



**HAL**  
open science

# Matrices de Stokes-Ramis et constantes de connexion pour les systèmes différentiels linéaires de niveau unique

Pascal Remy

► **To cite this version:**

Pascal Remy. Matrices de Stokes-Ramis et constantes de connexion pour les systèmes différentiels linéaires de niveau unique. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Mathématiques., 2012, 21 (2), pp.93 - 150. hal-01075662

**HAL Id: hal-01075662**

**<https://hal.science/hal-01075662>**

Submitted on 19 Oct 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# MATRICES DE STOKES-RAMIS ET CONSTANTES DE CONNEXION POUR LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES DE NIVEAU UNIQUE.

PASCAL REMY

RÉSUMÉ. Etant donné un système différentiel linéaire de niveau unique quelconque, nous explicitons des formules donnant les multiplicateurs de Stokes en fonction de constantes de connexion dans le plan de Borel, généralisant ainsi les formules obtenues dans l'article *Resurgence, Stokes phenomenon and alien derivatives for level-one linear differential systems* (M. Loday-Richaud, P. Remy). Pour ce faire, nous nous ramenons à un système de niveaux  $\leq 1$  par la méthode classique de réduction du rang ; puis, nous montrons que les solutions de ce nouveau système sont réurgentes-sommables et nous décrivons leurs singularités dans le plan de Borel. Nous illustrons l'ensemble des résultats sur trois exemples. Nous ne faisons aucune hypothèse de généralité sur le système de départ.

ABSTRACT. Given a linear differential system with a single arbitrary level, we state formulæ to express all the Stokes multipliers in terms of connection constants in the Borel plane generalizing thus the calculations made in the article *Resurgence, Stokes phenomenon and alien derivatives for level-one linear differential systems* (M. Loday-Richaud, P. Remy). To this end, we first reduce the level to levels 1 and smaller by the classical method of rank reduction; next, we prove that the solutions of the new system are summable-resurgent and we give a description of singularities in the Borel plane. We end with three examples. No assumption of genericity is made.

## INTRODUCTION

Dans tout l'article, nous nous donnons un système différentiel linéaire (en abrégé système)

$$(0.1) \quad x^{r+1} \frac{dY}{dx} = A(x)Y \quad , \quad A(x) \in M_n(\mathbb{C}\{x\}), \quad A(0) \neq 0$$

de dimension  $n \geq 2$  à coefficients méromorphes d'ordre  $r + 1 \geq 2$  à l'origine  $0 \in \mathbb{C}$ . Un tel système admet une solution fondamentale formelle de la forme

$$\tilde{Y}(x) = \tilde{F}(x)x^L e^{Q(1/x)}$$

où  $\tilde{F}(x) \in M_n(\mathbb{C}[[x]])$  est une série entière en  $x$ , la matrice  $L \in M_n(\mathbb{C})$  des exposants de monodromie formelle est une matrice constante et la partie irrégulière  $Q(1/x) = \text{diag}(q_1(1/x), \dots, q_n(1/x))$  est une matrice diagonale dont les termes  $q_j(1/x) \in x^{-1/\nu} \mathbb{C}[x^{-1/\nu}]$ ,  $\nu \in \{1, \dots, n!\}$ , sont des polynômes en une puissance fractionnaire de  $1/x$  ([1, 7]).

---

6 rue Chantal Mauduit, F-78 420 Carrières-sur-Seine.  
pascal.remy07@orange.fr.

L'extension algébrique finie  $x \mapsto x^\nu$  de la variable  $x$  et une transformation de jauge méromorphe de la forme  $Y \mapsto T(x)Y$ , où  $T(x)$  est une matrice à coefficients polynomiaux en  $x$  et  $1/x$ , permettent de normaliser  $\tilde{Y}(x)$  comme suit ([1]) :

- $\tilde{F}(x) \in M_n(\mathbb{C}[[x]])$  est une série entière en  $x$  vérifiant  $\tilde{F}(0) = I_n$ , où  $I_n$  est la matrice identité de dimension  $n$ ,
- la matrice des exposants de monodromie formelle  $L$  est sous forme de Jordan

$$L = \bigoplus_{j=1}^J (\lambda_j I_{n_j} + J_{n_j})$$

avec  $J \geq 2$ , les valeurs propres  $\lambda_j$  satisfaisant à  $\text{Re}(\lambda_j) \in [0, 1[$  et

$$J_{n_j} = \begin{cases} 0 & \text{si } n_j = 1 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \text{si } n_j \geq 2 \end{cases}$$

- $Q(1/x)$  est une matrice diagonale à coefficients polynomiaux en  $1/x$  de la forme

$$Q\left(\frac{1}{x}\right) = \bigoplus_{j=1}^J q_j\left(\frac{1}{x}\right) I_{n_j}$$

avec

$$q_j\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{a_{j,r}}{x^r} - \frac{a_{j,r-1}}{x^{r-1}} - \cdots - \frac{a_{j,1}}{x} \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$$

- Nous supposons de plus que

$$(0.2) \quad \lambda_1 = 0 \quad \text{et} \quad q_1 \equiv 0$$

conditions qui peuvent toujours être réalisées au moyen du changement de vecteur inconnu  $Y = x^{\lambda_1} e^{q_1(1/x)} Z$ .

L'hypothèse « *le système (0.1) est de niveau unique  $r$*  » est équivalente aux deux conditions

$$(0.3) \quad \boxed{\begin{array}{l} 1. q_j - q_\ell \equiv 0 \text{ ou de degré } r \text{ pour tout } j, \ell \\ 2. \text{ il existe } j \text{ tel que } a_{j,r} \neq 0 \end{array}}$$

Sous cette hypothèse, nous nous intéressons aux formules donnant les multiplicateurs de Stokes de  $\tilde{F}$  en fonction de constantes de connexion dans le plan de Borel. Lorsque  $r = 1$ , ces constantes sont données par les singularités de la transformée de Borel  $\hat{F}$  de  $\tilde{F}$ . Plusieurs démonstrations de ce résultat existent sous des hypothèses suffisamment génériques (voir [9] par exemple). Une démonstration sans hypothèse de genericité a récemment été donnée par M. Loday-Richaud et l'auteur ([8]). Dans cette démonstration, nous avons établi la résurgence-sommable de  $\tilde{F}$  en suivant la méthode perturbative d'Écalle ([5]) et nous en avons déduit une description précise des singularités de  $\hat{F}$  dans le plan de Borel ; les formules explicitant les multiplicateurs de Stokes en fonction des constantes de connexion ont été obtenues

en interprétant les matrices de Stokes-Ramis comme intégrales de Laplace de ces singularités.

Le but de cet article est de généraliser les résultats établis dans [8] au cas  $r \geq 2$ . A cette fin, nous remplaçons le système initial (0.1) par un système de niveaux  $\leq 1$  grâce à la technique classique de réduction du rang (§ 1.1). On sait en effet parfaitement relier les matrices de Stokes-Ramis du système initial et les matrices de Stokes-Ramis du système  $r$ -réduit ([7, Prop. 4.2]). Ce nouveau système n'étant pas, en général, de niveau unique égal à 1, mais de plusieurs niveaux  $\leq 1$ , nous ne pouvons lui appliquer directement les résultats de [8]. Toutefois, nous montrons que ses solutions formelles restent résurgentes-sommables (§ 1.2, thm. 1.2). Nous en esquissons une démonstration basée sur les théorèmes d'indices de Ramis.

Le paragraphe 2 est consacré à l'étude des singularités dans le plan de Borel. Leur forme générale, donnée au théorème 2.13, est obtenue en réduisant le système  $r$ -réduit en une équation différentielle à coefficients polynomiaux et en appliquant à cette dernière le théorème d'Écalle sur les micro-solutions.

Au paragraphe 3, nous reprenons les études effectuées aux paragraphes 1 et 2 en suivant à présent la méthode perturbative d'Écalle. Nous donnons une démonstration complète du théorème de résurgence-sommable énoncé au théorème 1.2 et nous précisons la structure des singularités de front monomial (théorème 3.4).

Au paragraphe 4, nous explicitons les multiplicateurs de Stokes de  $\tilde{F}$  (système initial (0.1)) à l'aide des constantes de connexion dans le plan de Borel obtenues pour le système  $r$ -réduit (théorème 4.4). Une application numérique de ces formules est donnée au paragraphe 5 dans le cadre de trois exemples.

**Remerciements.** J'adresse mes plus vifs remerciements à Michèle Loday-Richaud pour toutes ses remarques et conseils sans lesquels cet article n'aurait jamais vu le jour. Je remercie également Jacques-Arthur Weil pour son aide dans l'étude de l'exemple du paragraphe A.2.

## 1. RÉDUCTION DU RANG ET RÉSURGENCE-SOMMABLE

Chacun des  $J$  blocs de colonnes de  $\tilde{F}(x)$  associés à la structure de Jordan de  $L$  pouvant être positionné à la première place à l'aide d'une permutation  $P$  sur les colonnes de  $\tilde{Y}(x)$ , nous nous limitons désormais au premier bloc  $\tilde{f}(x)$  formé par les  $n_1$  (= dimension du premier bloc de Jordan de  $L$ ) premières colonnes de  $\tilde{F}(x)$ . Rappelons, qu'avec une telle permutation, la nouvelle solution fondamentale formelle  $\tilde{Y}(x)P$  du système (0.1) s'écrit  $\tilde{Y}(x)P = \tilde{F}(x)P x^{P^{-1}LP} e^{P^{-1}Q(1/x)P}$ .

### 1.1. Système $r$ -réduit.

Le système  $r$ -réduit du système (0.1) est l'unique système de la variable  $t = x^r$  à coefficients méromorphes en  $0 \in \mathbb{C}$  admettant les solutions

$$\begin{bmatrix} \tilde{Y}(x) \\ x^{-1}\tilde{Y}(x) \\ \vdots \\ x^{-(r-1)}\tilde{Y}(x) \end{bmatrix}$$

pour un choix donné  $x = t^{1/r}$  d'une racine  $r^{\text{ème}}$  de  $t$  ([7]). Fixons une fois pour toute l'une de ces racines et notons<sup>1</sup>

$$\rho := \exp\left(-\frac{2i\pi}{r}\right)$$

Posons

$$A(x) = \sum_{m \geq 0} A_m x^m \quad \text{et} \quad A^{[k]}(t) = \sum_{m \geq 0} A_{k+mr} t^m$$

pour  $k = 0, \dots, r-1$ . Le système  $r$ -réduit du système (0.1) s'écrit

$$(1.1) \quad r t^2 \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}(t) \mathbf{Y}$$

où  $\mathbf{A}(t)$  est la matrice par blocs de dimension  $rn \times rn$  définie par

$$\mathbf{A}(t) := \begin{bmatrix} A^{[0]}(t) & tA^{[r-1]}(t) & \cdots & \cdots & tA^{[1]}(t) \\ A^{[1]}(t) & A^{[0]}(t) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & A^{[0]}(t) & tA^{[r-1]}(t) \\ A^{[r-1]}(t) & \cdots & \cdots & A^{[1]}(t) & A^{[0]}(t) \end{bmatrix} - \bigoplus_{k=0}^{r-1} ktI_n$$

Une solution fondamentale formelle  $\tilde{\mathbf{Y}}(t)$  de ce système est donnée par

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}(t^{1/r}) & \tilde{\mathbf{Y}}(\rho t^{1/r}) & \cdots & \tilde{\mathbf{Y}}(\rho^{r-1} t^{1/r}) \\ (t^{1/r})^{-1} \tilde{\mathbf{Y}}(t^{1/r}) & (\rho t^{1/r})^{-1} \tilde{\mathbf{Y}}(\rho t^{1/r}) & \cdots & (\rho^{r-1} t^{1/r})^{-1} \tilde{\mathbf{Y}}(\rho^{r-1} t^{1/r}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (t^{1/r})^{-(r-1)} \tilde{\mathbf{Y}}(t^{1/r}) & (\rho t^{1/r})^{-(r-1)} \tilde{\mathbf{Y}}(\rho t^{1/r}) & \cdots & (\rho^{r-1} t^{1/r})^{-(r-1)} \tilde{\mathbf{Y}}(\rho^{r-1} t^{1/r}) \end{bmatrix}$$

Elle s'écrit sous la forme  $\tilde{\mathbf{Y}}(t) = \tilde{\mathbf{F}}(t) \tilde{\mathbf{Y}}_0(t)$  où

$$\tilde{\mathbf{Y}}_0(t) := \bigoplus_{k=0}^{r-1} t^{\frac{L-kI_n}{r}} \begin{bmatrix} I_n & \rho^L & \cdots & \rho^{(r-1)L} \\ I_n & \rho^{L-I_n} & \cdots & \rho^{(r-1)(L-I_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_n & \rho^{L-(r-1)I_n} & \cdots & \rho^{(r-1)(L-(r-1)I_n)} \end{bmatrix} \bigoplus_{k=0}^{r-1} e^{Q_k(t)}$$

<sup>1</sup>Le choix du signe  $-$ , qui peut paraître surprenant, correspond en fait au choix que nous faisons par la suite de parcourir le cercle trigonométrique de  $0$  à  $-2\pi$  dans le sens des aiguilles d'une montre (cf. § 4, note 5).

avec  $Q_k(t) := Q(\bar{\rho}^k t^{-1/r})$  pour tout  $k = 0, \dots, r-1$ <sup>2</sup> et où  $\tilde{\mathbf{F}}(t) \in M_{rn}(\mathbb{C}[[t]])$  est la série entière en  $t$  définie par

$$(1.2) \quad \tilde{\mathbf{F}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{F}^{[0]}(t) & t\tilde{F}^{[r-1]}(t) & \dots & \dots & t\tilde{F}^{[1]}(t) \\ \tilde{F}^{[1]}(t) & \tilde{F}^{[0]}(t) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \tilde{F}^{[0]}(t) & t\tilde{F}^{[r-1]}(t) \\ \tilde{F}^{[r-1]}(t) & \dots & \dots & \tilde{F}^{[1]}(t) & \tilde{F}^{[0]}(t) \end{bmatrix}$$

Les séries  $\tilde{F}^{[k]}(t) \in M_n(\mathbb{C}[[t]])$  sont définies à partir de  $\tilde{F}(x)$  de manière analogue aux séries  $A^{[k]}(t)$  : pour tout  $k = 0, \dots, r-1$ ,

$$\tilde{F}^{[k]}(t) = \sum_{m \geq 0} F_{k+mr} t^m \quad \text{lorsque} \quad \tilde{F}(x) = \sum_{m \geq 0} F_m x^m$$

En particulier, la réduction du rang permet de ramener l'étude des  $n_1$  premières colonnes  $\tilde{f}(x)$  de  $\tilde{F}(x)$  à celle des  $n_1$  premières colonnes  $\hat{\mathbf{f}}(t)$  de  $\tilde{\mathbf{F}}(t)$  (cf. (1.2)).

Notre principal but, dans cet article, est d'explicitier les multiplicateurs de Stokes du système initial (0.1) associés à  $\tilde{f}(x)$  en fonction des constantes de connexion dans le plan de Borel associées à la transformée de Borel  $\hat{\mathbf{f}}(\tau)$  de  $\tilde{\mathbf{f}}(t)$ .

## 1.2. Théorème de résurgence-sommable.

Rappelons qu'une *fonction résurgente* est une fonction analytique à l'origine  $0 \in \mathbb{C}$  qui peut être prolongée analytiquement sur une surface de Riemann  $\mathcal{R}_\Omega$  associée à un ensemble  $\Omega \subset \mathbb{C}$  appelé *support singulier*. Pour une définition précise, nous renvoyons à [17] et [8, déf. 2.1 et 2.2]. Dans le cadre linéaire, le support singulier  $\Omega$  est un ensemble fini contenant 0. Dans un cadre plus général, l'utilisation d'algèbres de convolution et de convolutions de singularités nécessitent de prendre pour  $\Omega$  un réseau, éventuellement dense dans  $\mathbb{C}$  (voir [5, 11, 17] par exemple).

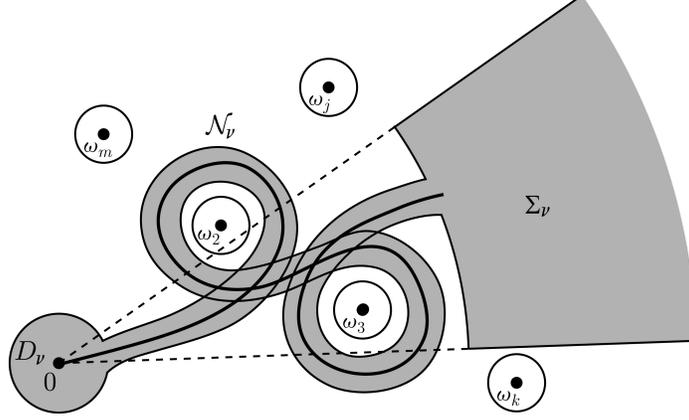
Pour définir la résurgence-sommable, il est nécessaire d'étendre la définition classique de région sectorielle de  $\mathbb{C}$  utilisée en théorie de la sommabilité en celle de région sectorielle de  $\mathcal{R}_\Omega$  appelée *région  $\nu$ -sectorielle* (cf. [8, déf. 2.3]) et définie pour tout  $\nu > 0$  assez petit par les données

- d'un disque ouvert  $D_\nu$  centré en  $0 \in \mathbb{C}$ ,
- d'un secteur ouvert de l'infini  $\Sigma_\nu$  d'ouverture bornée,
- d'un voisinage tubulaire  $\mathcal{N}_\nu$  d'un chemin de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux reliant  $D_\nu$  à  $\Sigma_\nu$  en tournant autour des points de  $\Omega$  un nombre fini de fois

<sup>2</sup>On a alors  $\tilde{\mathbf{Y}}_0(t) =$

$$\begin{bmatrix} t^{\frac{L}{r}} e^{Q_0(t)} & t^{\frac{L}{r}} \rho^L e^{Q_1(t)} & \dots & t^{\frac{L}{r}} \rho^{(r-1)L} e^{Q_{r-1}(t)} \\ t^{\frac{L-I_n}{r}} e^{Q_0(t)} & t^{\frac{L-I_n}{r}} \rho^{L-I_n} e^{Q_1(t)} & \dots & t^{\frac{L-I_n}{r}} \rho^{(r-1)(L-I_n)} e^{Q_{r-1}(t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^{\frac{L-(r-1)I_n}{r}} e^{Q_0(t)} & t^{\frac{L-(r-1)I_n}{r}} \rho^{L-(r-1)I_n} e^{Q_1(t)} & \dots & t^{\frac{L-(r-1)I_n}{r}} \rho^{(r-1)(L-(r-1)I_n)} e^{Q_{r-1}(t)} \end{bmatrix}$$

telles que la distance de  $D_\nu$  à  $\Omega^*$  et la distance de  $\mathcal{N}_\nu \cup \Sigma_\nu$  à  $\Omega$  soient  $\geq \nu$ .



Une région  $\nu$ -sectorielle

**Définition 1.1** (Résurgence-sommable).

- Une fonction résurgente définie sur  $\mathcal{R}_\Omega$  est dite résurgente-sommable à support singulier  $\Omega$  lorsqu'elle est à croissance au plus exponentielle à l'infini sur toute région  $\nu$ -sectorielle de  $\mathcal{R}_\Omega$ .

Nous notons  $\widetilde{\mathcal{R}es}_\Omega^{som}$  l'ensemble de ces fonctions. Il est muni d'une structure de  $\mathcal{O}^{\leq 1}(\mathbb{C})$ -module de convolution ( $\mathcal{O}^{\leq 1}(\mathbb{C})$  désigne l'algèbre de convolution des fonctions entières sur  $\mathbb{C}$  à croissance au plus exponentielle à l'infini).

- Une série formelle est dite série résurgente-sommable à support singulier  $\Omega$  si sa transformée de Borel formelle appartient à  $\widetilde{\mathcal{R}es}_\Omega^{som}$ .

L'ensemble de ces séries est noté  $\widetilde{\mathcal{R}es}_\Omega^{som}$  et est muni d'une structure de  $\mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$ -module.

Une série  $\tilde{h}(t) \in \widetilde{\mathcal{R}es}_\Omega^{som}$  est sommable dans toutes les directions  $\theta$  ne rencontrant aucun point de  $\Omega^*$ ; sa 1-somme, ou somme de Borel-Laplace, est notée  $s_\theta(\tilde{h})$ .

Rappelons que la transformée de Borel formelle  $\tilde{\mathcal{B}}$  est un isomorphisme entre les  $\mathbb{C}$ -algèbres différentielles  $(\mathbb{C}[[t]], +, \bullet, t^2 \frac{d}{dt})$  et  $(\mathbb{C}\delta \oplus \mathbb{C}[[\tau]], +, *, \tau \bullet)$  qui échange produit ordinaire et produit de convolution, dérivation  $t^2 \frac{d}{dt}$  et multiplication par  $\tau$ . Il échange également multiplication par  $\frac{1}{t}$  et dérivation  $\frac{d}{d\tau}$  permettant ainsi d'étendre  $\tilde{\mathcal{B}}$  en un isomorphisme entre les espaces  $\mathbb{C}[[t]][t^{-1}]$  et  $\mathbb{C}[\delta^{(k)}, k \in \mathbb{N}] \oplus \mathbb{C}[[\tau]]$ .

Sous notre hypothèse de niveau unique égal à  $r$ , nous avons le résultat suivant :

**Théorème 1.2** (Résurgence-sommable).

Soit  $\Omega = \{a_{j,r}, j = 1, \dots, J\}$  l'ensemble des valeurs de Stokes du système initial (0.1). Alors,

$$\tilde{f}(t) \in \widetilde{\mathcal{R}es}_\Omega^{som}$$

**Remarque 1.3.** Lorsque tous les polynômes  $q_j$  sont des monômes, i.e.,  $q_j(1/x) = -a_{j,r}/x^r$ , le système  $r$ -réduit (1.1) est de niveau pur 1. Dans ce cas, le théorème 1.2 est une conséquence directe du théorème de résurgence-sommable établi dans [8]. Dans le cas général, i.e., lorsqu'au moins l'un des polynôme  $q_j$  n'est pas un monôme,

le théorème 1.2 montre que la résurgence-sommable de  $\tilde{\mathbf{f}}$  n'est pas affectée par la présence des niveaux  $< 1$  dans le système  $r$ -réduit (1.1).

Le théorème 1.2 s'obtient de façon analogue à [8] en utilisant l'une ou l'autre des méthodes suivantes :

- réduction du système (1.1) à une équation différentielle  $Dy(t) = 0$  à coefficients polynomiaux via le théorème du vecteur cyclique ([3]) et le théorème d'algébrisation de Birkhoff ([18, thm. 3.3.1]),
- méthode d'Écalle par perturbation régulière et série majorante ([5]).

