,2)$.

Soit $P \in X_4$. À tout élément $u$ de $P$ correspond un plan $D_u$ de $L$ : si $u = f_0 \otimes h_0 + f_1 \otimes h_1$, $D_u = \mathbb{C}h_0 \oplus \mathbb{C}h_1$. Si $u' \in P \backslash \mathbb{C}u$, on a $D_u \neq D_{u'}$, car sinon on aurait $P \subset \mathbb{C}^3 \otimes D_u$. Donc $D_u \cap D_{u'}$ est une droite. Puisque $P$ est stable (donc non contenu dans un $D_0 \otimes L$, $D_0$ étant un plan de $\mathbb{C}^3$), on peut écrire

$$u = f_0 \otimes h_0 + f_1 \otimes h_1 \ , \quad u' = f_1 \otimes h_1' + f_2 \otimes h_2' \ ,$$

$(f_0, f_1, f_2)$ étant une base de $\mathbb{C}^3$. Pour tout scalaire $\lambda$, on a

$$u + \lambda u' = f_0 \otimes h_0 + f_1 \otimes (h_1 + \lambda h_1') + f_2 \otimes \lambda h_2' \ ,$$

donc, puisque $P \in X_4$, $h_0$, $h_1 + \lambda h_1'$ et $h_2'$ sont liés. Montrons que $h_0$ et $h_2'$ sont liés. Si tel n'est pas le cas, on peut exprimer, pour tout $\lambda \neq 0$, $h_1 + \lambda h_1'$ en fonction de $h_0$ et $h_2'$. En considérant des valeurs distinctes de $\lambda$, on voit que $h_1$ et $h_1'$, sont des combinaisons linéaires de $h_0$ et $h_2'$. Il en découle que $P \subset \mathbb{C}^3 \otimes (\mathbb{C}h_0 \oplus \mathbb{C}h_2')$. Mais ceci est impossible car $P$ est de type 1. Donc $h_0$ et $h_2'$ sont liés. On peut supposer que $h_0 = h_2'$.

Pour tout $u \in \mathbb{C}^3 \otimes L$, on note $\alpha_u : \mathbb{C}^{3*} \to L$ l'application linéaire associée. Il est clair qu'on a

$$\bigcap_{u \in P} \mathrm{im}(\alpha_u) = \mathbb{C}h_0 \ .$$

En associant $\mathbb{C}h_0$ à $P$ on définit un morphisme GL(3)-invariant $\beta : X_4 \to \mathbb{P}(L)$.

**Lemme 29 :** *Le morphisme $\beta$ induit un isomorphisme* GL$(L)$*-invariant* $\overline{\beta} : X_4 \to \mathbb{P}(L)$.

*Démonstration.* La seule chose qui n'est pas claire est l'injectivité de $\overline{\beta}$.

Soient $P, P' \in X_4$ tels que $\overline{\beta}(P) = \overline{\beta}(P')$. Montrons qu'ils sont dans la même orbite de l'action de GL(3). Il existe des bases $(u_0, u_1, u_2)$, $(w_0, w_1, w_2)$ de $\mathbb{C}^3$, $(h_0, h_1, h_2)$, $(k_0, k_1, k_2)$ de $L$, telles que $k_0 = h_0$, que $P$ soit engendré par $u_0 \otimes h_0 + u_1 \otimes h_1$ et $u_1 \otimes h_2 + u_2 \otimes h_0$, et $P'$ par $w_0 \otimes h_0 + w_1 \otimes k_1$ et $w_1 \otimes k_2 + w_2 \otimes h_0$. On a

$$k_1 = \lambda_1 h_0 + \mu_1 h_1 + \nu_1 h_2 \ , \qquad k_2 = \lambda_2 h_0 + \mu_2 h_1 + \nu_2 h_2 \ ,$$

