



**HAL**  
open science

## Module des résidus logarithmiques des courbes planes

Delphine Pol

► **To cite this version:**

| Delphine Pol. Module des résidus logarithmiques des courbes planes. 2014. hal-01074409v1

**HAL Id: hal-01074409**

**<https://hal.science/hal-01074409v1>**

Preprint submitted on 16 Oct 2014 (v1), last revised 4 Oct 2015 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Module des résidus logarithmiques des courbes planes

Delphine POL

8 octobre 2014

## Résumé

Dans son article fondamental sur les formes différentielles logarithmiques, K.Saito introduit la notion de résidus de formes logarithmiques. Notre objectif est d'étudier le module des résidus logarithmiques des courbes planes, qui sont des diviseurs libres. Le résultat principal est une propriété de symétrie entre les multi-valuations du module des résidus et les multi-valuations de l'idéal jacobien, qui généralise la propriété de symétrie du semigroupe d'une courbe plane prouvée par F.Delgado de la Mata. On utilise ce résultat pour étudier le comportement du module des résidus dans une déformation à nombre de Milnor constant d'une courbe plane.

## 1 Introduction

Soit  $D$  une hypersurface de  $\mathbb{C}^n$ . Dans son article [Sai80], K.Saito étudie les champs de vecteurs logarithmiques, c'est-à-dire les champs de vecteurs tangents à  $D$  en ses points lisses. Ils forment un module, dont le dual est le module des 1-formes logarithmiques : ce sont les 1-formes méromorphes à pôles simples le long de  $D$  et dont la différentielle est aussi à pôles simples le long de  $D$ . Dans le cas où l'un ou l'autre de ces modules est un  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ -module libre, le diviseur  $D$  est dit libre. C'est le cas par exemple des diviseurs à croisements normaux, mais aussi des courbes planes.

A une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$  à singularité isolée en  $z_0$  on associe son résidu, défini comme étant le coefficient de  $(z - z_0)^{-1}$  dans son développement en série de Laurent au voisinage de  $z_0$ . K.Saito généralise cette notion au cas des formes logarithmiques : si  $f$  est une équation locale réduite de  $D$  autour d'un point  $p \in D$ , le résidu d'une 1-forme logarithmique est défini comme étant "le coefficient de  $\frac{df}{f}$ " dans l'anneau des fractions de l'anneau du diviseur, dans un sens que l'on précisera dans la partie 2. En particulier, si la forme est holomorphe, son résidu est nul.

Le module  $\mathcal{R}_D$  des résidus des 1-formes logarithmiques sur  $D$  possède d'intéressantes propriétés concernant la normalisation de  $D$ . Tout d'abord, K.Saito montre que ce module contient toujours les fonctions régulières de la normalisée, à savoir les fonctions faiblement holomorphes sur  $D$ . Dans le cas où l'égalité a lieu, cela traduit des propriétés géométriques du diviseur, ainsi que le montrent les propriétés équivalentes montrées en plusieurs étapes par K.Saito en 1980 [Sai80], Lê Dung Trang et K.Saito en 1984 [TS84], puis M.Granger et M.Schulze en 2011 [GS14].

Lorsque le diviseur  $D$  considéré n'est pas irréductible, il est aisé de voir qu'une forme logarithmique sur une composante est logarithmique sur le diviseur tout entier. En particulier, cela donne des informations au niveau du module des résidus. L'anneau des fractions de l'anneau  $\mathcal{O}_D$  de la courbe est en fait la somme directe des anneaux des fractions de chacune des composantes irréductibles de  $D$ . Une conséquence est l'inclusion de la somme directe des modules des résidus des composantes de  $D$  dans le module des résidus de  $D$ . Dans [GS14] M.Granger et M.Schulze montrent que le module des résidus et l'idéal jacobien sont duaux l'un de l'autre dans le cas d'un diviseur libre, et on se propose ici de déterminer le dual de la somme directe des modules des résidus des composantes irréductibles. (voir Corollaire 3.7)

Néanmoins, connaître les résidus des branches ne suffit pas en général à déterminer entièrement le module des résidus de l'union : il manque les résidus des formes logarithmiques de  $D$  qui ont des pôles sur plusieurs composantes de  $D$ .

Quelles propriétés du module des résidus peut-on déduire de la dualité donnée par [GS14] dans le cas des diviseurs libres ? On apporte ici une réponse dans le cas des courbes planes.

Les courbes planes sont des diviseurs libres et ce sont les seuls diviseurs libres à singularités isolées. En effet, d'après [Ale88], le lieu singulier des diviseurs libres singuliers est de codimension 1 dans l'hypersurface. Un des avantages des courbes planes est que la dimension du quotient  $\mathcal{R}_D/\mathcal{O}_{\tilde{D}}$  est finie. On montre qu'elle est égale à  $\tau - \delta$  (voir proposition 2.15), où  $\tilde{D}$  est la normalisation de  $D$ ,  $\tau$  est le nombre de Tjurina et  $\delta$  est la dimension du quotient  $\mathcal{O}_{\tilde{D}}/\mathcal{O}_D$ .

A une courbe plane est associé un semigroupe : si la courbe plane est constituée de  $p$  branches irréductibles, sa normalisation fournit un paramétrage de chacune de ses branches. Le semigroupe de la courbe est l'ensemble des  $p$ -uplets de valuations des non-diviseurs de zéro de l'anneau de la courbe, déterminés à partir du paramétrage. Le dual sur  $\mathcal{O}_D$  de l'anneau  $\mathcal{O}_{\tilde{D}}$  de la normalisée est un idéal à la fois de  $\mathcal{O}_D$  et de  $\mathcal{O}_{\tilde{D}}$ , il s'agit de l'idéal conducteur de la courbe. Il est engendré sur  $\mathcal{O}_{\tilde{D}}$  par un élément minimal  $(t^{\gamma_1}, \dots, t^{\gamma_p})$ . Le  $p$ -uplet  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)$  est appelé le conducteur de  $\mathcal{O}_{\tilde{D}}$  dans  $\mathcal{O}_D$ .

