



HAL
open science

Le troisième coefficient du viriel d'un gaz unitaire de fermions à deux composantes à travers un seuil de l'effet Efimov

Chao Gao, Shimpei Endo, Yvan Castin

► **To cite this version:**

Chao Gao, Shimpei Endo, Yvan Castin. Le troisième coefficient du viriel d'un gaz unitaire de fermions à deux composantes à travers un seuil de l'effet Efimov. EPL - Europhysics Letters, 2015, 109, pp.16003. 10.1209/0295-5075/109/16003. hal-01078973v4

HAL Id: hal-01078973

<https://hal.science/hal-01078973v4>

Submitted on 17 Jul 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NoDerivatives 4.0 International License

Le troisième coefficient du viriel d'un gaz unitaire de fermions à deux composantes à travers un seuil de l'effet Efimov

CHAO GAO*, SHIMPEI ENDO ET YVAN CASTIN

**Institute for Advanced Study, Tsinghua University, Beijing, 100084, Chine*

Laboratoire Kastler Brossel, ENS-PSL, CNRS, UPMC-Sorbonne Universités, Collège de France, Paris, France

PACS 67.85.d – Gaz froids, gaz piégés.

Résumé – Nous considérons un mélange de deux espèces fermioniques à un seul état interne avec une interaction de portée négligeable et une longueur de diffusion infinie dans l'onde s . En faisant varier le rapport de masse α de part et d'autre de $\alpha_c \simeq 13,6069$, on peut activer ou désactiver l'effet Efimov. Nous déterminons analytiquement le troisième coefficient d'amas du gaz. Nous montrons qu'il s'agit d'une fonction lisse de α même en α_c puisque, de façon inattendue, le paramètre à trois corps caractérisant l'interaction est pertinent et doit être introduit aussi du côté non efimovien $\alpha < \alpha_c$.

Introduction. – Un outil théorique puissant dans la physique statistique des systèmes quantiques en interaction est ce que l'on appelle le développement en amas ou du viriel, où les potentiels thermodynamiques sont développés en puissances du petit paramètre de dégénérescence [1]. Alors que le deuxième coefficient d'amas b_2 a une expression générale connue depuis les années 1930 [2], la détermination explicite du troisième coefficient d'amas b_3 a constitué un défi de longue haleine. À partir de la fin des années 1950, des résultats analytiques pour b_3 ont été obtenus pour le modèle d'une interaction de cœur dur à deux corps, l'archétype des interactions non résonnantes où la longueur de diffusion a dans l'onde s est au plus de l'ordre de la portée de l'interaction, sous la forme de développements en puissances d'un petit paramètre λ/a [3] ou a/λ [4], où λ est la longueur d'onde thermique de de Broglie.

L'intérêt porté à b_3 a été relancé par une récente percée expérimentale dans le domaine des atomes froids : des gaz de fermions de spin $1/2$ à longue durée de vie peuvent désormais être préparés dans le régime d'interaction résonnante (portée de l'interaction $\ll |a|$) au moyen de résonances de Feshbach [5]. Ceci a motivé le calcul numérique de b_3 dans la limite unitaire d'interaction maximale $1/a=0$, avec la technique du régulateur harmonique de la référence [6] comme il est fait dans [7], ou avec des diagrammes [8]. En raison de l'invariance d'échelle de la limite unitaire, b_3 n'est qu'un nombre et, grâce à une mesure précise de l'équation d'état du gaz [9, 10], sa valeur

prédite a été confirmée [10].

La physique est plus riche lorsque l'effet Efimov [11] entre en jeu : l'invariance d'échelle continue est brisée, il apparaît une échelle de longueur R_t caractérisant l'interaction, le paramètre à trois corps, et il existe une infinité d'états trimères avec un spectre d'énergie asymptotiquement géométrique. Le troisième coefficient d'amas b_3 se met à dépendre de la température. Dans un gaz de bosons sans spin avec des interactions de portée nulle, il a été déterminé analytiquement [12]. Dans le modèle d'une interaction de cœur dur à trois corps qui fixe R_t [13], les simulations de Monte-Carlo quantique ont confirmé cette prédiction analytique et ont montré que le développement en amas d'ordre trois peut fournir une bonne description du gaz jusqu'à la transition liquide-gaz [14], ce qui illustre son utilité.

Le problème est encore plus intéressant lorsqu'un paramètre du système permet d'activer et de désactiver l'effet Efimov, comme dans le cas du gaz de fermions à deux composantes dont le rapport de masse est ajustable. Pour deux fermions identiques et une particule distincte, il y a un effet Efimov si le rapport de masse fermion-autre particule α est supérieur à $\alpha_c = 13,6069\dots$ [11, 15]. Jusqu'à présent, le calcul de b_3 était numérique et limité à $\alpha < \alpha_c$ [16]. De manière surprenante, il prédisait que b_3 est de dérivée infinie en $\alpha = \alpha_c$. Comme b_3 est un coefficient du grand potentiel Ω , ceci impliquerait une dérivée singulière de Ω en fonction de α , c'est-à-dire une transition de phase du premier ordre, subsistant à une densité

dans l'espace de phase arbitrairement basse, c'est-à-dire à des températures T arbitrairement plus élevées que la température de Fermi T_F , contrairement aux attentes habituelles pour les transitions de phase. Le présent travail détermine b_3 analytiquement et résout ce paradoxe.

Le développement en amas. — Nous considérons un mélange de deux espèces fermioniques entièrement polarisées, avec des masses de particules individuelles m_1 et m_2 , sans interaction intra-espèce et avec une interaction inter-espèce purement dans l'onde s , de portée négligeable et de longueur de diffusion infinie (limite unitaire). À l'équilibre thermique dans une boîte cubique, la pression totale P admet dans la limite thermodynamique le développement en amas

$$\frac{P\lambda_r^3}{k_B T} = \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2} b_{n_1, n_2} z_1^{n_1} z_2^{n_2} \quad (1)$$

où z_i sont les fugacités $\exp(\beta\mu_i)$, $\lambda_r = [2\pi\hbar^2/(m_r k_B T)]^{1/2}$ est la longueur d'onde thermique de de Broglie associée à la masse réduite $m_r = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ et à la température T , $\beta = 1/(k_B T)$, μ_i est le potentiel chimique de l'espèce i et \mathbb{N} est l'ensemble des entiers naturels.

