

Classifications des injections virtuelles

Christophe Chalons, université Paris7, équipe de logique mathématique

October 25, 2014

1 Introduction

Dans ce pdf, nous classons les injections virtuelles entre entiers. Nous montrons d'abord à titre d'exemple emblématique, que l'injection virtuelle de 9 dans 5 n'est pas plus petite que l'injection virtuelle de 8 dans 5. On ne peut pas simuler le téléphone $Invirt(9, 5)$ avec le téléphone $Invirt(8, 5)$. Les grandes idées de la preuve qui suit sont entièrement dues à Anatole Khelif. Je ne fais que rédiger et agencer. La décision, et la conviction que c'est important, d'étudier ces injections virtuelles et de les classer revient entièrement à Saab Abou Jaoudé. Par ailleurs, Marco a produit ultérieurement un lemme qui rend le théorème d'Anatole plus facile à prouver dans certains cas particuliers pour qui aime visualiser les choses. Nous réservons une section à ce lemme et en laissons la preuve au lecteur.

2 Auteurs ayant collaboré

Anatole Khelif, Saab Abou Jaoudé, Marco, Christophec

On rappelle ce qu'est l'injection virtuelle de n dans p : il s'agit du téléphone suivant:

- Combiné1: clavier n ; écran p
- Combiné2: clavier p écran n
- Garantie:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in n \quad y \in p \\ z \in p \quad t \in n \end{array} \mid y = z \Rightarrow x = t \right\}$$

3 Commodités d'écriture

On va éviter de repréciser à chaque fois où varie la variable $(x, y, z, t) \in n \times p \times n' \times p'$ ainsi que les ensembles d'arrivée et de départ des fonctions f, g, h, k

4 L'hypothèse

On va supposer que $Invirt(n, p) \leq_{Ludique} Invirt(n', p')$. Autrement dit, on va supposer l'existence de f, g, h, k telles que:

$$(x, y, z, t) \mapsto \left(\begin{array}{l} x \rightarrow f(x) \mid_{Invirt(n', p')} y \rightarrow g(x, y) \\ z \rightarrow h(z) \mid_{Invirt(n', p')} t \rightarrow k(z, t) \end{array} \right)$$

permette de simuler $Invirt(n, p)$ avec $Invirt(n', p')$, ce qui donne, pour tous x, y, z, t :

$$(h(z) = y \Rightarrow f(x) = t) \Rightarrow (z = g(x, y) \Rightarrow x = k(z, t))$$

dont la contraposée s'écrit:

$$(z = g(x, y) \text{ et } x \neq k(z, t)) \Rightarrow (h(z) = y \text{ et } f(x) \neq t)$$

qui donne les deux implications suivantes:

- pour tous x, y, z, t : $(z = g(x, y) \text{ et } x \neq k(z, t)) \Rightarrow (h(z) = y)$
- pour tous x, y, z, t : $(z = g(x, y) \text{ et } x \neq k(z, t)) \Rightarrow (f(x) \neq t)$

qui peuvent, elles-mêmes, de manière équivalente, se réécrire :

- pour tous x, y, t : $(x \neq k(g(x, y), t)) \Rightarrow (h(g(x, y)) = y)$
- pour tous x, y : $(x \neq k(g(x, y), f(x))) \Rightarrow (f(x) \neq f(x))$

qui peuvent, elles-mêmes, de manière équivalente, se réécrire :

- pour tous x, y : $(\exists t : (x \neq k(g(x, y), t))) \Rightarrow (h(g(x, y)) = y)$
- pour tous x, y : $(x = k(g(x, y), f(x)))$

Dans la suite nous utiliserons des crochets pour noter l'image d'un ensemble par une fonction: $s[X]$ désigne $\{x \mid \exists y \in X : x = s(y)\}$

5 Un ensemble que l'on définit

Dans la suite on s'intéresse d'abord au cas particulier $((n, p), (n', p')) := ((9, 5), (8, 5))$

