



HAL
open science

Classification des injections virtuelles

Christophe Chalons

► **To cite this version:**

| Christophe Chalons. Classification des injections virtuelles. 2014. hal-01077555v1

HAL Id: hal-01077555

<https://hal.science/hal-01077555v1>

Preprint submitted on 25 Oct 2014 (v1), last revised 3 Nov 2014 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classifications des injections virtuelles

Christophe Chalons, université Paris7, équipe de logique mathématique

October 25, 2014

1 Introduction

Dans ce pdf, nous classons les injections virtuelles entre entiers. Nous montrons d'abord à titre d'exemple emblématique, que l'injection virtuelle de 9 dans 5 n'est pas plus petite que l'injection virtuelle de 8 dans 5. On ne peut pas simuler le téléphone $InjVirt(9, 5)$ avec le téléphone $InjVirt(8, 5)$. Les grandes idées de la preuve qui suit sont entièrement dues à Anatole Khelif. Je ne fais que rédiger et agencer. La décision, et la conviction que c'est important, d'étudier ces injections virtuelles et de les classer revient entièrement à Saab Abou Jaoudé. Par ailleurs, Marco a produit ultérieurement un lemme qui rend le théorème d'Anatole plus facile à prouver dans certains cas particuliers pour qui aime visualiser les choses. Nous réservons une section à ce lemme et en laissons la preuve au lecteur.

2 Auteurs ayant collaboré

Anatole Khelif, Saab Abou Jaoudé, Marco, Christophec

On rappelle ce qu'est l'injection virtuelle de n dans p : il s'agit du téléphone suivant:

- Combiné1: clavier n ; écran p
- Combiné2: clavier p écran n
- Garantie:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in n \quad y \in p \\ z \in p \quad t \in n \end{array} \mid y = z \Rightarrow x = t \right\}$$

3 Commodités d'écriture

On va éviter de repréciser à chaque fois où varie la variable $(x, y, z, t) \in n \times p \times n' \times p'$ ainsi que les ensembles d'arrivée et de départ des fonctions f, g, h, k

4 L'hypothèse

On va supposer que $InjVirt(n, p) \leq_{Ludique} InjVirt(n', p')$. Autrement dit, on va supposer l'existence de f, g, h, k telles que:

$$(x, y, z, t) \mapsto \left(\begin{array}{l} x \rightarrow f(x) \mid_{InjVirt(n', p')} y \rightarrow g(x, y) \\ z \rightarrow h(z) \mid_{InjVirt(n', p')} t \rightarrow k(z, t) \end{array} \right)$$

permette de simuler $InjVirt(n, p)$ avec $InjVirt(n', p')$, ce qui donne, pour tous x, y, z, t :

$$(h(z) = y \Rightarrow f(x) = t) \Rightarrow (z = g(x, y) \Rightarrow x = k(z, t))$$

dont la contraposée s'écrit:

$$(z = g(x, y) \text{ et } x \neq k(z, t)) \Rightarrow (h(z) = y \text{ et } f(x) \neq t)$$

qui donne les deux implications suivantes:

- pour tous x, y, z, t : $(z = g(x, y) \text{ et } x \neq k(z, t)) \Rightarrow (h(z) = y)$
- pour tous x, y, z, t : $(z = g(x, y) \text{ et } x \neq k(z, t)) \Rightarrow (f(x) \neq t)$

qui peuvent, elles-mêmes, de manière équivalente, se réécrire :

- pour tous x, y, t : $(x \neq k(g(x, y), t)) \Rightarrow (h(g(x, y)) = y)$
- pour tous x, y : $(x \neq k(g(x, y), f(x))) \Rightarrow (f(x) \neq f(x))$

qui peuvent, elles-mêmes, de manière équivalente, se réécrire :

- pour tous x, y : $(\exists t : (x \neq k(g(x, y), t))) \Rightarrow (h(g(x, y)) = y)$
- pour tous x, y : $(x = k(g(x, y), f(x)))$

Dans la suite nous utiliserons des crochets pour noter l'image d'un ensemble par une fonction: $s[X]$ désigne $\{x \mid \exists y \in X : x = s(y)\}$