Pour déterminer les coefficients d'amas b_{n_1, n_2} , on peut utiliser l'astuce du régulateur harmonique [6] : on suppose temporairement que le système est à l'équilibre thermique dans un piège harmonique isotrope, avec la même pulsation de piégeage ω pour les deux espèces, et on considère le développement en amas de $(-\Omega)/(k_B T Z_1)$ en puissances de z_1 et z_2 , avec Ω le grand potentiel et Z_1 la fonction de partition d'une particule seule dans le piège. Lorsque $\omega \rightarrow 0$, les coefficients correspondants ont une limite B_{n_1, n_2} que l'on peut relier à b_{n_1, n_2} [6, 7, 16] :

$$B_{n_1, n_2} = \left(\frac{m_r}{n_1 m_1 + n_2 m_2} \right)^{3/2} b_{n_1, n_2} \quad (2)$$

Nous étudions $B_{2,1}$ en fonction du rapport de masse $\alpha = m_1/m_2$.

Cas $\alpha < \alpha_c$: modèle de portée nulle à 0 paramètre. — Le coefficient d'amas $B_{2,1}$ peut être déduit des fonctions de partition d'au plus trois corps dans le piège, c'est-à-dire des spectres d'énergie à n corps pour $n \leq 3$. Dans la limite unitaire, l'interaction inter-espèce est décrite par la condition de contact binaire de Bethe-Peierls sur la fonction d'onde, ce qui conduit à une équation de Schrödinger à trois corps séparable en coordonnées hypersphériques internes [11], même dans un piège harmonique [17–19]. La partie hyperangulaire du problème peut être résolue dans l'espace des positions [11] ou dans l'espace des impulsions [20] : la valeur propre réelle correspondante s^2 (qui jouera le rôle d'une constante de séparabilité) obéit à l'équation transcendante $\Lambda_l(s) = 0$ d'expression explicite

[21]¹

$$\Lambda_l(s) = \cos \nu + \frac{1}{\sin \nu} \int_{\frac{\pi}{2} - \nu}^{\frac{\pi}{2} + \nu} d\theta P_l \left(\frac{\cos \theta}{\sin \nu} \right) \frac{\sin(s\theta)}{\sin(s\pi)} \quad (3)$$

avec $l \in \mathbb{N}$ le moment cinétique, P_l un polynôme de Legendre, $\nu = \arcsin \frac{\alpha}{1+\alpha}$ l'angle de masse. On appelle $(u_{l,n})_{n \in \mathbb{N}}$ les racines positives de Λ_l , rangées par ordre croissant. Il n'y a pas de racine complexe pour $\alpha < \alpha_c$. La partie hyperradiale de la fonction d'onde, après multiplication par R^2 , est solution d'une équation de Schrödinger de manière effective bidimensionnelle :

$$EF = -\frac{\hbar^2}{2M} \left(F'' + \frac{1}{R} F' \right) + \left(\frac{\hbar^2 s^2}{2MR^2} + \frac{1}{2} M \omega^2 R^2 \right) F \quad (4)$$

où s est l'une des racines $u_{l,n}$, $M = 2m_1 + m_2$ est la masse de deux particules de l'espèce 1 et d'une particule de l'espèce 2, et l'hyperrayon R est l'écart quadratique moyen correspondant, pondéré par les masses, des positions des trois particules à leur centre de masse. La résolution de l'Eq.(4) avec les conditions aux limites habituelles selon lesquelles $F(R)$ s'annule en zéro et à l'infini donne

$$E = (s + 1 + 2q)\hbar\omega, \quad \forall q \in \mathbb{N} \quad (5)$$

La structure en échelle semi-infinie de ce spectre, avec l'équidistance $2\hbar\omega$ entre niveaux, reflète l'existence d'un mode pulsant non amorti du gaz unitaire non efimovien piégé [23], lié à sa symétrie dynamique $SO(2, 1)$ [24].

Enfin $B_{2,1}$ est la limite pour $\omega \rightarrow 0$ d'une série [7, 12]² :

$$B_{2,1} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \sum_{(l,n,q) \in \mathbb{N}^3} (2l+1) \left[e^{-(u_{l,n}+1+2q)\beta\hbar\omega} - e^{-(v_{l,n}+1+2q)\beta\hbar\omega} \right] \quad (6)$$

avec $v_{l,n} = l + 2n + 1$ les pôles positifs de $\Lambda_l(s)$ [21]. La sommation sur q peut se faire analytiquement, et même sur n par application inverse du théorème des résidus [12] :

$$B_{2,1} = - \sum_{l \in \mathbb{N}} \left(l + \frac{1}{2} \right) \int_0^{+\infty} \frac{dS}{\pi} \ln \frac{\Lambda_l(iS)}{\cos \nu} \quad (7)$$

Comme le montre la figure 1, le résultat est en accord avec l'évaluation numérique de la série par la référence [16]. L'analytique permet cependant directement de voir pourquoi $B_{2,1}$ est de dérivée infinie en $\alpha = \alpha_c^-$: il suffit d'isoler la contribution de la voie $(l, n) = (1, 0)$ dans l'Eq.(6), la seule où $u_{l,n}$ s'annule en $\alpha = \alpha_c$, par la décomposition

$$B_{2,1} = B_{2,1}^{(1,0)} + B_{2,1}^{\neq(1,0)} \quad (8)$$

1. Il existe une expression hypergéométrique moins explicite pour Λ_l [22].

2. En fait, on calcule plutôt la différence entre les fonctions de partition des problèmes unitaire et sans interaction ; néanmoins, ceci donne directement $B_{2,1}$ du gaz unitaire puisque $B_{2,1}$ est nul pour un gaz parfait ; les contributions des états de Laughlin (dont la fonction d'onde s'annule lorsque deux particules sont au même point) se compensent dans la différence ; les $v_{l,n}$ apparaissent via le spectre non-laughlinien du problème à trois corps sans interaction. De même, les contributions de la racine non physique $s = 2$ dans le secteur $l = 0$, qui existe dans les deux cas unitaire et sans interaction, se compensent automatiquement.

