



**HAL**  
open science

# La théorie des coniques chez Poncelet, Steiner et von Staudt

P Nabonnand

► **To cite this version:**

P Nabonnand. La théorie des coniques chez Poncelet, Steiner et von Staudt. R. Rashed & P. Crozet. Les Courbes :histoire d'un concept, Blanchard, 2012. hal-01079478

**HAL Id: hal-01079478**

**<https://hal.science/hal-01079478>**

Submitted on 2 Nov 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# La théorie des coniques chez Poncelet, Steiner et von Staudt

P. Nabonnand

Nancy-Université – LHSP-Archives Poincaré

La pratique de la géométrie pure change radicalement en cinquante années entre la fin du 18<sup>e</sup> siècle et la première moitié du 19<sup>e</sup> siècle. Entre une géométrie « hérissée de figures » selon la célèbre expression de Chasles<sup>1</sup> et celle présentée dans le *Traité de Géométrie supérieure*<sup>2</sup> ce n'est pas seulement les méthodes qui sont radicalement renouvelées mais aussi la conception globale que les géomètres se font de leur discipline. On passe d'une géométrie vue comme discipline centrée autour de la figure à une géométrie conçue comme la théorie mathématique de l'espace.

Dans la présentation de leurs innovations en géométrie, Carnot, Poncelet, Chasles, Steiner ou von Staudt présentent les travaux antérieurs des géomètres purs comme l'étude successive de problèmes relatifs à des figures particulières et par conséquent ayant peu de rapports entre eux. En même temps que l'exigence de procédures de démonstration plus générales impliquant des énoncés concernant des propriétés elles-mêmes générales, émerge l'idée que le corpus des énoncés géométriques se doit d'être structuré en théories elles-mêmes organisées autour de principes fondamentaux. Déjà, Carnot exprimait ce changement radical de conception du travail géométrique lorsqu'il affirmait que son intention n'était pas d'ajouter de nouveaux résultats particuliers à la géométrie mais plutôt de parvenir à des résultats généraux d'où l'on pourrait dériver les propositions particulières. De même, Poncelet<sup>3</sup> qui annonce qu'il ne sera question dans son travail que de propriétés qui auront toute la généralité possible puisque « ces propriétés renferment implicitement toutes les autres »<sup>4</sup>. Chasles est sûrement celui qui exprime la volonté de constituer des théories générales s'appuyant sur quelques principes fondamentaux comme celles des figures homographiques ou corrélatives.

En même temps que l'on passe d'une *géométrie des problèmes* à des *théories géométriques*, on assiste à un effacement progressif de la figure. Le lien entre figure particulière et propriété géométrique est conservé par Carnot dont l'objectif est justement de ne considérer en dernière instance que des propriétés explicites, c'est-à-dire applicables à une figure particulière. Ce lien se dissout chez Poncelet grâce à l'admission du principe de continuité qui est effectivement un principe de permanence des propriétés au-delà de la position relative des éléments de la figure et même de l'existence effective de certains de ces éléments. En présentant la géométrie comme un ensemble de théories, Chasles, après Steiner, efface les figures au sens propre<sup>5</sup> comme au sens figuré. Le géomètre ne se confronte plus à une configuration particulière mais au contraire s'intéresse à la manière dont certaines formes peuvent être liées : il est symptomatique que Chasles subordonne l'étude des lignes droites, des cercles ou des sections coniques à celle des relations homographiques entre les points d'une droite ou les droites d'un faisceau et des relations.

Carnot et Poncelet pratiquaient la géométrie comme l'étude des propriétés des figures ; Steiner et à sa suite von Staudt proposent une autre conception de la géométrie en la centrant autour de l'étude des formes fondamentales de la géométrie que sont la ponctuelle, le plan (vu

---

<sup>1</sup> Chasles 1837a, p. 208.

<sup>2</sup> Chasles 1852.

<sup>3</sup> Poncelet 1818.

<sup>4</sup> Poncelet 1818, p. 298.

<sup>5</sup> Dans son *Traité de géométrie supérieure* [Chasles 1852], comme dans ses mémoires précédents [Chasles 1837b], Chasles ne fait pas explicitement référence à des figures et ses ouvrages n'en comportent aucune. De même pour celui de Steiner [1832].

comme ensemble de points et de droites), les faisceaux et les gerbes de droites et de plans. Les notions fondamentales, les concepts généraux ne sont plus définis en termes de problèmes rapportés à des figures géométriques mais comme des moyens d'analyser les relations entre les formes. Ainsi, la notion de projection est définie comme une relation entre les éléments de formes de même espèce et non plus comme liant entre elles deux figures. Un tel renversement de perspective a bien entendu une influence sur le statut des théories géométriques ; ce sera particulièrement le cas de la théorie des coniques qui va progressivement passer de théorie emblématique de la géométrie – on peut défendre l'idée qu'une grande part de la géométrie jusqu'au début du 19<sup>e</sup> siècle a consisté à améliorer la théorie des coniques<sup>6</sup> – à un statut subalterne d'application de la théorie des polarités.

Nous nous proposons de suivre l'histoire de la pratique de la géométrie synthétique à partir de la théorie des coniques chez Poncelet, Steiner et von Staudt.