Dans son article [DdlM88], F.Delgado de la Mata met en évidence une propriété de symétrie du semigroupe de  $\mathcal{O}_D$  pour les courbes Gorenstein, donc en particulier pour les courbes planes (voir théorème 4.7). Cette symétrie s'observe facilement dans le cas irréductible :  $v \in \mathbb{N}$  est la valuation d'un élément de  $\mathcal{O}_D$  si et seulement si  $\gamma - v - 1$  ne l'est pas, ce qui vient de la définition du conducteur et de l'égalité  $\delta = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\tilde{D}}/\mathcal{O}_D = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_D/\mathcal{C}_D$ , voir proposition 2.13.

Mais on peut définir de la même façon l'ensemble des multi-valuations de n'importe quel idéal fractionnaire de la courbe, dont font partie l'idéal jacobien et son dual, le module des résidus. La question à laquelle on répond ici est le lien entre les multi-valuations de l'idéal jacobien et les multi-valuations du module des résidus. La réponse prend la forme d'une généralisation à un idéal fractionnaire de la symétrie prouvée par Delgado dans le cas de l'anneau de la courbe. Pour la preuve, on étend les objets définis par Delgado à un idéal fractionnaire. On commence par montrer que les multi-valuations du module des résidus sont incluses dans un ensemble défini grâce au semigroupe de l'idéal jacobien. L'argument qui permet de conclure que c'est exactement cet ensemble est un argument de dimension, qui utilise la méthode combinatoire décrite par Delgado pour calculer la dimension de certains quotients à partir des multi-valuations.

En application, dans la dernière partie, on utilise ce résultat de symétrie pour étudier quelques propriétés du module des résidus dans une déformation à nombre de Milnor constant de la courbe.

Le résultat de symétrie permet de regarder l'idéal jacobien de la courbe sans nécessairement calculer une base des formes logarithmiques. Les questions auxquelles on cherche à répondre concernent les propriétés de la stratification de la base de la déformation par les multi-valuations du module des résidus. On montre qu'elle raffine la stratification par le nombre de Tjurina, elle est finie, semi-analytique, mais en revanche ne vérifie pas la propriété de frontière (exemple 5.22, qui est la reprise d'un exemple étudié dans [BGM92] au sujet de la  $b$ -fonction)

**Remerciements.** Je tiens à remercier Michel Granger pour m'avoir fait découvrir ce sujet et pour les nombreux échanges que nous avons eus à cette occasion, ainsi que pour ses remarques et commentaires qui m'ont été bien utiles.

## 2 Quelques définitions et résultats préliminaires

### 2.1 Résidus logarithmiques

On note  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$  le faisceau des fonctions holomorphes sur  $\mathbb{C}^n$ ,  $\mathbb{C}\{\underline{x}\} = \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$  les germes de fonctions holomorphes à l'origine, et  $\text{Der}_{\mathbb{C}^n}$  le faisceau des champs de vecteurs holomorphes de  $\mathbb{C}^n$ .

On rappelle ici des définitions et résultats donnés dans [Sai80] :

**Définition 2.1.** Soit  $U \subseteq \mathbb{C}^n$  un ouvert, et  $D \subseteq U$  une hypersurface de  $U$ , définie par une équation réduite  $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U)$ .

- Un champ de vecteurs  $\delta \in \text{Der}_{\mathbb{C}^n}(V)$  pour  $V \subseteq U$  ouvert est appelé champ de vecteur logarithmique si pour tout point  $p \in V$ , on a une égalité de germes  $\delta(f)_p = \alpha f_p$  avec  $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, p}$ . On note  $\text{Der}(-\log D)$  le faisceau des champs de vecteurs logarithmiques de  $D$ .
- Une  $q$ -forme méromorphe  $\omega$  sur  $V \subseteq U$  à pôles le long de  $D$  est dite logarithmique si  $f\omega$  et  $f d\omega$  sont holomorphes. On note  $\Omega^q(\log D)$  le faisceau des  $q$ -formes logarithmiques sur  $D$ .

**Proposition 2.2.**

- Les faisceaux  $\text{Der}(-\log D)$  et  $\Omega^q(\log D)$  sont des faisceaux de  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ -modules cohérents.
- Pour tout  $p \in U$ ,  $\text{Der}_p(-\log D)$  et  $\Omega_p^1(\log D)$  sont des  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, p}$ -modules réflexifs duaux l'un de l'autre.

Définissons à présent la notion de diviseur libre :

**Définition 2.3.** Avec les notations précédentes, on dit que  $D$  est un diviseur libre en  $p \in U$  si  $\text{Der}_p(-\log D)$  (ou de façon équivalente  $\Omega_p^1(\log D)$ ) est un  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, p}$ -module libre. Le rang de ces modules est alors  $n$ .

**Proposition 2.4 (Critère de Saito).**  $(D, 0)$  est un diviseur libre en  $p$  si et seulement si il existe une famille  $(\delta_1, \dots, \delta_n)$  de  $\text{Der}_p(-\log D)$ ,  $\delta_j = \sum a_{ij} \partial_{x_i}$ , telle que  $\det((a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}) = uf$ , où  $u$  est inversible.

Dans la suite, on considère le germe en  $0 \in \mathbb{C}^n$  d'un diviseur. Tant qu'il n'y a pas de confusion possible, on notera  $\text{Der}(-\log D)$  pour  $\text{Der}_0(-\log D)$ ,  $\Omega^q(\log D)$  pour  $\Omega_0^q(\log D)$  etc...