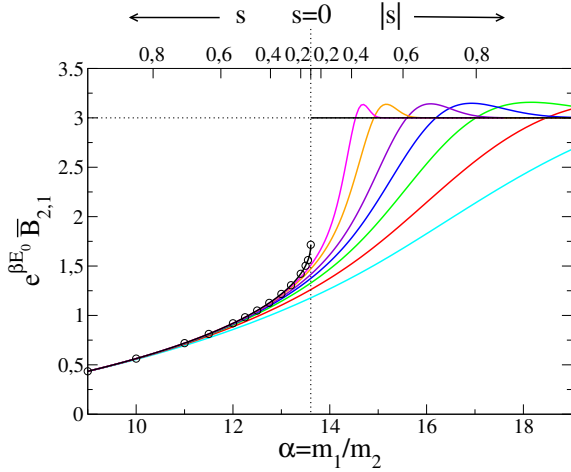


FIGURE 1: Troisième coefficient d'amas réduit $e^{\beta E_0} \bar{B}_{2,1}$ d'un gaz tridimensionnel unitaire de fermions piégés à deux composantes, dans la limite d'une pulsation de piégeage nulle, en fonction du rapport de masse $\alpha = m_1/m_2$ des deux espèces (axe des x inférieur) ou de la racine $s = u_{1,0}$ de Λ_1 (axe des x supérieur), pour différentes valeurs du paramètre à trois corps R_t , et donc de l'échelle d'énergie globale E_{glob} des Eqs.(13,24). Ici, E_0 est l'énergie de l'état fondamental des trois corps dans l'espace libre, une fonction lisse de α : pour $\alpha \leq \alpha_c$, $E_0 = 0$; pour $\alpha > \alpha_c$, $E_0 = -E_{\text{glob}} \exp(-2\pi/|s|)$ est l'énergie du trimère fondamental et le facteur $\exp(\beta E_0)$ garantit que la quantité tracée reste bornée. Courbes de bas en haut pour $\alpha \lesssim 15$: $\beta E_{\text{glob}} = 10^2$ (cyan), 3×10^2 (rouge), 10^3 (vert), 3×10^3 (bleu), 10^4 (violet), 10^5 (orange), 10^6 (magenta). Les courbes se croisent, ce qui montre que $e^{\beta E_0} \bar{B}_{2,1}$ n'est pas, pour tout α fixé, une fonction croissante de βE_{glob} (voir l'encart de la figure 2). Ligne noire discontinue en trait plein : limite $\beta E_{\text{glob}} \rightarrow +\infty$, correspondant pour $\alpha \leq \alpha_c$ au véritable modèle à zéro paramètre étudié numériquement dans [16] (cercles noirs), et étant, pour $\alpha > \alpha_c$, identiquement égale à 3, la contribution du trimère fondamental. Ligne verticale en pointillés : rapport de masse critique α_c où l'effet Efimov entre en jeu.

Toutes les autres voies conduisent à des $u_{1,n} > 1$ sur l'intervalle de la figure et donnent une contribution lisse à $B_{2,1}$. Au contraire

$$\begin{aligned} B_{2,1}^{(1,0)} &= \lim_{\omega \rightarrow 0} 3 \sum_{q \in \mathbb{N}} \left[e^{-(u_{1,0}+1+2q)\beta \hbar \omega} - e^{-(v_{1,0}+1+2q)\beta \hbar \omega} \right] \\ &= -\frac{3}{2}(u_{1,0} - v_{1,0}) \end{aligned} \quad (9)$$

et $u_{1,0}$, une fonction décroissante de α , s'annule comme $(\alpha_c - \alpha)^{1/2}$ puisque $\Lambda_1(s)$ est paire, de sorte que $\frac{d}{d\alpha} B_{2,1}$ diverge comme $(\alpha_c - \alpha)^{-1/2}$.

Cas $\alpha > \alpha_c$: Modèle de portée nulle efimovien.

– Nous supposons maintenant que le rapport de masse est tel que $\alpha_c < \alpha < 75,99449 \dots$ [25], de sorte que l'effet Efimov n'a lieu que dans le secteur $l = 1$. La fonction $\Lambda_{l=1}$ possède une paire de racines imaginaires pures complexes

conjuguées $\pm s$ et nous posons

$$u_{1,0} = s = i|s| \quad (10)$$

$|s|$ s'annule comme $(\alpha - \alpha_c)^{1/2}$ et est une fonction croissante de α . Le potentiel $1/R^2$ dans l'équation de Schrödinger (4) sur $F(R)$ devient attractif, ce qui conduit à une "chute vers le centre" [26] et à un spectre continu non physique d'états liés, ce qui oblige à modifier la condition aux limites en $R = 0$ [27] :

$$F(R) \underset{R \rightarrow 0}{=} (R/R_t)^{|s|} - (R/R_t)^{-|s|} + O(R^2) \quad (11)$$

Pour mettre en évidence le fait que le troisième coefficient d'amas dépend maintenant d'une paramètre, à savoir cette longueur R_t appelée paramètre à trois corps, nous l'écrivons comme $\bar{B}_{2,1}$, c'est-à-dire avec une barre supérieure. Dans l'espace libre, l'équation (11) conduit à un nombre discret et infini d'états trimères d'Efimov, avec un spectre purement géométrique s'étendant de $-\infty$ à 0. Dans tout système physique, cependant, l'interaction n'est pas strictement de portée nulle et le spectre doit être borné inférieurement [11]. On peut s'attendre à ce que les effets de portée non nulle altèrent alors la nature géométrique du spectre pour les trimères les plus profondément liés. Cependant, pour une résonance de Feshbach étroite [21, 28], pour les modèles de résonance de Feshbach avec coupure dans l'espace des impulsions [29, 30] et pour le modèle d'une interaction de cœur dur à trois corps [13], le spectre est presque entièrement géométrique, au moins lorsque $|s|$ n'est pas trop grand ($|s| \lesssim 1$), et devient entièrement géométrique lorsque $\alpha \rightarrow \alpha_c^+$, puisque le produit du nombre d'onde typique des particules et de la portée de l'interaction tend vers zéro [21]. Dans ce qui suit, nous prenons donc dans l'espace libre le spectre géométrique borné inférieurement :

$$\epsilon_q(0^+) \equiv \lim_{\omega \rightarrow 0} \epsilon_q(\omega) = -E_{\text{glob}} e^{-2\pi(1+q)/|s|}, \quad \forall q \in \mathbb{N} \quad (12)$$

L'échelle d'énergie globale E_{glob} peut être calculée à partir d'un modèle microscopique pour l'interaction, comme cela a été fait dans les modèles mentionnés ci-dessus. Ici, nous la prenons comme un paramètre que la solution de l'Eq.(4) pour $\omega = 0$ avec la condition aux limites (11) relie à R_t comme suit :

$$E_{\text{glob}} = \frac{2\hbar^2}{MR_t^2} e^{[\ln \Gamma(1+s) - \ln \Gamma(1-s)]/s} \quad (13)$$

avec $\ln \Gamma$ la détermination habituelle du logarithme de la fonction Γ .