La première méthode est basée sur le polygone de Newton et les théorèmes d'indices de Ramis ([14]). L'hypothèse de niveau unique du système initial (0.1) y joue un rôle essentiel ; elle intervient dans le fait que le polygone de Newton de  $D$  à l'origine admet une pente nulle et une *unique* pente  $> 0$ , qui est égale à 1 et dont les racines de l'équation caractéristique sont les valeurs de Stokes  $a_{j,r}$ . Pour plus de détails, nous renvoyons à [8]. Cette approche nous permet également de donner la forme générale de *toutes* les singularités de  $\hat{\mathbf{f}}(\tau)$  dans le plan de Borel via le théorème d'Écalle sur les *micro-solutions* (cf. § 2.4 ci-dessous).

La seconde approche via la méthode perturbative d'Écalle sera traitée en détail au paragraphe 3 ci-après. Nous en déduirons en particulier une description précise des singularités de *front monomial* de  $\hat{\mathbf{f}}(\tau)$ .

## 2. FORME GÉNÉRALE DES SINGULARITÉS

D'après le théorème 1.2, la fonction  $\hat{\mathbf{f}}(\tau)$  est analytique sur la surface de Riemann  $\mathcal{R}_\Omega$  et ses points singuliers sont les valeurs de Stokes  $a_{j,r}$ ,  $j = 1, \dots, J$ , y compris  $a_{1,r} = 0$  sauf dans le premier feuillet.

Avant de débiter l'étude générale des singularités de  $\hat{\mathbf{f}}(\tau)$ , commençons par quelques remarques.

### 2.1. Remarques et exemple.

Rappelons que, dans le cas des systèmes de niveau unique 1, les singularités dans le plan de Borel sont toutes régulières, *i.e.*, de la classe de Nilsson (cf. [2] par exemple). Pour une description plus précise, nous renvoyons à [8, thm. 3.7].

Dans le cas des systèmes de niveau  $\geq 2$ , la situation peut être plus compliquée et la nature des singularités y est entièrement déterminée par les polynômes

$$\dot{q}_j \left( \frac{1}{x} \right) := -\frac{a_{j,r-1}}{x^{r-1}} - \dots - \frac{a_{j,1}}{x} \quad \left( = q_j \left( \frac{1}{x} \right) + \frac{a_{j,r}}{x^r} \right)$$

apparaissant dans la partie irrégulière  $Q(1/x)$  de  $\tilde{Y}(x)$ . Lorsque tous ces polynômes sont nuls, le système (1.1) est de niveau pur 1 ; les singularités de  $\hat{\mathbf{f}}(\tau)$  sont alors toutes de la classe de Nilsson. En revanche, lorsque l'un de ces polynômes est non nul, celui-ci induit après réduction du rang des exponentielles de degré  $< 1$  ; exponentielles qui engendrent, après transformation de Borel, des singularités irrégulières.

**Exemple 2.1.** Considérons le système

$$(2.1) \quad x^3 \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{x}{3} & 1+x \end{bmatrix} Y$$

et sa solution fondamentale formelle  $\tilde{Y}(x) = \tilde{F}(x)e^{Q(1/x)}$  où

$$\begin{aligned} - Q\left(\frac{1}{x}\right) &= \text{diag}\left(0, -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}\right), \\ - \tilde{F}(x) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{f}_2(x) & 1 \end{bmatrix} \text{ est une série entière telle que } \tilde{F}(x) = I_2 + O(x). \end{aligned}$$

Plus précisément,

$$\tilde{f}_2(x) = \frac{x}{3} - \frac{x^2}{3} + \frac{2x^3}{3} - \frac{4x^4}{3} + \frac{10x^5}{3} + O(x^6)$$

Ce système est, au changement d'inconnue  $Y \mapsto e^{-1/(2x^2)}Y$  près, le système étudié par M. Loday-Richaud dans [6, ex. V.2]. Nous le « revisitons » ici du point de vue de la réduction du rang en étudiant la structure des singularités dans le plan de Borel de son système réduit. Nous reprendrons son étude au paragraphe 5.3 en calculant explicitement ses multiplicateurs de Stokes.

Le système (2.1) est de niveau unique 2 et, d'après (1.2), la série formelle  $\tilde{\mathbf{f}}(t)$  correspondant à la première colonne de  $\tilde{F}(x)$  s'écrit sous la forme

$$\tilde{\mathbf{f}}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{\mathbf{f}}_2(t) \\ 0 \\ \tilde{\mathbf{f}}_4(t) \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tilde{\mathbf{f}}_2(t) = -\frac{t}{3} - \frac{4t^2}{3} + O(t^3) \\ \tilde{\mathbf{f}}_4(t) = \frac{1}{3} + \frac{2t}{3} + \frac{10t^2}{3} + O(t^3) \end{cases}$$

Le terme nul apparaissant à la troisième ligne de  $\tilde{\mathbf{f}}(t)$  est dû au fait que le premier coefficient de la première colonne de  $\tilde{F}(x)$  n'admet aucun terme en  $x^{2m+1}$ ,  $m \geq 0$ . Compte-tenu du théorème 1.2, la série formelle  $\tilde{\mathbf{f}}(t)$  est résurgente-sommable de support singulier  $\Omega = \{0, 1/2\}$ . Nous étudions ci-dessous le comportement de sa transformée de Borel  $\hat{\mathbf{f}}(\tau)$  au voisinage du point singulier  $\tau = 1/2$ .

Le système 2-réduit du système (2.1) étant donné par

$$2t^2 \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{t}{3} & t \\ 0 & 0 & -t & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 1-t \end{bmatrix} \mathbf{Y}$$

on peut vérifier que  $\tilde{\mathbf{f}}(t)$  est entièrement déterminée par le système

$$(2.2) \quad 2t^2 \frac{d\mathbf{f}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{t}{3} & t \\ 0 & 0 & -t & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 1-t \end{bmatrix} \mathbf{f}$$

et la condition initiale  $\tilde{\mathbf{f}}(0) = [1, 0, 0, \frac{1}{3}]$ . Les séries formelles  $\tilde{\mathbf{f}}_j(t)$  sont alors les uniques solutions du système

$$\begin{cases} 2t^2 \frac{d\tilde{\mathbf{f}}_2}{dt} = \tilde{\mathbf{f}}_2 + t\tilde{\mathbf{f}}_4 \\ 2t^2 \frac{d\tilde{\mathbf{f}}_4}{dt} = -\frac{1}{3} + \tilde{\mathbf{f}}_2 + (1-t)\tilde{\mathbf{f}}_4 \end{cases}$$

Notons  $\tilde{\mathbf{g}}_4 = \tilde{\mathbf{f}}_4 - \frac{1}{3}$ . Les transformées de Borel  $\hat{\mathbf{f}}_2$  et  $\hat{\mathbf{g}}_4$  satisfont aux équations de convolutions

$$(2\tau - 1)\hat{\mathbf{f}}_2 = 1 * \hat{\mathbf{g}}_4 + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad (2\tau - 1)\hat{\mathbf{g}}_4 = \hat{\mathbf{f}}_2 - 1 * \hat{\mathbf{g}}_4 - \frac{1}{3}$$

que nous pouvons réécrire sous la forme

$$1 * \hat{\mathbf{g}}_4 = (2\tau - 1)\hat{\mathbf{f}}_2 - \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad (2\tau - 1)\hat{\mathbf{g}}_4 = 2(1 - \tau)\hat{\mathbf{f}}_2$$

En dérivant alors la première égalité et en la reportant dans la seconde, nous en déduisons que  $\hat{\mathbf{f}}_2$  est l'unique solution analytique à l'origine de l'équation différentielle

$$(2\tau - 1)^2 \frac{d\hat{\mathbf{f}}_2}{d\tau} + 2(3\tau - 2)\hat{\mathbf{f}}_2 = 0 \quad , \quad \hat{\mathbf{f}}_2(0) = -\frac{1}{3}$$

D'où, en choisissant une détermination de  $\ln \tau$  telle que  $\ln \tau$  soit réel lorsque  $\tau > 0$ , nous obtenons, pour  $\text{Re}(\tau) < 1/2$ ,

$$\hat{\mathbf{f}}_2(\tau) = -\frac{1}{3\sqrt{e}}(1 - 2\tau)^{-3/2} \exp\left(-\frac{1}{2(2\tau - 1)}\right)$$

Noter par ailleurs que la transformée de Borel  $\hat{\mathbf{f}}_4$  est donnée par

$$\hat{\mathbf{f}}_4(\tau) = \frac{1}{3}\delta + \hat{\mathbf{g}}_4(\tau) = \frac{1}{3}\delta + \frac{2(1 - \tau)}{2\tau - 1}\hat{\mathbf{f}}_2(\tau)$$

Par suite, le prolongement analytique de  $\hat{\mathbf{f}}(\tau)$  admet une singularité irrégulière en  $\tau = 1/2$  de partie irrégulière l'exponentielle  $e^{-\frac{1}{2(2\tau-1)}}$ . Cette exponentielle est liée aux exponentielles ramifiées  $e^{\pm t^{-1/2}}$  obtenues à partir de l'exponentielle  $e^{-1/x}$  après réduction du rang (cf. § A.1).

## 2.2. Quelques rappels sur les singularités.

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons divers résultats qui nous sont utiles dans la suite de ce paragraphe. Pour plus de détails, nous renvoyons à [5, 11, 12, 17].

### 2.2.1. L'espace $\mathcal{C}$ des singularités.

Notons  $\mathcal{O}$  l'espace des germes de fonctions analytiques en  $0 \in \mathbb{C}$  et  $\tilde{\mathcal{O}}$  l'espace des germes de fonctions analytiques en 0 sur la surface de Riemann  $\tilde{\mathbb{C}}$  du logarithme. On appelle *singularité en 0* tout élément de l'espace quotient  $\mathcal{C} := \tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$ <sup>3</sup>. Une singularité est généralement noté avec un nabla. Un représentant d'une singularité  $\nabla\tilde{\varphi}$  dans  $\tilde{\mathcal{O}}$  est appelé *un majeur* de  $\nabla\tilde{\varphi}$  est en noté  $\tilde{\varphi}$ .

Le quotient  $\mathcal{C}$  est muni de deux applications naturelles :

$$\begin{aligned} \text{can} : \tilde{\mathcal{O}} &\longrightarrow \mathcal{C} = \tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O} && \text{la projection canonique} \\ \text{et var} : \mathcal{C} &\longrightarrow \tilde{\mathcal{O}} && \text{la variation,} \end{aligned}$$

définie par  $\text{var} \nabla\tilde{\varphi}(\tau) = \tilde{\varphi}(\tau) - \tilde{\varphi}(\tau e^{-2i\pi})$ . Le germe  $\text{var} \nabla\tilde{\varphi}$  est souvent noté  $\hat{\varphi}$ .

Les éléments de  $\mathcal{C}$  ne se multiplient pas entre eux ; la seule multiplication définie va de  $\mathcal{O} \times \mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}$  et s'obtient par passage au quotient à partir de la multiplication usuelle  $\mathcal{O} \times \tilde{\mathcal{O}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}$ . En revanche, l'espace  $\mathcal{C}$  est muni d'un produit de convolution

<sup>3</sup>Les éléments de  $\mathcal{C}$  sont également appelés *micro-fonctions* par B. Malgrange ([11]) par analogie avec les hyper- et micro-fonctions définies par Sato, Kawai et Kashiwara en dimensions supérieures.

$\otimes$  qui en fait une algèbre commutative et associative. Ce produit de convolution est défini pour  $\overset{\nabla}{\varphi}, \overset{\nabla}{\psi} \in \mathcal{C}$  par

$$(2.3) \quad \overset{\nabla}{\varphi} \otimes \overset{\nabla}{\psi} := \text{can}(\check{\varphi} *_u \check{\psi})$$

où  $\check{\varphi} *_u \check{\psi}$  est le produit de convolution tronqué

$$(\check{\varphi} *_u \check{\psi})(\tau) := \int_u^{\tau-u} \check{\varphi}(\tau-\eta) \check{\psi}(\eta) d\eta \quad \in \tilde{\mathcal{O}}$$

de  $\check{\varphi}$  et  $\check{\psi}$  avec  $u$  arbitrairement proche de  $0 \in \tilde{\mathbb{C}}$  vérifiant  $\tau \in ]0, u[$  et  $\arg(\tau - u) = \arg(\tau) - \pi$ . Noter que la relation (2.3) a un sens puisqu'elle ne dépend ni de  $u$  ni du choix des représentants  $\check{\varphi}$  et  $\check{\psi}$ . Outre la commutativité et l'associativité, le produit de convolution  $\otimes$  vérifient les deux propriétés suivantes :

$$(P1) \quad \frac{d}{d\tau} \left( \overset{\nabla}{\varphi} \otimes \overset{\nabla}{\psi} \right) = \left( \frac{d\overset{\nabla}{\varphi}}{d\tau} \right) \otimes \overset{\nabla}{\psi}$$

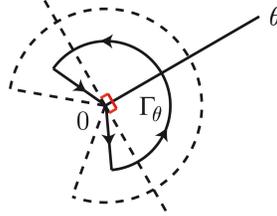
$$(P2) \quad \tau \left( \overset{\nabla}{\varphi} \otimes \overset{\nabla}{\psi} \right) = \left( \tau \overset{\nabla}{\varphi} \right) \otimes \overset{\nabla}{\psi} + \overset{\nabla}{\varphi} \otimes \left( \tau \overset{\nabla}{\psi} \right)$$

Pour  $\omega \neq 0$  dans  $\mathbb{C}$ , l'espace  $\mathcal{C}_\omega$  des singularités en  $\omega$  est l'espace  $\mathcal{C}$  translaté de  $0$  à  $\omega$ . Ainsi, une fonction  $\check{\varphi}$  est un représentant de  $\overset{\nabla}{\varphi}_\omega \in \mathcal{C}_\omega$  si  $\check{\varphi}(\omega + \tau)$  est un représentant d'une singularité  $\overset{\nabla}{\varphi} \in \mathcal{C}$ .

### 2.2.2. Transformation de Borel et singularités.

Rappelons qu'étant données une direction  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  et une fonction  $h$  définie près de  $0$ , la transformée de Borel  $\mathcal{B}_\theta(h)$  de  $h$  dans la direction  $\theta$  est donnée, pour  $\arg(\tau) = \theta$ , par

$$(2.4) \quad \mathcal{B}_\theta(h)(\tau) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\theta} h(t) e^{\tau/t} \frac{dt}{t^2}$$



lorsque l'intégrale a un sens (voir [12] pour les conditions suffisantes).

Notons  $\tilde{\mathcal{O}}^{\leq \text{exp}}$  l'ensemble des fonctions à croissance sous-exponentielle à l'origine  $0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ , i.e., l'ensemble des fonctions  $h(t) \in \tilde{\mathcal{O}}$  telles que

$$\overline{\lim}_{|t| \rightarrow 0} (|t| \ln |h(t)|) = 0 \quad \text{uniformément sur tout secteur} \quad \begin{cases} \theta_1 < \arg(t) < \theta_2 \\ |t| < \rho \end{cases}$$

Par exemple, les fonctions puissances  $t^\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , le logarithme  $\ln t$  et les exponentielles  $\exp(P(t^{-1/r}))$ ,  $P(t)$  polynôme en  $t$  sans terme constant et de degré  $\leq r - 1$ , sont des éléments de  $\tilde{\mathcal{O}}^{\leq \text{exp}}$ .

Notons également  $\mathcal{C}^{\leq 1}$  l'ensemble des singularités  $\overset{\nabla}{h} \in \mathcal{C}$  admettant un représentant  $\check{\varphi}$  analytique sur  $\tilde{\mathcal{C}}$  et à croissance au plus exponentielle à l'infini uniformément sur tout secteur  $\theta'_1 < \arg(\tau) < \theta'_2$ ,  $|\tau| > \rho'$ .

**Proposition 2.2** ([5, pp. 46-48]).

La transformation de Borel  $\mathcal{B}_\theta$  peut être étendue en un isomorphisme de  $\mathbb{C}$ -algèbres différentielles, encore noté  $\mathcal{B}_\theta$ , de  $(\tilde{\mathcal{O}}^{\leq \text{exp}}, +, \bullet, t^2 \frac{d}{dt})$  vers  $(\mathcal{C}^{\leq 1}, +, \otimes, \tau \bullet)$ .

Son inverse est la transformation de Laplace  $\mathcal{L}_\theta$  dans la direction  $\theta$  définie par

$$(2.5) \quad \mathcal{L}_\theta(\overset{\nabla}{h})(t) := \int_{\gamma_\theta} \check{h}(\tau) e^{-\frac{\tau}{t}} d\tau$$

où  $\check{h}$  est un représentant de  $\overset{\nabla}{h}$  dans  $\tilde{\mathcal{O}}$  comme ci-dessus et où  $\gamma_\theta$  est un contour de Hankel autour de la direction  $\theta$ , l'argument variant de  $\theta - 2\pi$  à  $\theta$ .

Etant donnée une suite  $(H_m(t))_{m \geq 0}$  d'éléments de  $\tilde{\mathcal{O}}^{\leq \text{exp}}$ , on étend la transformation de Borel formelle  $\tilde{\mathcal{B}}$  à l'élément  $H(t) = \sum_{m \geq 0} H_m(t)$  en posant  $\tilde{\mathcal{B}}(H) := \sum_{m \geq 0} \mathcal{B}(H_m)$ , où  $\mathcal{B} := \mathcal{B}_\theta$  pour une direction  $\theta$  quelconque.

Nous considérons ci-dessous le cas particulier où  $H_m(t) = h_m t^{m+\lambda} (\ln t)^p$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $p \in \mathbb{N}$ , *i.e.*,

$$H(t) = h(t) t^\lambda (\ln t)^p \quad \text{avec} \quad h(t) = \sum_{m \geq 0} h_m t^m \in \mathbb{C}[[t]]$$

est une fonction de la classe de Nilsson formelle.

### 2.2.3. Singularités de la classe de Nilsson.

Rappelons qu'une *singularité de la classe de Nilsson* est une singularité  $\overset{\nabla}{\varphi} \in \mathcal{C}$  provenant d'un  $\check{\varphi} \in \tilde{\mathcal{O}}$  somme finie de fonctions de la forme  $h_{\lambda,p}(t) t^\lambda (\ln t)^p$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $p \in \mathbb{N}$  et  $h_{\lambda,p}(t) \in \mathcal{O}$ . Rappelons également que l'espace des singularités de la classe de Nilsson est une  $\otimes$ -algèbre différentielle de convolution ([11]).

Ces singularités jouent un rôle essentiel dans la structure des singularités que l'on rencontre dans le cas des systèmes de niveau unique.

Donnons à présent les notations et résultats utilisés dans la suite. Notons

- $\widehat{\mathcal{N}il}_\Omega^{RS} := \left\{ \sum_{\text{finie}} \check{h}_{\lambda,p}(t) t^\lambda (\ln t)^p, \lambda \in \mathbb{C}, p \in \mathbb{N}, \check{h}_{\lambda,p}(t) \in \widehat{\mathcal{R}es}_\Omega^{\text{som}} \right\}$  l'ensemble des *fonctions résurgentes-sommables de la classe de Nilsson formelle à support singulier  $\Omega$* ,
- $\widehat{\mathcal{N}il}_\Omega^{RS} := \left\{ \sum_{\text{finie}} h_{\lambda,p}(t) t^\lambda (\ln t)^p, \lambda \in \mathbb{C}, p \in \mathbb{N}, h_{\lambda,p}(t) \in \widehat{\mathcal{R}es}_\Omega^{\text{som}} \right\}$  l'ensemble des *fonctions résurgentes-sommables de la classe de Nilsson à support singulier  $\Omega$* .

**Définition 2.3** (Singularité résurgente-sommable de la classe de Nilsson).

Une singularité  $\overset{\nabla}{\varphi} \in \mathcal{C}$  est dite *résurgente-sommable de la classe Nilsson à support singulier  $\Omega$*  si elle admet un représentant  $\check{\varphi}$  appartenant à  $\widehat{\mathcal{N}il}_\Omega^{RS}$ .

L'ensemble de ces singularités est noté  $\overset{\nabla}{\mathcal{N}il}_\Omega^{RS}$ .

Notons  $\mathbb{C}[t^\lambda \ln t]_{\lambda \in \mathbb{C}} \subset \tilde{\mathcal{O}}^{\leq \text{exp}}$  l'espace des polynômes en  $t^\lambda \ln t$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , et  $\nabla \mathbb{C}[t^\lambda \ln t]_{\lambda \in \mathbb{C}} \subset \mathcal{C}$  son image par la transformation de Borel. L'espace  $\nabla \mathcal{N}il_\Omega^{RS}$  est un  $\nabla \mathbb{C}[t^\lambda \ln t]_{\lambda \in \mathbb{C}}$ -module différentiel de convolution (cf. [11] par exemple).

Nous avons de plus le résultat suivant :

**Proposition 2.4** ([8, 11, 17]).

(1) Soit  $\tilde{h} \in \widetilde{\mathcal{N}il}_\Omega^{RS}$ . Alors,

$$\tilde{\mathcal{B}}(\tilde{h}) \in \nabla \mathcal{N}il_\Omega^{RS}$$

(2) Réciproquement, soient  $\check{\varphi} \in \nabla \mathcal{N}il_\Omega^{RS}$  et  $\check{\varphi} \in \widehat{\mathcal{N}il}_\Omega^{RS}$  un représentant de  $\check{\varphi}$  de la forme  $\check{\varphi}(\tau) = h_{\lambda,p}(\tau)\tau^\lambda(\ln \tau)^p$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $p \in \mathbb{N}$ .

Soit  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  une direction telle que  $\Omega^* \cap d_\theta = \emptyset$ .

Alors,

$$\mathcal{L}_\theta(\check{\varphi})(t) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} s_\theta(\tilde{h}_{\lambda,p-k})(t)t^{\lambda+1}(\ln t)^k$$

où, pour tout  $\ell = 0, \dots, p$ ,

$$\tilde{h}_{\lambda,\ell}(t) = 2i\pi \sum_{m \geq 0} \frac{d^\ell}{dz^\ell} \left( \frac{e^{-i\pi z}}{\Gamma(1-z)} \right) \Big|_{z=m+1+\lambda} h_{\lambda,p;m} t^m \in \widetilde{\mathcal{R}es}_\Omega^{som}$$

lorsque

$$h_{\lambda,p}(t) = \sum_{m \geq 0} h_{\lambda,p;m} t^m$$

### 2.3. Front d'un point singulier.

Comme dit précédemment, les singularités de  $\hat{f}(\tau)$  sont génériquement irrégulières et non plus régulières comme dans le cas des systèmes de niveau unique 1. Toutefois, le type « d'irrégularité » de chaque singularité ne dépend que des polynômes  $q_j$ . Il peut donc être directement lu sur la solution fondamentale formelle initiale  $\tilde{Y}(x)$ .