Pour définir la notion de résidu logarithmique, nous aurons besoin de la caractérisation suivante des formes logarithmiques :

**Proposition 2.5.** Une  $q$ -forme méromorphe  $\omega$  à pôles le long de  $D$  est logarithmique si et seulement si il existe un  $g \in \mathbb{C}\{\underline{x}\}$ , qui n'est pas un diviseur de zéro de  $\mathcal{O}_D := \mathbb{C}\{\underline{x}\}/(f)$ , une  $(q-1)$ -forme holomorphe  $\xi$  et une  $q$ -forme holomorphe  $\eta$  tels que :

$$g\omega = \frac{df}{f} \wedge \xi + \eta \quad (1)$$

**Définition 2.6.** On définit le résidu  $\text{res}(\omega)$  de  $\omega \in \Omega^1(\log D)$  par  $\text{res}(\omega) = \frac{\xi}{g} \in Q(\mathcal{O}_D)$ , où  $\xi$  et  $g$  sont donnés par l'écriture (1), et  $Q(\mathcal{O}_D)$  est l'anneau des fractions de  $\mathcal{O}_D$ .

Dans [Sai80], K.Saito montre les résultats suivants :

**Proposition 2.7.**

- Le résidu ne dépend pas du choix de l'écriture (1).
- $\text{res}(\omega) = 0$  si et seulement si  $\omega$  est holomorphe.
- Le module des résidus  $\mathcal{R}_D = \{\text{res}(\omega), \omega \in \Omega^1(\log D)\} \subseteq Q(\mathcal{O}_D)$  est un  $\mathcal{O}_D$ -module de type fini.
- On a l'inclusion  $\mathcal{O}_{\tilde{D}} \subseteq \mathcal{R}_D$ , où  $\mathcal{O}_{\tilde{D}}$  est l'anneau de la normalisée  $\tilde{D}$  de  $D$ .

On aura aussi besoin de la notion d'idéal fractionnaire :

**Définition 2.8.** *Un sous  $\mathcal{O}_D$ -module  $I \subseteq Q(\mathcal{O}_D) = Q(\mathcal{O}_{\tilde{D}})$  est un idéal fractionnaire sur  $D$  s'il contient un non diviseur de zéro de  $\mathcal{O}_D$ .*

Pour un idéal fractionnaire  $I \subseteq Q(\mathcal{O}_D)$  on note  $I^\vee = \text{Hom}_{\mathcal{O}_D}(I, \mathcal{O}_D)$ . On a l'égalité  $I^\vee = \{m \in Q(\mathcal{O}_D), mI \subseteq \mathcal{O}_D\}$ .

Dans toute la suite, on note  $\mathcal{J}_D$  l'idéal de  $\mathcal{O}_D$  engendré par les dérivées partielles d'ordre 1 de  $f$ .

Le résultat suivant est montré dans [GS14] :

**Proposition 2.9.** *Pour tout diviseur  $D$ ,  $\mathcal{J}_D^\vee = \mathcal{R}_D$ .*

*Si de plus  $D$  est un diviseur libre,  $\mathcal{J}_D = \mathcal{R}_D^\vee$ .*

## 2.2 Le cas des courbes

### 2.2.1 Générateurs

Soit  $D$  un germe de courbe plane à l'origine, défini par une équation réduite  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ . Les courbes planes sont des diviseurs libres (voir [Sai80]).

Soit  $\delta_i = \alpha_i \partial_x + \beta_i \partial_y$ ,  $i = 1, 2$  une base des champs de vecteurs logarithmiques. D'après le critère de Saito 2.4, le déterminant de la matrice dite de Saito  $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$  est égale à  $uf$ , où  $u$  est une unité de  $\mathbb{C}\{x, y\}$ . Quitte à remplacer  $\delta_1$  par  $\frac{1}{u}\delta_1$ , on peut supposer  $u = 1$ . Une base des 1-formes logarithmique est alors donnée par

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\beta_2 dx - \alpha_2 dy}{f} \\ \omega_2 &= \frac{-\beta_1 dx + \alpha_1 dy}{f} \end{aligned}$$

Une conséquence du critère de Saito est que  $f$  appartient à l'idéal de  $\mathbb{C}\{x, y\}$  engendré par  $\alpha_2$  et  $\beta_2$ . Les résidus  $\text{res}(\omega_1)$  et  $\text{res}(\omega_2)$  engendrent sur  $\mathcal{O}_D$  le module des résidus de  $D$ . Après un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que  $f'_x$  et  $f'_y$  ne sont pas des diviseurs de zéro, et dans ce cas,  $\text{res}(\omega_1) = \frac{\beta_2}{uf'_x} = \frac{-\alpha_2}{uf'_y}$  et  $\text{res}(\omega_2) = \frac{-\beta_1}{uf'_x} = \frac{\alpha_1}{uf'_y}$ .

**Exemple 2.10.** Soit  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$  un polynôme quasi-homogène de poids  $(a, b)$ . Alors les champs de vecteurs :

$$\begin{cases} \chi = ax\partial_x + by\partial_y \\ \delta = f'_y\partial_x - f'_x\partial_y \end{cases}$$

forment une base des champs logarithmiques de  $D$  en 0 par le critère de Saito.

On en déduit une base de  $\Omega^1(\log D)$  :

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{-f'_x dx - f'_y dy}{f} = -\frac{df}{f} \\ \omega_2 = \frac{-by dx + ax dy}{f} \end{cases}$$

Une famille génératrice sur  $\mathcal{O}_D$  du module des résidus est donc  $\left(1, \frac{-by}{f'_x}\right)$ . (En supposant toujours que  $f'_x$  n'est pas un diviseur de zéro).

Le module des résidus d'une courbe quasi-homogène est donc engendré par 1 et un autre résidu  $\rho$ . En fait, cela caractérise les courbes quasi-homogènes :

**Proposition 2.11.** *Une courbe  $D$  est analytiquement équivalente (i.e. à biholomorphisme près à l'origine) à une courbe quasi-homogène si et seulement si il existe  $\rho \in Q(\mathcal{O}_D)$  tel que  $(1, \rho)$  engendre  $\mathcal{R}_D$ .*

**Preuve.** Il s'agit d'un cas particulier de la proposition 5.2 de [GS14]. □

## 2.2.2 Dimension

La proposition 2.7 assure que l'on a l'inclusion  $\mathcal{O}_{\tilde{D}} \subseteq \mathcal{R}_D$ , où  $\tilde{D}$  est la normalisation de la courbe plane  $D$ . En particulier,  $\mathcal{O}_{\tilde{D}} = \mathbb{C}\{t_1\} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\{t_p\}$  où  $p$  est le nombre de composantes irréductibles de  $D$  à l'origine.