La contribution à $\bar{B}_{2,1}$ des voies $(l, n) \neq (1, 0)$ est inchangée car aucun effet Efimov ne s'y produit :

$$\bar{B}_{2,1}^{\neq(1,0)} = B_{2,1}^{\neq(1,0)} \quad (14)$$

Nous la calculons comme dans [12], en utilisant l'Eq.(7) telle quelle pour $l \neq 1$, mais en remplaçant $\Lambda_l(iS)$ par

$\frac{S^2+v_{1,0}^2}{S^2+u_{1,0}^2}\Lambda_l(iS)$ pour $l = 1$. Dans la voie efimovienne (l, n) = (1, 0), le spectre n'est plus donné par l'Eq.(5), mais par la solution de l'équation transcendante tirée de [31] et réécrite comme dans [12, 32] pour redonner l'Eq.(12) dans l'espace libre :

$$\text{Im} \ln \Gamma\left(\frac{1+s-\epsilon_q/(\hbar\omega)}{2}\right) + \frac{|s|}{2} \ln\left(\frac{2\hbar\omega}{E_{\text{glob}}}\right) + (q+1)\pi = 0 \quad (15)$$

de sorte que la première identité dans l'Eq.(9) est remplacée par

$$\bar{B}_{2,1}^{(1,0)} = \lim_{\omega \rightarrow 0} 3 \sum_{q \in \mathbb{N}} \left[e^{-\beta\epsilon_q(\omega)} - e^{-(v_{1,0}+1+2q)\beta\hbar\omega} \right] \quad (16)$$

Pour une valeur de ω non nulle suffisamment petite, deux classes d'énergies émergent dans le spectre à trois corps : (i) les énergies propres négatives, qui sont l'équivalent des énergies propres des trimères dans l'espace libre, et (ii) les énergies propres positives, qui sont l'équivalent du continuum dans l'espace libre. La seconde classe constitue un spectre harmonique à un "défaut quantique" dépendant de l'énergie près $\Delta(\epsilon)$ [32] :

$$\frac{\epsilon_q(\omega)}{\hbar\omega} \underset{q \rightarrow +\infty}{=} 2q + \Delta(\epsilon_q(\omega)) + O(1/q) \quad (17)$$

où $q\omega$ est \approx fixé. Par le raisonnement de [12], on obtient

$$\bar{B}_{2,1}^{(1,0)} = 3 \sum_{q \in \mathbb{N}} [e^{-\beta\epsilon_q(0^+)} - 1] - \frac{3}{2} \int_0^{+\infty} d\epsilon \beta [\Delta(\epsilon) - (1+v_{1,0})] e^{-\beta\epsilon} \quad (18)$$

Nous avons obtenu une nouvelle expression du défaut quantique³ :

$$\Delta(\epsilon) = 2 + \frac{2}{\pi} \text{atan} \frac{\tan\left(\frac{|s|x}{2}\right)}{\text{th}\left(\frac{|s|\pi}{2}\right)} + 2 \left[\frac{|s|x}{2\pi} \right] \quad (19)$$

où $x = \ln(\epsilon/E_{\text{glob}})$. La fonction entier le plus proche dans le dernier terme compense exactement les sauts de la fonction atan lorsque $\tan(|s|x/2)$ tend vers l'infini, de façon que $\Delta(\epsilon)$ soit une fonction lisse de ϵ et de $|s|$.

Les valeurs correspondantes de $\bar{B}_{2,1}$ pour $\alpha > \alpha_c$ sont représentées sur la figure 1, après multiplication par un facteur $e^{\beta E_0}$, où $E_0 = \epsilon_{q=0}(0^+)$ est l'énergie du trimère fondamental, de façon à absorber la contribution de cette dernière, qui devient rapidement dominante et divergente pour $k_B T < |E_0|$ [33]. Le résultat dépend de βE_{glob} , un paramètre qui doit être $\gg 1$: notre théorie, étant de portée nulle, requiert que R_t , de l'ordre de la portée vraie de l'interaction ou de la portée effective, comme dans les modèles respectivement d'interaction de cœur

dur à trois corps et de résonance de Feshbach étroite, soit \ll à la longueur d'onde thermique de de Broglie $\lambda_t = [2\pi\hbar^2/(Mk_B T)]^{1/2}$. Il est clair qu'il y a un écart entre $B_{2,1}(\alpha)$ et $\bar{B}_{2,1}(\alpha)$ en α_c^\mp à R_t non nul. Lorsque $R_t \rightarrow 0$ ($E_{\text{glob}} \rightarrow +\infty$) il y a accord en α_c , comme on le voit en prenant d'abord la limite $s \rightarrow 0$ dans l'Eq.(19),

$$\Delta(\epsilon) \underset{\alpha \rightarrow \alpha_c^+}{\rightarrow} \Delta_0(\epsilon) = 2 + \frac{2}{\pi} \text{atan} \frac{\ln(\epsilon/E_{\text{glob}})}{\pi} \quad (20)$$

puis en prenant la limite $R_t \rightarrow 0$ dans l'Eq.(18)⁴ :

$$\begin{aligned} \bar{B}_{2,1}^{(1,0)}(\alpha_c^+) &= -\frac{3}{2} \int_0^{+\infty} d\epsilon \beta [\Delta_0(\epsilon) - (1+v_{1,0})] e^{-\beta\epsilon} \\ &= \underset{\beta E_{\text{glob}} \rightarrow +\infty}{=} \frac{3}{2} v_{1,0} - \frac{3}{\ln(\beta E_{\text{glob}})} + O\left(\frac{1}{\ln(\beta E_{\text{glob}})}\right)^2 \end{aligned} \quad (21)$$

ce qui correspond exactement à la valeur de l'Eq.(9) pour $u_{1,0} \rightarrow 0$. Le point essentiel est cependant que la limite $R_t \rightarrow 0$ n'est en pratique jamais atteinte, en raison de la convergence logarithmique très lente. Nous nous attendons à ce que ce problème s'étende à $\alpha < \alpha_c$, si bien que le calcul fait strictement à portée nulle dans [16] n'est pas entièrement réaliste. Il reste également le mystère de la dérivée infinie de $B_{2,1}(\alpha)$ en $\alpha = \alpha_c^-$. Ces deux problèmes sont résolus dans la section suivante.

Cas $\alpha < \alpha_c$ revisité : modèle de portée nulle à 1 paramètre. – Voyons maintenant qu'un paramètre à trois corps R_t doit être introduit pour $\alpha < \alpha_c$, c'est-à-dire même en l'absence d'effet Efimov, lorsque α est suffisamment proche de α_c . La racine $s = u_{1,0} > 0$ s'annule alors comme $(\alpha_c - \alpha)^{1/2}$ et la barrière centrifuge dans l'équation hyperradiale (4) s'atténue, de sorte que la fonction $F(R)$, les énergies propres E et le troisième coefficient d'amas deviennent de plus en plus sensibles aux propriétés à courte distance de l'interaction [30, 34].

Supposons que la physique à trois corps dans la portée de l'interaction soit décrite par un terme supplémentaire $V(R)F$ dans l'Eq.(4), par exemple un cœur dur à trois corps de rayon b . Sachant que les énergies propres pertinentes E valent au plus quelques $k_B T$, et que $b \ll \lambda_t$, nous pouvons faire les raisonnements suivants.