**Définition 2.5** (Front d'un point singulier).

On appelle front de  $\omega \in \Omega$  l'ensemble  $Fr(\omega) := \{q_j ; a_{j,r} = \omega\}$  des polynômes  $q_j(1/x)$  de terme dominant  $-\omega/x^r$ .

Sous notre hypothèse de niveau unique (cf. conditions (0.3)), le front de chaque point singulier  $\omega \in \Omega$  est un singleton :

$$Fr(\omega) = \left\{ -\frac{\omega}{x^r} + \dot{q}_\omega \left( \frac{1}{x} \right) \right\}$$

avec  $\dot{q}_\omega \equiv 0$  ou  $\dot{q}_\omega(1/x)$  polynôme en  $1/x$  sans terme constant et de degré plus petit que  $r - 1$ .

**Définition 2.6** (Point singulier de front monomial).

Un point singulier  $\omega \in \Omega$  est dit de front monomial si  $\dot{q}_\omega \equiv 0$ . La singularité correspondante est appelée singularité de front monomial.

La théorie des singularités exposée par B. Malgrange dans [10] permet de donner la forme générale des singularités de  $\widehat{\mathbf{f}}(\tau)$  en tout point de  $\Omega^*$ . Précisément, le théorème 2.13 ci-dessous montre que ces singularités, translatées à l'origine, s'écrivent sous la forme d'une somme de produits de convolution entre des singularités de la classe de Nilsson et les singularités  $\nabla e^{\hat{q}_\omega(\bar{\rho}^k t^{-1/r})}$ ,  $k = 0, \dots, r-1$ . En particulier, les singularités de front monomial sont des singularités de la classe de Nilsson.

#### 2.4. Description des singularités.

Le système (1.1) est méromorphiquement équivalent à une équation différentielle d'ordre  $rn$ , à coefficients polynomiaux et de rang  $\leq 1$  à l'origine. Quitte à multiplier les solutions formelles de cette équation par une puissance convenable de  $t$ , nous pouvons toujours supposer que son système compagnon admet une solution fondamentale formelle de la forme  $\widetilde{\mathbf{Z}}(t) = \widetilde{\mathbf{G}}(t)\widetilde{\mathbf{Y}}_0(t)$  où  $\widetilde{\mathbf{G}}(t) = \mathbf{M}^{-1}(t)\widetilde{\mathbf{F}}(t) \in M_{rn}(\mathbb{C}[[t]])$  est une série entière en  $t$  et où  $\mathbf{M}(t) \in GL_{rn}(\mathbb{C}\{t\}[t^{-1}])$  est méromorphe à l'origine. En particulier, les blocs de colonnes qui se correspondent dans  $\widetilde{\mathbf{G}}$  et  $\widetilde{\mathbf{F}}$  ont les mêmes propriétés de résurgence-sommable. Notons  $Dy(t) = 0$  une telle équation.

Notons également  $\widehat{D}\widehat{y}(\tau) = 0$  son équation transformée de Borel. Cette équation est encore une équation différentielle à coefficients polynomiaux (quitte à multiplier  $D$  par une puissance convenable de  $t^{-1}$ ) et elle est de rang  $\leq 1$  à l'infini ([10, thm. 1.4]).

L'étude des singularités de  $\widehat{\mathbf{f}}$  que nous proposons ci-dessous repose sur les deux points suivants :

- (1) La matrice  $\widetilde{\mathbf{f}}$  étant reliée aux  $n_1$  premières colonnes  $\widetilde{\mathbf{g}}$  de  $\widetilde{\mathbf{G}}$  par la relation  $\widetilde{\mathbf{f}} = \mathbf{M}\widetilde{\mathbf{g}}$ , les points singuliers de  $\widehat{\mathbf{f}}$  sont ceux de  $\widehat{\mathbf{g}}$ .
- (2) L'opérateur  $D$  étant de rang  $\leq 1$  à l'origine, on peut décrire les singularités de  $\widehat{\mathbf{g}}$  en tout point  $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$  en s'appuyant sur le théorème d'Écalle sur les micro-solutions de  $\widehat{D}$ .

Rappelons qu'une micro-solution de  $\widehat{D}$  en  $\omega$  est une singularité  $\nabla \varphi_\omega \in \mathcal{C}_\omega$  vérifiant  $\widehat{D}\nabla \varphi_\omega = 0$  dans  $\mathcal{C}_\omega$ .

##### 2.4.1. Théorème d'Écalle.

Le théorème d'Écalle, tel qu'énoncé et démontré par B. Malgrange dans ([10, thm. 2.2]), établit que l'espace des solutions formelles  $\widetilde{Sol}(D)$  de  $D$  et l'espace des micro-solutions de  $\widehat{D}$  sont isomorphes<sup>4</sup>. Explicitons dans notre cas ce théorème en exhibant une base de micro-solutions de  $\widehat{D}$ .

Par construction, une base de solutions formelles de  $D$  est constituée par les éléments de la première ligne de  $\widetilde{\mathbf{Z}}$ . Découpons alors  $\widetilde{\mathbf{G}} = [\widetilde{\mathbf{G}}^{\bullet:1} \dots \widetilde{\mathbf{G}}^{\bullet:r}]$  en  $r$  blocs de colonnes de dimension  $rn \times n$  suivant la structure par blocs de  $\widetilde{\mathbf{Y}}_0$  (cf. page 4), puis chaque bloc  $\widetilde{\mathbf{G}}^{\bullet:v} = [\widetilde{\mathbf{G}}^{\bullet:v,1} \dots \widetilde{\mathbf{G}}^{\bullet:v,J}]$  en  $J$  blocs de colonnes suivant la structure de Jordan de  $L$  (la matrice  $\widetilde{\mathbf{G}}^{\bullet:v,\ell}$  est de dimension  $rn \times n_\ell$  pour tout  $v$ ).

<sup>4</sup>Noter que B. Malgrange énonce ce théorème, non pas en terme de transformation de Borel, mais en terme de transformation de Fourier, *i.e.*, de transformation de Laplace.

Notons enfin  $\tilde{\mathbf{g}}_{v,\ell,q}$  le premier terme de la  $q^{\text{ème}}$  colonne de  $\tilde{\mathbf{G}}^{\bullet:v,\ell}$ . Rappelons (cf. thm. 1.2) que  $\tilde{\mathbf{g}}_{v,\ell,q}$  appartient à  $\widetilde{\mathcal{R}es}_{\Omega-a_{\ell,r}}^{\text{som}}$  pour tout  $v, \ell, q$ .

**Lemme 2.7** (Base de  $\widetilde{\text{Sol}}(D)$ ).

Pour tout  $v = 1, \dots, r$ ,  $\ell = 1, \dots, J$  et  $q = 1, \dots, n_{\ell}$ , notons

$$\tilde{h}_{v,\ell,q}(t) = \tilde{\mathbf{g}}_{1,\ell,q}(t) + (\rho^{v-1}t^{1/r})^{-1}\tilde{\mathbf{g}}_{2,\ell,q}(t) + \dots + (\rho^{v-1}t^{1/r})^{-(r-1)}\tilde{\mathbf{g}}_{r,\ell,q}(t)$$

Une base de  $\widetilde{\text{Sol}}(D)$  est donnée par la famille  $(\tilde{z}_{v,\ell,q})$  où

$$\tilde{z}_{v,\ell,q}(t) = \sum_{p=1}^q \tilde{h}_{v,\ell,p}(t) t^{\lambda_{\ell}/r} \rho^{(v-1)\lambda_{\ell}} \frac{(\ln(\rho^{v-1}t^{1/r}))^{q-p}}{(q-p)!} e^{q_{\ell}(\bar{\rho}^{v-1}t^{-1/r})}$$

Compte-tenu de la proposition 2.4, point 1, le théorème d'Écalle s'énonce dans notre cas sous la forme suivante :

**Proposition 2.8** (Écalle).

- (1) Pour tout  $v, \ell$  et  $q$ , la transformée de Borel formelle  $\overset{\nabla}{z}_{v,\ell,q} := \tilde{\mathbf{B}}(\tilde{z}_{v,\ell,q})$  de  $\tilde{z}_{v,\ell,q}$  est une micro-solution de  $\widehat{D}$  en  $a_{\ell,r}$ . De plus,

$$\overset{\nabla}{z}_{v,\ell,q} \in \left( \overset{\nabla}{\mathcal{N}il}_{\Omega-a_{\ell,r}}^{RS} \otimes \overset{\nabla}{e}^{i_{\ell}(\bar{\rho}^{v-1}t^{-1/r})} \right)_{a_{\ell,r}}$$

*i.e.*,  $\overset{\nabla}{z}_{v,\ell,q}$  admet un représentant  $\tilde{z}_{v,\ell,q}$  tel que  $\tilde{z}_{v,\ell,q}(a_{\ell,r} + \tau)$  est un représentant d'une singularité  $\overset{\nabla}{\Phi} \otimes \overset{\nabla}{e}^{i_{\ell}(\bar{\rho}^{v-1}t^{-1/r})}$  avec  $\overset{\nabla}{\Phi} \in \overset{\nabla}{\mathcal{N}il}_{\Omega-a_{\ell,r}}^{RS}$ .

- (2) Etant donné  $\omega \in \Omega$ , l'ensemble

$$\left( \overset{\nabla}{z}_{v,\ell,q} ; v = 1, \dots, r, q = 1, \dots, n_{\ell} \right)_{\ell; a_{\ell,r} = \omega}$$

est une base de micro-solutions de  $\widehat{D}$  en  $\omega$ .

En particulier, si  $\overset{\nabla}{\varphi}_{\omega} \in \mathcal{C}_{\omega}$  est une micro-solution de  $\widehat{D}$  en  $\omega$ , alors

$$\overset{\nabla}{\varphi}_{\omega} \in \sum_{k=0}^{r-1} \left( \overset{\nabla}{\mathcal{N}il}_{\Omega-\omega}^{RS} \otimes \overset{\nabla}{e}^{i_{\omega}(\bar{\rho}^k t^{-1/r})} \right)_{\omega}$$

*i.e.*,

$$\overset{\nabla}{\varphi}_{\omega} = \sum_{k=0}^{r-1} \overset{\nabla}{\varphi}_{\omega,k} \quad \text{avec} \quad \overset{\nabla}{\varphi}_{\omega,k} \in \left( \overset{\nabla}{\mathcal{N}il}_{\Omega-\omega}^{RS} \otimes \overset{\nabla}{e}^{i_{\omega}(\bar{\rho}^k t^{-1/r})} \right)_{\omega}$$

#### 2.4.2. Forme générale des singularités de $\widehat{\mathbf{g}}$ .

Le comportement de  $\widehat{\mathbf{g}}(\tau)$  en un point singulier  $\omega \in \Omega^*$  dépend du feuillet de la surface de Riemann  $\mathcal{R}_{\Omega}$  sur lequel nous nous plaçons, *i.e.*, du chemin tracé sur  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  de 0 (premier feuillet) à un voisinage de  $\omega$  le long duquel nous effectuons le prolongement analytique de  $\widehat{\mathbf{g}}$ . Pour un tel chemin  $\gamma$ , nous notons  $\text{cont}_{\gamma,\omega} \widehat{\mathbf{g}}$  son prolongement analytique et  $\overset{\nabla}{\mathbf{g}}_{\omega}^{\gamma}$  la singularité en  $\omega$  qu'il définit.

Le but de ce paragraphe est d'établir le résultat suivant :

**Proposition 2.9** (Description de la singularité  $\overset{\nabla}{\mathbf{g}}_\omega^\gamma$ ).

Soit  $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$ .

Pour tout chemin  $\gamma$  tracé sur  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  de 0 à un voisinage de  $\omega$ ,

$$\overset{\nabla}{\mathbf{g}}_\omega^\gamma := \text{can}(\text{cont}_{\gamma, \omega} \widehat{\mathbf{g}}) \in \sum_{k=0}^{r-1} (\mathcal{N}il_{\Omega-\omega}^{\nabla RS} \otimes e^{\dot{q}_\omega(\bar{\rho}^k t^{-1/r})})_\omega$$

Ce résultat est démontré, en restriction à la première colonne  $\widehat{\mathbf{g}}^{\bullet:(1)}$  de  $\widehat{\mathbf{g}}$ , dans les deux lemmes suivants. Rappelons que, par construction,

$$\widehat{\mathbf{g}}^{\bullet:(1)} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{g}}_{1,1,1} \\ \frac{d\widetilde{\mathbf{g}}_{1,1,1}}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{rn}\widetilde{\mathbf{g}}_{1,1,1}}{dt^{rn}} \end{bmatrix}$$

où  $\widetilde{\mathbf{g}}_{1,1,1}$  est le premier terme de la première colonne de  $\widetilde{\mathbf{G}}$ .

**Lemme 2.10** (Premier coefficient  $\widehat{\mathbf{g}}_{1,1,1}$  de  $\widehat{\mathbf{g}}^{\bullet:(1)}$ ).

Soient  $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$  et  $\gamma$  un chemin comme dans la proposition 2.9. Alors,

$$(\overset{\nabla}{\mathbf{g}}_{1,1,1})_\omega^\gamma := \text{can}(\text{cont}_{\gamma, \omega} \widehat{\mathbf{g}}_{1,1,1}) \in \sum_{k=0}^{r-1} (\mathcal{N}il_{\Omega-\omega}^{\nabla RS} \otimes e^{\dot{q}_\omega(\bar{\rho}^k t^{-1/r})})_\omega$$

*Démonstration.* Pour tout  $v = 1, \dots, r$ ,  $\overset{\nabla}{z}_{v,1,1}$  est une micro-solution de  $\widehat{D}$  en 0. Sa variation

$$\widehat{z}_{v,1,1} = \widehat{\mathbf{g}}_{1,1,1} + \bar{\rho}^{v-1} t^{-1/r} \widehat{\mathbf{g}}_{2,1,1} + \dots + \bar{\rho}^{(r-1)(v-1)} t^{-(r-1)/r} \widehat{\mathbf{g}}_{r,1,1}$$

est alors une solution de  $\widehat{D}$  dans  $\widetilde{\mathcal{O}}$  et, par la proposition 2.8, son prolongement analytique  $\text{cont}_{\gamma, \omega} \widehat{z}_{u,1,1}$  définit une micro-solution

$$(\overset{\nabla}{z}_{v,1,1})_\omega^\gamma \in \sum_{k=0}^{r-1} (\mathcal{N}il_{\Omega-\omega}^{\nabla RS} \otimes e^{\dot{q}_\omega(\bar{\rho}^k t^{-1/r})})_\omega$$

de  $\widehat{D}$  en  $\omega$ . D'autre part,  $\widetilde{\mathbf{g}}_{u,1,1} \in \widetilde{\mathcal{R}es}_\Omega^{\text{som}}$  pour tout  $u = 1, \dots, r$ . Ainsi, chacun des prolongements analytiques  $\text{cont}_{\gamma, \omega} t^{-(u-1)/r} \widetilde{\mathbf{g}}_{u,1,1}$  définit une singularité

$$(t^{-(u-1)/r} \widetilde{\mathbf{g}}_{u,1,1})_\omega^\gamma := \text{can} \left( \text{cont}_{\gamma, \omega} t^{-(u-1)/r} \widetilde{\mathbf{g}}_{u,1,1} \right) \in \mathcal{C}_\omega$$

de telle sorte que

$$(\overset{\nabla}{z}_{v,1,1})_\omega^\gamma = \sum_{u=1}^r \bar{\rho}^{(u-1)(v-1)} (t^{-(u-1)/r} \widetilde{\mathbf{g}}_{u,1,1})_\omega^\gamma$$

D'où le système

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \bar{\rho} & \dots & \bar{\rho}^{r-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \bar{\rho}^{r-1} & \dots & \bar{\rho}^{(r-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\overset{\nabla}{\mathbf{g}}_{1,1,1})_{\omega}^{\gamma} \\ (t^{-1/r} \overset{\nabla}{\mathbf{g}}_{2,1,1})_{\omega}^{\gamma} \\ \vdots \\ (t^{-(r-1)/r} \overset{\nabla}{\mathbf{g}}_{r,1,1})_{\omega}^{\gamma} \end{bmatrix} \in \sum_{k=0}^{r-1} (\mathcal{N}il_{\Omega-\omega}^{\nabla} \otimes e^{\nabla \dot{q}_{\omega}(\bar{\rho}^k t^{-1/r})})_{\omega}$$

et par suite le lemme 2.10 puisque la matrice de gauche est inversible.  $\square$

**Lemme 2.11** (Autres coefficients de  $\widehat{\mathbf{g}}^{\bullet;(1)}$ ).

Notons  $\widetilde{\mathbf{g}}_{\ell}^{\bullet;(1)}$  le  $\ell^{\text{ème}}$  coefficient de  $\widetilde{\mathbf{g}}^{\bullet;(1)}$ ,  $\ell = 2, \dots, rn$ .

Le lemme 2.10 reste vrai pour tout  $\ell$  : pour  $\omega$  et  $\gamma$  comme précédemment,

$$(\overset{\nabla}{\mathbf{g}}_{\ell}^{\bullet;(1)})_{\omega}^{\gamma} := \text{can}(\text{cont}_{\gamma,\omega} \widehat{\mathbf{g}}_{\ell}^{\bullet;(1)}) \in \sum_{k=0}^{r-1} (\mathcal{N}il_{\Omega-\omega}^{\nabla} \otimes e^{\nabla \dot{q}_{\omega}(\bar{\rho}^k t^{-1/r})})_{\omega}$$

*Démonstration.* Pour tout  $\ell = 2, \dots, rn$ , les coefficients  $\widehat{\mathbf{g}}_{\ell}^{\bullet;(1)}$  appartiennent à  $\widetilde{\mathcal{R}es}_{\Omega}^{\text{som}}$  et sont reliés par la relation  $\widehat{\mathbf{g}}_{\ell}^{\bullet;(1)} = \frac{d\widetilde{\mathbf{g}}_{\ell-1}^{\bullet;(1)}}{dt}$  (nous avons posé  $\widehat{\mathbf{g}}_1^{\bullet;(1)} = \widetilde{\mathbf{g}}_{1,1,1}$ ). Il suffit donc de démontrer le lemme 2.11 pour  $\ell = 2$ .

Dans  $\mathcal{C}_{\omega}$ , l'égalité

$$\widehat{\mathbf{g}}_2^{\bullet;(1)} = \widetilde{\mathcal{B}} \left( \frac{d\widetilde{\mathbf{g}}_{1,1,1}}{dt} \right) = \frac{d^2}{d\tau^2} (\tau \widehat{\mathbf{g}}_{1,1,1})$$

devient

$$(\overset{\nabla}{\mathbf{g}}_2^{\bullet;(1)})_{\omega}^{\gamma} := \text{can}(\text{cont}_{\gamma,\omega} \widehat{\mathbf{g}}_2^{\bullet;(1)}) = \tau \frac{d^2}{d\tau^2} (\overset{\nabla}{\mathbf{g}}_{1,1,1})_{\omega}^{\gamma} + 2 \frac{d}{d\tau} (\overset{\nabla}{\mathbf{g}}_{1,1,1})_{\omega}^{\gamma}$$

Ainsi, compte-tenu du lemme 2.10 et de la propriété (P1) (cf. page 10), la singularité  $(\overset{\nabla}{\mathbf{g}}_2^{\bullet;(1)})_{\omega}^{\gamma}$  admet un majeur  $\overset{\nabla}{\varphi}_2^{\bullet;(1)}(\omega + \tau)$  qui est un représentant d'une singularité  $\overset{\nabla}{\varphi}$  de la forme

$$\overset{\nabla}{\varphi} = (\tau + \omega) \sum_{k=0}^{r-1} \frac{d^2 \overset{\nabla}{\Phi}_k}{d\tau^2} \otimes e^{\nabla \dot{q}_{\omega}(\bar{\rho}^k t^{-1/r})} + \sum_{k=0}^{r-1} \frac{d \overset{\nabla}{\Phi}_k}{d\tau} \otimes e^{\nabla \dot{q}_{\omega}(\bar{\rho}^k t^{-1/r})}$$

avec  $\overset{\nabla}{\Phi}_k \in \mathcal{N}il_{\Omega-\omega}^{\nabla RS}$  pour tout  $k = 0, \dots, r-1$ . En fait, cette singularité s'écrit également sous la forme

$$\overset{\nabla}{\varphi} = \tau \sum_{k=0}^{r-1} \overset{\nabla}{\Phi}_{k,1} \otimes e^{\nabla \dot{q}_{\omega}(\bar{\rho}^k t^{-1/r})} + \sum_{k=0}^{r-1} \overset{\nabla}{\Phi}_{k,2} \otimes e^{\nabla \dot{q}_{\omega}(\bar{\rho}^k t^{-1/r})}$$

avec  $\overset{\nabla}{\Phi}_{k,1}, \overset{\nabla}{\Phi}_{k,2} \in \mathcal{N}il_{\Omega-\omega}^{\nabla RS}$  pour tout  $k = 0, \dots, r-1$  grâce à la structure différentielle de  $\mathcal{N}il_{\Omega-\omega}^{\nabla RS}$ . Il suffit donc, pour établir le lemme 2.11, de montrer que

$$\tau \overset{\nabla}{\Phi}_{k,1} \otimes e^{\nabla \dot{q}_{\omega}(\bar{\rho}^k t^{-1/r})} \in (\mathcal{N}il_{\Omega-\omega}^{\nabla RS} \otimes e^{\nabla \dot{q}_{\omega}(\bar{\rho}^k t^{-1/r})})$$

pour tout  $k = 0, \dots, r-1$ . Rappelons (cf. propriété (P2), page 10) que

$$\tau \left( \overset{\nabla}{\Phi}_{k,1} \otimes e^{\nabla \dot{q}_{\omega}(\bar{\rho}^k t^{-1/r})} \right) = \left( \tau \overset{\nabla}{\Phi}_{k,1} \right) \otimes e^{\nabla \dot{q}_{\omega}(\bar{\rho}^k t^{-1/r})} + \overset{\nabla}{\Phi}_{k,1} \otimes \left( \tau e^{\nabla \dot{q}_{\omega}(\bar{\rho}^k t^{-1/r})} \right)$$

La fonction  $e^{\dot{q}_\omega(\bar{\rho}^k t^{-1/r})}$  étant à croissance sous-exponentielle à l'origine, il résulte de la proposition 2.2 que

$$\tau \nabla e^{\dot{q}_\omega(\bar{\rho}^k t^{-1/r})} = \left( t^2 \frac{d}{dt} e^{\dot{q}_\omega(\bar{\rho}^k t^{-1/r})} \right)^\nabla = \nabla P_k \otimes \nabla e^{\dot{q}_\omega(\bar{\rho}^k t^{-1/r})}$$

où

$$P_k(t) = -\frac{\bar{\rho}^k}{r} t^{1-1/r} \dot{q}'_\omega(\bar{\rho}^k t^{-1/r}) = t \sum_{u=1}^{r-1} \alpha_u t^{-u/r}, \quad \alpha_u \in \mathbb{C}$$

est un polynôme de  $t\mathbb{C}[t^{-1/r}]$ . Ainsi, pour tout  $k = 0, \dots, r-1$ ,

$$\tau \left( \nabla \Phi_{k,1} \otimes \nabla e^{\dot{q}_\omega(\bar{\rho}^k t^{-1/r})} \right) = \left( \tau \nabla \Phi_{k,1} + \nabla \Phi_{k,1} \otimes \nabla P_k \right) \otimes \nabla e^{\dot{q}_\omega(\bar{\rho}^k t^{-1/r})}$$

où

- $\tau \nabla \Phi_{k,1} = (\tau \nabla \Phi_{k,1}) \in \widehat{\mathcal{N}}il_{\Omega-\omega}^{RS}$  (multiplication d'une singularité de la classe de Nilsson par un élément de  $\mathcal{O}$ ),
- $\nabla \Phi_{k,1} \otimes \nabla P_k \in \widehat{\mathcal{N}}il_{\Omega-\omega}^{RS}$  (structure de  $\mathbb{C}[t^\lambda \ln t]_{\lambda \in \mathbb{C}}$ -module de convolution).