Nous allons déterminer la dimension du quotient  $\mathcal{R}_D/\mathcal{O}_{\tilde{D}}$ .

**Proposition 2.12.** *L'anneau  $\mathcal{O}_D$  d'une courbe plane  $D$  est de Gorenstein.*

(voir [dJP00], Corollaire 5.2.9)

**Proposition 2.13.** *Soit  $D$  un germe de courbe plane. Pour tous idéaux fractionnaires  $I, J \subseteq \mathcal{O}_D$ , on a :*

$$\dim_{\mathbb{C}}(I/J) = \dim_{\mathbb{C}}(J^{\vee}/I^{\vee}) \quad (2)$$

(voir [dJP00], preuve du lemme 5.2.8)

**Définition 2.14.**

- Le delta-invariant de  $D$  est par définition  $\delta = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\tilde{D}}/\mathcal{O}_D$ .
- Le nombre de Tjurina de  $D$  est  $\tau = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_D/(f, f'_x, f'_y)$ .
- Le nombre de Milnor de  $D$  est  $\mu = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_D/(f'_x, f'_y)$ .

**Proposition 2.15.** *Dans le cas d'une courbe plane  $D$  on a :*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{R}_D/\mathcal{O}_{\tilde{D}} = \tau - \delta \quad (3)$$

**Preuve.** On utilise la proposition 2.13 et la proposition 2.9

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{R}_D/\mathcal{O}_{\tilde{D}} &= \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{R}_D/\mathcal{O}_D - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\tilde{D}}/\mathcal{O}_D \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_D^{\vee}/\mathcal{R}_D^{\vee} - \delta \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_D/\mathcal{I}_D - \delta \\ &= \tau - \delta \end{aligned}$$

□

**Proposition 2.16.** *Le nombre de Milnor et  $\delta$  sont reliés par :*

$$\mu = 2\delta - p + 1$$

où  $p$  est le nombre de composantes irréductibles à l'origine de  $D$ .

### 3 Module des résidus et résidus des composantes irréductibles

Les résultats suivants ne sont pas spécifiques au cas des courbes. Ils permettent de voir l'influence des composantes d'une hypersurface sur le module des résidus.

Soit  $f = f_1.f_2 \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$  une équation *réduite* de germe d'hypersurface de  $\mathbb{C}^n$ . On note  $D, D_1, D_2$  les diviseurs définis respectivement par  $f, f_1, f_2$ .

**Proposition 3.1.**

$$\Omega^1(\log D_1) + \Omega^1(\log D_2) \subseteq \Omega^1(\log D)$$

**Preuve.** Soit  $\omega$  une 1-forme logarithmique sur  $D_1$ . Alors  $f_1\omega$  et  $f_1d\omega$  sont holomorphes, donc  $f_1f_2\omega$  et  $f_1f_2d\omega$  aussi.  $\square$

**Proposition 3.2.** *Soit  $\omega$  une 1-forme logarithmique sur  $D$ . Son résidu est nul sur  $D_2$  (resp  $D_1$ ) si et seulement si  $\omega$  est logarithmique sur  $D_1$  (resp  $D_2$ ).*

**Preuve.** Il existe  $g, \xi, \eta$  tels que l'on ait l'écriture (1). Le résidu est donné par le couple  $(\frac{\xi}{g}|_{D_1}, \frac{\xi}{g}|_{D_2})$ . Il est nul sur  $D_2$  si et seulement si  $f_2$  divise  $\xi$ , ce qui revient à dire que  $\omega$  logarithmique sur  $D_1$ .  $\square$

**Remarque 3.3.** En particulier, si  $\omega$  est une forme logarithmique sur  $D_1$  de résidu (vu dans l'anneau des fractions  $Q(\mathcal{O}_{D_1})$ )  $\rho$ , alors son résidu comme forme logarithmique sur  $D$  est  $(\rho, 0)$ . Par conséquent, on a une injection du module des résidus  $\mathcal{R}_i$  de  $D_i$  dans  $\mathcal{R}$ , et  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  sont en somme directe.

On a les suites exactes :

$$0 \longrightarrow \Omega^1 \longrightarrow \Omega^1(\log D) \rightarrow \mathcal{R}_D \longrightarrow 0 \quad (4)$$

$$0 \longrightarrow \Omega^1 \longrightarrow \Omega^1(\log D_1) + \Omega^1(\log D_2) \rightarrow \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2 \longrightarrow 0 \quad (5)$$

Et donc

$$\frac{\mathcal{R}_D}{\mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2} \simeq \frac{\Omega^1(\log D)}{\Omega^1(\log D_1) + \Omega^1(\log D_2)}$$

Le module des résidus est donc constitué de résidus provenant des composantes de  $D$ , mais aussi de résidus ayant des pôles sur toutes les composantes.

On note  $I^\vee = \text{Hom}_{\mathcal{O}_D}(I, \mathcal{O}_D)$  pour  $I \subset Q(\mathcal{O}_D)$  idéal fractionnaire.

On note  $\mathcal{R}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$  les modules des résidus de respectivement  $D, D_1, D_2$ .

On a :  $\mathcal{O}_{\tilde{D}} = \mathcal{O}_{\tilde{D}_1} \oplus \mathcal{O}_{\tilde{D}_2}$ . En particulier,  $Q(\mathcal{O}_D) = Q(\mathcal{O}_{\tilde{D}}) = Q(\mathcal{O}_{D_1}) \oplus Q(\mathcal{O}_{D_2})$ , ce qui permet d'écrire les éléments de  $Q(\mathcal{O}_D)$  sous la forme d'un couple  $(m_1, m_2), m_1 \in Q(\mathcal{O}_{D_1}), m_2 \in Q(\mathcal{O}_{D_2})$ .