### **La théorie des coniques de Poncelet**

La motivation des travaux géométriques de Poncelet est de donner à la géométrie pure la même puissance de généralité que celle acquise depuis le 18<sup>e</sup> siècle par la géométrie analytique. Comme la généralité est inhérente à l'objet étudié, son ambition est de définir des méthodes générales en géométrie pure. Comme la généralité relève de la notion de grandeur figurée (opposée à la grandeur absolue), il affirme que la géométrie pure doit en même temps doit changer d'objet d'étude ; il ne s'agit plus d'étudier les propriétés absolues de figures particulières mais de s'intéresser aux propriétés générales de la grandeur figurée.

Les outils qu'il met en œuvre sont le principe de continuité et des principes de projection :

« Toutes les relations ou propriétés qui subsistent à la fois dans la figure donnée et dans ses projections seront appelées également *relations* ou *propriétés projectives*. »<sup>7</sup>

Les principes de projection s'obtiennent à partir de la règle heuristique selon laquelle « il résulte de la nature même des *propriétés projectives*, telles qu'elles ont été définies, que, voulant établir une semblable propriété sur une figure donnée, il suffira de démontrer qu'elle a lieu pour l'une quelconques de ses projections. »<sup>8</sup> Le principe de continuité vise à étendre une propriété à une classe plus générale de figure alors que les principes de projections ont plutôt pour fonction de faciliter et d'abrégé les recherches géométriques en se ramenant à une figure ou à un cas plus simple :

« Par exemple, la figure renfermant, en particulier, une section conique, pourra être regardée comme la projection d'une autre, pour laquelle la section conique sera remplacée par une circonférence de cercle ; et cette seule remarque suffira pour ramener les questions les plus générales, sur les sections coniques, à d'autres qui soient purement élémentaires. »<sup>9</sup>

Poncelet reprend la définition traditionnelle des coniques comme section d'un cône à base circulaire. Une telle définition est cohérente avec le point de vue adopté par Poncelet, puisque avec son vocabulaire, une conique est la projection d'un cercle. De ce point de vue, puisque le degré des courbes -- le nombre maximal de points d'intersection entre la courbe considérée et une droite -- est une propriété projective comme toutes les propriétés d'incidence, une section conique est une courbe du second degré. La compatibilité de la définition traditionnelle des coniques avec la notion d'élément à l'infini introduite par Poncelet est remarquable ; en effet,

---

<sup>6</sup>Pour prouver la pertinence de son point de vue, Poncelet n'envisage pas d'autre moyen que de montrer qu'il peut à partir de celui-ci développer la théorie des coniques.

<sup>7</sup> Poncelet 1822, 5.

<sup>8</sup> Poncelet 1822, 50.

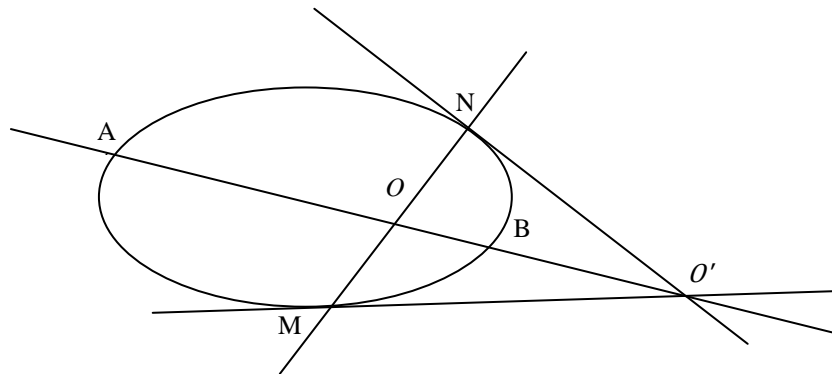
<sup>9</sup> Poncelet 1822, 50.

la classification des coniques s'exprime harmonieusement et s'interprète géométriquement de manière lumineuse en terme d'éléments à l'infini, puisque l'*ellipse*, section conique obtenue lorsque le plan sécant rencontre toutes les arêtes du cône, est une courbe fermée (sans point à l'infini), la *parabole*, section conique obtenue lorsque le plan sécant est parallèle à une arête du cône, contient un point à l'infini et l'*hyperbole*, section conique obtenue lorsque le plan sécant est parallèle à deux arêtes du cône, contient deux points à l'infini.

Poncelet retrouve les propriétés classiques du centre, des axes, des diamètres conjugués et des asymptotes des sections coniques à partir des théorèmes d'involution, présentés comme des exemples de propriétés projectives. Il en déduit en particulier que si  $MN$  est une corde d'une ellipse (ou d'une hyperbole),  $AB$  son diamètre conjugué (le lieu des milieux des cordes parallèles à  $MN$ ) et  $O$  le milieu de  $MN$ , alors le point  $M$  de la conique vérifie

$$OM^2 = p \cdot OA \cdot OB$$

où le paramètre  $p$  est égal au « rapport inverse du carré de ce diamètre à celui qui lui est conjugué »<sup>10</sup>. En particulier, deux coniques semblables ont même paramètres ; le paramètre associé à un cercle est toujours égal à 1.