On s'intéresse de très près à l'ensemble suivant, que nous noterons A :

$$A := \{x \in 9 \mid \forall y \in 5 \exists t \in 9 : k(g(x, y), t) \neq x\}$$

C'est le cardinal de $A \times 5$ qui est un sous-ensemble de 9, qui va nous intéresser. On peut remarquer que $A \times 5$ est un **sous-ensemble** de

$$Y := \{(x, y) \in 9 \times 5 \mid \exists t \in 9 : k(g(x, y), t) \neq x\}$$

qui a la propriété que la restriction de la fonction

$$(x, y) \mapsto (g(x, y), f(x))$$

à Y est **injective**. En effet, connaissant, pour un $(x, y) \in Y$ la valeur $v := (g(x, y), f(x))$, on retrouve facilement x , et y de la façon suivante: $x = k(v)$ et $y = h(g(x, y))$

Nous allons noter B le complémentaire de A , donc:

$$B := \{x \in 9 \mid \exists y \in 5 \forall t \in 9 : k(g(x, y), t) = x\}$$

et nous intéresser à $B \times 5$.

6 Dédutions

Du fait que $(x, y) \mapsto (g(x, y), f(x))$ est injective, on cherche le plus grand cardinal possible pour un des ensembles $f^{-1}[c]$ que l'on note n . Par exemple si $\text{card}(A) = 9$ alors $n = 2$ puisque f va de 9 dans 8. D'une manière générale, étant donné deux entiers non nuls a, b , on peut noter $m(a, b)$ le plus petit entier n tel que $a/b \leq n$ et ici, on pose $n := m(\text{card}(A), 8)$

Il s'en suit que quand on fait parcourir au couple (x, y) l'ensemble $A \times 5$, $g(x, y)$ prendra au moins $n \times 5$ valeurs possibles.

Nous nous intéressons maintenant à l'ensemble B . A chaque $x \in B$, on peut associer $y(x) \in 5$ tel que $\forall t : k(g(x, y(x)), t) = x$. Cela nous donne un ensemble de $\text{card}(B)$ éléments distincts que sont les $g(x, y(x))$ quand x parcourt B . **Par ailleurs**, aucun des ces éléments n'est un élément de $g[A \times 5]$. En effet, supposons que $e := g(x, y(x)) = g(x', y')$ avec $x' \in A$. Il existe t tel que $k(e, t) = k(g(x', y'), t) \neq x'$. Par ailleurs, comme, pour ce qui le concerne, $x \in B, \forall t : k(e, t) = x$. Il s'en suit que $x \neq x'$. Mais c'est en contradiction avec le fait que $x = k(e, f(x)) = k(e, f(x')) = x'$.

7 Conclusion

On a donc trouvé $n \times 5 + \text{card}(B) = n \times 5 + (9 - \text{card}(A))$ éléments différents de la forme $g(x, y)$, qui sont dans 5. Cela conduit à la contradiction suivante:

- si $n = 1$ alors $5 + (9 - \text{card}(A)) \leq 5$, donc $\text{card}(A) = 9$ (Rappel: $A \subseteq 9$), donc $n = 2$
- si $n \geq 2$ alors $5 \times n + (9 - \text{card}(A)) \leq 5$ et $\text{card}(A) \leq 9$

La preuve qui précède est emblématique. On laisse au lecteur le soin de s'apercevoir que dans le cas général, on obtient une CNS sur $((n, p), (n', p'))$ en odifiant à peine la preuve précédente et en étudiant les valeurs tolérées pour $\text{card}(A)$ dans la contradiction finale obtenue ci-dessus pour qu'elle n'en soit pas une.

Mais au lieu de généraliser la preuve précédente, on va utiliser une autre technique qui a été découverte, elle, par Marco, et qui démontre le théorème d'Anatole Khélif avec une visualisation plus grande car avec un lemme-clé visuelle.