**Proposition 3.4.** *Soient  $\mathcal{O}_{\tilde{D}_1} \subseteq I_1 \subseteq Q(\mathcal{O}_{D_1})$  et  $\mathcal{O}_{\tilde{D}_2} \subseteq I_2 \subseteq Q(\mathcal{O}_{D_2})$  deux idéaux fractionnaires.*

*Alors  $(I_1 \oplus I_2)^\vee = f_1 I_2^\vee \oplus f_2 I_1^\vee$*

**Preuve.** On a la suite d'inclusions :

$$(I_1 \oplus I_2)^\vee \subseteq \mathcal{O}_D \subseteq \mathcal{O}_D \subseteq \mathcal{O}_{\tilde{D}} \subseteq I_1 \oplus I_2 \quad (\subseteq Q(\mathcal{O}_D)) \quad (6)$$

Le dual de  $I_1 \oplus I_2$  est donc dans  $\mathcal{O}_D$ . Ce dual est donné par :

$$(I_1 \oplus I_2)^\vee = \{m \in \mathcal{O}_D, m(I_1 \oplus I_2) \subseteq \mathcal{O}_D\}$$

Soit  $m \in (I_1 \oplus I_2)^\vee$ .

- Commençons par montrer que  $m \in (f_1, f_2)$ .

Soit  $\alpha \in \mathbb{C}\{\underline{x}\}$ . Alors  $m.(\alpha|_{D_1}, 1|_{D_2}) = (m|_{D_1}.\alpha|_{D_1}, m|_{D_2}) \in \mathcal{O}_D$ . Il existe donc un  $m_\alpha \in \mathbb{C}\{\underline{x}\}$  tel que  $m_\alpha|_{D_1} = (m.\alpha)|_{D_1}$  et  $m_\alpha|_{D_2} = m|_{D_2}$ .

On en déduit que dans  $\mathbb{C}\{\underline{x}\}$ ,  $m_\alpha = \alpha.m + \beta_\alpha.f_1$  et  $m_\alpha = m + \gamma_\alpha.f_2$  pour des  $\beta_\alpha, \gamma_\alpha \in \mathbb{C}\{\underline{x}\}$ . En particulier, pour  $\alpha$  dans l'idéal maximal de  $\mathbb{C}\{\underline{x}\}$ ,

$$m = \frac{\beta_\alpha}{1 - \alpha}.f_1 - \frac{\gamma_\alpha}{1 - \alpha}.f_2$$

et donc  $m \in (f_1, f_2)$ .

- Montrons maintenant que  $(I_1 \oplus I_2)^\vee \subseteq f_1 I_2^\vee \oplus f_2 I_1^\vee$ .

Il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}\{\underline{x}\}$  tels que  $m = \alpha f_1 + \beta f_2$ .

On a pour tout  $\rho \in I_1$  :

$$m.(\rho, 0) = ((\beta.f_2.\rho)|_{D_1}, 0) = (g_\rho|_{D_1}, g_\rho|_{D_2})$$

pour un  $g_\rho \in \mathbb{C}\{\underline{x}\}$ . Comme la restriction à  $D_2$  est nulle, on en déduit que  $f_2$  divise  $g_\rho$ . On a donc pour un  $h_\rho \in \mathbb{C}\{\underline{x}\}$  :  $g_\rho|_{D_1} = (f_2.h_\rho)|_{D_1} = (f_2.\beta.\rho)|_{D_1}$ , et comme de plus  $f_2$  n'est pas un diviseur de zéro de  $\mathcal{O}_{D_1}$ , on a  $\beta.\rho = h_\rho$  dans  $\mathcal{O}_{D_1}$ . Ceci étant vrai pour tout  $\rho \in I_1$ , on en déduit que dans  $Q(\mathcal{O}_{D_1})$ ,  $\beta \in (I_1)^\vee$ . De même on a  $\alpha \in (I_2)^\vee$  dans  $Q(\mathcal{O}_{D_2})$ .

Donc  $m \in f_1.I_2^\vee \oplus f_2.I_1^\vee$  dans  $\mathcal{O}_D$ .

- Montrons que  $f_1.I_2^\vee \oplus f_2.I_1^\vee \subseteq (I_1 \oplus I_2)^\vee$ .

Soit  $m = \alpha.f_1 + \beta.f_2 \in f_1.I_2^\vee \oplus f_2.I_1^\vee$ , et  $(\rho_1, \rho_2) \in I_1 \oplus I_2$ . (en particulier,  $\rho_1 \in I_1, \rho_2 \in I_2$ )

Alors  $m.(\rho_1, \rho_2) = (f_2.\beta.\rho_1, f_1.\alpha.\rho_2)$ . Comme  $\alpha \in I_2^\vee$ ,  $\alpha\rho_2$  est holomorphe, de même pour  $\beta\rho_1$ .

Il existe donc  $g_1$  et  $g_2$  holomorphes dont la restriction à  $D_1$  de  $g_1$  donne  $\beta\rho_1$  et la restriction à  $D_2$  de  $g_2$  donne  $\alpha\rho_2$ . On pose  $G = g_1.f_2 + g_2.f_1$ . Alors  $G|_{D_1} = f_2.\beta.\rho_1$  et  $G|_{D_2} = f_1.\alpha.\rho_2$ .

Par conséquent,  $m.(\rho_1, \rho_2) \in \mathcal{O}_D$ .