(i) en $R \ll \lambda_t$, on peut obtenir le comportement de $F(R)$ par un calcul à énergie nulle (négligeant le terme EF) et dans l'espace libre (puisque la longueur de l'oscillateur harmonique est $\gg \lambda_t$). Comme $b \ll \lambda_t$, il existe un domaine $b \ll R \ll \lambda_t$ où l'on peut également négliger $V(R)$. Alors $F(R)$ est une superposition des deux solutions particulières R^s et R^{-s} , avec des amplitudes relatives fixées par une longueur R_t qui dépend des détails microscopiques de $V(R)$, par exemple $R_t = b$ pour le cœur dur à trois corps⁵ :

$$F(R) \underset{b \ll R \ll \lambda_t}{\simeq} (R/R_t)^s - (R/R_t)^{-s} \quad (22)$$

4. Pour ce faire, on prend $\beta\epsilon$ comme variable d'intégration et on développe l'intégrande en puissances de $1/\ln(\beta E_{\text{glob}})$.

5. Si l'on pose $F(R) = R^{-s}\phi(r = R^{2s})$, on a $F'' + F'/R - s^2 F/R^2 = 4s^2 R^{3s-2}\phi''(r)$ de sorte que $R_t^{2s} = a_{\text{eff}}$, où a_{eff} est la

3. Cette expression et celle (C6) de [32] sont égales, puisque leur différence est une fonction continue de x qui s'annule en zéro et dont la dérivée est identiquement nulle.

(ii) on peut approcher le même intervalle $b \ll R \ll \lambda_t$ en partant des grandes distances. Le potentiel de piégeage et le terme EF doivent maintenant être conservés, et $F(R)$ est l'unique solution de l'Eq.(4) qui ne diverge pas à l'infini (à un facteur de normalisation près), une fonction de Whittaker de R^2 divisée par R [19]. Alors, en $R \ll \lambda_t$, on trouve aussi que $F(R)$ est une combinaison linéaire de R^s et R^{-s} , comme elle doit l'être, mais avec des coefficients $A_{\pm}(E)$ qui sont des fonctions connues de E . Le nécessaire accord avec l'Eq.(22) conduit à une équation implicite sur E , comme si l'Eq.(4) était soumise à la condition aux limites modifiée en $R = 0$ [18, 35]⁶ :

$$F(R) \underset{R \rightarrow 0}{=} (R/R_t)^s - (R/R_t)^{-s} + O(R^{2-s}) \quad (23)$$

Le troisième terme dans l'Eq.(23), une propriété mathématique de la fonction de Whittaker, est négligeable par rapport au premier, et ce modèle a un sens, seulement pour $s < 1$ i.e. $\alpha > 8,6185\dots$. De façon remarquable, ceci reproduit le modèle de portée nulle efimovien (11) si l'on remplace formellement s par $|s|$. Il est alors naturel d'étendre la définition de E_{glob} à $\alpha < \alpha_c$ comme suit :⁷

$$E_{\text{glob}} \underset{0 < s < 1}{=} \left(\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1-s)} \right)^{1/s} \frac{2\hbar^2}{MR_t^2} \quad (24)$$

où le premier facteur est une fonction lisse de α car son développement en série ne comporte que des puissances paires de s .

La condition aux limites $F(R=0) = 0$, plus habituelle, qui a conduit au spectre (5), est généralement justifiée de la façon suivante : en $R \approx \lambda_t$, le terme R^{-s} de (22) est négligeable par rapport au terme R^s dans la limite de portée nulle $b \ll \lambda_t$, c'est-à-dire $\beta E_{\text{glob}} \gg 1$, puisqu'on s'attend à ce que $R_t \approx b$:⁸

$$\frac{(\lambda_t/R_t)^{-s}}{(\lambda_t/R_t)^s} \approx (\beta E_{\text{glob}})^{-s} \ll 1 \quad (25)$$

Cependant cette condition devient de plus en plus difficile à satisfaire lorsque $\alpha \rightarrow \alpha_c^-$, et elle sera violée lorsque

$$s \lesssim \frac{1}{\ln(\beta E_{\text{glob}})} \quad (26)$$

Ceci nous oblige à recalculer le troisième coefficient d'amas avec la condition aux limites (23). À partir de l'équation

⁶ "longueur" de diffusion dans l'onde s d'une particule de masse M sur le potentiel $v(r) = V(r^{1/(2s)})r^{-2+1/s}/(4s^2)$. Nous supposons ici que $a_{\text{eff}} > 0$, par exemple parce que $V(R)$ est positif.

6. Pour $s = 0$, ceci devient $F(R) \underset{R \rightarrow 0}{=} \ln(R/R_t) + O(R^2 \ln R)$.

7. Sur une résonance étroite de longueur de Feshbach R_* , on tire de [21] $(\frac{m_r R_*^2}{2\hbar^2} E_{\text{glob}})^s = \frac{1-s}{1+s} \frac{\Gamma(1+2s)}{\Gamma(1-2s)} f(v_{1,0}) \prod_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{f(v_{1,n})}{f(u_{1,n})}$ avec $f(z) = \Gamma(z-s)\Gamma(1+z-s)/[\Gamma(z+s)\Gamma(1+z+s)]$.

8. Dans des cas particuliers, connus sous le nom de résonances à trois corps, voir [18, 35], R_t/b peut être arbitrairement grand et βE_{glob} peut rester fini dans la limite de portée nulle. Ceci est improbable ici car il y a déjà une résonance à deux corps.

implicite sur le spectre d'énergie $(\epsilon_q(\omega))_{q \in \mathbb{N}}$ [19] :⁹

$$\frac{\Gamma(\frac{1+s-E/\hbar\omega}{2})}{\Gamma(\frac{1-s-E/\hbar\omega}{2})} = \left(\frac{E_{\text{glob}}}{2\hbar\omega} \right)^s \quad (27)$$

nous recalculons le défaut quantique comme dans [32], en utilisant la formule de réflexion d'Euler et la formule de Stirling :

$$\Delta(\epsilon) = 2 + \frac{2}{\pi} \operatorname{atan} \frac{\operatorname{th}[\frac{s}{2} \ln(\epsilon/E_{\text{glob}})]}{\tan(\frac{s}{2}\pi)} \quad (28)$$

Quand $R_t \rightarrow 0$, $\beta E_{\text{glob}} \rightarrow +\infty$ et ceci reproduit la valeur $1+s$ du défaut quantique dans l'Eq.(5). L'Eq.(28) ne change que la contribution de la voie (1,0), puisque les autres voies ont tous leurs $u_{l,n} > 1$ sur l'intervalle de valeurs de α de la figure 1 :

$$\bar{B}_{2,1}^{(1,0)} \underset{0 < s < 1}{=} -\frac{3}{2} \int_0^{+\infty} d\epsilon \beta [\Delta(\epsilon) - (1+v_{1,0})] e^{-\beta\epsilon} \quad (29)$$

Sur la figure 1 nous représentons pour $\alpha < \alpha_c$ les valeurs correspondantes de $\bar{B}_{2,1}$ pour les mêmes valeurs du paramètre βE_{glob} que dans la partie $\alpha > \alpha_c$ de la figure, ce qui conduit à un raccordement visiblement lisse en $\alpha = \alpha_c$. On pouvait s'attendre à la continuité du raccordement du fait que (i) le changement formel $s \rightarrow |s|$ dans l'Eq.(28) reproduit l'expression (19) du défaut quantique du côté $\alpha > \alpha_c$ à part la fonction entier le plus proche qui n'est de toute façon pas pertinente lorsque $|s| \rightarrow 0$, et (ii) le spectre des trimères efimoviens a une contribution à $\bar{B}_{2,1}$ qui tend vers zéro lorsque $\alpha \rightarrow \alpha_c^+$.