8 Théorème d'Anatole Khélif

Théorème 1 *Anatole Khélif: Pour tous entiers naturels non nuls $n, p, n', p' : \text{InjVirt}(n, p) \leq \text{InjVirt}(n', p')$ si et seulement si, quand on effectue la division euclidienne $p = qp' + r$, on obtient $n \leq qn' + r$*

9 Preuve

J'abrège $\text{InjVirt}(n, p)$ ar $\text{IV}(n, p)$

9.1 Condition suffisante

Théorème 2 *Soient n, n', p, p' . Soit $p = qp' + r$ l'écriture de la division euclidienne de p par p' . Supposons que $n \leq qn' + r$. Alors $\text{IV}(n, p) \leq \text{IV}(n', p')$*

Preuve:

$$\text{IV}(n, p) = \text{IV}(n, qp' + r) \leq \text{IV}(qn' + r, qp' + r) \leq \text{IV}(qn', qp') \leq \text{IV}(n', p')$$

On met en annexe les réductions qui témoignent que $\text{IV}(kn, np) \leq \text{IV}(n, p)$ et $\text{IV}(n + 1, p + 1) \leq \text{IV}(n, p)$

9.2 Condition nécessaire

Théorème 3 *Anatole Khelif: $\forall n, p, n', p' : \text{si } \text{InjVirt}(n, p) \leq \text{InjVirt}(n', p') \text{ alors quand on effectue la division euclidienne } p = qp' + r, \text{ on obtient } n \leq qn' + r$*

Nous allons le prouver de la même manière qu'à la section précédente sans tout réécrire.

Après le même raisonnement on aboutit à l'existence d'un ensemble $A \subseteq n$ vérifiant l'inégalité suivante:

$$s(\text{card}(A)) \times p' + (n - \text{card}(A)) \leq p$$

éléments différents de la forme $g(x, y)$, qui sont dans p en notant $s(\text{card}(A))$ le premier entier s tel que $s \geq \text{card}(A)/n'$. Par contre, on n'obtient plus, comme dans la preuve précédente, de contradiction.

Ré écrivons l'inégalité obtenue: $n \leq p + \text{card}(A) - (s(\text{card}(A)) \times p')$. Il nous reste à trouver le maximum de

$$x \in n \mapsto p + x - s(x) \times p'$$

ce que nous allons disposer dans un exercice destiné au lecteur, qui relève d'une activité de classes préparatoires.

9.3 Exercice

Démontrer le théorème suivant:

Théorème 4 *Soient n, p, n', p' 4 entiers non nuls, positifs et s la fonction allant de n dans \mathbb{N} telle que $\forall x \in n : s(x)$ est le plus petit entier z tel que $x/n' \leq z$. Soit $p = qp' + r$ la division euclidienne de p par p' , où q, r sont respectivement le quotient et le reste. On suppose que $n \leq \max_{x \in n} [x \in n \mapsto p + x - s(x) \times p']$. Alors $n \leq qn' + r$*

La section suivante énonce le lemme de Marco:

10 Lemme de Marco

Théorème 5 *Supposons que f, g, h, k témoignent que $IV(n, p) \leq IV(n', p')$. Alors pour tout $v, g^{-1}(v)$ est inclus dans une ligne, une colonne ou une paire de $n \times p'$*

11 Annexe

Nous justifions que $IV(kn, kp) \leq IV(n, p)$:

$$\begin{aligned} & (k, n) \rightarrow n \mid p \rightarrow (k, p) \\ & \text{ESPACE INTERSIDERAL} \\ & (k', p') \rightarrow p' \mid n' \rightarrow (k', n') \end{aligned}$$

Nous justifions que $IV(n+1, p+1) \leq IV(n, p)$: rappelons que pour tout entier $n : n+1 := \{0; \dots n\}$

$$\begin{aligned} & x \rightarrow \text{if } x = n \text{ then } 0 \text{ else } x \mid y \rightarrow \text{if } x = n \text{ then } p \text{ else } y \\ & \text{ESPACE INTERSIDERAL} \\ & x' \rightarrow \text{if } x' = p \text{ then } 0 \text{ else } x' \mid y' \rightarrow \text{if } x' = p' \text{ then } n \text{ else } y' \end{aligned}$$