D'où le résultat attendu.  $\square$

**Corollaire 3.5.** *En particulier, si  $\mathcal{R}_1^\vee = \mathcal{I}_{D_1}$  et  $\mathcal{R}_2^\vee = \mathcal{I}_{D_2}$ , (ce qui est notamment le cas quand  $D_1$  et  $D_2$  sont des diviseurs libres) alors le dual de  $\mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2$  est  $f_1 \mathcal{I}_2 + f_2 \mathcal{I}_1$ , où  $\mathcal{I}_i$  est l'idéal de  $\mathcal{O}_D$  engendré par les dérivées partielles de  $f_i$ ,  $i = 1, 2$ .*

**Corollaire 3.6.** *Soit  $f = f_1 \cdots f_p$  une équation réduite d'hypersurface à l'origine.*

*Soient  $\mathcal{O}_{\tilde{D}_1} \subseteq I_1 \subseteq Q(\mathcal{O}_{D_1}), \dots, \mathcal{O}_{\tilde{D}_p} \subseteq I_p \subseteq Q(\mathcal{O}_{D_p})$  des idéaux fractionnaires.*

*Alors le dual de  $I_1 \oplus \cdots \oplus I_p$  est :*

$$(I_1 \oplus \cdots \oplus I_p)^\vee = \sum_{i=1}^p f_1 \cdots \hat{f}_i \cdots f_p I_i^\vee$$

**Preuve.** Par récurrence, à partir de la proposition 3.4 en l'appliquant au couple  $I_1, I_2 \oplus \cdots \oplus I_p$ .  $\square$

**Corollaire 3.7.** *Supposons que pour tous  $j \in \{1, \dots, p\}$ ,  $\mathcal{R}_j^\vee = \mathcal{I}_{D_j}$ . Alors :*

$$(\mathcal{R}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}_k)^\vee = \sum_{i=1}^k f_1 \cdots \hat{f}_i \cdots f_k \mathcal{I}_i$$

Retournons dans le cas des courbes. Dans ce cas nous avons :



**Proposition 3.8.** *Soit  $D = D_1 \cup D_2$  une courbe plane. Alors :*

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{R}_D}{\mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{f_1 \mathcal{J}_2 \oplus f_2 \mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_D} \quad (7)$$

Et de plus :

$$\frac{f_1 \mathcal{J}_2 \oplus f_2 \mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_D} \simeq \frac{\text{Der}}{\text{Der}(-\log D_1) + \text{Der}(-\log D_2)} \quad (8)$$

**Preuve.** La première égalité est obtenue en dualisant grâce à la proposition 2.13, comme  $D$  est une courbe plane.

Pour l'isomorphisme (8), il s'agit d'un cas particulier de la proposition 2.5 de [AF13].  $\square$

**Remarque 3.9.** Dans [Sch13] et [Fab13] la notion de diviseur "splayed" est développée. Un diviseur  $(D, 0) \subseteq (\mathbb{C}^n, 0)$  est dit *splayed* s'il existe un système de coordonnées  $(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n)$  et une équation réduite  $f \in \mathbb{C}\{y_1, \dots, y_n\}$  de  $D$  tels que :

$$f(y_1, \dots, y_n) = f_1(y_1, \dots, y_k) f_2(y_{k+1} \dots y_n)$$

où les  $f_i$  ne sont pas forcément irréductibles.

Dans [Fab13], E.Faber montre qu'un diviseur est splayed si et seulement si on a l'égalité suivante :  $\mathcal{J}_D = f_2 \mathcal{J}_1 + f_1 \mathcal{J}_2$ . Le corollaire 3.5 permet donc de caractériser en termes de résidus les diviseurs splayed dans le cas où  $D_1, D_2$  et  $D$  sont libres : dans ce cas,  $D$  est splayed si et seulement si  $\mathcal{R}_D = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2$ . En fait, l'hypothèse  $D_1$  et  $D_2$  libres est superflue, voir [Sch13], proposition 5.1, où seul  $D$  est supposé libre.

Pour les courbes planes, être splayed revient à être à croisements normaux. En particulier, dès que la courbe plane n'est pas à croisements normaux, l'inclusion de  $\mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2$  dans  $\mathcal{R}_D$  est stricte.

## 4 Propriété de symétrie des multi-valuations des résidus

### 4.1 Cas d'une courbe irréductible

Soit  $D$  un germe de courbe plane *irréductible*. On note  $\tilde{D}$  sa normalisation, d'anneau  $\mathbb{C}\{t\}$ , et  $\mathcal{C}_D = \mathcal{O}_D^\vee$  son idéal conducteur.

Soit  $g \in Q(\mathcal{O}_D)$ . On note  $\text{val}(g) \in \mathbb{Z}$  la valuation de  $g \neq 0$ , et si  $I \subseteq Q(\mathcal{O}_D)$ , on note  $\text{val}(I) = \{\text{val}(g) ; g \in I, g \neq 0\} \subseteq \mathbb{Z}$ . On a  $\text{val}(\mathcal{O}_{\tilde{D}}) = \mathbb{N}$  et  $\text{val}(\mathcal{C}_D) = c + \mathbb{N}$ , pour un  $c \in \mathbb{N}$ . Cet élément  $c$  est appelé le *conducteur* de  $D$ , et c'est le plus petit élément vérifiant la propriété  $c + \mathbb{N} \subseteq \text{val}(\mathcal{O}_D)$ .

On a alors la propriété suivante de symétrie :

**Proposition 4.1.** *Soit  $D$  une courbe plane irréductible, et  $I \subseteq \mathcal{O}_D$  un idéal fractionnaire. Alors :*

$$v \in \text{val}(I^\vee) \iff c - v - 1 \notin \text{val}(I) \quad (9)$$

**Preuve.** Soit  $v \in \text{val}(I^\vee)$ . Supposons que  $c - v - 1 \in \text{val}(I)$ . Cela signifie qu'il existe  $g \in I^\vee$  de valuation  $v$  et  $h \in I$  de valuation  $c - v - 1$ . Comme  $gh \in \mathcal{O}_D$  est de valuation  $c - 1$ , on en déduit que  $c - 1 \in \text{val}(\mathcal{O}_D)$ , ce qui n'est pas vrai par définition du conducteur  $c$ . Donc on a l'implication  $v \in \text{val}(I^\vee) \Rightarrow c - v - 1 \notin \text{val}(I)$ .

