



**HAL**  
open science

# Une conjecture plus maniable et qui l'entraîne de la conjecture de Hadwiger

Christophe Chalons

► **To cite this version:**

Christophe Chalons. Une conjecture plus maniable et qui l'entraîne de la conjecture de Hadwiger. 1998. hal-01075831

**HAL Id: hal-01075831**

**<https://hal.science/hal-01075831>**

Preprint submitted on 20 Oct 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une conjecture plus maniable et qui l'entraîne de la conjecture de Hadwiger

Christophe Chalons, université Paris7, équipe de logique mathématique

October 20, 2014

## 1 Introduction

Ce pdf très court présente une conjecture qui entraîne la conjecture de Hadwiger de manière relativement "violente" et est beaucoup plus accessible aux raisonnements par récurrence.

## 2 Définitions

On ne s'intéresse qu'aux graphes non orientés, ie aux couples  $(S, A)$  tel que  $A$  est inclus dans l'ensemble des paires incluses dans  $S^2$ . Ici on nomme paire l'ensemble de cardinal 2.

**Définition 1** On appelle *île* du graphe  $G := (S, A)$  une partie  $D$  de  $S$  tel que le graphe induit par  $D$ , c'est à dire  $(D, \{p \in A \mid p \subseteq D\})$  est connexe

L'intérêt de cette définition est qu'elle va permettre de parler de plage (analoguement au fait que les îles de nos vies ont des plages).

**Définition 2** On appelle *plage* du graphe  $G := (S, A)$  une partie  $P$  de  $S$ , telle qu'il existe une île  $D$  telle que  $D \cap P = \emptyset$  et  $\forall x \in P \exists y \in D : \{x; y\} \in A$

La conjecture proprement dite dit la chose suivante: **Conjecture1:** pour tout entier  $n$ , pour tout graphe fini  $G$ , si  $G$  ne peut pas être colorié avec  $n + 1$  couleurs alors il existe une plage  $P$  de  $G$  qui ne peut pas être coloriée avec  $n$  couleurs.

Mais nous allons la formuler un tout petit peu autrement pour la rendre la plus accessible possible aux raisonnements par récurrence. **Conjecture2:** pour tout graphe fini  $G$  il existe une plage  $P$  de  $G$  tel que si on rajoute un sommet à  $P$  que l'on relie à tous les sommets de  $P$ , on obtient un graphe  $H$  tel que  $G \leq_{cvn} H$

On rappelle la définition de  $\leq_{cvn}$

**Définition 3**  $(S, A) \leq_{cvn} (S', A')$  abrège il existe une application  $f : S \rightarrow S'$  telle que pour toute paire  $\{x; y\} \in A : \{f(x); f(y)\} \in A'$

Le sigle "cvn" > voulant juste dire que la relation d'équivalence  $(G \equiv H) := ((G \leq_{cvn} H) \text{ et } (H \leq_{cvn} G))$  a ses classes que nous appelons "chromatic virtual numbers"

### 3 Théorèmes

Les deux conjectures entraînent en fait la chose suivante, qui pourra être exploitée dans une recherche de contre-exemples:

**Conséquence 3 de (conjecture 1 ou conjecture 2):** soit  $G$  un graphe. On suppose qu'il nécessite  $n$  couleurs pour être colorié. Alors il existe des îles 2 à 2 disjointes dans  $G : D_1, D_2, \dots, D_n$  telles que pour tous  $i, j$  tels que  $i < j$  et tous deux dans  $\{1; \dots; n\}$ , n'importe quel sommet de  $D_j$  est relié à tous les sommets de  $D_i$ .

La preuve de ça, très facile et routinière est laissée en exercice au lecteur.

On rappelle la **Conjecture de Hadwiger**: soit  $G := (S, A)$  un graphe. On suppose qu'il nécessite  $n$  couleurs pour être colorié. Alors il existe des îles 2 à 2 disjointes dans  $G : D_1, D_2, \dots, D_n$  telles que pour tous  $i, j$  tous deux dans  $\{1; \dots; n\}$ , il existe un sommet  $x$  de  $D_i$  et un sommet  $y$  de  $D_j$  tels que  $\{x, y\} \in A$