Lorsque la sécante est réelle – les points d'intersection  $M$  et  $N$  de la droite et de la conique sont des points réels –, le milieu (ou centre selon le vocabulaire de Poncelet)  $O$  de la corde  $MN$  est donc situé sur le diamètre conjugué  $AB$  à la direction définie par la droite  $MN$ . Le point  $O'$  qui est le quatrième harmonique des points  $A, B, O$  est le point d'intersection des tangentes à la conique en  $M$  et  $N$ . Poncelet reprend les dénominations usuelles et désigne le point  $O'$  comme le pôle de la droite  $MN$  par rapport à la conique et la droite  $MN$  comme la polaire du point  $O'$  par rapport à la conique. Si la sécante est idéale – les points d'intersection  $M'$  et  $N'$  de la droite et de la conique sont alors dits imaginaires –, la corde  $M'N'$  est dite imaginaire, le point d'intersection  $O'$  de la sécante et de la droite conjuguée à celle-ci joue le même rôle que le milieu de la corde lorsque celle-ci est réelle. Poncelet propose d'appeler ce point le centre idéal de la corde imaginaire  $M'N'$ .<sup>11</sup> Le conjugué harmonique  $O$  de  $O'$  par rapport aux extrémités du diamètre conjugué à la direction de la sécante est aussi considéré comme le point de « concours idéal des tangentes imaginaires qui correspondent aux extrémités de cette corde »<sup>12</sup>. L'introduction de la notion de sécante idéale permet à Poncelet de développer la théorie des coniques supplémentaires et à partir de là, la théorie de la polarité ; les points  $M$  et  $N$  de la sécante qui vérifient la relation

$$O'M^2 = p \cdot O'A \cdot O'B$$

<sup>10</sup> Poncelet 1822, 20.

<sup>11</sup> Un objet idéal est un objet réel qui a des relations avec des éléments imaginaires.

<sup>12</sup> Poncelet 1822, 27.

déterminent sur la sécante un segment réel que Poncelet propose d'appeler une corde idéale.<sup>13</sup> Les extrémités des cordes idéales parallèles à la sécante initiale forment une section conique dite supplémentaire par rapport à la direction de la sécante.

La théorie des coniques repose sur une série de principes de projection comme celui concernant la figure composée d'une conique et d'une droite :

« Une figure plane quelconque, où entrent une certaine droite et une section conique, peut en général, être regardée comme la projection d'une autre, pour laquelle la droite est passée entièrement à l'infini, et la section conique est devenue une circonférence de cercle. »<sup>14</sup>

Tout problème concernant une droite et une conique peut donc être ramené au cas où la conique est un cercle et la droite est envoyée à l'infini. La démonstration de ce principe consiste à résoudre le problème géométrique suivant :

Étant données une section conique  $\mathcal{C}$  et une droite  $MN$ , située à volonté sur son plan, trouver un centre et un plan de projection tels que la droite donnée  $MN$  soit projetée à l'infini sur ce plan, et que la section conique soit en même temps représentée par un cercle.<sup>15</sup>

La résolution de ce problème s'appuie sur des propriétés métriques classiques des coniques et suppose évidemment que la droite  $MN$  ne rencontre pas la conique puisque la droite à l'infini ne coupe évidemment pas la circonférence. Dans le vocabulaire de Poncelet,  $MN$  doit donc être une sécante idéale de la conique. De plus, si on détermine sur la droite la corde idéale (notée  $MN$ ) à la conique, le segment  $SO$  défini par le milieu  $O$  de cette sécante et le centre de projection  $S$  a une longueur égale à la demi-sécante et est perpendiculaire à celle-ci. En effet, par construction

$$OM^2 = p \cdot OA \cdot OB,$$

et  $MN$  reste une sécante idéale pour chacune des sections coniques définies par les plans du faisceau de plans<sup>16</sup> passant par la droite  $MN$  et le cône de sommet  $S$  et de base, la conique initiale  $\mathcal{C}$ . A la limite, lorsque le plan du faisceau passe par le sommet  $S$  du cône, la conique peut être regardée « comme une section infiniment petite, semblable à celle qu'on obtiendrait par un plan quelconque parallèle au sien ». Comme le problème impose que le plan  $SOM$  soit parallèle à celui d'une section circulaire du cône, on en déduit que

$$OM^2 = OS^2$$

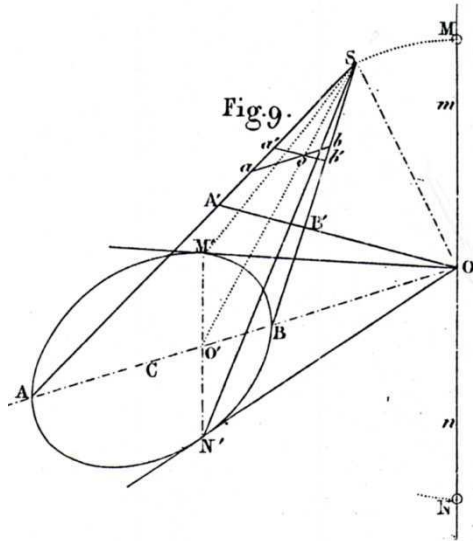
et que  $OS$  est orthogonal à la droite  $MN$ .

<sup>13</sup> Une corde idéale d'une conique est un segment réel alors qu'une corde imaginaire est un segment imaginaire.