5 Un ensemble que l'on définit

Dans la suite on s'intéresse d'abord au cas particulier $((n, p), (n', p')) := ((9, 5), (8, 5))$

On s'intéresse de très près à l'ensemble suivant, que nous noterons A :

$$A := \{x \in 9 \mid \forall y \in 5 \exists t \in 9 : k(g(x, y), t) \neq x\}$$

C'est le cardinal de $A \times 5$ qui est un sous-ensemble de 9, qui va nous intéresser. On peut remarquer que $A \times 5$ est un **sous-ensemble** de

$$Y := \{(x, y) \in 9 \times 5 \mid \exists t \in 9 : k(g(x, y), t) \neq x\}$$

qui a la propriété que la restriction de la fonction

$$(x, y) \mapsto (g(x, y), f(x))$$

à Y est **injective**. En effet, connaissant, pour un $(x, y) \in Y$ la valeur $v := (g(x, y), f(x))$, on retrouve facilement x , et y de la façon suivante: $x = k(v)$ et $y = h(g(x, y))$

Nous allons noter B le complémentaire de A , donc:

$$B := \{x \in 9 \mid \exists y \in 5 \forall t \in 9 : k(g(x, y), t) = x\}$$

et nous intéresser à $B \times 5$.

6 Dédutions

Du fait que $(x, y) \mapsto (g(x, y), f(x))$ est injective, on cherche le plus grand cardinal possible pour un des ensembles $f^{-1}[c]$ que l'on note n . Par exemple si $\text{card}(A) = 9$ alors $n = 2$ puisque f va de 9 dans 8. D'une manière générale, étant donné deux entiers non nuls a, b , on peut noter $m(a, b)$ le plus petit entier n tel que $a/b \leq n$ et ici, on pose $n := m(\text{card}(A), 8)$

Il s'en suit que quand on fait parcourir au couple (x, y) l'ensemble $A \times 5$, $g(x, y)$ prendra au moins $n \times 5$ valeurs possibles.

Nous nous intéressons maintenant à l'ensemble B . A chaque $x \in B$, on peut associer $y(x) \in 5$ tel que $\forall t : k(g(x, y(x)), t) = x$. Cela nous donne un ensemble de $\text{card}(B)$ éléments distincts que sont les $g(x, y(x))$ quand x parcourt B . **Par ailleurs**, aucun des ces éléments n'est un élément de $g[A \times 5]$. En effet, supposons que $e := g(x, y(x)) = g(x', y')$ avec $x' \in A$. Il existe t tel que $k(e, t) = k(g(x', y'), t) \neq x'$. Par ailleurs, comme, pour ce qui le concerne, $x \in B, \forall t : k(e, t) = x$. Il s'en suit que $x \neq x'$. Mais c'est en contradiction avec le fait que $x = k(e, f(x)) = k(e, f(x')) = x'$.

7 Conclusion

On a donc trouvé $n \times 5 + \text{card}(B) = n \times 5 + (9 - \text{card}(A))$ éléments différents de la forme $g(x, y)$, qui sont dans 5. Cela conduit à la contradiction suivante:

- si $n = 1$ alors $5 + (9 - \text{card}(A)) \leq 5$, donc $\text{card}(A) = 9$ (Rappel: $A \subseteq 9$), donc $n = 2$
- si $n \geq 2$ alors $5 \times n + (9 - \text{card}(A)) \leq 5$ et $\text{card}(A) \leq 9$

La preuve qui précède est emblématique. On laisse au lecteur le soin de s'apercevoir que dans le cas général, on obtient une CNS sur $((n, p), (n', p'))$ en odifiant à peine la preuve précédente et en étudiant les valeurs tolérées pour $\text{card}(A)$ dans la contradiction finale obtenue ci-dessus pour qu'elle n'en soit pas une.

Mais au lieu de généraliser la preuve précédente, on va utiliser une autre technique qui a été découverte, elle, par Marco, et qui démontre le théorème d'Anatole Khélif avec une visualisation plus grande car avec un lemme-clé visuelle.