$\lambda_i, \mu_i, \nu_i$, $i = 1, 2$, étant des scalaires tels que $\mu_1\nu_2 - \nu_1\mu_2 \neq 0$. Alors $P'$ est engendré par $(w_0 + \lambda_1 w_1) \otimes h_0 + w_1 \otimes (\mu_1 h_1 + \nu_1 h_2)$ et $w_1 \otimes (\mu_2 h_1 + \nu_2 h_2) + (w_2 + \lambda_2 w_1) \otimes h_0$. Puisque $\mu_1\nu_2 - \nu_1\mu_2 \neq 0$, $\mu_1 h_1 + \nu_1 h_2$ et $\mu_2 h_1 + \nu_2 h_2$ engendrent $\mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}h_2$. On peut donc trouver des éléments de $P'$ du type

$$w_0' \otimes h_0 + w_1 \otimes h_1 \ , \qquad w_1 \otimes h_2 + w_2' \otimes h_0 \ ,$$

$(w_0', w_1, w_2')$ étant une base de $\mathbb{C}^3$. On a alors $P' = AP$, $A$ étant l'automorphisme de $\mathbb{C}^3$ défini par $A(u_0) = w_0'$, $A(u_1) = w_1$, $A(u_2) = w_2'$. Ceci démontre le lemme 29. □

*Points fixes de $\pi(X_4)$* – Il y en a 3, les points $\mathbb{C}v_0$, $\mathbb{C}v_1$ et $\mathbb{C}v_2$ de $\mathbb{P}(L)$.

*Étude des éléments de type 2* – Soit $X_5$ l'ensemble des éléments de type 2. On a vu que $X_5$ était une sous-variété fermée GL(3)-invariante de $U^s$. Donc $\pi(X_5)$ est une sous-variété fermée de $N(3,3,2)$.

Soit $P \in X_5$. Il existe un plan $D$ de $L$ tel que $P \subset \mathbb{C}^3 \otimes D$. Ce plan est unique car $P$ ne contient pas d'élément décomposable. On a donc un morphisme $\eta : X_5 \to \mathbb{P}(L)$ associant à $P$ le plan $D$.

**Lemme 30 :** *Le morphisme $\eta$ induit un isomorphisme* GL$(L)$*-invariant* $\overline{\eta} : \pi(X_5) \to \mathbb{P}(L^*)$.

*Démonstration.* Comme précédemment, le point délicat est l'injectivité de $\overline{\eta}$. Soient $P, P' \in X_5$, contenus dans $\mathbb{C}^3 \otimes D$ ($D$ étant un plan de $L$). Il faut montrer qu'ils sont dans la même GL(3)-orbite.

Soient $(h_0, h_1)$ une base de $D$, et $(f_0 \otimes h_0 + f_1 \otimes h_1, w_0 \otimes h_0 + w_1 \otimes h_1)$ une base de $P$. Puisque $P$ ne possède pas d'élément décomposable, $f_0$ et $w_0$ (resp. $f_1$ et $w_1$) sont linéairement indépendants. Soit $D_0$ (resp. $D_1$) le plan de $\mathbb{C}^3$ engendré par $f_0$ et $w_0$ (resp. $f_1$ et $w_1$). Alors on a $D_0 \neq D_1$, car sinon $P \subset D_0 \otimes L$, ce qui contredit la stabilité de $P$. Donc $D_0 \cap D_1$ est une droite. On peut supposer que $D_0 \cap D_1 = \mathbb{C}f_0$. Alors $P$ contient un élément du type $k_0 \otimes h_0 + f_0 \otimes h_1$. Donc $P$ est engendré par $f_0 \otimes h_0 + f_1 \otimes h_1$ et $k_0 \otimes h_0 + f_0 \otimes h_1$. De même, $P'$ est engendré par des éléments du type $f'_0 \otimes h_0 + f'_1 \otimes h_1$ et $k'_0 \otimes h_0 + f'_0 \otimes h_1$. On a alors $P' = AP$, $A$ étant l'automorphisme de $\mathbb{C}^3$ défini par $A(f_0) = f'_0$, $A(k_0) = k'_0$, et $A(f_1) = f'_1$. Ceci démontre le lemme 30. □

*Points fixes de $\pi(X_5)$* – Il y en a 3, les points $\mathbb{C}v_0^*$, $\mathbb{C}v_1^*$, $\mathbb{C}v_2^*$ de $\mathbb{P}(L^*)$, $(v_0^*, v_1^*, v_2^*)$ désignant la base de $L^*$ duale de $(v_0, v_1, v_2)$.