Ceci termine la démonstration du lemme 2.11 et donc de la proposition 2.9 pour la première colonne de  $\widehat{\mathbf{g}}$ .  $\square$

Des calculs analogues à ceux des lemmes 2.10 et 2.11 permettent d'étendre, par récurrence, les résultats ci-dessus aux autres colonnes de  $\widehat{\mathbf{g}}$ .

### 2.4.3. Forme générale des singularités de $\widehat{\mathbf{f}}$ .

Nous pouvons à présent expliciter la forme générale des singularités  $\nabla \mathbf{f}_\omega^\gamma$  en tout point  $\omega$  de  $\Omega^*$ . Celle-ci, donnée au théorème 2.13 ci-dessous, résulte de la description des singularités  $\nabla \widehat{\mathbf{g}}_\omega^\gamma$  et de l'égalité

$$(2.6) \quad \widehat{\mathbf{f}} = \mathbf{M}(t) \widehat{\mathbf{g}} \quad , \quad \mathbf{M}(t) \in GL_{rn}(\mathbb{C}\{t\}[t^{-1}])$$

reliant les deux matrices  $\widehat{\mathbf{f}}$  et  $\widehat{\mathbf{g}}$  (cf. page 13). En effet, notant  $\mathbf{M}(t)$  sous la forme

$$\mathbf{M}(t) = \sum_{\ell=0}^v \frac{\mathbf{m}_\ell}{t^\ell} + \mathbf{e}(t)$$

avec  $\mathbf{m}_k \in M_{rn}(\mathbb{C})$  et  $\mathbf{e}(t) \in M_{rn}(\mathcal{O})$ , l'égalité (2.6) devient, après transformation de Borel,

$$\widehat{\mathbf{f}} = \sum_{\ell=0}^v m_\ell \frac{d^\ell \widehat{\mathbf{g}}}{d\tau^\ell} + \widehat{\mathbf{e}} * \widehat{\mathbf{g}}$$

avec  $\widehat{\mathbf{e}}(\tau) \in M_{rn}(\mathcal{O}^{\leq 1}(\mathbb{C}))$ . Rappelons que  $\mathcal{O}^{\leq 1}(\mathbb{C})$  désigne l'algèbre de convolution des fonctions entières sur  $\mathbb{C}$  à croissance au plus exponentielle à l'infini. Par conséquent, le prolongement analytique  $\text{cont}_{\gamma,\omega} \widehat{\mathbf{f}}$  de  $\widehat{\mathbf{f}}$  le long d'un chemin  $\gamma$  tracé sur  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  de 0 à un voisinage de  $\omega$  s'écrit

$$(2.7) \quad \text{cont}_{\gamma,\omega} \widehat{\mathbf{f}} = \sum_{\ell=0}^v m_\ell \frac{d^\ell (\text{cont}_{\gamma,\omega} \widehat{\mathbf{g}})}{d\tau^\ell} + \widehat{\mathbf{e}} * (\text{cont}_{\gamma,\omega} \widehat{\mathbf{g}})$$

où  $\text{cont}_{\gamma,\omega} \widehat{\mathbf{g}}$  est donné par la proposition 2.9. En effet,  $\text{cont}_{\gamma,\omega} \widehat{\mathbf{g}}$  est un majeur de la singularité  $\nabla \widehat{\mathbf{g}}_\omega^\gamma$ . Ainsi, compte-tenu du fait que l'espace  $\widehat{\mathcal{N}}il_{\Omega}^{RS}$  est stable

par dérivation et par convolution avec un élément de  $\mathcal{O}^{\leq 1}(\mathbb{C})$ , nous déduisons de l'égalité (2.7) le résultat suivant :

**Lemme 2.12.** *Soit  $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$  un point singulier de  $\widehat{\mathbf{f}}$ .*

*Pour tout chemin  $\gamma$  tracé sur  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  de 0 à un voisinage de  $\omega$ ,*

$$\mathbf{f}_\omega^\nabla := \text{can}(\text{cont}_{\gamma, \omega} \widehat{\mathbf{f}}) \in \sum_{k=0}^{r-1} (\mathcal{N}il_{\Omega-\omega}^{\nabla RS} \otimes e^{\dot{q}_\omega(\bar{\rho}^k t^{-1/r})})_\omega$$

Lorsque  $\dot{q}_\omega \neq 0$ , nous écrivons  $\dot{q}_\omega(1/x)$  sous la forme

$$\dot{q}_\omega\left(\frac{1}{x}\right) := -\frac{\alpha_{\omega, r-1}}{x^{r-1}} - \dots - \frac{\alpha_{\omega, 1}}{x}$$

et nous définissons par

$$\text{supp}(\dot{q}_\omega) := \{j \in \{1, \dots, r-1\} \text{ tel que } \alpha_{\omega, j} \neq 0\}$$

l'ensemble des degrés des termes non nuls de  $\dot{q}_\omega(1/x)$ . Notant alors

$$r' = \begin{cases} 1 & \text{si } \dot{q}_\omega \equiv 0 \\ \text{pgcd}(j \in \text{supp}(\dot{q}_\omega), r) & \text{si } \dot{q}_\omega \neq 0 \end{cases}$$

les polynômes  $(\dot{q}_\omega(\bar{\rho}^k t^{-1/r}))_{k=0, \dots, r'-1}$  forment une partition de l'ensemble des polynômes  $(\dot{q}_\omega(\bar{\rho}^k t^{-1/r}))_{k=0, \dots, r-1}$ . Il en résulte le théorème suivant :

**Théorème 2.13** (Description de la singularité  $\mathbf{f}_\omega^\nabla$ ).

*Soit  $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$  un point singulier de  $\widehat{\mathbf{f}}$ .*

*Alors, pour tout chemin  $\gamma$  tracé sur  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  de 0 à un voisinage de  $\omega$ ,*

$$\mathbf{f}_\omega^\nabla := \text{can}(\text{cont}_{\gamma, \omega} \widehat{\mathbf{f}}) \in \sum_{k=0}^{r'-1} (\mathcal{N}il_{\Omega-\omega}^{\nabla RS} \otimes e^{\dot{q}_\omega(\bar{\rho}^k t^{-1/r})})_\omega$$

*En particulier, si  $\omega$  est un point singulier de front monomial,*

$$\mathbf{f}_\omega^\nabla \in (\mathcal{N}il_{\Omega-\omega}^{\nabla RS})_\omega$$

Lorsque  $\dot{q}_\omega \neq 0$ , la singularité  $e^{\dot{q}_\omega(\bar{\rho}^k t^{-1/r})}$  induit une singularité irrégulière. Une étude plus précise de celle-ci nécessite d'en connaître avec précision les majeurs. Bien que ceci ne soit pas utile dans cet article pour établir les formules entre multiplicateurs de Stokes et constantes de connexion, il nous semble tout de même intéressant de montrer comment déterminer de façon effective ces majeurs et de faire quelques remarques quant à leur forme générale. Pour toutes ces questions, nous renvoyons à l'annexe A située en fin d'article.

Lorsque  $\dot{q}_\omega \equiv 0$ , *i.e.*, lorsque  $\omega$  est de front monomial, il est possible de préciser la structure de la singularité  $\mathbf{f}_\omega^\nabla$  donnée ci-dessus. Ceci fait l'objet du paragraphe suivant.

### 3. MÉTHODE PERTURBATIVE D'ÉCALLE ET SINGULARITÉS DE FRONT MONOMIAL

Nous donnons dans ce paragraphe une démonstration du théorème de résurgence-sommable (théorème 1.2) en suivant la méthode d'Écalle par perturbation régulière et séries majorantes citée dans [5]. Nous en déduisons en particulier une description des singularités de front monomial de  $\tilde{\mathbf{f}}(\tau)$  beaucoup plus précise que celle donnée au théorème 2.13.

Bien que systèmes et équations soient méromorphiquement équivalents, nous choisissons ici de travailler, contrairement au paragraphe 2, directement avec un système définissant la série formelle  $\tilde{\mathbf{f}}(t)$ . Grâce à nos normalisations initiales, il est bien connu (*cf.* [1]) qu'un tel système est donné par les  $n_1$  premières colonnes du système homologique du système  $r$ -réduit (1.1).

Pour simplifier les calculs qui vont suivre, nous supposons désormais que la série  $\tilde{F}(x)$  est normalisée à  $\tilde{F}(x) = I_n + O(x^r)$  de telle sorte que  $\tilde{\mathbf{F}}(t)$  soit une série entière en  $t$  vérifiant  $\tilde{\mathbf{F}}(t) = I_{rn} + O(t)$ . Rappelons qu'une telle normalisation n'affecte pas les matrices de Stokes-Ramis du système (0.1).

#### 3.1. Système homologique.

Rappelons que la solution fondamentale formelle  $\tilde{\mathbf{Y}}(t)$  du système (1.1) (système  $r$ -réduit du système initial (0.1)) s'écrit  $\tilde{\mathbf{Y}}(t) = \tilde{\mathbf{F}}(t)\tilde{\mathbf{Y}}_0(t)$  où  $\tilde{\mathbf{Y}}_0(t)$  est la matrice donnée page 4. Cette dernière est une solution fondamentale formelle du système

$$rt^2 \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}_0(t)\mathbf{Y}$$

où  $\mathbf{A}_0(t)$  est la matrice par blocs de dimension  $rn \times rn$  définie par

$$\begin{bmatrix} a_r + tL & ta_1 & \cdots & \cdots & ta_{r-1} \\ a_{r-1} & a_r + tL - tI_n & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_r + tL - (r-2)tI_n & ta_1 \\ a_1 & \cdots & \cdots & a_{r-1} & a_r + tL - (r-1)tI_n \end{bmatrix}$$

avec

$$a_k = \bigoplus_{j=1}^J ka_{j,k} I_{n_j} \quad \text{pour tout } k = 1, \dots, r.$$

Rappelons que les  $a_{j,k}$  sont les coefficients des termes de degré  $k$  des polynômes  $q_j$ .

Grâce à nos normalisations initiales (*cf.* page 2), la série formelle  $\tilde{\mathbf{F}}(t)$  est entièrement déterminée par le système homologique

$$rt^2 \frac{d\mathbf{F}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{F} - \mathbf{F}\mathbf{A}_0(t)$$

et la condition initiale  $\tilde{\mathbf{F}}(0) = I_{rn}$  ([1]). Ainsi, en restriction à ses  $n_1$  premières colonnes, la série formelle  $\tilde{\mathbf{f}}(t)$  est entièrement déterminée par le système

$$(3.1) \quad \boxed{rt^2 \frac{d\mathbf{f}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{f} - t\mathbf{f}J_{n_1}}$$

et la condition initiale  $\tilde{\mathbf{f}}(0) = I_{rn, n_1}$  (les  $n_1$  premières colonnes de la matrice identité  $I_{rn}$ ). Rappelons (*cf.* condition (0.2)) que  $\lambda_1 = 0$  et  $a_{1,k} = 0$  pour tout  $k = 1, \dots, r$ .

### 3.2. Perturbation régulière et série majorante.

#### 3.2.1. Système homologique préparé.

Compte-tenu de la normalisation  $\tilde{F}(x) = I_n + O(x^r)$ , la matrice  $A(x)$  du système initial (0.1) est de la forme

$$(3.2) \quad A(x) = \sum_{k=1}^r a_k x^{r-k} + x^r L + B(x)$$

avec  $B(x) \in M_n(x^r \mathbb{C}\{x\})$ . Plus précisément, en découpant  $B(x) = [B^{j;k}(x)]$  en blocs suivant la structure de Jordan de  $L$ , l'hypothèse de niveau unique (*cf.* conditions (0.3)) entraîne que, pour tout  $j, k \in \{1, \dots, J\}$ ,

$$(3.3) \quad B^{j;k}(x) = \begin{cases} O(x^r) & \text{si } a_{j,r} \neq a_{k,r} \\ O(x^{2r}) & \text{si } a_{j,r} = a_{k,r} \end{cases}$$

Après réduction du rang, l'égalité (3.2) permet d'écrire la matrice  $\mathbf{A}(t)$  du système  $r$ -réduit (1.1) (*cf.* page 4) sous la forme

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0(t) + \mathbf{B}(t) \text{ avec } \mathbf{B}(t) \in M_{rn}(t\mathbb{C}\{t\})$$

Le système (3.1) devient alors

$$(3.4) \quad \boxed{rt^2 \frac{d\mathbf{f}}{dt} - \mathbf{A}_0(t)\mathbf{f} + t\mathbf{f} J_{n_1} = \mathbf{B}(t)\mathbf{f}}$$

Plus précisément, en découpant successivement la matrice  $\mathbf{B}(t) = [B_{u;v}(t)]$  en  $r^2$  blocs  $B_{u;v}(t)$  de dimension  $n \times n$  suivant la structure par blocs de  $\mathbf{A}_0$ , puis chaque  $B_{u;v}(t) = [B_{u;v}^{j;k}(t)]$  suivant la structure de Jordan de  $L$ , les normalisations (3.3) impliquent que, pour tout  $j, k \in \{1, \dots, J\}$ ,

$$(3.5) \quad B_{u;v}^{j;k}(t) = \begin{cases} O(t) & \text{si } 1 \leq v \leq u \leq r \text{ et } a_{j,r} \neq a_{k,r} \\ O(t^3) & \text{si } 1 \leq u < v \leq r \text{ et } a_{j,r} = a_{k,r} \\ O(t^2) & \text{sinon} \end{cases}$$

**Notation 3.1.** Dans la suite de l'article, toute matrice  $\mathbf{M}$  à  $rn$  lignes, disons de dimension  $rn \times p$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ , est découpée successivement en blocs de lignes de la façon suivante :

- $\mathbf{M}$  est découpée en  $r$  blocs de lignes  $\mathbf{M}^{u;\bullet}$ ,  $u = 1, \dots, r$ , suivant la structure par blocs de  $\mathbf{A}_0$  (la matrice  $\mathbf{M}^{u;\bullet}$  est de dimension  $n \times p$ ),
- chaque matrice  $\mathbf{M}^{u;\bullet}$  est découpée en  $J$  blocs de lignes  $\mathbf{M}^{u,j;\bullet}$ ,  $j = 1, \dots, J$ , suivant la structure de Jordan de  $L$  (la matrice  $\mathbf{M}^{u,j;\bullet}$  est de dimension  $n_j \times p$ ).

### 3.2.2. Méthode perturbative.

La méthode suggérée par J. Écalle dans [5] permet d'établir la résurgence-sommable de  $\tilde{\mathbf{f}}(t)$  en considérant, non pas le système (3.4), mais le système régulièrement perturbé

$$(3.6) \quad rt^2 \frac{d\mathbf{f}}{dt} - \mathbf{A}_0(t)\mathbf{f} + t\mathbf{f}J_{n_1} = \alpha\mathbf{B}\mathbf{f}$$

obtenu en substituant  $\alpha\mathbf{B}$  à  $\mathbf{B}$ ; puis en utilisant une technique de série majorante satisfaisant à un système convenable.

La démonstration du théorème de résurgence-sommable (*cf.* thm. 1.2) que nous détaillons ci-dessous est analogue à celle donnée dans [8, § 2.5] pour les systèmes de niveau unique 1. Toutefois, si la philosophie générale reste identique, de nombreuses modifications et difficultés calculatoires apparaissent dans notre cas. Comme pour ce qui a déjà été observé au paragraphe 2 pour l'étude des singularités dans le plan de Borel, toutes ces complications sont entièrement dues aux polynômes

$$\dot{q}_j \left( \frac{1}{x} \right) = -\frac{a_{j,r-1}}{x^{r-1}} - \dots - \frac{a_{j,1}}{x}$$

qui peuvent être non nuls. Rappelons en effet que ce sont ces polynômes qui modifient la structure régulière des singularités rencontrées dans le cadre des systèmes de niveau unique 1 en structure irrégulière.

#### Etude du système perturbé (3.6)

En identifiant les termes en  $\alpha^m$ ,  $m \geq 0$ , on vérifie que le système (3.6) admet une unique solution série formelle de la forme

$$\tilde{\mathbf{f}}(t, \alpha) = \sum_{m \geq 0} \tilde{\mathbf{f}}_m(t) \alpha^m$$

où  $\tilde{\mathbf{f}}_0(t) = I_{rn, n_1}$  et où les  $\tilde{\mathbf{f}}_m(t)$ ,  $m \geq 1$ , sont des éléments de  $M_{rn, n_1}(\mathbb{C}[[t]])$  entièrement déterminés par les relations

$$(3.7) \quad r \left( t^2 \frac{d}{dt} - a_{j,r} \right) \tilde{\mathbf{f}}_m^{u,j;\bullet} - t(\lambda_j - u + 1) \tilde{\mathbf{f}}_m^{u,j;\bullet} \\ - \sum_{v=1}^{u-1} (r + v - u) a_{j,r+v-u} \tilde{\mathbf{f}}_m^{v,j;\bullet} - t \sum_{v=u+1}^r (v - u) a_{j,v-u} \tilde{\mathbf{f}}_m^{v,j;\bullet} \\ - t J_{n_j} \tilde{\mathbf{f}}_m^{u,j;\bullet} + t \tilde{\mathbf{f}}_m^{u,j;\bullet} J_{n_1} = \mathbf{B}^{u,j;\bullet} \tilde{\mathbf{f}}_{m-1}$$

pour tout  $u = 1, \dots, r$  et  $j = 1, \dots, J$ .

Compte-tenu des normalisations (3.5) et des relations (3.7), les séries formelles  $\tilde{\mathbf{f}}_m(t) \in M_{rn}(\mathbb{C}[[t]])$  vérifient

$$\tilde{\mathbf{f}}_{2m-1}^{u,j;\bullet}(t) = O(t^m) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{f}}_{2m}^{u,j;\bullet}(t) = \begin{cases} O(t^m) & \text{si } a_{j,r} = 0 \\ O(t^{m+1}) & \text{si } a_{j,r} \neq 0 \end{cases}$$

pour tout  $j$  et  $m \geq 1$ . La série  $\tilde{\mathbf{f}}(t, \alpha)$  peut donc être réécrite comme une série en  $t$  à coefficients polynomiaux en  $\alpha$ . Ainsi,  $\tilde{\mathbf{f}}(t) = \tilde{\mathbf{f}}(t, 1)$  par unicité et, pour tout  $\alpha$ ,

la série  $\tilde{\mathbf{f}}(t, \alpha)$  admet une transformée de Borel formelle  $\varphi(\tau, \alpha)$  par rapport à  $t$  de la forme

$$\varphi(\tau, \alpha) = \delta I_{rn, n_1} + \sum_{m \geq 1} \varphi_m(\tau) \alpha^m$$

Les séries  $\varphi_m = [\varphi_m^{u, j; \bullet}]$  étant les transformées de Borel des  $\tilde{\mathbf{f}}_m$  pour tout  $m \geq 1$ , il résulte de (3.7) qu'elles sont déterminées itérativement, pour tout  $m, u$  et  $j$ , comme solutions des systèmes

$$(3.8) \quad r(\tau - a_{j,r}) \frac{d\varphi_m^{u, j; \bullet}}{d\tau} - (\lambda_j - u + 1 - r) \varphi_m^{u, j; \bullet} \\ - \sum_{v=1}^{u-1} (r + v - u) a_{j, r+v-u} \frac{d\varphi_m^{v, j; \bullet}}{d\tau} - \sum_{v=u+1}^r (v - u) a_{j, v-u} \varphi_m^{v, j; \bullet} \\ - J_{n_j} \varphi_m^{u, j; \bullet} + \varphi_m^{u, j; \bullet} J_{n_1} = \frac{d}{d\tau} \left( \widehat{\mathbf{B}}^{u, j; \bullet} * \varphi_{m-1} \right)$$

vérifiant des conditions initiales convenables ( $\varphi_0 = \delta I_{rn, n_1}$ ,  $\varphi_m(0) = 0$  pour  $m \geq 3$ ,  $\varphi_2^{u, j; \bullet}(0) = 0$  lorsque  $a_{j,r} \neq 0$  et une constante convenable non nécessairement nulle sinon). En particulier, l'égalité  $\widehat{\mathbf{f}}(\tau) = \varphi(\tau, 1)$  permet d'établir le résultat suivant :

**Lemme 3.2.** *La transformée de Borel  $\widehat{\mathbf{f}}(\tau)$  de  $\tilde{\mathbf{f}}(t)$  s'écrit sous la forme*

$$(3.9) \quad \widehat{\mathbf{f}}(\tau) = \sum_{m \geq 1} \varphi_m(\tau)$$

où les  $\varphi_m = [\varphi_m^{u, j; \bullet}]$  sont déterminés itérativement, pour tout  $m, u$  et  $j$ , à partir de  $\varphi_0 = \delta I_{rn, n_1}$  comme solutions des systèmes suivants :

- Cas  $\dot{q}_j \equiv 0$  Pour tout  $m \geq 1$  et tout  $u = 1, \dots, r$ ,

$$(3.10) \quad r(\tau - a_{j,r}) \frac{d\varphi_m^{u, j; \bullet}}{d\tau} - (\lambda_j - (r + u - 1)) \varphi_m^{u, j; \bullet} = \\ J_{n_j} \varphi_m^{u, j; \bullet} + \frac{d}{d\tau} \left( \widehat{\mathbf{B}}^{u, j; \bullet} * \varphi_{m-1} \right) - \varphi_m^{u, j; \bullet} J_{n_1}$$

- Cas  $\dot{q}_j \neq 0$  Notons  $Z_{m,j}$  la matrice de dimension  $rn_j \times n_1$  définie par

$$Z_{m,j} := \begin{bmatrix} \varphi_m^{1, j; \bullet} \\ \vdots \\ \varphi_m^{r, j; \bullet} \end{bmatrix}$$

Alors, pour tout  $m \geq 1$ ,

$$(3.11) \quad R_j \frac{dZ_{m,j}}{d\tau} = S_j Z_{m,j} + T_{m,j} - Z_{m,j} J_{n_1}$$

où  $T_{m,j}$  est la matrice de dimension  $rn_j \times n_1$  définie par

$$T_{m,j} := \begin{bmatrix} \frac{d}{d\tau} \left( \widehat{\mathbf{B}}^{1,j;\bullet} * \varphi_{m-1} \right) \\ \vdots \\ \frac{d}{d\tau} \left( \widehat{\mathbf{B}}^{r,j;\bullet} * \varphi_{m-1} \right) \end{bmatrix}$$

et où  $R_j$  et  $S_j$  sont les matrices carrées de dimension  $rn_j$  définies par

$$R_j := \begin{bmatrix} r(\tau - a_{j,r}) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -(r-1)a_{j,r-1} & r(\tau - a_{j,r}) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & r(\tau - a_{j,r}) & 0 \\ -a_{j,1} & \cdots & \cdots & -(r-1)a_{j,r-1} & r(\tau - a_{j,r}) \end{bmatrix} \otimes I_{n_j}$$

et

$$S_j := I_r \otimes J_{n_j} + \begin{bmatrix} \lambda_j - r & -a_{j,1} & \cdots & \cdots & -(r-1)a_{j,r-1} \\ 0 & \lambda_j - (r+1) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_j - (2r-2) & -a_{j,1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_j - (2r-1) \end{bmatrix} \otimes I_{n_j}$$

En particulier, les  $\varphi_m(\tau)$  sont des fonctions résurgentes définies sur  $\mathcal{R}_\Omega$  pour tout  $m \geq 1$ .