8 Théorème d'Anatole Khélif

Théorème 1 *Anatole Khélif: Pour tous entiers naturels non nuls $n, p, n', p' : \text{InjVirt}(n, p) \leq \text{InjVirt}(n', p')$ si et seulement si, quand on effectue la division euclidienne $p = qp' + r$, on obtient $n \leq qn' + r$*

9 Preuve

J'abrège $\text{InjVirt}(n, p)$ ar $\text{IV}(n, p)$

9.1 Condition suffisante

Théorème 2 *Soient n, n', p, p' . Soit $p = qp' + r$ l'écriture de la division euclidienne de p par p' . Supposons que $n \leq qn' + r$. Alors $\text{IV}(n, p) \leq \text{IV}(n', p')$*

Preuve:

$$\text{IV}(n, p) = \text{IV}(n, qp' + r) \leq \text{IV}(qn' + r, qp' + r) \leq \text{IV}(qn', qp') \leq \text{IV}(n', p')$$

On met en annexe les réductions qui témoignent que $\text{IV}(kn, np) \leq \text{IV}(n, p)$ et $\text{IV}(n + 1, p + 1) \leq \text{IV}(n, p)$

9.2 Condition nécessaire

Théorème 3 *Anatole Khelif: $\forall n, p, n', p' : \text{si } \text{InjVirt}(n, p) \leq \text{InjVirt}(n', p') \text{ alors quand on effectue la division euclidienne } p = qp' + r, \text{ on obtient } n \leq qn' + r$*

Nous allons le prouver de la même manière qu'à la section précédente sans tout réécrire.

Après le même raisonnement on aboutit à l'existence d'un ensemble $A \subseteq n$ vérifiant l'inégalité suivante:

$$s(\text{card}(A)) \times p' + (n - \text{card}(A)) \leq p$$

éléments différents de la forme $g(x, y)$, qui sont dans p en notant $s(\text{card}(A))$ le premier entier s tel que $s \geq \text{card}(A)/n'$. Par contre, on n'obtient plus, comme dans la preuve précédente, de contradiction.

Ré écrivons l'inégalité obtenue: $n \leq p + \text{card}(A) - (s(\text{card}(A)) \times p')$. Il nous reste à trouver le maximum de

$$x \in n \mapsto p + x - s(x) \times p'$$

ce que nous allons disposer dans un exercice destiné au lecteur, qui relève d'une activité de classes préparatoires.

9.3 Exercice

Démontrer le théorème suivant:

Théorème 4 *Soient n, p, n', p' 4 entiers non nuls, positifs et s la fonction allant de n dans \mathbb{N} telle que $\forall x \in n : s(x)$ est le plus petit entier z tel que $x/n' \leq z$. Soit $p = qp' + r$ la division euclidienne de p par p' , où q, r sont respectivement le quotient et le reste. On suppose que $n \leq \max_{x \in n} [x \in n \mapsto p + x - s(x) \times p']$. Alors $n \leq qn' + r$*

La section suivante énonce le lemme de Marco:

10 Lemme de Marco

Théorème 5 *Supposons que f, g, h, k témoignent que $IV(n, p) \leq IV(n', p')$. Alors pour tout $v, g^{-1}(v)$ est inclus dans une ligne, une colonne ou une paire de $n \times p'$*

11 Annexe

Nous justifions que $IV(kn, kp) \leq IV(n, p)$:

$$\begin{aligned} & (k, n) \rightarrow n \mid p \rightarrow (k, p) \\ & \text{ESPACE INTERSIDERAL} \\ & (k', p') \rightarrow p' \mid n' \rightarrow (k', n') \end{aligned}$$

Nous justifions que $IV(n+1, p+1) \leq IV(n, p)$: rappelons que pour tout entier $n : n+1 := \{0; \dots n\}$

$$\begin{aligned} & x \rightarrow \text{if } x = n \text{ then } 0 \text{ else } x \mid y \rightarrow \text{if } x = n \text{ then } p \text{ else } y \\ & \text{ESPACE INTERSIDERAL} \\ & x' \rightarrow \text{if } x' = p \text{ then } 0 \text{ else } x' \mid y' \rightarrow \text{if } x' = p' \text{ then } n \text{ else } y' \end{aligned}$$