*Conclusion* – Il y a en tout 13 points fixes dans $N(3,3,2)$. On peut donc appliquer le théorème de Białynicki-Birula comme indiqué dans l'Introduction. On en déduit aussi $\chi(N(3,3,2)) = 13$, ce qui correspond bien au résultat de 6.2.

### 7.8 – Relations entre $N3,3,2)$ et $\mathrm{Hilb}^3(\mathbb{P}_2)$

On démontre ici le théorème 4.

La variété $\mathrm{Hilb}^3(\mathbb{P}_2)$ est isomorphe à $M(1,0,3)$ : au sous-schéma fini $S$ de $\mathbb{P}_2$ de longueur 3 correspond le faisceau d'idéaux $I_S$ de $S$. Sur $M(1,0,3) \times \mathbb{P}_2$ existe un *faisceau universel* $J$ : en tout point $m$ de $M(1,0,3)$ correspondant au sous-schéma $S$, on a $J_{|\{m\}\times\mathbb{P}_2} \simeq I_S$. Soient $p_M$, $p_2$ les projections $M(1,0,3) \times \mathbb{P}_2 \to M(1,0,3)$ et $M(1,0,3) \times \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$. Les faisceaux

$$\mathbb{H}_i \;=\; R^1 p_{M*}(J \otimes p_2^*(\mathcal{O}(-i)))\ , \qquad i = 0,1,2,$$

sont localement libres, et $\mathrm{rg}(\mathbb{H}_2) = \mathrm{rg}(\mathbb{H}_1) = 3$, $\mathrm{rg}(\mathbb{H}_0) = 2$. Sur $M(1,0,3) \times \mathbb{P}_2$ existe une *monade universelle*

$$p_2^*(\wedge^2 Q^*) \otimes p_M^*(\mathbb{H}_2) \xrightarrow{A} p_2^*(Q^*) \otimes p_M^*(\mathbb{H}_1) \xrightarrow{B} p_M^*(\mathbb{H}_0),$$

telle qu'en chaque $m \in M(1,0,3)$ correspondant au sous-schéma $S$, les restrictions $A_m$ de $A$, $B_m$ de $B$ à $\{m\} \times \mathbb{P}_2$ :

$$A_m : \wedge^2 Q^* \otimes H^1(I_S(-2)) \longrightarrow Q^* \otimes H^1(I_S(-1)) \ , \qquad B_m : Q^* \otimes H^1(I_S(-1)) \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H^1(I_S)$$

soient les morphismes canoniques (cf. [3], prop. 2.3). Le morphisme de faisceaux $A_m$ est injectif, $B_m$ est surjectif, on a $B_m \circ A_m = 0$, et $\ker(B_m)/\operatorname{im}(A_m)$ est isomorphe à $I_S$. Globalement, on a $B \circ A = 0$, et $\ker(B)/\operatorname{im}(A) \simeq J$. Le morphisme $B_m$ définit un $L^*$-module de Kronecker

$$\tau_m : H^1(I_S(-1)) \otimes L^* \to H^1(I_S)$$

(car on a un isomorphisme canonique $H^0(Q) \simeq L$).

**Lemme 31 :** *Le module de Kronecker $\tau_m$ est stable.*

*Démonstration.* Posons $\Gamma = \ker(B_m)$. On a une suite exacte de fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}_2$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H^1(I_S)^* \xrightarrow{{}^tB_m} Q \otimes H^1(I_S(-1))^* \longrightarrow \Gamma^* \longrightarrow 0,$$

d'où la suite exacte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^1(I_S)^* \arrow[r, "H^0({}^tB_m)"] \arrow[d, "\simeq"] & H^1(I_S(-1))^* \otimes L \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & H^0(\Gamma^*) \arrow[r] & 0. \\ & \mathbb{C}^2 & \mathbb{C}^3 \otimes L & & \end{tikzcd}$$

L'image de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^3 \otimes L$ est précisément le plan de $\mathbb{C}^3 \otimes L$ qui correspond à $\tau_m$. D'après le lemme 26, i1 faut montrer que :

(i) Le plan $\mathbb{C}^2$ de $\mathbb{C}^3 \otimes L$ ne contient pas d'élément décomposable non nul.

(ii) Pour tout plan $D$ de $\mathbb{C}^3$, on a $\mathbb{C}^2 \not\subset D \otimes L$.