Et en effet, $\bar{B}_{2,1}^{(1,0)}(\alpha)$ (et $\bar{B}_{2,1}(\alpha)$) sont des fonctions lisses de α en α_c à βE_{glob} fixé, puisque $\Delta(\epsilon)$ est une fonction paire de s et que son développement en série n'admet que des puissances paires de s :

$$\Delta(\epsilon) \underset{s \rightarrow 0}{=} \Delta_0(\epsilon) - \frac{x}{6} s^2 + \frac{x^3 - \pi^2 x}{360} s^4 + O(s^6) \quad (30)$$

où $\Delta_0(\epsilon)$ est donné par l'Eq.(20), $x = \ln(\epsilon/E_{\text{glob}})$ et s peut être réel ou imaginaire pur. Le report dans l'Eq.(29) conduit à des intégrales sur ϵ convergentes et à un développement de $\bar{B}_{2,1}^{(1,0)}$ comportant uniquement des puissances paires de s :

$$\bar{B}_{2,1}^{(1,0)}(\alpha) - \bar{B}_{2,1}^{(1,0)}(\alpha_c) \underset{s \rightarrow 0}{=} -\frac{A}{4} s^2 - \frac{A(\pi^2 - 2A^2) - 4\zeta(3)}{480} s^4 + O(s^6) \quad (31)$$

où $A = \ln(e^\gamma \beta E_{\text{glob}})$ et $\gamma \simeq 0,577$ est la constante d'Euler¹⁰. Puisque s^2 est une fonction lisse de α en α_c , $\bar{B}_{2,1}$ l'est aussi. L'Eq.(31), combinée à $\Lambda_1(s) = 0$, dit comment

⁹ La solution de cette équation d'énergie minimale doit être omise, car elle se raccorde quand $\omega \rightarrow 0$ à un état lié d'énergie $-E_{\text{glob}}$ et d'extension spatiale $\approx R_t$, qui ne peut pas être décrit fidèlement par notre modèle de portée nulle quand $R_t \approx b$ (c'est-à-

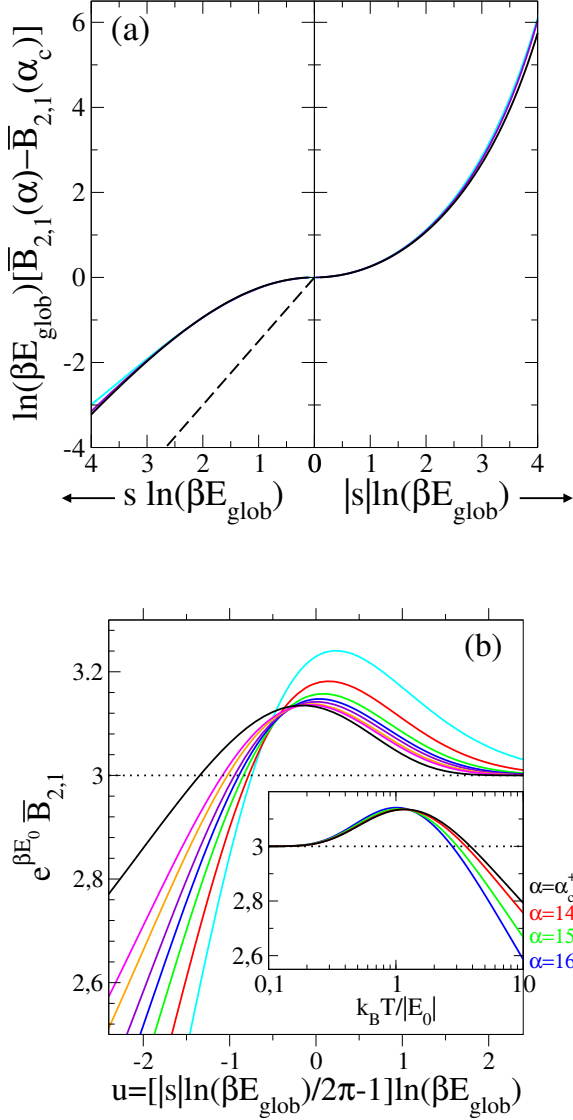


FIGURE 2: Analyse en loi d'échelle de la figure 1 pour α proche de α_c dans la limite $\beta E_{\text{glob}} \rightarrow +\infty$. (a) À valeur fixée de $t \equiv s \ln(\beta E_{\text{glob}})$: les résultats s'approchent de la loi (33) (trait plein noir), à condition que $|t| < 2\pi$ sur le côté $\alpha > \alpha_c$. Courbes de haut en bas : $\beta E_{\text{glob}} = 10^2$ (cyan), 10^4 (violet). Ligne tiretée : prédiction de la théorie à 0 paramètre $-3t/2$. (b) Du côté $\alpha > \alpha_c$, à valeur fixée de $u \equiv [|t|/(2\pi) - 1] \ln(\beta E_{\text{glob}})$: les résultats se rapprochent de la loi (34) (trait plein noir), qui reproduit la structure piquée qu'on observe sur la figure 1. De bas en haut pour $u < -0,6$: valeurs de βE_{glob} listées dans la légende de la figure 1, dans le même ordre et avec les mêmes couleurs. Encart : compte tenu des Eqs.(9,18,19), l'Eq.(34) prise pour $u = \ln(\beta |E_0|)$ donne aussi la limite de $e^{\beta E_0} \bar{B}_{2,1}$ lorsque $\alpha \rightarrow \alpha_c^+$ à $k_B T/|E_0|$ fixé.

dire en l'absence de résonance à trois corps) et qui, en effet, n'existe pas pour une interaction de cœur dur à trois corps ou dans le modèle de résonance de Feshbach étroite [21]. Ceci équivaut à l'hypothèse faite dans [16] de l'absence d'états trimères non universels.