<sup>14</sup> Poncelet 1822, 53.

<sup>15</sup> Poncelet 1822, 53.

<sup>16</sup> La dénomination « faisceau de plans » n'est pas utilisée par Poncelet. Elle est par contre introduite par Steiner comme une des formes fondamentales.



La figure de référence du problème [Poncelet 1922]

Poncelet exprime la solution du problème géométrique par le théorème :

Le centre auxiliaire de projection doit se trouver sur une circonférence de cercle, décrite du milieu de la corde idéale qui répond à la droite donnée, comme centre, avec un rayon égal à la moitié de cette corde, et dans un plan qui lui soit perpendiculaire.<sup>17</sup>

Le problème géométrique est donc résolu « pour une série de positions générales et indéterminées de la droite » et n'a pas de solution (réelle) « pour une autre série de positions semblables de la même droite ». Dans le vocabulaire de Poncelet, la solution devient *idéale* lorsque que le problème n'a pas de solution réelle puisque l'énoncé de cette solution dans ce cas met en œuvre des éléments imaginaires. Poncelet précise que « c'est dans ce sens seulement qu'[il a] entendu dire, dans l'énoncé, que le principe avait lieu en général »<sup>18</sup>. La propriété énoncée dans le principe de projection ne sera donc démontrée rigoureusement que pour la première série de positions et cessera de l'être pour la seconde. Pour autant, aux yeux de Poncelet, il ne faut pas en conclure que « l'objet des raisonnements primitifs étant devenu illusoire, la propriété ait par-là même cessé de subsister »<sup>19</sup>. En effet, en vertu du principe de continuité, Poncelet propose de regarder comme générales et applicables à tous les cas possibles, les propriétés géométriques qu'il sera possible de déduire des principes de projection même si ceux-ci peuvent « cesser d'avoir lieu géométriquement pour certaines dispositions de la figure, et qu'en conséquence sa projection pût devenir imaginaire »<sup>20</sup>. Ainsi, les propriétés de deux cercles concentriques s'étendent aussi à deux coniques qui ont un double contact bien qu'il n'y ait pas de projection réelle qui projette ces deux figures l'une sur l'autre.

Le contenu de la théorie des coniques chez Poncelet reste par certains côtés très classiques. Sa place dans le dispositif théorique de Poncelet est par contre originale : il s'agit moins de développer la théorie des coniques (même si les contributions de Poncelet comme son « grand théorème » sont significatives) que de se servir de cette théorie emblématique pour montrer l'utilité du principe de continuité et du point de vue projectif.

<sup>17</sup> Poncelet 1822, 54.

<sup>18</sup> Poncelet 1822, 54.

<sup>19</sup> Poncelet 1822, 66.

<sup>20</sup> Poncelet 1822, 67.

## La théorie des coniques de Steiner

L'objectif explicite de Steiner<sup>21</sup> dans son traité *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität* est :

- d'exposer et d'organiser de manière systématique le corpus de la géométrie ancienne et moderne,
- de structurer son travail autour d'un certain nombre de propriétés fondamentales qui renferment « le germe de tous les théorèmes, porismes et problèmes de la géométrie »,
- de trouver un fil directeur et une origine commune à toutes les théories géométriques qui sont séparées les une des autres,
- de déterminer les éléments et leurs relations, à partir desquels on pourra appréhender la manière de procéder de la « Nature » pour « conférer une infinité de propriétés le plus économiquement et le plus simplement possible ».

« En s'appropriant convenablement les quelques relations fondamentales, on se rend maître de la totalité du sujet ; l'ordre pénètre dans le chaos, et on voit comment toutes les parties sont naturellement liées entre elles, comment elles s'alignent dans le plus bel ordre et comment celles qui ont des affinités se combinent en des groupes bien délimités. »<sup>22</sup>

Les relations fondamentales sur lesquelles Steiner entend faire reposer tout l'édifice de la géométrie sont les relations projectives entre formes fondamentales.<sup>23</sup> Il distingue dans un premier temps comme forme fondamentale, la *droite* en tant que support d'une infinité de points, les *faisceaux* (plans) *de rayons* et les *faisceaux de plans*. Une droite et un faisceau plan de rayons coplanaires sont dits *en situation perspective* si la droite intersecte les rayons du faisceau et si chaque rayon du faisceau est associé à son point d'intersection avec la droite. Une droite et un faisceau plan de rayons coplanaires sont dits *en situation oblique* s'ils peuvent être ramenés par un mouvement des deux formes à une situation perspective. Steiner introduit la notion de birapport et montre que cette notion est conservée par perspective, soit :

Théorème [Caractère projectif du birapport] Étant donné une droite et un faisceau plan en perspective, soit  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  quatre points de la droite et  $a, b, c, d$  les quatre droites correspondantes du faisceau, alors :

$$\frac{\alpha\delta}{\beta\delta} : \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} = \frac{\sin ad}{\sin bd} : \frac{\sin ac}{\sin bc}$$

Steiner en déduit une nouvelle caractérisation de la notion de relation projective entre formes : une relation projective est une relation qui conserve les birapports :

« Si les éléments de deux formes sont appariés de telle manière que les birapports définis par quatre éléments quelconques de la première forme soient égaux aux birapports définis par les quatre éléments de la seconde forme, [...] alors les formes sont projectives par rapport à toutes ces paires d'éléments. »<sup>24</sup>

Il déduit de cette seconde caractérisation des relations projectives une propriété que l'on désignera plus tard comme le *théorème fondamental de la géométrie projective* :

---

<sup>21</sup> Steiner 1832.