Démonstration de (i) : Si $\mathbb{C}^2$ contient un élément non nul de $\mathbb{C}^3 \otimes L$ du type $e \otimes v$, le morphisme $B_m$ n'est pas surjectif au point $\mathbb{C}v$ de $\mathbb{P}_2$, ce qui est faux.

Démonstration de(ii) : Supposons que $\mathbb{C}^2 \subset D \otimes L$. On en déduit que $\Gamma^* = E \oplus Q$, $E$ étant le conoyau du morphisme $\mathcal{O} \otimes \mathbb{C}^2 \to Q \otimes D$ déduit de l'inc1usion $\mathbb{C}^2 \subset D \otimes L$. On en déduit que $h^0(Q \otimes \Gamma) > 0$. De la suite exacte

$$0 \longrightarrow \wedge^2 Q^* \otimes H^1(I_S(-2)) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow I_S \longrightarrow 0$$

on déduit qu'on a aussi $h^0(Q \otimes I_S) > 0$, mais ceci est impossible car le schéma des zéros d'une section de Q est réduit à un point simple. Ceci démontre le lemme 31. □

En associant à $m$ la classe du module de Kronecker $\tau_m$ on définit un morphisme $\Phi : M(1,0,3) \to N(3,3,2)$. Ce morphisme est indépendant du choix de $J$. Une étude exhaustive de tous les cas possibles montre qu'on a les correspondances suivantes :

$\pi(X_1)$ : sous-schémas concentrés en un point qui ne sont pas des points doubles et ne sont pas contenus dans une droite.

$\pi(X_2)$ : sous-schémas constitués d'un point simple $x$ et d'un schéma de longueur 2 concentré en un autre point $y$, non contenu dans la droite passant par $x$ et $y$.

$\pi(X_3)$ : ensembles de trois points distincts non alignés. Rappelons que $Y$ désigne l'ouvert de $\mathrm{Hilb}^3(\mathbb{P}_2)$ constitué de ces sous-schémas. La restriction de $\Phi : Y \to \pi(X_3)$ est exactement l'inverse de l'isomorphisme trouvé en 7.4. En particulier, $\Phi$ est un isomorphisme birationnel.

$\pi(X_4)$ : points doubles de $\mathbb{P}_2$.

$\pi(X_5)$ : sous-schémas $Z$ tels qu'il existe une droite de $\mathbb{P}_2$ contenant $Z$. Ces sous-schémas constituent une sous-variété fermée $X$ de $\mathrm{Hilb}^3(\mathbb{P}_2)$. C'est une hypersurface de $\mathrm{Hilb}^3(\mathbb{P}_2)$). Il est aisé de voir que $X$ est un fibré en espaces projectifs sur $\mathbb{P}(L^*)$. Donc $X$ est irréductible.

**Lemme 32 :** *Le morphisme* $\Phi$ *induit un isomorphisme* $\mathrm{Hilb}^3(\mathbb{P}_2)\backslash X \simeq N(3,2,2)\backslash\pi(X_5)$.

*Démonstration.* On va construire un inverse à la restriction de
$\Phi : \mathrm{Hilb}^3(\mathbb{P}_2)\backslash X \to N(3,2,2)\backslash\pi(X_5)$.

Pour cela, il suffit de construire une famille adéquate paramétrée par $\Omega = N(3,2,2)\backslash\pi(X_5)$ de faisceaux d'idéaux de sous-schémas finis de longueur 3 de $\mathbb{P}_2$. Pour cela, on va construire une monade sur $\Omega \times \mathbb{P}_2$ :

$$p_2^*(\wedge^2 Q^*) \otimes p_\Omega^*(K_0) \xrightarrow{A_0} p_2^*(Q^*) \otimes p_\Omega^*(K_1) \xrightarrow{B_0} p_\Omega^*(K_2),$$

$p_\Omega, p_2$ désignant les projections $\Omega \times \mathbb{P}_2 \to \Omega$, $\Omega \times \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$. Les fibrés $K_0$, $K_1$, $K_2$ sur $\mathbb{P}_2$ doivent être de rangs respectifs 3, 3, 2. La famille de faisceaux d'idéaux en question sera $\ker(B_0)/\operatorname{im}(A_0)$.