Les conditions initiales associées aux systèmes (3.10) et (3.11) sont celles données précédemment avec les relations (3.8).

**Remarque 3.3.** Pour le moment, l'écriture (3.9) est simplement formelle. Nous montrons ci-dessous, grâce à un argument de série majorante, que celle-ci définit en fait une « vraie » égalité sur tout  $\mathcal{R}_\Omega$ . Elle nous permettra à la fois d'établir la résurgence-sommable de  $\tilde{\mathbf{f}}(t)$  (cf. lemme 3.4) et de décrire avec précision les singularités de front monomial de  $\widehat{\mathbf{f}}(\tau)$  (cf. paragraphe 3.3).

Fixons à présent  $\nu > 0$  et une région  $\nu$ -sectorielle  $\Delta_\nu$  de  $\mathcal{R}_\Omega$  (cf. page 6). Il s'agit de prouver que

- (1) la série  $\widehat{\mathbf{f}}(\tau)$  est convergente à l'origine et peut être prolongée analytiquement à  $\mathcal{R}_\Omega$  (nous notons encore  $\widehat{\mathbf{f}}(\tau)$  son prolongement analytique),
- (2)  $\widehat{\mathbf{f}}(\tau)$  croît au plus exponentiellement à l'infini sur  $\Delta_\nu$ .

Ces deux propriétés s'établissent comme dans [8, § 2.5] par un argument de série majorante. Rappelons que, par définition de  $\Delta_\nu$ , il existe une constante  $K > 0$  telle que, pour tout  $\tau \in \Delta_\nu$ , il existe un chemin  $\gamma_\tau$  de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux contenu dans  $\Delta_\nu$  et paramétré par la longueur de courbe de 0 à  $\tau$  de telle sorte que la longueur  $s_\eta$  de l'arc satisfait pour tout  $\eta \in \gamma_\tau$  aux inégalités

$$|\eta| \leq s_\eta \leq K |\eta|$$

où  $|\eta|$  est le module de la projection de  $\eta$  dans  $\mathbb{C}$  ([8, lem. 2.4]).

Construction d'une série majorante de  $\widehat{\mathbf{f}}(\tau)$

Considérons le système  $(\mathcal{S})$  défini par

- si  $a_{j,r} = 0$  :

$$\frac{1}{CK} \left( 1 - \operatorname{Re} \left( \frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r} \right) \right) \mathbf{g}^{u,j;\bullet} = J_{n_j} \mathbf{g}^{u,j;\bullet} + \mathbf{g}^{u,j;\bullet} J_{n_1} + \frac{1}{CK} I_{rn,n_1}^{u,j;\bullet} - 2I_{rn,n_1}^{u,j;\bullet} J_{n_1} + \alpha \frac{|\mathbf{B}|^{u,j;\bullet}}{t} \mathbf{g}$$

- si  $a_{j,r} \neq 0$  :

$$\left( \nu - \left| \frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r} - 1 \right| t \right) \mathbf{g}^{u,j;\bullet} - \sum_{v=1}^{u-1} |a_{j,r+v-u}| \mathbf{g}^{v,j;\bullet} = t \sum_{v=u+1}^r |a_{j,v-u}| \mathbf{g}^{v,j;\bullet} + J_{n_j} t \mathbf{g}^{u,j;\bullet} + t \mathbf{g}^{u,j;\bullet} J_{n_1} + \alpha |\mathbf{B}|^{u,j;\bullet} \mathbf{g}$$

où

- l'inconnue  $\mathbf{g}$  est, comme  $\widetilde{\mathbf{f}}$ , une matrice de dimension  $rn \times n_1$  découpée en blocs de lignes  $\mathbf{g}^{u,j;\bullet}$  (cf. notation 3.1),
- $C$  est la constante  $C := \max_{1 \leq j \leq J} \exp(2a |\operatorname{Im}(\lambda_j)|) \in \mathbb{R}_+^*$  avec  $a > 0$  tel que  $|\arg(\tau)| \leq a$  pour tout  $\tau \in \Delta_\nu$  (un tel  $a$  existe puisque  $\Delta_\nu$  est d'ouverture bornée à l'infini),
- $|\mathbf{B}|$  désigne la série  $\mathbf{B}$  dans laquelle les coefficients des puissances de  $t$  ont été remplacés par leur module.

Comme le système perturbé (3.6), le système  $(\mathcal{S})$  admet une unique solution série formelle de la forme

$$\widetilde{\mathbf{g}}(t, \alpha) = \sum_{m \geq 0} \widetilde{\mathbf{g}}_m(t) \alpha^m$$

où  $\widetilde{\mathbf{g}}_0(t) = I_{rn,n_1}$  et où les  $\widetilde{\mathbf{g}}_m(t)$ ,  $m \geq 1$ , sont des éléments de  $M_{rn,n_1}(\mathbb{C}[[t]])$  vérifiant

$$\widetilde{\mathbf{g}}_{2m-1}^{u,j;\bullet}(t) = O(t^m) \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbf{g}}_{2m}^{u,j;\bullet}(t) = \begin{cases} O(t^m) & \text{si } a_{j,r} = 0 \\ O(t^{m+1}) & \text{si } a_{j,r} \neq 0 \end{cases}$$

pour tout  $u, j$  et  $m$ . Outre ces relations qui permettent de justifier comme précédemment l'existence de la transformée de Borel formelle  $\Phi(\tau, \alpha)$  de  $\widetilde{\mathbf{g}}(t, \alpha)$  par rapport à  $t$ , la série  $\widetilde{\mathbf{g}}(t, \alpha)$  satisfait également aux deux propriétés suivantes :

- elle est convergente en  $(t, \alpha)$  dans un domaine contenant  $(t, \alpha) = (0, 1)$ ,
- les matrices  $\widetilde{\mathbf{g}}_m(t)$  sont des éléments de  $M_{rn,n_1}(\mathbb{R}^+\{t\})$ , i.e., les termes des  $\widetilde{\mathbf{g}}_m(t)$  sont des séries convergentes à l'origine et à coefficients positifs.

Ces deux points se démontrent de façon analogue à [8, § 2.5.4] et nous renvoyons à cette référence pour plus de détails.

En particulier, pour  $\alpha = 1$ , la série formelle  $\widetilde{\mathbf{g}}(t) = \widetilde{\mathbf{g}}(t, 1)$  est convergente. Sa transformée de Borel

$$\widehat{\mathbf{g}}(\tau) = \Phi(\tau, 1) = \sum_{m \geq 1} \Phi_m(\tau)$$

est donc une fonction entière sur  $\mathbb{C}$  à croissance au plus exponentielle à l'infini :  $\widehat{g}(\tau) \in \mathcal{O}^{\leq 1}(\mathbb{C})$ . Les fonctions  $\Phi_m = [\Phi_m^{u,j;\bullet}]$  étant les transformées de Borel des séries convergentes  $\widetilde{g}_m$ , elles sont également des éléments de  $\mathcal{O}^{\leq 1}(\mathbb{C})$ . De plus, comme pour les fonctions  $\varphi_m$  (cf. lemme 3.2), on peut montrer qu'elles sont déterminées itérativement, pour tout  $m$ ,  $u$  et  $j$ , comme solutions de systèmes différentiels. Précisément :

- Cas  $a_{j,r} = 0$  Pour tout  $m \geq 1$  et tout  $u = 1, \dots, r$ ,

$$(3.12) \quad \frac{1}{CK} \left( 1 - \operatorname{Re} \left( \frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r} \right) \right) \Phi_m^{u,j;\bullet} = J_{n_j} \Phi_m^{u,j;\bullet} + \Phi_m^{u,j;\bullet} J_{n_1} + \frac{d}{d\tau} \left( \widehat{|\mathbf{B}|}^{u,j;\bullet} * \Phi_{m-1} \right)$$

- Cas  $a_{j,r} \neq 0$  et  $\dot{q}_j \equiv 0$  Pour tout  $m \geq 1$  et tout  $u = 1, \dots, r$ ,

$$(3.13) \quad \nu \frac{d\Phi_m^{u,j;\bullet}}{d\tau} - \left| \frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r} - 1 \right| \Phi_m^{u,j;\bullet} = J_{n_j} \Phi_m^{u,j;\bullet} + \Phi_m^{u,j;\bullet} J_{n_1} + \frac{d}{d\tau} \left( \widehat{|\mathbf{B}|}^{u,j;\bullet} * \Phi_{m-1} \right)$$

- Cas  $a_{j,r} \neq 0$  et  $\dot{q}_j \neq 0$  Notons  $\mathcal{Z}_{m,j}$  la matrice de dimension  $rn_j \times n_1$  définie par

$$\mathcal{Z}_{m,j} := \begin{bmatrix} \Phi_m^{1,j;\bullet} \\ \vdots \\ \Phi_m^{r,j;\bullet} \end{bmatrix}$$

Alors, pour tout  $m \geq 1$ ,

$$(3.14) \quad \mathcal{R}_j \frac{d\mathcal{Z}_{m,j}}{d\tau} = \mathcal{S}_j \mathcal{Z}_{m,j} + \mathcal{T}_{m,j} - \mathcal{Z}_{m,j} J_{n_1}$$

où  $\mathcal{T}_{m,j}$  est la matrice de dimension  $rn_j \times n_1$  définie par

$$\mathcal{T}_{m,j} := \begin{bmatrix} \frac{d}{d\tau} \left( \widehat{|\mathbf{B}|}^{1,j;\bullet} * \Phi_{m-1} \right) \\ \vdots \\ \frac{d}{d\tau} \left( \widehat{|\mathbf{B}|}^{r,j;\bullet} * \Phi_{m-1} \right) \end{bmatrix}$$

et où  $\mathcal{R}_j$  et  $\mathcal{S}_j$  sont les matrices carrées de dimension  $rn_j$  définies par

$$\mathcal{R}_j := \begin{bmatrix} \nu & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -|a_{j,r-1}| & \nu & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \nu & 0 \\ -|a_{j,1}| & \cdots & \cdots & -|a_{j,r-1}| & \nu \end{bmatrix} \otimes I_{n_j}$$

et

$$\mathcal{S}_j := I_r \otimes J_{n_j} + \begin{bmatrix} \left| \frac{\lambda_j}{r} - 1 \right| & |a_{j,1}| & \cdots & \cdots & |a_{j,r-1}| \\ 0 & \left| \frac{\lambda_j}{r} - \frac{1}{r} - 1 \right| & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \left| \frac{\lambda_j}{r} - \frac{r-2}{r} - 1 \right| & |a_{j,1}| \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \left| \frac{\lambda_j}{r} - \frac{r-1}{r} - 1 \right| \end{bmatrix} \otimes I_{n_j}$$

Noter que  $\mathcal{R}_j^{-1} \in M_{rn_j}(\mathbb{R}^+[\nu^{-1}])$  et  $|R_j^{-1}| \leq \mathcal{R}_j^{-1}$ . De plus, par construction, les conditions initiales associées à chacun de ces systèmes sont telles que  $\Phi_m(0) \geq |\varphi_m(0)|$  pour tout  $m \geq 1$ .

En procédant alors de façon analogue à [8, lem. 2.9], nous pouvons établir, grâce au lemme de Grönwall, le résultat suivant :

**Lemme 3.4** (Série majorante).

- (1) Soit  $K > 0$  associé à la région  $\nu$ -sectorielle  $\Delta_\nu$  (cf. page 23).

La série

$$\widehat{g}(K|\tau|) = \sum_{m \geq 1} \Phi_m(K|\tau|)$$

est une série majorante de  $\widehat{f}(\tau) = \sum_{m \geq 1} \varphi_m(\tau)$  sur  $\Delta_\nu$  :

$$|\varphi_m(\tau)| \leq \Phi_m(K|\tau|) \quad \text{pour tout } m \geq 1 \text{ et } \tau \in \Delta_\nu$$

- (2) En particulier, la série  $\sum_{m \geq 1} \varphi_m(\tau)$  converge uniformément sur tout compact de  $\mathcal{R}_\Omega$ .

Ainsi, puisque  $\widehat{g}$  est analytique sur  $\Delta_\nu$  et à croissance exponentielle à l'infini, il en est de même pour  $\widehat{f}(\tau)$ . Par suite,  $\widehat{f}(\tau)$  est résurgente-sommable sur  $\mathcal{R}_\Omega$ , ce qui termine la démonstration du théorème 1.2.

### 3.3. Description des singularités de front monomial.

Nous avons vu au paragraphe 2 que les singularités de front monomial de  $\widehat{f}(\tau)$  sont des singularités de la classe de Nilsson. Leur étude via la méthode perturbative d'Écalle que nous proposons ci-dessous permet d'en donner une description plus précise. Nous procédons de façon analogue à [8, § 3] en nous basant sur les résultats des lemmes 3.2 et 3.4 qui permettent d'interpréter la transformée de Borel  $\widehat{f}(\tau)$  comme une série  $\sum_{m \geq 1} \varphi_m(\tau)$  de fonctions résurgentes sur  $\mathcal{R}_\Omega$  qui converge uniformément sur tout compact de  $\mathcal{R}_\Omega$ .

Comme précédemment, étant donné un chemin  $\gamma$  tracé sur  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  de 0 à un voisinage de  $\omega \in \Omega^*$ , nous notons  $\text{cont}_{\gamma, \omega} \varphi_m$  le prolongement analytique de  $\varphi_m$  le long de  $\gamma$  et  $(\overset{\nabla}{\varphi}_m)_\omega^\gamma$  la singularité en  $\omega$  définie par ce prolongement.

Rappelons que les fonctions  $\varphi_m^{u,j;\bullet}$ ,  $u = 1, \dots, r$ , sont entièrement déterminées par l'un des systèmes (3.10) ou (3.11) suivant que le polynôme  $\dot{q}_j$  est nul ou non (cf. lemme 3.2). L'étude de ces systèmes permet d'obtenir, par récurrence sur  $m \geq 1$ , la structure des singularités  $(\overset{\nabla}{\varphi}_m)_\omega^\gamma$  en tout point  $\omega \in \Omega^*$  de front monomial. Cette étude est basée sur les deux remarques suivantes :

- lorsque  $a_{j,r} \neq \omega$ , les systèmes homogènes des systèmes (3.10) et (3.11) n'étant pas singulier en  $\omega$  et les fonctions  $\widehat{\mathbf{B}}^{u,j;\bullet}$  étant entières sur  $\mathbb{C}$  (en effet,  $\mathbf{B}^{u,j;\bullet}$  est analytique à l'origine), les fonctions  $\varphi_1^{u,j;\bullet}$  sont analytiques en  $\omega$  pour tout  $u = 1, \dots, r$  et, pour  $m \geq 2$ , seul le produit de convolution  $\widehat{\mathbf{B}}^{u,j;\bullet} * \varphi_{m-1}$  apporte une contribution à la singularité  $(\varphi_m^{u,j;\bullet})_\omega^\nabla$ .
- lorsque  $a_{j,r} = \omega$ , l'hypothèse de front monomial entraînant  $\dot{q}_j \equiv \dot{q}_\omega \equiv 0$ , les fonctions  $\varphi_m^{u,j;\bullet}$ ,  $u = 1, \dots, r$ , sont entièrement déterminées par les systèmes (3.10), systèmes qui sont identiques à ceux étudiés dans [8, § 3].

En particulier, tous les calculs détaillés dans [8, § 3] pour l'étude des singularités des systèmes de niveau unique 1 restent valables dans notre cas<sup>5</sup>. On peut alors montrer que

- (1) pour tout  $m \geq 1$ , les singularités  $(\varphi_m)^\nabla_\omega$  ont toutes la même structure, structure qui est identique à celle des singularités rencontrées dans le cadre des systèmes de niveau unique 1,
- (2) cette structure commune « se transmet » à  $\widetilde{\mathbf{f}}_\omega^\nabla$  grâce à la convergence uniforme de la série  $\sum_{m \geq 1} \varphi_m$  sur tout compact de  $\mathcal{R}_\Omega$  ([8, thm. 3.7]).

Plus précisément, nous obtenons le théorème suivant :

**Théorème 3.5** (Singularités de  $\widehat{\mathbf{f}}$  de front monomial).

Soit  $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$  un point singulier de  $\widehat{\mathbf{f}}$  de front monomial.

Pour tout chemin  $\gamma$  tracé sur  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  de 0 à un voisinage de  $\omega$ , la singularité  $\widetilde{\mathbf{f}}_\omega^\nabla$  admet un majeur  $\widetilde{\mathbf{f}}_\omega^\nabla$  de la forme

$$\widetilde{\mathbf{f}}_\omega^{u,j;\bullet}(\omega + \tau) = \tau^{\frac{\lambda_j - u + 1}{r} - 1} \tau^{\frac{J n_j}{r}} \mathbf{k}_\omega^{u,j;\bullet} \tau^{-\frac{J n_1}{r}} + \sum_{\lambda_\ell; a_{\ell,r} = \omega} \sum_{v=1}^r \tau^{\frac{\lambda_\ell - v + 1}{r}} \mathbf{R}_{\lambda_\ell, v; \omega}^{u,j;\bullet}(\ln \tau)$$

pour tout  $u = 1, \dots, r$  et  $j = 1, \dots, J$ , où

- $\mathbf{k}_\omega^{u,j;\bullet}$  est une matrice constante de dimension  $n_j \times n_1$  vérifiant  $\mathbf{k}_\omega^{u,j;\bullet} = 0$  lorsque  $a_{j,r} \neq \omega$
- $\mathbf{R}_{\lambda_\ell, v; \omega}^{u,j;\bullet}(X)$  est une matrice à coefficients polynomiaux dans  $\widehat{\mathcal{R}es}_{\Omega - \omega}^{som}[X]$ . De plus, les colonnes de  $\mathbf{R}_{\lambda_\ell, v; \omega}^{u,j;\bullet}(X)$  sont de degré

$$N[\ell] = \begin{cases} [(n_\ell - 1) & (n_\ell - 1) + 1 & \cdots & (n_\ell - 1) + (n_1 - 1)] & \text{si } \lambda_\ell \neq 0 \\ [n_\ell & n_\ell + 1 & \cdots & n_\ell + (n_1 - 1)] & \text{si } \lambda_\ell = 0 \end{cases}$$

**Remarque 3.6.** Dans la pratique, la matrice constante  $\mathbf{k}_\omega^{u,j;\bullet}$  peut être obtenue comme coefficient du monôme  $\tau^{\frac{\lambda_j - u + 1}{r} - 1}$ .

Les cas où la matrice  $L$  des exposants de monodromie formelle est diagonale, voire triviale, sont deux cas particuliers intéressants. Dans ces deux cas,  $\widetilde{\mathbf{f}}_\omega^{u,j;\bullet}$  ne comporte plus qu'un seul coefficient que nous notons  $\widetilde{\mathbf{f}}_\omega^{u,j}$ .

<sup>5</sup>Le produit de convolution  $\widehat{\mathbf{B}}^{u,j;\bullet} * \varphi_{m-1}$  apparaissant à chacune des étapes de la récurrence pour  $m \geq 2$  est étudié dans [8, lem. 3.2] et les systèmes (3.10) pour  $a_{j,r} = \omega$  sont étudiés dans [8, prop. 3.5].

**Corollaire 3.7** ( $L$  diagonale :  $L = \bigoplus_{j=1}^n \lambda_j$ ).

Soit  $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$  un point singulier de  $\tilde{\mathbf{f}}$  de front monomial.

Pour tout chemin  $\gamma$  tracé sur  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  de 0 à un voisinage de  $\omega$ , la singularité  $\tilde{\mathbf{f}}_\omega^\gamma$  admet un majeur  $\tilde{\mathbf{f}}_\omega^\gamma$  de de la forme

$$\tilde{\mathbf{f}}_\omega^\gamma{}^{u,j}(\omega + \tau) = \frac{\mathbf{k}_\omega^{u,j}}{\tau} + \mathbf{h}_\omega^{u,j}(\tau) \ln \tau + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \tau^{\lambda-1} \mathbf{h}_{\lambda;\omega}^{u,j}(\tau)$$

où  $\mathbf{k}_\omega^{u,j}$  est une constante,  $\mathbf{h}_\omega^{u,j}$  et  $\mathbf{h}_{\lambda;\omega}^{u,j}$  sont des fonctions résurgentes-sommables de  $\widehat{\text{Res}}_{\Omega-\omega}^{\text{som}}$  et où

$$\Lambda_\omega = \left\{ \frac{\lambda_\ell - v + 1}{r} ; a_{\ell,r} = \omega, v = 1, \dots, r \text{ et } (\lambda_\ell \neq 0 \text{ ou } v \neq 1) \right\}$$

De plus,

- $\mathbf{k}_\omega^{u,j} = 0$  lorsque  $a_{j,r} \neq \omega$  ou  $\lambda_j \neq 0$  ou  $u \neq 1$
- $\mathbf{h}_\omega^{u,j} = 0$  lorsqu'il n'existe aucun  $\ell$  tel que  $a_{\ell,r} = \omega$  et  $\lambda_\ell = 0$
- pour  $\lambda = \frac{\lambda_\ell - v + 1}{r} \in \Lambda_\omega$ ,  $\mathbf{h}_{\lambda;\omega}^{u,j}(0) = 0$  lorsque  $(\ell, v) \neq (j, u)$ .