<sup>22</sup> Steiner 1832, I-4.

<sup>23</sup> Une relation projective entre deux formes associe deux à deux les éléments des formes alors que chez Poncelet la notion de projection associait les constituants d'une figure.

<sup>24</sup> Steiner 1832, I-38.

« Le système complet des paires d'éléments correspondants entre eux de deux formes [...] projectives est déterminé dès que trois paires quelconques sont données [...]. »<sup>25</sup>

Steiner se doit aussi de développer à partir de son point de vue la théorie des coniques ; elle apparaît comme la réponse à une question naturelle concernant les formes projective~; en effet, les droites joignant les points correspondants de deux droites en situation perspective (les *rayons projetants*) définissent un faisceau de rayons. De même, les points en lesquels se coupent les rayons correspondants de deux faisceaux en situation perspective définissent une droite. Il est donc naturel de se demander quel est le lieu défini par les rayons de projection de deux droites en situation oblique ou encore quel est le lieu défini par les points en lesquels se coupent les rayons correspondants de deux faisceaux en situation oblique. Dans son traité de 1832, Steiner reprend la définition des coniques comme sections d'une surface conique par un plan et la classification en terme de points à l'infini. Il montre simplement que l'on peut engendrer projectivement les coniques.<sup>26</sup> Sa théorie repose sur deux théorèmes qualifiés par Steiner de *classiques*, qui sont des conséquences directes de sa théorie des relations projectives entre formes :

Deux tangentes quelconques d'un cercle sont projectives par rapport aux paires de points en lesquelles elles sont coupées par les autres tangentes.

De manière duale, deux points quelconques d'un cercle sont les centres de deux faisceaux de rayons projectifs dont les rayons correspondants se coupent en les autres points du cercle.

Steiner étend ces théorèmes aux cônes du second degré et donc aux autres sections de ces cônes :

Deux tangentes quelconques d'une section coniques sont projectives par rapport aux paires de points en lesquelles elles sont coupées par les autres tangentes.

De manière duale, deux points quelconques d'une section conique sont les centres de deux faisceaux de rayons projectifs dont les rayons correspondants se coupent en les autres points du cercle.

La réciproque de ces théorèmes montre que l'on peut engendrer projectivement les coniques, c'est-à-dire voir les coniques comme enveloppées par les rayons de projections de deux droites projectives en situation oblique ou encore engendrées point par point par points d'intersection des droites correspondantes de deux faisceaux de rayons projectifs en situation oblique :

« Deux droites quelconques [...] en situation oblique dans un plan engendrent une section conique qu'elles touchent, c.-à-d. elles et tous leurs rayons de projection sont les tangentes d'une section conique déterminée.

Deux faisceaux (plans) de rayons [...] en situation oblique dans un plan engendrent une section conique qui passe par leurs centres, c.-à-d. ceux-ci et les points d'intersection de

---

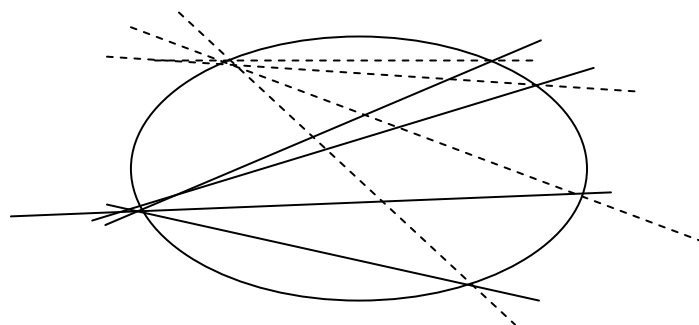
<sup>25</sup> Steiner 1832, I-18.

<sup>26</sup> Plus tard, dans ses leçons, il abandonnera la définition traditionnelle pour celle résultant de sa théorie de l'engendrement projectif des coniques :