On construit d'abord $B_0$. Soit $\tau : \mathbb{H}_1 \otimes L^* \to \mathbb{H}_2$ un module de Kronecker universel sur $N(3,3,2)$. On prend $K_i = \mathbb{H}_{i|\Omega}$ pour $i = 1, 2$, $B_0$ étant le morphisme déduit de $\tau$. Pour définir $K_0$ on considère

$$C_0 = B_0 \otimes I_{p_2^*(\mathcal{O}(1))} : p_2^*(Q) \otimes p_\Omega^*(K_1) \longrightarrow p_2^*(\mathcal{O}(1)) \otimes p_\Omega^*(K_2)$$

et $p_{\Omega *}(C_0) : L \otimes K_1 \to L^* \otimes K_2$. Montrons que $p_{\Omega *}(C_0)$ est surjectif. Soit $\omega \in \Omega$. On peut écrire $\omega = \Phi(S)$, avec $S \in \mathrm{Hilb}^3(\mathbb{P}_2)\backslash X$. Le faisceau $I_S$ est isomorphe à la cohomologie d'une monade du type

$$\wedge^2 Q^* \otimes \mathbb{C}^3 \xrightarrow{a} Q^* \otimes \mathbb{C}^3 \xrightarrow{b} \mathcal{O} \otimes \mathbb{C}^2,$$

où $b$ provient de $\omega$. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(\ker(b(1))) \longrightarrow L \otimes \mathbb{C}^3 \xrightarrow{H^0(b(1))} L \otimes \mathbb{C}^2,$$

et $H^0(b(1)) = p_{\Omega *}(C_0)_\omega$. Il faut donc montrer que $H^0(b(1))$ est surjective, c'est à dire que $h^0(\ker(b(1))) = 3$. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \wedge^2 Q^* \otimes \mathbb{C}^3 \longrightarrow \ker(b) \longrightarrow I_S \longrightarrow 0\ ,$$

d'où la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^3 \longrightarrow H^0(\ker(b(1))) \longrightarrow H^0(I_S(1)) \longrightarrow 0\ .$$

Comme $S$ n'est pas contenu dans une droite, on a $h^0(I_S(1)) = 0$, donc on a bien $h^0(\ker(b(1))) = 3$. Ceci montre que $p_{\Omega *}(C_0)$ est surjectif.

On prend maintenant $K_0 = \ker(p_{\Omega *}(C_0))$. De l'inclusion $K_0 \to L \otimes K_1$ on déduit le morphisme $A_0$ et la monade est complète.

Si $\omega \in \Omega$, et si $S$ est un point de $\mathrm{Hilb}^3(\mathbb{P}_2)$ tel que $\Phi(S) = \omega$, la démonstration précédente montre que les monades $(A_{0\omega}, B_{0\omega})$ et $(A_S, B_S)$ sont isomorphes, donc si $\Psi : \Omega \to \mathrm{Hilb}^3(\mathbb{P}_2)\backslash X$

est le morphisme déduit de $\ker(B_0)/\operatorname{im}(A_0)$, $\Psi$ est bien l'inverse de $\Phi$. Ceci démontre le lemme 32. $\square$

On a donc un morphisme birationnel $\Phi : \mathrm{Hilb}^3(\mathbb{P}_2) \to N(3,3,2)$ induisant un isomorphisme $\mathrm{Hilb}^3(\mathbb{P}_2)\backslash X \simeq N(3,3,2)\backslash\pi(X_5)$. De plus, $X$ est une hypersurface irréductible de $\mathrm{Hilb}^3(\mathbb{P}_2)$. Soit $\widehat{N}$ l'éclalement de $\pi(X_5)$ dans $N(3,3,2)$. On déduit de $\Phi$ un morphisme

$$\widehat{\Phi} : \mathrm{Hilb}^3(\mathbb{P}_2) \longrightarrow \widehat{N} \ .$$

Pour voir que c'est un isomorphisme, il suffit de remarquer comme dans [15], 6, que les deux variétés en question ont même groupe de Picard, car $\mathrm{Pic}(N(3.3.2)) \simeq \mathbb{Z}$ d'après [5], tandis que $\mathrm{Pic}(\mathrm{Hilb}^3(\mathbb{P}_2)) \simeq \mathbb{Z}^2$ d'après [9]. Ceci démontre le théorème 4.