**Corollaire 3.8** ( $L$  triviale :  $L = O_n$ ).

Soit  $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$  un point singulier de  $\tilde{\mathbf{f}}$  de front monomial.

Pour tout chemin  $\gamma$  tracé sur  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  de 0 à un voisinage de  $\omega$ , la singularité  $\tilde{\mathbf{f}}_\omega^\gamma$  admet un majeur  $\tilde{\mathbf{f}}_\omega^\gamma$  de de la forme

$$\tilde{\mathbf{f}}_\omega^\gamma{}^{u,j}(\omega + \tau) = \frac{\mathbf{k}_\omega^{u,j}}{\tau} + \mathbf{h}_\omega^{u,j}(\tau) \ln \tau + \sum_{v=2}^r \tau^{\frac{1-v}{r}-1} \mathbf{h}_{v;\omega}^{u,j}(\tau)$$

où  $\mathbf{k}_\omega^{u,j}$  est une constante et où  $\mathbf{h}_\omega^{u,j}$  et  $\mathbf{h}_{v;\omega}^{u,j}$  sont des fonctions résurgentes-sommables de  $\widehat{\text{Res}}_{\Omega-\omega}^{\text{som}}$ . De plus,

- $\mathbf{k}_\omega^{u,j} = 0$  lorsque  $a_{j,r} \neq \omega$  ou  $u \neq 1$
- $\mathbf{h}_\omega^{u,j} = 0$  lorsque il n'existe aucun  $\ell$  tel que  $a_{\ell,r} = \omega$
- $\mathbf{h}_{v;\omega}^{u,j}(0) = 0$  lorsque  $v \neq u$ .

Remarquer que, contrairement aux systèmes de niveau unique 1 ([8, thm. 3.7 et conséquences]), il existe *en général* des puissances ramifiées de  $\tau$ , y compris lorsque la matrice  $L$  des exposants de monodromie formelle est triviale.

## 4. MATRICES DE STOKES-RAMIS ET CONSTANTES DE CONNEXION

### 4.1. Matrices de Stokes-Ramis et réduction du rang.

#### 4.1.1. Automorphismes de Stokes-Ramis.

Etant donnée une direction non anti-Stokes  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  du système initial (0.1) et le choix de sa détermination principale, disons  $\theta^* \in ]-2\pi, 0]^6$ , nous considérons

<sup>6</sup>Tout choix convient. Toutefois, pour être compatible, sur la sphère de Riemann, avec le choix usuel  $0 \leq \arg(z = 1/x) < 2\pi$  de la détermination principale à l'infini, nous suggérons de choisir  $-2\pi < \arg(x) \leq 0$  comme détermination principale en 0.

la somme de  $\tilde{Y}$  dans la direction  $\theta$  définie par

$$Y_\theta(x) = s_{r;\theta}(\tilde{F})(x)Y_{0,\theta^*}(x)$$

pour  $\arg(x)$  proche de  $\theta^*$  (noté dans la suite  $\arg(x) \simeq \theta^*$ ), où  $s_{r;\theta}(\tilde{F})(x)$  est l'unique  $r$ -somme de  $\tilde{F}$  dans la direction  $\theta$  et où  $Y_{0,\theta^*}(x)$  est la solution  $Y_{0,\theta^*}(x) := x^L e^{Q(1/x)}$  définie par le choix  $\arg(x) \simeq \theta^*$ . Rappelons que  $s_{r;\theta}(\tilde{F})$  est une fonction analytique définie et asymptotique Gevrey d'ordre  $\frac{1}{r}$  à  $\tilde{F}$  sur un secteur bissecté par  $\theta$  et d'ouverture  $> \frac{\pi}{r}$ .

Pour une direction anti-Stokes  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  du système (0.1) et le choix de sa détermination principale  $\theta^* \in ]-2\pi, 0]$ , nous considérons, pour  $\arg(x) \simeq \theta^*$ , les deux sommes latérales  $Y_{\theta^-}(x)$  et  $Y_{\theta^+}(x)$  obtenues respectivement comme prolongement analytique de  $Y_{\theta-\varepsilon}$  et  $Y_{\theta+\varepsilon}$  à un secteur de sommet 0, bissecté par  $\theta$  et d'ouverture  $\frac{\pi}{r}$ . Noter que de tels prolongements existent sans aucune ambiguïté lorsque  $\varepsilon > 0$  est suffisamment petit.

En général, les deux sommes latérales  $s_{r;\theta^-}(\tilde{F})$  et  $s_{r;\theta^+}(\tilde{F})$  (et donc  $Y_{\theta^-}$  et  $Y_{\theta^+}$ ) ne sont pas des prolongements analytiques l'une de l'autre. Ceci constitue *le phénomène de Stokes* du système (0.1). Celui-ci est caractérisé par la collection des automorphismes

$$(4.1) \quad St_{\theta^*} : Y_{\theta^+} \longmapsto Y_{\theta^-}$$

pour toute les directions anti-Stokes  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  du système (0.1). Ces automorphismes sont appelés *automorphismes de Stokes-Ramis relatifs à  $\tilde{Y}$* .

**Définition 4.1** (Matrices de Stokes-Ramis).

On appelle matrice de Stokes-Ramis associée à  $\tilde{Y}$  dans la direction  $\theta$  la matrice de  $St_{\theta^*}$  dans la base  $Y_{\theta^+}$ <sup>7</sup>. Nous la notons  $I_n + C_{\theta^*}$ .

La matrice  $I_n + C_{\theta^*}$  est entièrement déterminée par la relation

$$\boxed{Y_{\theta^-}(x) = Y_{\theta^+}(x)(I_n + C_{\theta^*}) \quad \text{pour } \arg(x) \simeq \theta^*}$$

#### 4.1.2. Action de la réduction du rang.

Les directions anti-Stokes du système initial (0.1) associées au premier bloc de colonnes  $\tilde{f}(x)$  de  $\tilde{F}(x)$  sont les directions de décroissance maximale des exponentielles  $e^{q_j(1/x)}$ ,  $q_j \neq 0$ . Ainsi, à chaque polynôme non nul  $q_j$  correspondent  $r$  directions anti-Stokes  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{r-1} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  régulièrement distribuées autour de l'origine  $x = 0$ . Pour fixer les idées, nous choisissons  $\arg(a_{j,r}) \in ]-2\pi, 0]$  et nous supposons que ces directions vérifient

$$\theta_k^* := \frac{\arg(a_{j,r})}{r} - \frac{2k\pi}{r} \in \left] -\frac{2(k+1)\pi}{r}, -\frac{2k\pi}{r} \right]$$

pour tout  $k = 0, \dots, r-1$  de telle sorte que  $-2\pi < \theta_{r-1}^* < \dots < \theta_1^* < \theta_0^* \leq 0$ .

Une telle collection étant fixée, nous considérons, pour tout  $k = 0, \dots, r-1$ , les matrices de Stokes-Ramis  $I_n + C_{\theta_k^*}$  de  $\tilde{Y}$  dans la direction  $\theta_k$ .

<sup>7</sup>Dans la littérature, une matrice de Stokes a un sens plus général où l'on peut comparer deux solutions asymptotiques dont les domaines de définitions ont une intersection non vide. Suivant l'usage initié par J.-P. Ramis ([13]) dans l'esprit des travaux de Stokes, nous excluons ici ce cas en ne considérant que les matrices de transition entre les sommes situées de part et d'autre d'une même direction anti-Stokes.

Notons  $c_{\theta_k^*}$  les  $n_1$  premières colonnes de  $C_{\theta_k^*}$  et découpons  $c_{\theta_k^*}$  en  $J$  blocs de colonnes  $c_{\theta_k^*}^{j;\bullet}$ ,  $j = 1, \dots, J$ , suivant la structure de Jordan de  $L$ . Les coefficients de  $c_{\theta_k^*}^{j;\bullet}$  sont nuls dès que  $e^{q_j(1/x)}$  n'est pas plate dans la direction  $\theta_k$ . Les autres coefficients de  $c_{\theta_k^*}$  sont appelés *multiplicateurs de Stokes associés à  $\tilde{f}$  dans la direction  $\theta_k$* .

Rappelons (cf. notation 3.1) que toute matrice  $\mathbf{M}$  de dimension  $rn \times p$  est découpée en  $r$  blocs de lignes  $\mathbf{M}^{u;\bullet}$ ,  $u = 1, \dots, r$ , de dimension  $n \times p$  suivant la structure par blocs de la matrice  $\mathbf{A}_0$  (cf. page 19), puis que chaque matrice  $\mathbf{M}^{u;\bullet}$  est découpée en  $J$  blocs de lignes  $\mathbf{M}^{u,j;\bullet}$ ,  $j = 1, \dots, J$ , de dimension  $n_j \times p$  suivant la structure de Jordan de  $L$ .

La réduction du rang permet de « rassembler » les  $r$  directions  $\theta_k$  en une seule direction  $\boldsymbol{\theta} = r\theta_0$  qui est une direction anti-Stokes du système (1.1) associée à  $\tilde{f}$ . Noter que  $\boldsymbol{\theta}^* = r\theta_0^*$ . Suivant les notations précédentes, la matrice de Stokes-Ramis  $I_{rn} + \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}^*}$  associée à  $\tilde{\mathbf{Y}}$  dans la direction  $\boldsymbol{\theta}$  est caractérisée, pour  $\arg(t) \simeq \boldsymbol{\theta}^*$ , par la relation

$$\mathbf{Y}_{\boldsymbol{\theta}^-} = \mathbf{Y}_{\boldsymbol{\theta}^+}(I_{rn} + \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}^*}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}^*} = \bigoplus_{k=0}^{r-1} C_{\theta_k^*}$$

(cf. [7, Prop. 4.2]). Celle-ci s'écrit également sous la forme

$$s_{\boldsymbol{\theta}^-}(\tilde{\mathbf{F}}) - s_{\boldsymbol{\theta}^+}(\tilde{\mathbf{F}}) = s_{\boldsymbol{\theta}^+}(\tilde{\mathbf{F}}) \mathbf{Y}_{0,\boldsymbol{\theta}^*} \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}^*} \mathbf{Y}_{0,\boldsymbol{\theta}^*}^{-1} \quad \text{pour } \arg(t) \simeq \boldsymbol{\theta}^*$$

où  $s_{\boldsymbol{\theta}^-}(\tilde{\mathbf{F}})$  et  $s_{\boldsymbol{\theta}^+}(\tilde{\mathbf{F}})$  sont respectivement les 1-sommes de  $\tilde{\mathbf{F}}$  à droite et à gauche de  $\boldsymbol{\theta}$ . En particulier, en ne considérant que les  $n_1$  premières colonnes :

$$(4.2) \quad s_{\boldsymbol{\theta}^-}(\tilde{\mathbf{f}})(t) - s_{\boldsymbol{\theta}^+}(\tilde{\mathbf{f}})(t) = \frac{1}{r} s_{\boldsymbol{\theta}^+}(\tilde{\mathbf{F}}) \sum_{\omega \in \Omega_{\boldsymbol{\theta}}} \mathbf{M}_{\omega^*}(t) e^{-\omega/t} \quad \text{pour } \arg(t) \simeq \boldsymbol{\theta}^*$$

où, pour tout  $u = 1, \dots, r$  et  $j = 1, \dots, J$ ,

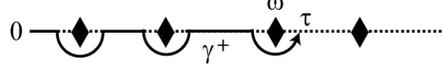
$$\mathbf{M}_{\omega^*}^{u,j;\bullet} = \begin{cases} 0_{n_j \times n_1} & \text{si } a_{j,r} \neq \omega \\ \sum_{k=0}^{r-1} (\rho^k t^{1/r})^{L_j - (u-1)I_{n_j}} c_{\theta_k^*}^{j;\bullet} (\rho^k t^{1/r})^{-J_{n_1}} e^{q_\omega(\bar{\rho}^k t^{-1/r})} & \text{si } a_{j,r} = \omega \end{cases}$$

La matrice  $0_{n_j \times n_1}$  est la matrice de dimension  $n_j \times n_1$  dont tous les termes sont nuls.

#### 4.2. Singularité principale et constantes de connexion pour les singularités de front monomial.

Etant donnée  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , notons  $d_{\boldsymbol{\theta}}$  la demi-droite issue de l'origine d'argument  $\boldsymbol{\theta}$  et  $\Omega_{\boldsymbol{\theta}} = \Omega^* \cap d_{\boldsymbol{\theta}}$ . La direction  $\boldsymbol{\theta}$  est une direction anti-Stokes associée à  $\tilde{f}$  lorsque  $\Omega_{\boldsymbol{\theta}} \neq \emptyset$ .

Pour une telle direction  $\boldsymbol{\theta}$  et le choix d'un point  $\omega \in \Omega_{\boldsymbol{\theta}}$ , la singularité  $\overset{\nabla}{f}_{\omega}^{\gamma}$  dépend du chemin  $\gamma$  et également du choix de la détermination de l'argument autour de  $\omega$ . Désormais,


 Un chemin  $\gamma^+$  joignant 0 à  $\omega$  par la droite

- nous considérons un chemin  $\gamma^+$  le long du segment  $[0, \omega]$  joignant l'origine 0 à un point  $\tau$  proche de  $\omega$  en évitant tous les points singuliers intermédiaires  $\omega' \in \Omega_\theta \cap [0, \omega]$  par la droite.
- nous choisissons la détermination principale de la variable  $\tau$  autour de  $\omega$ , *i.e.*,  $\arg(\tau) \in ] - 2\pi, 0]$  avec notre précédent choix.

**Définition 4.2** (Singularité principale).

Etant donnée une direction anti-Stokes  $\theta$  de  $\tilde{\mathbf{f}}$ , nous appelons singularité principale de  $\hat{\mathbf{f}}$  en  $\omega \in \Omega_\theta$  la singularité  $\overset{\nabla}{\mathbf{f}}_{\omega^*}^+ := \text{cont}_{\gamma^+, \omega}(\hat{\mathbf{f}})$  où nous avons choisi la détermination principale de la variable  $\tau$ . Un majeur  $\tilde{\mathbf{f}}_{\omega^*}^+$  de  $\overset{\nabla}{\mathbf{f}}_{\omega^*}^+$  est appelé majeur principal.

Lorsque  $\omega \in \Omega_\theta$  est de front monomial, le théorème 3.4 donne une forme explicite d'un majeur principal  $\tilde{\mathbf{f}}_{\omega^*}^+$  de  $\overset{\nabla}{\mathbf{f}}_{\omega^*}^+$  :

$$(4.3) \quad \tilde{\mathbf{f}}_{\omega^*}^{+, u, j; \bullet}(\omega + \tau) = \tau^{\frac{\lambda_j - u + 1}{r} - 1} \tau^{\frac{J_{n_j}}{r}} \mathbf{k}_{\omega^*}^{+, u, j; \bullet} \tau^{-\frac{J_{n_1}}{r}} + \sum_{\lambda_\ell; a_{\ell, r} = \omega v = 1}^r \tau^{\frac{\lambda_\ell - v + 1}{r}} \mathbf{R}_{\lambda_\ell, v; \omega^*}^{+, u, j; \bullet}(\ln \tau)$$

pour tout  $u = 1, \dots, r$  et  $j = 1, \dots, J$ .

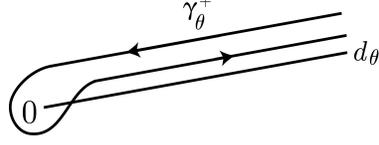
**Définition 4.3** (Constantes de connexion).

Etant donné une direction anti-Stokes  $\theta$  de  $\tilde{\mathbf{f}}$  et  $\omega \in \Omega_\theta$  de front monomial, nous appelons constantes de connexion de  $\hat{\mathbf{f}}$  en  $\omega$  les coefficients a priori non triviaux de la matrice  $\mathbf{k}_{\omega^*}^+$ .

### 4.3. Relations entre les matrices de Stokes-Ramis et les constantes de connexion.

Dans ce paragraphe, nous explicitons les multiplicateurs de Stokes associés à  $\tilde{\mathbf{f}}$  en fonction de constantes de connexion dans le plan de Borel. Les formules obtenues généralisent celles données dans [8, § 4.3, thm. 4.3] pour les systèmes de niveau unique 1. Elles s'établissent de façon analogue, tout du moins pour les multiplicateurs de Stokes correspondant à des singularités de front monomial. Pour ceux correspondant à des singularités de front non monomial, nous nous appuyons sur une méthode par changement de variable due à M. Loday-Richaud (*cf.* § 4.3.2 ci-dessous).

Suivant [8, § 4.3], le membre de gauche de l'égalité (4.2) peut être vu comme une intégrale de Laplace le long d'un contour de Hankel autour de la demi-droite  $d_\theta$ , l'argument variant de  $\theta - 2\pi$  à  $\theta$ , et évitant les points singuliers  $\omega \in \Omega_\theta$  par



la droite dans les deux sens. La résurgence-sommable de  $\tilde{\mathbf{f}}$  permet alors d'écrire l'égalité (4.2) sous la forme

$$(4.4) \quad \boxed{\sum_{\omega \in \Omega_\theta} e^{-\frac{\omega}{t}} \int_{\gamma_\theta^+} \tilde{\mathbf{f}}_{\omega^*}^+(\omega + \tau) e^{-\frac{\tau}{t}} d\tau = \frac{1}{r} s_{\theta^+}(\tilde{\mathbf{F}}) \sum_{\omega \in \Omega_\theta} \mathbf{M}_{\omega^*}(t) e^{-\frac{\omega}{t}}}$$

où  $\gamma_\theta^+$  est un contour Hankel comme ci-dessous : Ainsi, compte-tenu de la structure des singularités  $\tilde{\mathbf{f}}_{\omega^*}^+$  (thm. 2.13), la proposition 2.4, point 2, et le lemme de Watson montrent que l'égalité (4.4) se sépare terme à terme en les égalités

$$(4.5) \quad \boxed{\int_{\gamma_\theta^+} \tilde{\mathbf{f}}_{\omega^*}^+(\omega + \tau) e^{-\tau/t} d\tau = \frac{1}{r} s_{\theta^+}(\tilde{\mathbf{F}})(t) \mathbf{M}_{\omega^*}(t)}$$

pour tout  $\omega \in \Omega_\theta$  et  $\arg(t) \simeq \theta^*$

#### 4.3.1. Cas des singularités de front monomial.

Le majeur principal  $\tilde{\mathbf{f}}_{\omega^*}^+$  en un point singulier  $\omega \in \Omega_\theta$  de front monomial est donné par (4.3). Ainsi, en procédant de façon analogue à [8, thm. 4.3] et en identifiant les termes en  $t^{\frac{\lambda_j - u + 1}{r}}$  dans les deux membres de (4.5) pour  $j$  tel que  $a_{j,r} = \omega$  et  $u = 1, \dots, r$ , nous obtenons le théorème suivant :

**Théorème 4.4** (Matrices de Stokes-Ramis et constantes de connexion).

Soit  $(\theta_k)_{k=0, \dots, r-1}$  une collection de directions anti-Stokes de  $\tilde{\mathbf{f}}$  et  $\theta = r\theta_0$ .

Pour tout  $\omega \in \Omega_\theta$  de front monomial et tout  $j \in \{1, \dots, J\}$  tel que  $a_{j,r} = \omega$ , les données de  $(c_{\theta_k^*}^{j, \bullet})_{k=0, \dots, r-1}$  et de  $(\mathbf{k}_{\omega^*}^{+, u, j; \bullet})_{u=1, \dots, r}$  sont équivalentes et sont reliées par la formule

$$(4.6) \quad \boxed{c_{\theta_k^*}^{j, \bullet} = \sum_{u=1}^r \rho^{k((u-1)I_{n_j} - L_j)} \mathbf{I}_{\omega^*}^{u, j; \bullet} \rho^k J_{n_1}}$$

où

$$\boxed{\mathbf{I}_{\omega^*}^{u, j; \bullet} := \int_{\gamma_0} \tau^{\frac{\lambda_j - u + 1}{r} - 1} \tau^{\frac{J_{n_j}}{r}} \mathbf{k}_{\omega^*}^{+, u, j; \bullet} \tau^{-\frac{J_{n_1}}{r}} e^{-\tau} d\tau}$$

et où  $\gamma_0$  est un contour de Hankel autour du demi-axe  $\mathbb{R}^+$  (on rappelle que, par convention, l'argument le long de  $\gamma_0$  varie de  $-2\pi$  à 0).

Lorsque la matrice de monodromie formelle est diagonale :  $L = \bigoplus_{j=1}^n \lambda_j$ , tous les blocs de Jordan  $J_{n_j}$  sont nuls. Ainsi,

$$\mathbf{I}_{\omega^*}^{u, j} = \int_{\gamma_0} \tau^{\frac{\lambda_j - u + 1}{r} - 1} \mathbf{k}_{\omega^*}^{+, u, j} e^{-\tau} d\tau = 2i\pi \frac{e^{-i\pi \frac{\lambda_j - u + 1}{r}}}{\Gamma\left(1 - \frac{\lambda_j - u + 1}{r}\right)} \mathbf{k}_{\omega^*}^{+, u, j}$$

**Corollaire 4.5** (Matrice  $L$  diagonale).

Soit  $(\theta_k)_{k=0,\dots,r-1}$  une collection de directions anti-Stokes de  $\tilde{f}$  et  $\theta = r\theta_0$ . Pour tout  $\omega \in \Omega_\theta$  de front monomial et tout  $j \in \{1, \dots, J\}$  tel que  $a_{j,r} = \omega$ , les données de  $(c_{\theta_k^*}^j)_{k=0,\dots,r-1}$  et de  $(\mathbf{k}_{\omega^*}^{+,u,j})_{u=1,\dots,r}$  sont équivalentes et sont reliées par les formules suivantes :

- (1) pour tout  $k = 0, \dots, r-1$ ,

$$c_{\theta_k^*}^j = 2i\pi \sum_{u=1}^r \rho^{k(u-1-\lambda_j)} \frac{e^{-i\pi \frac{\lambda_j - u + 1}{r}}}{\Gamma\left(1 - \frac{\lambda_j - u + 1}{r}\right)} \mathbf{k}_{\omega^*}^{+,u,j}$$

- (2) pour tout  $u = 1, \dots, r$ ,

$$\mathbf{k}_{\omega^*}^{+,u,j} = \frac{e^{i\pi \frac{\lambda_j - u + 1}{r}} \Gamma\left(1 - \frac{\lambda_j - u + 1}{r}\right)}{2i\pi r} \sum_{k=0}^{r-1} \rho^{k(\lambda_j - u + 1)} c_{\theta_k^*}^j$$

Il peut être également utile, notamment pour le calcul effectif des multiplicateurs de Stokes, de donner une formule pour chaque coefficient de la formule générale (4.6). Notons respectivement  $\mathbf{M}^{(u,j,\ell);(q)}$  et  $c_{\theta_k^*}^{(j,\ell);(q)}$  le coefficient situé à la  $\ell^{\text{ème}}$  ligne et  $q^{\text{ème}}$  colonne de  $\mathbf{M}^{u,j;\bullet}$  et  $c_{\theta_k^*}^{j;\bullet}$ .