Pour l'autre sens de l'équivalence, on utilise la proposition 2.13 :  $\dim_{\mathbb{C}} I^\vee / \mathcal{O}_D = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_D / I < \infty$ . Pour cela, on montre l'équivalence suivante :

$$v \in \text{val}(I^\vee) \cap (\text{val}(\mathcal{O}_D))^c \iff c - v - 1 \in \text{val}(\mathcal{O}_D) \cap (\text{val}(I))^c \quad (10)$$

La propriété suivante est vérifiée pour les courbes planes : on a l'équivalence  $v \notin \text{val}(\mathcal{O}_D) \iff c - v - 1 \in \text{val}(\mathcal{O}_D)$ , (voir [dJP00], exercice 5.2.25). Par conséquent, en utilisant le premier point,

$$v \in \text{val}(I^\vee) \cap (\text{val}(\mathcal{O}_D))^c \Rightarrow c - v - 1 \in \text{val}(\mathcal{O}_D) \cap (\text{val}(I))^c$$

De plus,  $\dim_{\mathbb{C}} I^\vee / \mathcal{O}_D = \text{Card}(\text{val}(I^\vee) \cap (\text{val}(\mathcal{O}_D))^c)$  et  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_D / I = \text{Card}(\text{val}(\mathcal{O}_D) \cap (\text{val}(I))^c)$ . D'où l'équivalence (10).

Pour avoir l'équivalence (9), il suffit de remarquer que :

$$v \in \text{val}(I^\vee) \cap \text{val}(\mathcal{O}_D) = \text{val}(\mathcal{O}_D) \iff c - v - 1 \in (\text{val}(\mathcal{O}_D))^c \cap (\text{val}(I))^c = (\text{val}(\mathcal{O}_D))^c$$

D'où le résultat. □

Rappelons que d'après le théorème 2.9,  $\mathcal{I}_D^\vee = \mathcal{R}_D$ . On a donc :

**Corollaire 4.2.** *Soit  $D$  une courbe plane irréductible. Alors :*

$$v \in \text{val}(\mathcal{R}_D) \iff c - v - 1 \notin \text{val}(\mathcal{I}_D)$$

## 4.2 Notations et premières propriétés des multi-valuations dans le cas non irréductible

Dans le cas d'une courbe plane irréductible, les valuations des résidus vérifient donc une propriété de symétrie par rapport aux valuations de l'idéal jacobien. On se propose ici de montrer qu'une symétrie analogue s'observe dans le cas réductible.

Dans le cas d'une courbe plane réductible  $f = f_1 \cdots f_p$  réduite, on définit la multi-valuation d'une fonction, qui n'est plus un nombre mais un  $p$ -uplet, la normalisation ayant pour anneau  $\mathcal{O}_{\bar{D}} = \mathbb{C}\{t_1\} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\{t_p\}$ .

On note  $\text{val}_j(g)$  la valuation de  $g \in Q(\mathcal{O}_{D_j}), g \neq 0$ , et  $\text{val}(g) = (\text{val}_1(g), \dots, \text{val}_p(g))$  la multi-valuation d'un non diviseur de zéro  $g$  de  $Q(\mathcal{O}_D)$ .

On pose pour  $I \subseteq Q(\mathcal{O}_D)$ ,  $\text{val}(I) = \{\text{val}(g) ; g \in I, g \text{ non diviseur de zéro}\}$ .

On étend la multi-valuation aux diviseurs de zéro en posant  $\text{val}_i(0) = \infty$ .

Dans [DdlM88], F.Delgado de la Mata montre un résultat de symétrie des multi-valuations de  $\mathcal{O}_D$  dans le cas à plusieurs branches généralisant le cas irréductible. On se propose ici de l'étendre au cas du module des résidus.

Commençons par quelques notations inspirées par l'article de Delgado :

Soit  $\mathcal{M}$  un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^p$ . Soit  $v \in \mathbb{Z}^p$ . On note pour  $1 \leq i \leq p$  :

$$\Delta_i(v, \mathcal{M}) = \{\alpha \in \mathcal{M} ; \alpha_i = v_i \text{ et } \forall j \neq i, \alpha_j > v_j\}$$

On pose  $\Delta(v, \mathcal{M}) = \bigcup_{i=1}^p \Delta_i(v, \mathcal{M})$ .

Pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^p$ , on note  $\alpha \geq \beta$  si pour tout  $1 \leq i \leq p$ ,  $\alpha_i \geq \beta_i$ . En particulier, on appelle multi-valuation positive un  $v \in \mathbb{Z}^p$  vérifiant  $v \geq 0$ , et multi-valuation négative un  $v \in \mathbb{Z}^p$  vérifiant  $v \leq 0$ .

De plus, si  $v \in \mathbb{Z}^p$ , on note  $v - 1 = (v_1 - 1, \dots, v_p - 1)$ .

Le cas  $\mathcal{M} = \text{val}(\mathcal{O}_D)$  est étudié en détails dans [DdlM88]. On peut étendre les propriétés 1.1.2 et 1.1.3 de [DdlM88] :

**Proposition 4.3.** *Soit  $I \subseteq Q(\mathcal{O}_D)$  un idéal fractionnaire de  $\mathcal{O}_D$ . Soient  $v, v' \in \text{val}(I)$ .*

*Alors  $\inf(v, v') := (\min(v_1, v'_1), \dots, \min(v_p, v'_p)) \in \text{val}(I)$ .*

**Proposition 4.4.** *Si  $v, v' \in \text{val}(I)$  vérifient  $v_i = v'_i$  pour un  $i$ , alors il existe  $v'' \in \text{val}(I)$  tel que :*

1.  $v_i'' > v_i$
2. Si  $v_j \neq v_j'$ , alors  $v_j'' = \min(v_j, v_j')$
3. Sinon,  $v_j'' \geq \min(v_j, v_j')$

**Remarque 4.5.** La propriété 4.3 traduit simplement le fait que la valuation sur une branche d'une combinaison linéaire générale de deux éléments de  $I$  est la plus petite des valuations, et la propriété 4.4 le fait que si deux éléments de  $I$  ont même valuation sur une composante, une combinaison linéaire convenable permet de faire monter cette valuation, mais on ne peut pas prédire ce qui va se passer sur les autres branches où l'égalité a lieu.