## Références


[1] Atiyah, M.F., Bott, R. *The Yang-Mills equations over Riemann Surfaces.* Phil. Trans. Roy. Soc. London A 308 (1982), 523-615.

[2] Białynicki-Birula, A. *Some theorems on actions of algebraic groups.* Ann. of Math. 98 (1973), 480-497.

[3] Borevitch, Z.I., Chafarevitch, I.R. : *Théorie des nombres.* Paris, Gauthier-Villars (1967).

[4] Drézet, J.-M. *Fibrés exceptionnels et suite spectrale de Beilinson généralisée sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Math. Ann. 275 (1986), 14-58.

[5] Drézet, J.-M. : *Fibrés exceptionnels et variétés de modules de faisceaux semi-stables sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Journ. Reine angew. Math. 380 (1987), 14-58.

[6] Drézet, J.-M. *Groupe de Picard des variétés de modules de faisceaux semi-stables sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Ann. Inst. Fourier 38 (1988), 105-168.

[7] Drézet, J.-M. *Groupe de Picard des variétés de modules de faisceaux semi-stables sur* $\mathbb{P}_2$. Proc. of Singularities, Representations or Algebras and Vector Bundles (1985). Lect. Notes Math. 1273 (1987) Springer.

[8] Drézet,J.-M., Le Potier, J. *Fibrés stables et fibrés exceptionnnels sur* $\mathbb{P}_2$. Ann. Éc. Norm. Sup. 18 (1985), 193-244.

[9] Ellingsrud, G., Strømme, S.A. *On the homology of the Hilbert scheme of points in the plane.* Invent. Math. 87 (1987), 343-352.

[10] Fulton, W. *Intersection Theory.* Ergeb. der Math. und ihre Grenzg. (1984) Springer.

[11] Gieseker, D. *On the moduli of vector bundles on an algebraic surface.* Ann. of Math. 106 (1977), 45-60.

[12] Hirschowitz, A. *Rank techniques and jump stratifications.* Vector bundles on algebraic varieties (Bombay, 1984). Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math. 11, T.I.F.R, Bombay (1987), 159-205.

[13] Hulek, K. *On the classification of stable rank-r vector bundles over the projective plane.* Vector bundles and differential equations. Progress In Math. 7 (1981), Birkhäuser, 113-144.

[14] Le Potier, J., Verdier. J.-L. (eds.) *Module des fibrés stables sur les courbes algébriques.* Progress in Math. 54 (1985), Birkhäuser.

[15] Le Potier, J. *Variétés de modules de faisceaux semi-stables de rang élevé sur* $\mathbb{P}_2$. Algebraic geometry (Bowdoin 1985). Proc. Sympos. Pure Math. 46, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1987), 87-100.

[16] Maruyama, M. *Moduli of stable sheaves II.* J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978), 557-614.

[17] Mumford, D., Fogarty, J. *Geometric Invariant Theory.* Ergeb. der Math. Wiss. 34 (1982), Springer.

[18] Seshadri, C.S. *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques.* Astérisque 96 (1982).

**Note :** Ce texte reproduit l'article

*Cohomologie des variétés de modules de hauteur nulle.* Math. Ann. 281 (1988), 43-85.

avec quelques corrections d'erreurs mineures et des améliorations dans la rédaction et la bibliographie.

D'autres résultats plus récents permettent d'obtenir par d'autres moyens la cohomologie (ou l'anneau de Chow) des variétés $N(q, m, n)$ (ainsi que d'autres quotients) :

Ellingsrud, G., Strømme, S.A. *On the Chow ring of a geometric quotient.* Ann. of Math. 130 (1989), 159-187.

Reineke, M. *The Harder-Narasimhan system in quantum groups and cohomology of quiver moduli.* Invent. math. 152 (2003), 349-368.

Le cas de $N(3, 4, 3)$ a été traité par la méthode de Białynicki-Birula dans

Maican, M. *The homology groups of certain moduli spaces of plane sheaves.* Intern. Journ. of Math. 12 (2013), 1350098.

Institut de Mathématiques de Jussieu, Case 247, 4 place Jussieu, F-75252 Paris, France

*E-mail address*: drezet@math.jussieu.fr