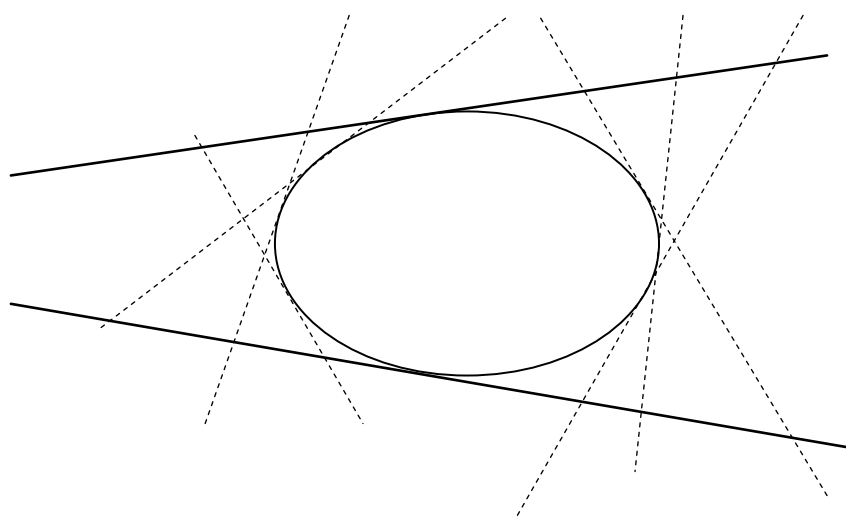
Dans le mémoire précité [*Systematische Entwicklung*], les coniques sont déduites, à la manière ancienne, à partir du cône qui a un cercle comme base. Bien que je sentais nettement déjà à l'époque l'inadéquation de cette méthode, je croyais alors devoir suivre celle-ci pour ne pas trop m'éloigner de la voie habituelle. Cependant, que l'on soit obligé d'affirmer la réciproque d'un théorème -- à savoir celle du théorème selon lequel un cône du 2<sup>e</sup> degré peut être intersecté en un cercle par un plan -- montrait la nécessité d'abandonner cette manière de présenter et d'en découvrir une adaptée à la question. » [Steiner 1867, VI].



leurs paires de rayons correspondants sont les points d'une section conique déterminée. »<sup>27</sup>



Conique engendrée par les points d'intersection de deux faisceaux de rayons projectifs



Conique engendrée par les rayons de projections de deux droites projectives

Dans les *Leçons de Géométrie synthétique* (publiées en 1867 par Schröter), le point de vue adopté par Steiner est plus systématique : de nouveau, Steiner présente sa théorie comme une généralisation d'une propriété des formes en situation perspective à celles en situation oblique ; ainsi, les rayons de projection de deux droites en situation perspective se coupent en un même point. Steiner montre que dans le cas où les droites sont en position oblique, « il y a [...] deux domaines dans le plan ; le premier ne contient que des points P par lesquels passent deux rayons de projection, le second par lesquels il n'en passe aucun~; les deux domaines sont séparés par le lieu des points pour lesquels il n'y a qu'un rayon de projection passant par eux »<sup>28</sup>

Deux droites projectives en situation oblique définissent donc deux domaines, le premier engendré par les rayons de projection et le second au contraire constitué de points par lesquels ne passe pas de rayon de projection. La frontière entre ces deux domaines est une courbe enveloppée par les rayons de projection des droites projectives qui ne possèdent qu'un seul point commun avec chacun des rayons de projection tout en étant le lieu des points de contact :

<sup>27</sup>Steiner 1832, II-12.

<sup>28</sup> Steiner 1867, 87.

« Nous appelons ces courbes définies comme engendrées par deux ponctuelles projectives des *sections coniques*.<sup>29</sup>

Comme par les points du premier domaine, il passe deux rayons de projection, par ceux de la courbe, un seul et par ceux du second domaine aucune, la courbe est dite de *seconde classe* par Steiner. Il énonce comme corollaire de sa définition des coniques que deux tangentes quelconques d'une section conique sont coupées par l'ensemble des autres tangentes en deux ponctuelles projectives. Il retrouve surtout le théorème de Brianchon :  
Si six tangentes quelconques d'une section conique sont réunies en hexagone simple, alors les trois diagonales principales de celui-ci se coupent en un même point.

La théorie des coniques est devenue un chapitre de l'étude des relations projectives entre formes fondamentales.

### La théorie des coniques de von Staudt

Une des motivations essentielles des travaux de von Staudt<sup>30</sup> est de radicaliser le point de vue de Steiner~: von~Staudt vise à fonder la géométrie sur la seule considération des relations projectives entre formes sans faire appel, au contraire de ses prédécesseurs, à la notion de mesure<sup>31</sup> :

« J'ai cherché dans ce travail à établir la géométrie de position comme une science autonome dans laquelle il n'y aurait pas besoin de la mesure. »<sup>32</sup>

Von Staudt systématise la présentation des formes fondamentales en les classant en trois espèces : les formes fondamentales de première espèce sont les *ponctuelles*, les *faisceaux de rayons coplanaires* et les *faisceaux de plans coaxiaux*, celles de seconde espèce, les *systèmes plans* et les *gerbes* de plans et droites, et celle de troisième espèce, le *système-espace*. Von Staudt définit de manière purement géométrique la notion d'harmonie : les ponctuelles harmoniques et les faisceaux harmoniques sont définis à partir du théorème du quadrangle complet :

Si trois points A, B, C d'une droite sont donnés, et si l'on construit un quadrangle de telle manière qu'une diagonale passe par le deuxième des points donnés et qu'en chacun des autres points, deux côtés opposés se coupent, alors l'autre diagonale du quadrangle coupera la droite en un quatrième point D, qui est déterminé par les trois points donnés et s'appelle le *quatrième harmonique* de ceux-ci.<sup>33</sup>

La notion de *correspondance* entre formes est définie de manière ensembliste, c'est-à-dire en assignant à chaque élément d'une des formes un élément de l'autre forme que von Staudt appelle son correspondant. Les premiers exemples évoqués par von Staudt sont les sections, les projections, et la composition des sections et projections. Les correspondances projectives entre formes de première espèce (*uniformes*) sont celles qui conservent l'harmonie :  
Deux formes fondamentales uniformes sont dites *projectives* entre elles si elles sont rapportées l'une à l'autre de telle manière qu'à toute forme harmonique de l'une corresponde une forme harmonique de l'autre.<sup>34</sup>

---

<sup>29</sup> Steiner 1867, 88.