10. L'interversion du développement de Taylor et de l'intégration

la dérivée première en α_c diverge lorsque $\beta E_{\text{glob}} \rightarrow +\infty$:

$$\frac{d}{d\alpha} \bar{B}_{2,1}(\alpha_c) \Big|_{\beta E_{\text{glob}} \rightarrow +\infty} \sim C \ln(\beta E_{\text{glob}}) \text{ où } C \simeq 0,0478243 \quad (32)$$

Elle conduit également à une loi d'échelle intéressante au voisinage de α_c : en ne gardant dans les coefficients des puissances de s dans (31) que les termes dominants en $\ln(\beta E_{\text{glob}})$, on obtient, après multiplication de (31) par $\ln(\beta E_{\text{glob}})$, la loi suivante lorsque βE_{glob} tend vers l'infini à $t \equiv s \ln(\beta E_{\text{glob}})$ fixé :

$$[\bar{B}_{2,1}(\alpha) - \bar{B}_{2,1}(\alpha_c)] \ln(\beta E_{\text{glob}}) \Big|_{\beta E_{\text{glob}} \rightarrow +\infty} \xrightarrow{t \text{ fixé}} 3 - \frac{3t/2}{\text{th}(t/2)} \quad (33)$$

sans contrainte sur le côté $\alpha < \alpha_c$, et avec la contrainte que $|t| < 2\pi$ sur le côté $\alpha > \alpha_c$ en raison de l'apparition d'un pôle en $t = 2\pi i$ dans la contribution du défaut quantique et d'une divergence de la contribution du trimère fondamental pour $|t| > 2\pi$. L'Eq.(33) est obtenue en négligeant $\ln(\beta \epsilon)$ par rapport à $\ln(\beta E_{\text{glob}})$ dans (19,28), car $\beta \epsilon$ est typiquement de l'ordre de l'unité dans les intégrales (18,29). Nous reportons sur la figure 2a les données de la figure 1 après changement d'échelle comme dans l'Eq.(33) : les résultats se regroupent en effet presque sur une même courbe de loi d'échelle donnée par l'Eq.(33), d'autant mieux que $\ln(\beta E_{\text{glob}})$ est plus grand. La prédiction $-3t/2$ de la théorie à zéro paramètre, voir la ligne tiretée, n'est équivalente à la loi correcte que pour $t \rightarrow +\infty$. La loi d'échelle trouvée justifie pleinement la condition intuitive (26) : le passage du régime de portée nulle à 0 paramètre au régime de portée nulle à 1 paramètre se produit effectivement pour $s \approx 1/\ln(\beta E_{\text{glob}})$.

Que se passe-t-il du côté $\alpha > \alpha_c$ près de $|t| = 2\pi$? Pour $|t|$ fixé à une valeur $> 2\pi$, la contribution du trimère fondamental $3e^{-\beta E_0}$, où $E_0 = \epsilon_0(0^+)$, diverge rapidement lorsque $\beta E_{\text{glob}} \rightarrow +\infty$ et domine toutes les autres contributions, de sorte que le coefficient d'amas réduit $e^{\beta E_0} \bar{B}_{2,1}$ de la figure 1 tend vers trois. Cependant, avant cela, le coefficient d'amas réduit présente en fonction de α une structure intéressante sur la figure 1, une augmentation rapide avec atteinte d'un maximum, qui se situe sur un voisinage de $|t| = 2\pi$ de largeur $1/\ln(\beta E_{\text{glob}})$. Ceci est mis en évidence par le changement de variable affine $u \equiv [|t|/(2\pi) - 1] \ln(\beta E_{\text{glob}})$. Lorsque $\beta E_{\text{glob}} \rightarrow +\infty$ à u

est justifié par le théorème de dérivation sous le signe intégral, où x est la variable d'intégration. Pour $\alpha < \alpha_c$, on pose $u(x, s) = \text{th}(sx/2)/s$ et $v(x, s) = \tan(s\pi/2)/s$ et on choisit $\eta \in]0, 1[$. Il existe alors des nombres positifs $(A_n, B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $C > 0$ tels que $\forall (x, s) \in \mathbb{R} \times]0, \eta]$, $\forall n \in \mathbb{N} : |\partial_s^n u(x, s)| \leq A_n |x|^{n+1}$, $|\partial_s^n v(x, s)| \leq B_n$, $u(x, s)^2 + v(x, s)^2 \geq C$. Pour $\alpha > \alpha_c$, on pose $u(x, |s|) = [\pi \sin(|s|x) - x \sinh(\pi|s|)]/|s|^2$ et $v(x, |s|) = [\cosh(\pi|s|) - \cos(|s|x)]/|s|^2$ et on choisit $\eta > 0$. Il existe alors des nombres positifs $(A_n, B_n, C_n, D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $G > 0$ tels que $\forall (x, |s|) \in \mathbb{R} \times]0, \eta]$, $\forall n \in \mathbb{N} : |\partial_{|s|}^n u(x, |s|)| \leq A_n |x| + B_n |x|^{n+2}$, $|\partial_{|s|}^n v(x, |s|)| \leq C_n + D_n |x|^{2+n}$, $|v(x, |s|)| \geq G$. Les fonctions u et v apparaissent dans $\partial_s \Delta(\epsilon)$ sous la forme $(v \partial_s u - u \partial_s v)/(u^2 + v^2)$ pour $\alpha < \alpha_c$, et dans $\partial_{|s|} \Delta(\epsilon)$ sous la forme u/v pour $\alpha > \alpha_c$. Alors $|\partial_s^n \Delta|$ et $|\partial_{|s|}^n \Delta|$ sont majorées par des polynômes en $|x|$ uniformément en s ou $|s| \forall n \in \mathbb{N}^*$.

fixé, $\beta E_0 \rightarrow -e^u$, la contribution du trimètre fondamental reste finie et, compte tenu du théorème de convergence dominée, on a

$$e^{\beta E_0} \bar{B}_{2,1} \xrightarrow[\beta E_{\text{glob}} \rightarrow +\infty]{u \text{ fixé}} e^{-e^u} \left[B_{2,1}(\alpha_c) + 3 \left(e^{e^u} - \frac{1}{2} \right) + \frac{3}{\pi} \int_0^{+\infty} d\epsilon \beta e^{-\beta \epsilon} \operatorname{atan} \frac{u - \ln \beta \epsilon}{\pi} \right] \quad (34)$$

où $B_{2,1}(\alpha_c) \simeq 1,7153$ [16] est la prédiction de la théorie de portée nulle à 0 paramètre en α_c . Comme le montre la figure 2b, les données rééchelonnées de la figure 1 convergent bien vers cette loi.