**Corollaire 4.6.**

- (1) Pour tout  $\ell = 1, \dots, n_j$  et  $q = 1, \dots, n_1$ ,

$$\mathbf{I}_{\omega^*}^{(u,j,\ell);(q)} = \sum_{p=0}^{n_j - \ell + q - 1} \frac{1}{r^p} \kappa_p \left( \frac{\lambda_j - u + 1}{r} \right) \mathbf{H}_{p,\omega^*}^{(u,j,\ell);(q)}$$

avec

$$\kappa_p \left( \frac{\lambda_j - u + 1}{r} \right) := 2i\pi \frac{d^p}{dz^p} \left( \frac{e^{-i\pi z}}{\Gamma(1-z)} \right) \Big|_{z=\frac{\lambda_j - u + 1}{r}}$$

et

$$\mathbf{H}_{p,\omega^*}^{(u,j,\ell);(q)} := \sum_{\ell' - q' = p - q + 1} (-1)^{q-1-q'} \frac{\mathbf{k}_{\omega^*}^{+(u,j,\ell+\ell');(q'+1)}}{(q-1-q')!\ell'!}$$

- (2) Les différents coefficients de la formule (4.6) s'écrivent, pour tout  $k = 0, \dots, r-1$ ,  $\ell = 1, \dots, n_j$  et  $q = 1, \dots, n_1$ ,

$$c_{\theta_k^*}^{(j,\ell);(q)} = \sum_{u=1}^r \rho^{k(u-1-\lambda_j)} \left( \sum_{p=0}^{n_j - \ell + q - 1} \left( \frac{2ik\pi}{r} \right)^p \mathbf{K}_{p,\omega^*}^{(u,j,\ell);(q)} \right)$$

avec

$$\mathbf{K}_{p,\omega^*}^{(u,j,\ell);(q)} := \sum_{\ell' - q' = p - q + 1} (-1)^{q-1-q'} \frac{\mathbf{I}_{\omega^*}^{(u,j,\ell+\ell');(q'+1)}}{(q-1-q')!\ell'!}$$

La valeur des  $\kappa_p(\lambda)$  résulte de la proposition 2.4, point 2. Les différentes formules établies dans ce paragraphe sont illustrées aux paragraphes 5.1 et 5.2 par deux exemples traités en détails.

### 4.3.2. Cas général.

Le théorème 4.4 permet d'écrire les multiplicateurs de Stokes de  $\tilde{f}$  correspondant aux singularités de front monomial de  $\hat{f}$  en fonction des constantes de connexion de  $\hat{f}$  en ces différents points singuliers.

Pour les multiplicateurs de Stokes de  $\tilde{f}$  correspondant aux singularités de front non monomial de  $\hat{f}$ , le manque de précision sur le majeur principal  $\tilde{f}_{\omega^*}^+$  ne permet pas d'obtenir directement de formules analogues en suivant la même démarche que précédemment. Pour contourner cette difficulté, nous nous appuyons sur le résultat suivant dû à M. Loday-Richaud :

**Lemme 4.7** (M. Loday-Richaud, [6]).

- (1) Soit  $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$  un point singulier de  $\hat{f}$  de front non monomial : le polynôme  $q_\omega$  définissant  $Fr(\omega)$  est de la forme

$$q_\omega \left( \frac{1}{x} \right) = -\frac{\omega}{x^r} + \dot{q}_\omega \left( \frac{1}{x} \right) \quad \text{avec} \quad \dot{q}_\omega \neq 0$$

Il existe un changement de la variable  $x$  de la forme

$$(4.7) \quad x = \frac{y}{1 + \alpha_1 y + \dots + \alpha_{r-1} y^{r-1}} \quad , \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1} \in \mathbb{C}$$

tel que la partie polaire  $p_\omega(1/y)$  de  $q_\omega(1/x(y))$  vérifie

$$p_\omega \left( \frac{1}{y} \right) = -\frac{\omega}{y^r}$$

- (2) Les matrices de Stokes-Ramis du système (0.1) sont préservées par le changement de variable (4.7).

En effet, à transformation de jauge méromorphe près, le lemme 4.7 nous permet de construire un *nouveau* système différentiel linéaire de niveau unique  $r$ , *normalisé comme* le système initial (0.1) (cf. page 2), admettant les *mêmes* matrices de Stokes-Ramis que le système initial (0.1) et dans lequel le point singulier  $\omega$  est de *front monomial*. Nous pouvons alors lui appliquer le théorème 4.4 et ainsi expliciter également les multiplicateurs de Stokes de  $\tilde{f}$  correspondant à  $\omega$  en fonction de constantes de connexion dans le plan de Borel. Noter toutefois que ces constantes ne sont pas en général directement lisibles sur le majeur principal initial  $\tilde{f}_{\omega^*}^+$ , y compris lorsque celui-ci est calculable explicitement.

Cette méthode est illustrée au paragraphe 5.3 par un exemple détaillé.

### 4.3.3. Calcul effectif des multiplicateurs de Stokes.

Moyennant le changement de variable (4.7) donné au lemme 4.7 et la permutation des blocs de colonnes de  $\tilde{F}(x)$ , le théorème 4.4 permet de ramener le calcul des multiplicateurs de Stokes du système initial (0.1) à la détermination de constantes de connexion via l'étude des prolongements analytiques des transformées de Borel des solutions formelles du système  $r$ -réduit (1.1) en leurs points singuliers.

Dans un article ultérieur, nous montrerons comment évaluer l'erreur commise avec cette méthode de calcul. Nous renvoyons à [15, § 3 et 5] pour une première approche.

## 5. EXEMPLES

Pour terminer l'article, nous illustrons par trois exemples les résultats précédents. Si les systèmes proposés peuvent paraître un peu compliqués au premier abord (points singuliers alignés, résonance, singularité de front non monomial), ils sont suffisamment simples pour permettre des calculs exacts. Cette « simplicité » est due au fait que les systèmes considérés ont tous des matrices triangulaires. Bien sûr, pour des systèmes plus généraux, de tels calculs exacts ne sont, en général, pas faisables.

Pour chaque exemple, nous déterminons avec précision les constantes de connexion dans le plan de Borel en explicitant le majeur principal de chaque singularité (après avoir bien sûr effectué si nécessaire un changement de la variable  $x$  du type (4.7) et normalisé le système obtenu). Nous en déduisons alors les multiplicateurs de Stokes à l'aide des formules établies au paragraphe 4 (thm. 4.4 et ses corollaires).

## 5.1. Un exemple avec plusieurs points singuliers alignés.

Nous considérons ici le système de niveau unique 2

$$(5.1) \quad x^3 \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x^4 - x^5 & 2 & 0 \\ x^4 + x^5 & 0 & 4 + \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} Y$$

et sa solution fondamentale formelle  $\tilde{Y}(x) = \tilde{F}(x)x^L e^{Q(1/x)}$  où

$$- Q\left(\frac{1}{x}\right) = \text{diag}\left(0, -\frac{1}{x^2}, -\frac{2}{x^2}\right),$$

$$- L = \text{diag}\left(0, 0, \frac{1}{2}\right),$$

$$- \tilde{F}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tilde{f}_2(x) & 1 & 0 \\ \tilde{f}_3(x) & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ est une série entière telle que } \tilde{F}(x) = I_3 + O(x^4).$$

Puisque seule la première colonne  $\tilde{f}(x)$  de  $\tilde{F}(x)$  est divergente, il suffit de s'intéresser aux directions anti-Stokes de  $\tilde{Y}(x)$  associées à  $\tilde{f}(x)$ , *i.e.*,  $\theta_0 = 0$  et  $\theta_1 = -\pi$  (les directions de décroissance maximale des exponentielles  $e^{-1/x^2}$  et  $e^{-2/x^2}$ ). Leurs matrices de Stokes-Ramis respectives sont définies par  $I_3 + C_0$  et  $I_3 + C_{-\pi}$  avec

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_0^2 & 0 & 0 \\ c_0^3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C_{-\pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_{-\pi}^2 & 0 & 0 \\ c_{-\pi}^3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Compte-tenu du corollaire 4.5, les multiplicateurs de Stokes  $c_0^2$  et  $c_{-\pi}^2$  d'une part et  $c_0^3$  et  $c_{-\pi}^3$  d'autre part peuvent être calculés respectivement à partir des constantes de connexion de  $\hat{f}$  en 1 et 2. En effet, ces deux points singuliers sont de front monomial et la matrice des exposants de monodromie formelle  $L$  est diagonale.

Le système 2-réduit du système (5.1) s'écrit

$$2t^2 \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t^2 & 2 & 0 & -t^3 & 0 & 0 \\ t^2 & 0 & 4 + \frac{t}{2} & t^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t & 0 & 0 \\ -t^2 & 0 & 0 & t^2 & 2 - t & 0 \\ t^2 & 0 & 0 & t^2 & 0 & 4 - \frac{t}{2} \end{bmatrix} \mathbf{Y}$$

et, compte-tenu de (1.2), la série formelle  $\tilde{\mathbf{f}}$  est de la forme

$$\tilde{\mathbf{f}}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{\mathbf{f}}_2(t) \\ \tilde{\mathbf{f}}_3(t) \\ 0 \\ \tilde{\mathbf{f}}_5(t) \\ \tilde{\mathbf{f}}_6(t) \end{bmatrix} \quad \text{avec } \tilde{\mathbf{f}}_j(t) \in t^2\mathbb{C}[[t]]$$

Le terme nul apparaissant à la quatrième ligne est dû au fait que le premier coefficient de  $\tilde{f}(x)$  n'admet pas de terme en  $x^{2m+1}$ ,  $m \geq 0$ . D'après (3.1), la série  $\tilde{\mathbf{f}}(t)$  satisfait au système

$$2t^2 \frac{d\tilde{\mathbf{f}}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t^2 & 2 & 0 & -t^3 & 0 & 0 \\ t^2 & 0 & 4 + \frac{t}{2} & t^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t & 0 & 0 \\ -t^2 & 0 & 0 & t^2 & 2-t & 0 \\ t^2 & 0 & 0 & t^2 & 0 & 4 - \frac{t}{2} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}$$

Les séries formelles  $\tilde{\mathbf{f}}_j$  sont donc les uniques solutions des équations

$$\begin{aligned} 2t^2 \frac{d\tilde{\mathbf{f}}_2}{dt} - 2\tilde{\mathbf{f}}_2 &= t^2 & 2t^2 \frac{d\tilde{\mathbf{f}}_5}{dt} - (2-t)\tilde{\mathbf{f}}_5 &= -t^2 \\ 2t^2 \frac{d\tilde{\mathbf{f}}_3}{dt} - \left(4 + \frac{t}{2}\right)\tilde{\mathbf{f}}_3 &= t^2 & 2t^2 \frac{d\tilde{\mathbf{f}}_6}{dt} - \left(4 - \frac{t}{2}\right)\tilde{\mathbf{f}}_6 &= t^2 \end{aligned}$$

vérifiant les conditions  $\tilde{\mathbf{f}}_j(t) = O(t^2)$ . Par conséquent, leurs transformées de Borel  $\hat{\mathbf{f}}_j^+$  sont définies par

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}_2^+(1+\tau) &= \frac{\tau+1}{2\tau} & \hat{\mathbf{f}}_5^+(1+\tau) &= \frac{i}{3}\tau^{-3/2} - \frac{1}{3} \\ \hat{\mathbf{f}}_3^+(2+\tau) &= -\frac{2^{7/4}e^{-3i\pi/4}}{3}\tau^{-3/4} + \frac{2}{3} & \hat{\mathbf{f}}_6^+(2+\tau) &= -\frac{2^{9/4}e^{-5i\pi/4}}{5}\tau^{-5/4} + \frac{2}{5} \end{aligned}$$

et les matrices de connexion  $\mathbf{k}_1^+$  et  $\mathbf{k}_2^+$  par

$$\mathbf{k}_1^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ k_{1,2} = \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ k_{1,5} = \frac{i}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{k}_2^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_{2,3} = -\frac{2^{7/4}}{3}e^{-3i\pi/4} \\ 0 \\ 0 \\ k_{2,6} = -\frac{2^{9/4}}{5}e^{-5i\pi/4} \end{bmatrix}$$

Ainsi, les multiplicateurs de Stokes  $c_0^2$ ,  $c_0^3$ ,  $c_{-\pi}^2$  et  $c_{-\pi}^3$  étant reliés à ces constantes par les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0^2 = 2i\pi k_{1,2} + 2i\pi \frac{e^{\frac{i\pi}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} k_{1,5} \\ c_0^3 = 2i\pi \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\Gamma(\frac{3}{4})} k_{2,3} + 2i\pi \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\Gamma(\frac{5}{4})} k_{2,6} \\ c_{-\pi}^2 = 2i\pi k_{1,2} + 2i\pi e^{-i\pi} \frac{e^{\frac{i\pi}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} k_{1,5} \\ c_{-\pi}^3 = 2i\pi e^{\frac{i\pi}{2}} \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\Gamma(\frac{3}{4})} k_{2,3} + 2i\pi e^{-\frac{i\pi}{2}} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\Gamma(\frac{5}{4})} k_{2,6} \end{array} \right.$$

(cf. corollaire 4.5 avec  $\rho = e^{-i\pi}$ ), nous obtenons finalement

$$\boxed{\begin{array}{ll} c_0^2 = \left(\pi - \frac{4\sqrt{\pi}}{3}\right) i & c_0^3 = 2^{3/4} \left(\frac{4\pi}{3\Gamma(\frac{3}{4})} + \frac{16}{5}\Gamma(\frac{3}{4})\right) i \\ c_{-\pi}^2 = \left(\pi + \frac{4\sqrt{\pi}}{3}\right) i & c_{-\pi}^3 = -2^{3/4} \left(\frac{4\pi}{3\Gamma(\frac{3}{4})} - \frac{16}{5}\Gamma(\frac{3}{4})\right) i \end{array}}$$

## 5.2. Un exemple avec résonance.

Nous considérons à présent le système de niveau unique 2

$$(5.2) \quad x^3 \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x^4 + x^5 & 2 & x^2 \\ x^4 + 2x^5 & 0 & 2 \end{bmatrix} Y$$

et sa solution fondamentale formelle  $\tilde{Y}(x) = \tilde{F}(x)x^L e^{Q(1/x)}$  où

$$\begin{array}{l} - Q\left(\frac{1}{x}\right) = \text{diag}\left(0, -\frac{1}{x^2}, -\frac{1}{x^2}\right), \\ - L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (L \text{ n'est pas diagonale, d'où la résonance}), \\ - \tilde{F}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tilde{f}_2(x) & 1 & 0 \\ \tilde{f}_3(x) & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ est une série entière telle que } \tilde{F}(x) = I_3 + O(x^4). \end{array}$$

Comme précédemment, nous nous intéressons uniquement aux directions anti-Stokes de  $\tilde{Y}(x)$  associées à la première colonne  $\tilde{f}(x)$  de  $\tilde{F}(x)$ . Ce sont encore les directions  $\theta_0 = 0$  et  $\theta_1 = -\pi$  et leurs matrices de Stokes-Ramis respectives sont données par  $I_3 + C_0$  et  $I_3 + C_{-\pi}$  avec

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_0^{2,1} & 0 & 0 \\ c_0^{2,2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C_{-\pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_{-\pi}^{2,1} & 0 & 0 \\ c_{-\pi}^{2,2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ici, le point  $\tau = 1$  est de front monomial et les quatre multiplicateurs de Stokes  $c_0^{2,1}$ ,  $c_0^{2,2}$ ,  $c_{-\pi}^{2,1}$  et  $c_{-\pi}^{2,2}$  peuvent tous être calculés à partir des constantes de connexion de  $\hat{\mathbf{f}}$  en 1.



Rappelons que  $\kappa_p(\lambda) = 2i\pi \frac{d^p}{dz^p} \left( \frac{e^{-i\pi z}}{\Gamma(1-z)} \right)_{|z=\lambda}$  et donc

$$\begin{aligned} \kappa_0(0) &= 2i\pi & \kappa_1(0) &= 2\pi^2 - 2i\pi\gamma \\ \kappa_0\left(-\frac{1}{2}\right) &= -4\sqrt{\pi} & \kappa_1\left(-\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}(4\gamma - 8 + 8\ln 2 + 4i\pi) \end{aligned}$$

où  $\gamma = 0.5772\dots$  est la constante d'Euler. Ainsi,

$$\begin{aligned} c_0^{2,1} &= \frac{i\sqrt{\pi}}{18}(136 - 24\gamma - 48\ln 2 + 45\sqrt{\pi} - 9\gamma\sqrt{\pi}) \\ c_0^{2,2} &= \frac{i\sqrt{\pi}}{3}(8 + 3\sqrt{\pi}) \\ c_{-\pi}^{2,1} &= \frac{8\pi\sqrt{\pi}}{3} - \pi^2 - \frac{i\sqrt{\pi}}{18}(88 - 24\gamma - 48\ln 2 - 27\sqrt{\pi} + 9\gamma\sqrt{\pi}) \\ c_{-\pi}^{2,2} &= -\frac{i\sqrt{\pi}}{3}(8 - 3\sqrt{\pi}) \end{aligned}$$

### 5.3. Un exemple avec un point singulier de front non monomial.

Nous reprenons ici le système

$$(2.1) \quad x^3 \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{x}{3} & 1+x \end{bmatrix} Y$$

de l'exemple 2.1 (cf. page 7) et sa solution fondamentale formelle  $\tilde{Y}(x) = \tilde{F}(x)e^{Q(1/x)}$  où

$$\begin{aligned} - Q\left(\frac{1}{x}\right) &= \text{diag}\left(0, -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}\right), \\ - \tilde{F}(x) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{x}{3} + O(x^2) & 1 \end{bmatrix} = I_2 + O(x) \in M_2(\mathbb{C}[[x]]) \end{aligned}$$

Les multiplicateurs de Stokes de ce système ont déjà été calculés dans [6, ex. V.2]. Ceux-ci ont été obtenus comme limites de suites récurrentes suivant une méthode due à M. Loday-Richaud et basée sur la cohomologie et l'intégrale de Cauchy-Heine. Nous proposons ici une autre méthode de calcul de ces multiplicateurs basée sur l'étude des singularités dans le plan de Borel et sur les résultats du paragraphe 4.

Afin d'entrer dans le cadre que nous nous sommes fixés depuis le paragraphe 3, commençons par normaliser la série formelle  $\tilde{F}(x)$  à  $\tilde{F}(x) = I_2 + O(x^2)$  à l'aide de la transformation de jauge

$$Y \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{x}{3} & 1 \end{bmatrix} Y$$

Rappelons qu'une telle transformation n'affecte pas les matrices de Stokes-Ramis. Le système (2.1) devient alors

$$(5.3) \quad x^3 \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{x^2-x^3}{3} & 1+x \end{bmatrix} Y$$

et nous notons encore  $\tilde{Y}(x) = \tilde{F}(x)e^{Q(1/x)}$  la solution fondamentale formelle correspondante. Rappelons que

$$Q\left(\frac{1}{x}\right) = \text{diag}\left(0, -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}\right)$$

et que  $\tilde{F}(x)$  est maintenant une série entière telle que  $\tilde{F}(x) = I_2 + O(x^2)$ . Plus précisément,

$$\tilde{F}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{f}_2(x) & 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec } \tilde{f}_2(x) \in x^2\mathbb{C}[[x]]$$

Comme dans les deux exemples précédents (§ 5.1 et 5.2), seule la première colonne  $\tilde{f}(x)$  de  $\tilde{F}(x)$  est divergente. Nous nous intéressons donc uniquement aux directions anti-Stokes de  $\tilde{Y}(x)$  associées à  $\tilde{f}(x)$ . A nouveau, il s'agit des directions  $\theta_0 = 0$  et  $\theta_1 = -\pi$  (les directions de décroissance maximale de  $e^{-1/(2x^2)-1/x}$ ) et leurs matrices de Stokes-Ramis respectives sont données par  $I_2 + C_0$  et  $I_2 + C_{-\pi}$  avec

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_0^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C_{-\pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_{-\pi}^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ici, le point singulier  $\tau = \frac{1}{2}$  engendrant la collection de directions  $(0, -\pi)$  est de front non monomial. Comme dans [6, ex. V.2], nous effectuons le changement de variable

$$x = \frac{y}{1-y}$$

afin d'éliminer la partie polaire  $-1/x$  présente dans l'exponentielle. Ce faisant, le système (5.3) devient

$$(5.4) \quad y^3 \frac{d\mathcal{Y}}{dy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{y^2(1-2y)}{3(y-1)^2} & 1 \end{bmatrix} \mathcal{Y}$$

et sa solution fondamentale formelle  $\tilde{\mathcal{Y}}(y) := \tilde{Y}(x(y))$  s'écrit sous la forme  $\tilde{\mathcal{Y}}(y) = \tilde{G}(y)e^{P(1/y)}$  avec

$$\begin{aligned} - P\left(\frac{1}{y}\right) &= \text{diag}\left(0, -\frac{1}{2y^2}\right), \\ - \tilde{G}(y) &= \tilde{F}(x(y)) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{f}_2(x(y)) & \sqrt{e} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C}[[y]]). \end{aligned}$$

Rappelons que les systèmes (5.3) et (5.4) ont les mêmes matrices de Stokes-Ramis (cf. lemme 4.7). La normalisation de  $\tilde{G}(y)$  à  $I_2 + O(y^2)$  s'effectue à l'aide de la transformation de jauge constante

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-1/2} \end{bmatrix} \mathcal{Y}$$

Ainsi, le système (5.4) devient

$$(5.5) \quad y^3 \frac{dZ}{dy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{y^2(1-2y)}{3\sqrt{e}(y-1)^2} & 1 \end{bmatrix} Z$$

et nous considérons sa solution fondamentale formelle  $\tilde{Z}(y) = \tilde{H}(y)e^{P(1/y)}$  où

$$\tilde{H}(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-1/2} \end{bmatrix} \tilde{G}(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{h}_2(y) & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C}[[y]])$$

est une série entière satisfaisant à  $\tilde{H}(y) = I_2 + O(y^2)$ . Plus précisément,

$$\tilde{h}_2(y) = e^{-1/2} \tilde{f}_2(x(y)) = -\frac{y^2}{3\sqrt{e}} - \frac{y^4}{3\sqrt{e}} + O(y^5) \in y^2\mathbb{C}[[y]]$$

Le système (5.5) a encore les mêmes matrices de Stokes-Ramis que le système (5.3) et les multiplicateurs de Stokes  $c_0^2$  et  $c_{-\pi}^2$  peuvent être à présent calculés à l'aide

du corollaire 4.5. En effet, le point singulier  $\tau = \frac{1}{2}$  qui engendre la collection de directions anti-Stokes  $(0, -\pi)$  est maintenant de front monomial et la matrice des exposants de monodromie formelle  $L$  est triviale.