<sup>30</sup> Staudt 1847, Staudt 1856, Staudt 1857, Staudt 1860.

<sup>31</sup> Une caractéristique des traités de von Staudt est de ne comporter aucune figure.

<sup>32</sup> Staudt 1847, III.

<sup>33</sup> Staudt 1847, 43.

Le théorème du quadrangle complet se montre directement à partir du théorème de Desargues; en dimension supérieure ou égale à trois, c'est donc un théorème qui découle des seules hypothèses ordinaires d'incidence.

<sup>34</sup> Staudt 1847, 49.

La notion de correspondance projective est donc ainsi définie uniquement à partir des hypothèses d'incidence et en particulier, indépendamment de toute considération de mesure. Von Staudt établit immédiatement une propriété qui lui permet de montrer qu'il retrouve la définition de Poncelet des correspondances projectives, comme composition de perspectives<sup>35</sup> :

Si deux formes fondamentales uniformes projectives ont trois éléments correspondants communs alors tous les points sont correspondants communs.<sup>36</sup>

Cette proposition qui, comme l'a vu, a déjà été énoncée par Steiner, se révèle être essentielle pour le développement de von Staudt puisque c'est à partir de celle-ci que sera définie la notion d'involution sur laquelle repose non seulement la théorie des conique mais aussi la théorie des jets qui permet d'introduire algébriquement la notion de birapport et de coordonnées projectives. Elle sera désignée plus tard par Klein comme le *théorème fondamental de la géométrie projective*.<sup>37</sup>

Une fois établie la théorie des correspondances projectives des formes de première espèce, von Staudt se tourne vers les correspondances entre formes de seconde espèce (ou de troisième espèce) : il distingue celles qui respectent les rapports d'incidence de celles qui les inversent :

Deux formes fondamentales de deuxième espèce ou encore deux systèmes-espace sont dits *collinéaires* (resp. *réciproques*) s'ils sont rapportés l'un à l'autre de telle manière que deux éléments  $P, q$  d'espèces différentes du premier système, tels que  $P$  soit situé sur  $q$ , correspondent à deux éléments  $P_1, q_1$  d'espèce différente du second système, tels que  $P_1$  soit également situé sur  $q_1$  (resp. passe par  $q_1$ ).<sup>38</sup>

Comme les correspondances collinéaires ou réciproques respectent ou inversent les relations d'incidence, elles conservent (ou dualisent) la configuration du quadrangle complet ; en conséquence, « deux systèmes, qui sont soit collinéaires, soit réciproques, sont aussi dits projectifs entre eux, puisque dans les deux cas, à chaque forme harmonique du premier système, correspond une forme harmonique du second, et donc deux quelconques formes uniformes homologues sont projectives ». <sup>39</sup> Il s'ensuit en particulier que deux formes fondamentales de deuxième espèce collinéaires qui admettent quatre éléments fixes tels que trois d'entre eux n'appartiennent pas à une même forme uniforme se correspondent

---

Von Staudt introduit en même temps que cette définition le signe  $\sim$  pour désigner les relations projectives.

<sup>35</sup> D'un point de vue systématique, il y a trois manières de définir la notion de transformations projectives entre formes fondamentales coplanaires (Freudenthal 1974) :

- comme produit de perspectives
- comme restriction des collinéations du plan
- comme préservant l'harmonicité

Von Staudt ne pouvait choisir les deux premières définitions puisqu'il compte étendre la notion de correspondance projective aux formes de seconde espèce à partir de celle entre formes de première espèce. La première définition est insuffisante pour développer la théorie des collinéations, la seconde suppose que l'on développe la théorie à partir de la géométrie du plan. Les trois définitions sont en toute rigueur différentes : si l'on algébrise la géométrie considérée sur un corps de caractéristique  $\neq 2$ , le premier groupe de transformations est induit par les applications linéaires, le second par les applications linéaires et les automorphismes du corps, et le troisième par les applications linéaires, les automorphismes et les anti-automorphismes du corps. Il est clair que dans le cadre de la géométrie réelle (qui était celui adopté implicitement par von Staudt) les trois notions coïncident.

<sup>36</sup> Staudt 1847, 50.

<sup>37</sup> La démonstration de ce théorème suppose l'introduction d'autres hypothèses que les seules considérations habituelles d'incidence (voir Nabonnand 2006 ou Voelke 2007.)

<sup>38</sup> Staudt 1847, 60.

<sup>39</sup> Staudt 1847, 61.

identiquement. De même, comme un système peut être en réciprocity avec lui-même, les propriétés de dualité sont justifiées.