Conclusion. – Par rapport à la théorie de portée nulle habituelle, nous avons trouvé des corrections de l'ordre de $1/\ln(\lambda_t/R_t)$ au troisième coefficient du viriel d'un gaz unitaire de fermions à deux composantes, près et en dessous du seuil de l'effet Efimov, à une distance $\alpha_c - \alpha$ variant comme $1/[\ln(\lambda_t/R_t)]^2$, où R_t est un paramètre à trois corps et λ_t une longueur d'onde thermique de de Broglie; ces corrections en $1/\ln(\lambda_t/R_t)$ proviennent de corrélations à trois corps à courte distance, c'est-à-dire de triplets d'atomes proches¹¹. Par conséquent, pour une valeur finie et donnée de λ_t/R_t , comme dans tout système réaliste, le troisième coefficient du viriel se raccorde de manière lisse à ses valeurs prédites par le modèle efimovien de portée nulle au-dessus du seuil, ce qui supprime la transition de phase non physique du premier ordre présente dans la théorie de portée nulle. Nos prédictions peuvent être testées en mesurant l'équation d'état des mélanges d'atomes froids fermioniques ayant un rapport de masse $\alpha \simeq 13,6$, comme le mélange $^3\text{He}^*$ et ^{40}K .

Remerciements. – S.E. remercie la JSPS pour son soutien financier.

Références

- [1] K. Huang, *Statistical Mechanics* (Wiley, New York, 1963).
- [2] E. Beth, G.E. Uhlenbeck, *Physica III* **8**, 729 (1936); *Physica IV* **10**, 915 (1937).
- [3] P.C. Hemmer, *Phys. Lett.* **27A**, 377 (1968); B. Jancovici, *Phys. Rev.* **178**, 295 (1969); *Phys. Rev.* **184**, 119 (1969); B. Jancovici, S. Merkuriev, *Phys. Rev. A* **12**, 2610 (1975).
- [4] T.D. Lee, C.N. Yang, *Phys. Rev.* **116**, 25 (1959); A. Pais, G.E. Uhlenbeck, *Phys. Rev.* **116**, 250 (1959); S.K. Adhikari, R.D. Amado, *Phys. Rev. Lett.* **27**, 485 (1971); W.G. Gibson, *Phys. Rev. A* **6**, 2469 (1972).
- [5] K.M. O'Hara *et al.*, *Science* **298**, 2179 (2002); T. Bourdel *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 020402 (2003); C.A. Regal, M. Greiner, D.S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 040403 (2004); M. Zwierlein *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 120403 (2004).
- [6] A. Comtet, Y. Georgelin, S. Ouvry, *J. Phys. A* **22**, 3917 (1989); J. McCabe, S. Ouvry, *Phys. Lett. B* **260**, 113 (1990).
- [7] Xia-Ji Liu, Hui Hu, P. D. Drummond, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 160401 (2009); *Phys. Rev. A* **82**, 023619 (2010).
- [8] D.K. Kaplan, Sichun Sun, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 030601 (2011); X. Leyronas, *Phys. Rev. A* **84**, 053633 (2011).
- [9] M. Horikoshi, S. Nakajima, M. Ueda, T. Mukaiyama, *Science* **327**, 442 (2010); N. Navon, S. Nascimbène, F. Chevy, C. Salomon, *Science* **328**, 729 (2010); Mark Ku, A. Sommer, L. Cheuk, M. Zwierlein, *Science* **335**, 563 (2012).
- [10] S. Nascimbène *et al.*, *Nature* **463**, 1057 (2010).
- [11] V. Efimov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **12**, 589 (1971); V. Efimov, *Nucl. Phys. A* **210**, 157 (1973); A. Bulgac, V. Efimov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **22**, 296 (1975).
- [12] Y. Castin, F. Werner, *Rev. can. phys.* **91**, 382 (2013).
- [13] J. von Stecher, *J. Phys. B* **43**, 101002 (2010).
- [14] S. Piatecki, W. Krauth, *Nature Comm.* **5**, 3503 (2014).
- [15] D.S. Petrov, *Phys. Rev. A* **67**, 010703 (2003); E. Braaten, H.-W. Hammer, *Phys. Rep.* **428**, 259 (2006).
- [16] K.M. Daily, D. Blume, *Phys. Rev. A* **85**, 013609 (2012).
- [17] F. Werner, Y. Castin, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 150401 (2006).
- [18] F. Werner, Y. Castin, *Phys. Rev. A* **74**, 053604 (2006); Y. Castin, F. Werner, chap. 5, *The BCS-BEC Crossover and the Unitary Fermi Gas*, LNIP 836, W. Zwerger éd. (Springer, Berlin, 2011).
- [19] F. Werner, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris, 2008), tel.archives-ouvertes.fr/tel-00285587.
- [20] R. Minlos, L. Faddeev, *Sov. Phys. JETP* **14**, 1315 (1962).
- [21] Y. Castin, E. Tignone, *Phys. Rev. A* **84**, 062704 (2011).
- [22] G. Gasaneo, J.H. Macek, *J. Phys. B* **35**, 2239 (2002); M. Birse, *J. Phys. A* **39**, L49 (2006).
- [23] Y. Castin, *Comptes Rendus Physique* **5**, 407 (2004).
- [24] L.P. Pitaevskii, A. Rosch, *Phys. Rev. A* **55**, R853 (1997).
- [25] O. Kartavtsev, A. Malykh, *Zh. Eksp. Teor. Phys.* **86**, 713 (2007).
- [26] L. Landau, E. Lifshitz, *Quantum Mechanics* (Elsevier Science, Oxford, 2003).
- [27] P. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, vol. II, p. 1665 (Mc Graw-Hill, New York, 1953).
- [28] L. Pricoupenko, *Phys. Rev. A* **82**, 043633 (2010).
- [29] M. Jona-Lasinio, L. Pricoupenko, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 023201 (2010).
- [30] S. Endo, P. Naidon, M. Ueda, *Phys. Rev. A* **86**, 062703 (2012).
- [31] S. Jonsell, H. Heiselberg, C.J. Pethick, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 250401 (2002).
- [32] F. Werner, Y. Castin, *Phys. Rev. A* **86**, 053633 (2012).
- [33] A. Pais, G.E. Uhlenbeck, *Phys. Rev.* **116**, 250 (1959).
- [34] A. Safavi-Naini, Seth T. Rittenhouse, D. Blume, H.R. Sadeghpour, *Phys. Rev. A* **87**, 032713 (2013).
- [35] Y. Nishida, Dam Thanh Son, Shina Tan, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 090405 (2008).
- [36] F. Werner, Y. Castin, *Phys. Rev. A* **86**, 013626 (2012).

11. Pour $s < 1/2$, elles l'emportent sur des corrections plus habituelles à l'énergie (ici négligées), dues à l'effet d'une portée non nulle b de l'interaction à deux corps au niveau des corrélations à deux corps à courte distance (impliquant seulement des paires d'atomes proches), qui tendent vers zéro linéairement en b [36]. D'après l'Eq.(29) pour $R_t/\lambda_t \rightarrow 0$, $\bar{B}_{2,1} - B_{2,1} \sim -\frac{3}{\pi} \Gamma(s+1) \sin(s\pi)/(\beta E_{\text{glob}})^s$ tend en effet vers zéro plus lentement que b , si l'on suppose que $R_t \approx b$.