Notons  $\tilde{h}(y)$  la première colonne de  $\tilde{H}(y)$  et  $\tilde{h}(t)$  le vecteur colonne correspondant à  $\tilde{h}(y)$  après réduction du rang. D'après (1.2),

$$\tilde{h}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{h}_2(t) \\ 0 \\ \tilde{h}_4(t) \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tilde{h}_2(t) = -\frac{t}{3\sqrt{e}} + O(t^2) \\ \tilde{h}_4(t) = O(t^2) \end{cases}$$

Le terme nul apparaissant à la troisième ligne est dû au fait que le premier coefficient de  $\tilde{h}(y)$  n'admet pas de termes en  $y^{2m+1}$ ,  $m \geq 0$ .

Le système 2-réduit du système (5.5) est défini par

$$2t^2 \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_1(t) & 1 & tT_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & -t & 0 \\ T_2(t) & 0 & T_1(t) & 1-t \end{bmatrix} \mathbf{Y}$$

avec

$$\begin{cases} T_1(t) = -\frac{t(3t-1)}{3\sqrt{e}(t-1)^2} = -\frac{1}{3\sqrt{e}} \sum_{m \geq 1} (2m-3)t^m \\ T_2(t) = -\frac{2t^2}{3\sqrt{e}(t-1)^2} = -\frac{2}{3\sqrt{e}} \sum_{m \geq 2} (m-1)t^m \end{cases}$$

Ainsi, d'après (3.1), les séries formelles  $\tilde{h}_j(t)$  sont entièrement déterminées par les relations

$$2t^2 \frac{d\tilde{h}_2}{dt} - \tilde{h}_2 = T_1(t) \quad 2t^2 \frac{d\tilde{h}_4}{dt} - (1-t)\tilde{h}_4 = T_2(t)$$

et les conditions initiales  $\tilde{h}_j(0) = 0$ . Leurs transformées de Borel  $\hat{h}_j$  sont donc entièrement déterminées par les équations

$$\begin{cases} (2\tau-1)\hat{h}_2 = \hat{T}_1 \\ (2\tau-1)\frac{d\hat{h}_4}{d\tau} + 3\hat{h}_4 = \frac{d\hat{T}_2}{d\tau} \end{cases}, \quad \hat{h}_4(0) = 0$$

où les transformées de Borel  $\hat{T}_j$  des  $T_j$  sont données par

$$\begin{cases} \hat{T}_1(\tau) = -\frac{1}{3\sqrt{e}} \sum_{m \geq 0} \frac{2m-1}{m!} \tau^m = -\frac{2\tau-1}{3} e^{\tau-1/2} \\ \hat{T}_2(\tau) = -\frac{2}{3\sqrt{e}} \sum_{m \geq 1} \frac{\tau^m}{(m-1)!} = -\frac{2\tau}{3} e^{\tau-1/2} \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\hat{h}_2^+ \left( \frac{1}{2} + \tau \right) = -\frac{e^\tau}{3} \quad \hat{h}_4^+ \left( \frac{1}{2} + \tau \right) = \frac{i\sqrt{2}}{12\sqrt{e}} \tau^{-3/2} - \frac{e^\tau}{3}$$

Noter que seul le prolongement analytique  $\widehat{\mathbf{h}}_4^+$  est singulier en  $\tau = \frac{1}{2}$ . La matrice de connexion  $\mathbf{k}_{1/2}^+$  s'écrit alors

$$\mathbf{k}_{1/2}^+ = \begin{bmatrix} 0 & \\ k_2 = 0 & \\ 0 & \\ k_4 = \frac{i\sqrt{2}}{12\sqrt{e}} & \end{bmatrix}$$

Les multiplicateurs de Stokes  $c_0^2$  et  $c_{-\pi}^2$  étant reliés à ces constantes par les formules

$$c_0^2 = 2i\pi k_2 + 2i\pi \frac{e^{\frac{i\pi}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} k_4 \quad c_{-\pi}^2 = 2i\pi k_2 + 2i\pi e^{-i\pi} \frac{e^{\frac{i\pi}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} k_4$$

(cf. corollaire 4.5 avec  $\rho = e^{-i\pi}$ ), nous obtenons finalement

$$\boxed{c_0^2 = -\frac{i}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{e}} \quad c_{-\pi}^2 = \frac{i}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{e}}}$$

Noter que ces valeurs ne sont pas exactement celles que l'on obtient dans [6, ex. V.2], mais leurs opposés. Ceci est simplement dû au fait que le sens de parcours choisi sur le cercle trigonométrique n'est pas le même.

#### ANNEXE A. QUELQUES REMARQUES SUR LES MAJEURS D'EXPONENTIELLES

Nous donnons dans cette annexe quelques remarques sur les majeurs des singularités  $e^{\nabla \dot{q}_\omega(\bar{\rho}^k t^{-1/r})}$  intervenant dans la structure des singularités de  $\widehat{\mathbf{f}}$  (théorème 2.13). Lorsque  $\dot{q}_\omega \not\equiv 0$ , cette singularité induit une singularité irrégulière dont une description précise peut être obtenue à l'aide du théorème d'Écalle.

En effet, l'exponentielle  $\exp(\dot{q}_\omega(\bar{\rho}^k t^{-1/r}))$  étant solution d'une équation différentielle linéaire  $Dy(t) = 0$  à coefficients polynomiaux et de rang  $\leq 1$  à l'origine, elle engendre une micro-solution à l'origine de son équation transformée de Borel  $\widehat{D}\widehat{y}(\tau) = 0$ . La forme des majeurs de la singularité  $e^{\nabla \dot{q}_\omega(\bar{\rho}^k t^{-1/r})}$  résulte alors de la caractérisation de ces micro-solutions à partir des « vraies » solutions de  $\widehat{D}\widehat{y}(\tau) = 0$  (cf. B. Malgrange, [10, p. 40]).

Nous détaillons ci-dessous deux exemples typiques.

##### A.1. Cas d'un monôme.

Dans le cas où  $\dot{q}(1/x)$  est un monôme de la forme  $\alpha/x^\ell$  avec  $\alpha \neq 0$  et  $\ell \in \{1, \dots, r-1\}$ , la méthode citée ci-dessus permet de déterminer la forme générale des majeurs des singularités  $e^{\nabla \dot{q}(t^{-1/r})} = e^{\nabla \alpha t^{-\ell/r}}$ . A titre d'exemple, nous démontrons le résultat suivant :

##### Proposition A.1 (Cas $r = 2$ ).

Soient  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ ,  $\dot{q}(1/x) = \alpha/x$  et  $\phi(x) = \exp(\dot{q}(1/x)) = \exp(\alpha/x)$ . Notons

$$\phi_1(t) = \phi(t^{1/2}) = \exp(\alpha t^{-1/2}) \quad \phi_2(t) = \phi(-t^{1/2}) = \exp(-\alpha t^{-1/2})$$

les deux fonctions obtenues à partir de  $\phi(x)$  par une ramification d'ordre 2.

Pour  $\ell = 1, 2$ , les majeurs des singularités  $\overset{\nabla}{\phi}_\ell$  s'écrivent, modulo les fonctions analytiques à l'origine, sous la forme

$$(A.1) \quad \lambda_{1,\ell} \tau^{-3/2} e^{-\frac{\alpha^2}{4\tau}} + \lambda_{2,\ell} \frac{{}_1F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\alpha^2}{4\tau}\right)}{\tau} e^{-\frac{\alpha^2}{4\tau}}$$

avec  $\lambda_{1,\ell}, \lambda_{2,\ell} \in \mathbb{C}$  convenables.

La fonction  ${}_1F_1(a, b, \tau)$  est la fonction hypergéométrique confluyente de paramètres  $a$  et  $b$ . Elle est entière sur  $\mathbb{C}$  et, par conséquent, la fonction définie en (A.1) est entière sur  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

*Démonstration.* Les fonctions  $\phi_1$  et  $\phi_2$  forment une base de l'espace des solutions de l'équation

$$4t^3 y'' + 6t^2 y' - \alpha^2 y = 0$$

Cette équation étant de rang  $< 1$  à l'origine, le théorème d'Écalle entraîne que les singularités  $\overset{\nabla}{\phi}_1$  et  $\overset{\nabla}{\phi}_2$  forment une base de l'espace  $\mathcal{M}_0$  des micro-solutions à l'origine de l'équation transformée de Borel

$$(A.2) \quad 4\tau^2 \widehat{y}' + (6\tau - \alpha^2) \widehat{y} = 0$$

Noter que  $\mathcal{M}_0$  est un espace vectoriel de dimension 2 alors que l'équation (A.2) est d'ordre 1. Ainsi, suivant [10, p. 40], nous considérons

$$\left( \widehat{y}_1(\tau) = \tau^{-3/2} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4\tau}\right) \right)$$

une base de l'équation (A.2) et

$$\widehat{y}_2(\tau) = \frac{{}_1F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\alpha^2}{4\tau}\right)}{2\tau} e^{-\frac{\alpha^2}{4\tau}}$$

la solution de l'équation

$$4\tau^2 \widehat{y}' + (6\tau - \alpha^2) \widehat{y} = 1$$

obtenue par la méthode de variation de la constante. Les fonctions  $\widehat{y}_1$  et  $\widehat{y}_2$  appartenant à  $\widetilde{\mathcal{O}} \setminus \mathcal{O}$ , l'espace  $\mathcal{M}_0$  est également engendré par les singularités  $\overset{\nabla}{y}_1$  et  $\overset{\nabla}{y}_2$ . En particulier, il existe des constantes  $\lambda_{j,\ell} \in \mathbb{C}$  convenables telles que  $\overset{\nabla}{\phi}_\ell = \lambda_{1,\ell} \overset{\nabla}{y}_1 + \lambda_{2,\ell} \overset{\nabla}{y}_2$ , ce qui termine la démonstration.  $\square$

Noter que pour  $\alpha = \pm 1$ , la proposition A.1 montre en particulier qu'un majeur de la singularité  $\overset{\nabla}{e^{\pm t^{-1/2}}}$  est de la forme

$$\lambda_{\pm 1} \tau^{-3/2} e^{-\frac{1}{4\tau}} + \lambda_{\pm 2} \frac{{}_1F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4\tau}\right)}{\tau} e^{-\frac{1}{4\tau}}$$

Nous retrouvons ici l'exponentielle  $e^{-1/(4\tau)}$  intervenant dans la structure des singularités donnée dans l'exemple 2.1 (attention, il faut effectuer le changement de variable  $\tau \mapsto \tau + \frac{1}{2}$  dans les formules obtenues pour  $\widehat{\mathbf{f}}_2$  et  $\widehat{\mathbf{f}}_4$  pour translater le point  $\frac{1}{2}$  en 0). Noter que la fonction hypergéométrique confluyente  ${}_1F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4\tau}\right)$  n'intervient en revanche pas dans cette structure, ceci du fait de la grande simplicité du système (2.1).

**Remarque A.2.** Des calculs analogues à ceux de la proposition A.1 permettent de traiter également le cas  $r \geq 3$ . En particulier, on peut montrer que, pour  $\ell \in \{1, \dots, r-1\}$  premier avec  $r$ , les majeurs des singularités  $\nabla e^{\alpha t^{-\ell/r}}$  s'expriment, modulo les fonctions analytiques à l'origine, à l'aide de fonctions hypergéométriques confluentes généralisées ([15]).

### A.2. Cas général.

Lorsque  $\dot{q}_\omega$  n'est plus un monôme, la situation devient plus compliquée. En particulier, il ne semble pas que les majeurs des singularités  $\nabla e^{\dot{q}_\omega(\bar{\rho}^k t^{-1/r})}$  s'expriment à l'aide de fonctions liouvilliennes<sup>8</sup> ou hypergéométriques.

Par exemple, considérons le polynôme  $\dot{q}(1/x) = -2/x^2 + 2/x$  et notons

$$\varphi_1(t) = \varphi(t^{1/3}) \quad \varphi_2(t) = \varphi(jt^{1/3}) \quad \varphi_3(t) = \varphi(j^2t^{1/3})$$

les trois fonctions obtenues à partir de  $\varphi(x) = \exp(\dot{q}(1/x))$  par une ramification d'ordre 3 (nous notons  $j$  le nombre complexe  $e^{2i\pi/3}$ ). Ces trois fonctions forment une base de l'espace des solutions de l'équation

$$27t^5y''' + 135t^4y'' + (96t^3 + 72t^2)y' + (32t - 64)y = 0$$

de rang  $< 1$  à l'origine, le théorème d'Écalle entraîne que les singularités  $\nabla \varphi_1$ ,  $\nabla \varphi_2$  et  $\nabla \varphi_3$  forment une base de l'espace  $\mathcal{M}_0$  des micro-solutions à l'origine de l'équation transformée de Borel

$$(A.3) \quad 27\tau^3\hat{y}'' + (135\tau^2 + 72\tau - 64)\hat{y}' + (96\tau + 104)\hat{y} = 0$$

Comme dans la proposition A.1, nous pouvons expliciter une base  $(\nabla y_1, \nabla y_2, \nabla y_3)$  de  $\mathcal{M}_0$  directement à partir des solutions de l'équation (A.3) de telle sorte que  $\nabla \varphi_\ell = \lambda_{1,\ell} \nabla y_1 + \lambda_{2,\ell} \nabla y_2 + \lambda_{3,\ell} \nabla y_3$  avec  $\lambda_{j,\ell} \in \mathbb{C}$  convenables.

Commençons par étudier plus précisément les solutions de l'équation (A.3). En effectuant successivement le changement de variable  $\tau = \frac{4\sqrt{6}}{9\zeta}$  et le changement d'inconnue

$$\hat{y}(\zeta) = \zeta^{8/3} \exp(-\zeta^2 + \zeta\sqrt{6}) \hat{z}(\zeta)$$

l'équation (A.3) devient

$$(A.4) \quad \hat{z}'' + \left( \frac{7}{3\zeta} - 2\zeta + \sqrt{6} \right) \hat{z}' + \left( -\frac{4}{3} + \frac{10\sqrt{6}}{9\zeta} \right) \hat{z} = 0$$

Cette équation est une *équation de Heun bi-confluente de paramètres*  $\alpha = \frac{4}{3}$ ,  $\beta = -\sqrt{6}$ ,  $\gamma = 2$  et  $\delta = \frac{\sqrt{6}}{9}$ <sup>9</sup>. Puisque  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ , elle admet pour base de solutions la fonction de Heun bi-confluente  $N(\frac{4}{3}, -\sqrt{6}, 2, \frac{\sqrt{6}}{9}; \zeta)$  qui est entière sur  $\mathbb{C}$  et la

<sup>8</sup>Rappelons qu'une solution d'une équation est dite liouvillienne si elle est obtenue à partir du corps des coefficients (ici le corps des fractions rationnelles  $\mathbb{C}(\tau)$ ) par une tour d'extensions à l'aide de fonctions algébriques, exponentielles et primitives.

<sup>9</sup>Rappelons (cf. [16, p. 194]) que l'équation de Heun bi-confluente de paramètres  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$  est l'équation d'ordre 2 définie par

$$z'' + \left( \frac{\alpha+1}{\zeta} - 2\zeta - \beta \right) z' + \left( \gamma - \alpha - 2 - \frac{(\alpha+1)\beta + \delta}{2\zeta} \right) z = 0$$

Lorsque  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ , cette équation admet pour base de solutions la *fonction de Heun bi-confluente*  $N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; \zeta)$  de paramètres  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  qui est entière sur  $\mathbb{C}$  et la fonction  $\zeta^{-\alpha} N(-\alpha, \beta, \gamma, \delta; \zeta)$  ([16, p. 204, prop. 3.1.1]).

fonction  $\zeta^{-4/3}N(-\frac{4}{3}, -\sqrt{6}, 2, \frac{\sqrt{6}}{9}; \zeta)$  qui est entière sur  $\tilde{\mathbb{C}}$ . Noter que, compte-tenu des valeurs des quatre paramètres de l'équation (A.4) et de [4, p. 239, prop. 13], ces deux fonctions ne sont pas liouvilliennes (nous sommes ici dans le cas  $\alpha \neq \pm 1$  et  $\pm\alpha \pm \gamma \notin 2\mathbb{Z}^*$ ). En particulier, ceci montre que l'équation (A.4) est irréductible. En outre, ces deux fonctions ne sont pas, non plus, hypergéométriques. En effet, aucune équation hypergéométrique n'est de rang de Katz égal à 2 comme c'est le cas de l'équation (A.4) à l'infini.

Suivant [10, p. 40], une base  $(\overset{\nabla}{y}_1, \overset{\nabla}{y}_2, \overset{\nabla}{y}_3)$  de  $\mathcal{M}_0$  peut être obtenue en considérant les singularités  $\overset{\nabla}{y}_k = \text{can}(\hat{y}_k)$  où

$$\hat{y}_1(\tau) = \tau^{-8/3} \exp\left(-\frac{32}{27\tau^2} + \frac{8}{3\tau}\right) N\left(\frac{4}{3}, -\sqrt{6}, 2, \frac{\sqrt{6}}{9}; \frac{4\sqrt{6}}{9\tau}\right)$$

$$\hat{y}_2(\tau) = \tau^{-4/3} \exp\left(-\frac{32}{27\tau^2} + \frac{8}{3\tau}\right) N\left(-\frac{4}{3}, -\sqrt{6}, 2, \frac{\sqrt{6}}{9}; \frac{4\sqrt{6}}{9\tau}\right)$$

est une base de l'espace des solutions de l'équation (A.3) et où  $\hat{y}_3(\tau)$  est la solution de l'équation

$$27\tau^3 \hat{y}'' + (135\tau^2 + 72\tau - 64)\hat{y}' + (96\tau + 104)\hat{y} = 1$$

obtenue par la méthode de variation des constantes. Ainsi, compte-tenu des résultats précédents, les majeurs des singularités  $\overset{\nabla}{\varphi}_\ell$  s'écrivant, à fonctions analytiques à l'origine près, comme combinaison linéaire des fonctions  $\hat{y}_1, \hat{y}_2$  et  $\hat{y}_3$ , ils ne s'expriment pas à l'aide de fonctions liouvilliennes ou hypergéométriques<sup>10</sup>.

#### RÉFÉRENCES

- [1] W. Balser, W. B. Jurkat, D. A. Lutz, *A general theory of invariants for meromorphic differential equations ; Part I, formal invariants*, Funkcialaj Ekvacioj, **22**, 197 – 221, 1979
- [2] W. Balser, W. B. Jurkat, D. A. Lutz, *On the reduction of connection problems for differential equations with an irregular singular point to ones with only regular singularities*, I. SIAM J. Math. Anal., **12(5)**, 691 – 721, 1981
- [3] P. Deligne, *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Mathematics, **163**, Springer-Verlag, 1970
- [4] A. Duval, M. Loday-Richaud, *Kovacic's algorithm and its application to some families of special functions*, AAECC, **3**, 211 – 246, 1992
- [5] J. Ecalle, *Les fonctions résurgentes, tome III : l'équation du pont et la classification analytique des objets locaux*, Publications Mathématiques d'Orsay, n°85 – 05, 1985
- [6] M. Loday-Richaud, *Calcul des invariants de Birkhoff des systèmes d'ordre deux*, Funkcialaj Ekvacioj, **33**, 161 – 225, 1990
- [7] M. Loday-Richaud, *Rank reduction, normal forms and Stokes matrices*, Expositiones Mathematicae, **19**, 229 – 250, 2001
- [8] M. Loday-Richaud, P. Remy, *Resurgence, Stokes phenomenon and alien derivatives for level-one linear differential systems*, Journal of Differential Equations, **250**, 1591 – 1630, 2011
- [9] D. A. Lutz, R. Schäfke, *Calculating connection coefficients for meromorphic differential equations*, Complex Variables, **34**, 145 – 170, 1997
- [10] B. Malgrange, *Fourier transform and differential equations*, Recent Developments in Quantum Mechanics, A. Boutet de Monvel et al. (eds.), Kluwer Academic Publishers, 33 – 48, 1991

<sup>10</sup>Je remercie ici tout spécialement J.-A. Weil pour m'avoir signalé les solutions de Heun dans l'équation (A.3).

- [11] B. Malgrange, *Introduction aux travaux de J. Ecalle*, L'Enseignement Mathématique, **31**, 261 – 282, 1985
- [12] J. Martinet, J.-P. Ramis, *Théorie de Galois différentielle et resommation*, Computer Algebra and Differential Equations, E. Tournier, éd., Academic Press, 117 – 214, 1989
- [13] J.-P. Ramis, *Filtration de Gevrey sur le groupe de Picard-Vessiot d'une équation différentielle irrégulière*, in P. Deligne, B. Malgrange, J.-P. Ramis, *Singularités irrégulières*, Documents Mathématiques (Paris) (Mathematical Documents (Paris)), **5**, Société Mathématiques de France, Paris, 2007, correspondance et documents (correspondence and documents)
- [14] J.-P. Ramis, *Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires*, Mem. Amer. Math. Soc., **48**, viii+95, 1984
- [15] P. Remy, *Résurgence des systèmes différentiels linéaires et calcul des matrices de Stokes*, Publications du LAREMA, Université d'Angers, **843**, 1 – 408, 2007, <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00351882/fr/>
- [16] A. Ronveaux (éd.), *Heun's differential equations*, Oxford Science Publications, the Clarendon Press Oxford University, New York, 1995, avec les contributions de F. M. Arscott, S. Yu. Slavyanov, D. Schmidt, G. Wolf, P. Maroni et A. Duval
- [17] D. Sauzin, *Resurgent functions and splitting problems*, RIMS Kokyuroku, Kyoto, **1493**, 48 – 117, 2005
- [18] Y. Sibuya, *Linear differential equations in the complex domain : problems of analytic continuation*, Translations of Mathematical Monographs, **82**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990