Von Staudt s'intéresse alors à une classe particulière de correspondances projectives, à savoir celle des *involutions* ; deux formes fondamentales projectives (ayant même support) sont dites involutives si leurs éléments homologues se correspondent doublement, « à savoir s'il correspond à l'élément P de la première forme, l'élément  $P_1$  de l'autre, et s'il correspond à l'élément  $P_1$  de la première, l'élément P de la seconde ». <sup>40</sup> Il suffit que deux éléments de deux formes de première espèce projectives se correspondent doublement pour que les formes soient involutives. Deux formes involutives de première espèce comportent soit aucun, soit deux éléments fixes. La théorie des involutions des formes de seconde ou de troisième espèce permet à von Staudt de retrouver la théorie de la polarité :

Si l'on parle de deux systèmes plans ou de deux gerbes de rayons ou de deux systèmes-espace qui sont projectifs et de plus en situation involutive, comme d'un seul système, alors on l'appellera *système involutif* si les deux systèmes sont collinéaires et dans le cas contraire, *système polaire*. <sup>41</sup>

Dans un système polaire plan, chaque point est appelé le *pôle* de la droite qui lui est associée, et chaque droite, la *polaire* du point qui lui est associé. On obtient immédiatement que les pôles de toutes les droites qui se coupent en un même point sont situés sur la polaire de ce point ; de même, les polaires de tous les points qui appartiennent à une même droite se coupent au pôle de cette droite. Deux points (resp. deux droites) d'un système polaire plan sont dits conjugués entre eux si chacun est situé sur la polaire de l'autre (resp. si chacune passe par le pôle de l'autre). Les coniques apparaissent naturellement comme le lieu des éléments conjugués à eux-mêmes d'un système polaire plan :

« Dans un système polaire plan, soit il n'y a aucun élément qui est conjugué à lui-même, soit il y a une courbe  $s$  d'ordre pair associée au faisceau de rayons qui s'applique sur elle de telle manière que chacun de ses points est situé sur sa polaire qui s'applique sur la courbe en ce point, et que chaque point qui n'appartient pas à cette courbe (la courbe double du système polaire) est situé à l'extérieur de sa polaire. <sup>42</sup>

Von Staudt déduit de la théorie des polarités la caractérisation de Steiner des coniques :

« Deux faisceaux de rayons A, B projectifs non concentriques qui sont situés dans un même plan sans être en perspective engendrent une courbe du II. ordre contenant tout point en lequel un rayon du premier faisceau est coupé par le rayon homologue de l'autre. » <sup>43</sup>

Von Staudt montre ainsi que la théorie de Steiner des coniques est une conséquence de sa propre théorie ; la théorie des coniques n'est plus qu'une partie de la théorie des polarités : les coniques ne sont plus que les courbes doubles des polarités. Elles peuvent devenir les supports de correspondance projective et se fondent dans la notion de *formes élémentaires*, notions qui réunit les formes fondamentales, les coniques, les faisceaux du second ordre, les surfaces coniques et les surfaces réglées. Cette dernière notion permettra à von Staudt dans les *Beiträge* <sup>44</sup> de généraliser le concept d'involution sur lequel repose sa théorie des jets et sa théorie des éléments imaginaires.

## Bibliographie

---

<sup>40</sup> Staudt 1847, 118.

<sup>41</sup> Staudt 1847, 126.

<sup>42</sup> Staudt 1847, 137.

<sup>43</sup> Staudt 1847, 143.

<sup>44</sup> Staudt 1856, Staudt 1857, Staudt 1860

Freudenthal, Hans

- [1974] The Impact of von Staudt's Foundations of Geometry, in R. S. Cohen et al. (éds.), *For Dirk Struik*, Dordrecht : Reidel, 1974, 189-200 ; republié dans [Plaumann-Strambach 1981], 401-425.

Nabonnand, Philippe

- [2006] *Contributions à l'histoire de la géométrie projective au 19e siècle*, <http://www.univ-nancy2.fr/poincare/perso/nabonnand/docs/book.ps>, à paraître.

Poncelet, Jean-Victor

- [1822] *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris, 1822  
[1862-64] *Applications d'analyse et de géométrie qui ont servi de principal fondement au Traité des propriétés projectives des figures*, 2 tomes ; tome 1, Paris : Mallet-Bachelier, 1862 ; tome 2, Paris : Gauthier-Villars, 1864.

Staudt, Georg Karl Christian von

- [1847] *Geometrie der Lage*, Nuremberg : Verlag von Bauer und Raspe, 1847 ; trad. ital. de M. Pieri, *Geometria di posizione* di Georgio Carlo Cristiano von Staudt, avec une présentation des travaux de Staudt par C. Segre, Turin : Bocca, 1889.  
[1856] *Beiträge zur Geometrie der Lage*, 3 volumes, Nuremberg : Bauer und Raspe, tome 1, 1856.  
[1857] *Beiträge zur Geometrie der Lage*, 3 volumes, Nuremberg : Bauer und Raspe, tome 2, 1857.  
[1856] *Beiträge zur Geometrie der Lage*, 3 volumes, Nuremberg : Bauer und Raspe, tome 3, 1860.

Steiner, Jacob

- [Werke] *Gesammelte Werke*, 2 volumes, Berlin, 1881-1882.  
[1832] *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*, Berlin : Svo, 1832 ; Ostwald's Klassiker 82-83, Leipzig : Engelman, 1896 ; *Werke* 1, 240.

Voelke, Jean-Daniel

- [2006] Le théorème fondamental de la géométrie projective : évolution de sa preuve entre 1847 et 1900, *Archives for History of sciences*, 2007.