**Définition 4.6.** On note  $\mathcal{C}_D \subseteq \mathcal{O}_D$  l'idéal conducteur de  $\mathcal{O}_D$ . C'est à la fois un  $\mathcal{O}_D$  et un  $\mathcal{O}_{\tilde{D}}$  module, qui vérifie :  $\mathcal{C}_D = \text{Ann}_{\mathcal{O}_D} \mathcal{O}_{\tilde{D}}/\mathcal{O}_D = \text{Ann}_{\mathcal{O}_{\tilde{D}}} \mathcal{O}_{\tilde{D}}/\mathcal{O}_D$ . Il existe  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)$  tel que  $t^\gamma$  engendre  $\mathcal{C}_D$  sur  $\mathcal{O}_{\tilde{D}}$ . Alors  $\text{val}(\mathcal{C}_D) = \gamma + \mathbb{N}^p$ . On appelle  $\gamma$  le conducteur de  $\mathcal{O}_D$ .

De même, on appelle idéal conducteur de l'idéal jacobien  $\mathcal{J}_D$  l'idéal  $\mathcal{C}' = \text{Ann}_{\mathcal{O}_D} \mathcal{O}_{\tilde{D}}/\mathcal{J}_D = \text{Ann}_{\mathcal{O}_{\tilde{D}}} \mathcal{O}_{\tilde{D}}/\mathcal{J}_D$ . La dimension de  $\mathcal{O}_{\tilde{D}}/\mathcal{J}_D$  étant finie, il existe  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_p) \in \mathbb{Z}^p$  tel que  $t^\nu$  engendre  $\mathcal{C}'$  sur  $\mathcal{O}_{\tilde{D}}$ , et donc  $\text{val}(\mathcal{C}') = \nu + \mathbb{N}^p$ . On appelle  $\nu$  le conducteur de  $\mathcal{J}_D$ .

Le théorème principal que l'on se propose de généraliser ici est le suivant :

**THÉORÈME 4.7 ([DdlM88], 2.8).** Si  $\mathcal{O}_D$  est l'anneau d'une courbe Gorenstein, alors la propriété suivante de symétrie est vérifiée :

Pour tout  $v \in \mathbb{Z}^p$ ,  $v \in \text{val}(\mathcal{O}_D)$  si et seulement si  $\Delta(\gamma - v - 1, \mathcal{O}_D) = \emptyset$ .

Nous allons montrer que nous avons une propriété de symétrie analogue entre les multi-valuations du module des résidus et les multi-valuations de l'idéal jacobien.

Le premier sens de l'implication reste vrai sans travail supplémentaire :

**Proposition 4.8.** Soit  $v \in \mathbb{Z}^p$ . Alors :

$$v \in \text{val}(\mathcal{R}_D) \Rightarrow \Delta(\gamma - v - 1, \mathcal{J}_D) = \emptyset$$

**Preuve.** Soit  $(v_1, \dots, v_p) \in \text{val}(\mathcal{R}_D)$ . Supposons que  $\Delta(\gamma - v - 1, \mathcal{J}_D) \neq \emptyset$ . Quitte à changer la numérotation, on peut supposer que  $\Delta_1(\gamma - v - 1, \mathcal{J}_D) \neq \emptyset$ , ce qui signifie qu'il existe un élément de la forme  $(\gamma_1 - v_1 - 1, w_2, \dots, w_p) \in \text{val}(\mathcal{J}_D)$ , avec  $w_j > \gamma_j - v_j - 1$  pour  $j \geq 2$ . Par dualité, on en déduit donc que  $(\gamma_1 - 1, w_2 + v_2, \dots, w_p + v_p) \in \text{val}(\mathcal{O}_D)$ , où  $w_j + v_j \geq \gamma_j$ , ce qui nous fournit un élément de  $\Delta_1(\gamma - 1, \mathcal{O}_D)$ .

Or, d'après le corollaire 1.9 de [DdlM88],  $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $\Delta_i(\gamma - 1, \mathcal{O}_D) = \emptyset$ . Ce qui nous donne une contradiction, et donc  $\bigcup_{i=1}^p \Delta_i(\gamma - v - 1, \mathcal{J}_D) = \emptyset$ .  $\square$

On pose  $\mathcal{V} = \{\gamma - \alpha - 1 ; \Delta(\alpha, \mathcal{J}_D) = \emptyset\} \subseteq \mathbb{Z}^p$ .

**Remarque 4.9.** Cet ensemble contient les multi-valuations de  $\mathcal{R}_D$ , mais pourrait *a priori* être plus gros. En particulier, il n'est pas clair que  $\mathcal{V}$  soit l'ensemble des multi-valuations d'un module. Dans la suite, nous allons montrer qu'aucun "intrus" (i.e. élément de  $\mathcal{V} \setminus \text{val}(\mathcal{R}_D)$ ) ne peut se glisser parmi les  $p$ -uplets de  $\mathcal{V}$ .

Dans le cas irréductible, la dimension était l'argument permettant de montrer la réciproque. Ce sera encore un argument de dimension qui va nous permettre de conclure, mais il est plus subtil à mettre en place. Avant de regarder cela plus en détails, on étudie un exemple, et on donne un critère permettant de reconnaître les multi-valuations des résidus des branches.

**Exemple 4.10.** On prend  $f_1 = x^5 - y^6 + x^3y^4$ , et  $f_2 = x^3 - y^4$ ,  $f = f_1f_2$ . Un paramétrage est donné par :

$$\begin{cases} x_1(t_1) = t_1^6 - \frac{1}{5}t_1^{14} + \text{termes de valuation} > 14 \\ y_1(t_1) = t_1^5 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_2(t_2) = t_2^4 \\ y_2(t_2) = t_2^3 \end{cases}$$

On a donc  $\text{val}(x) = (6, 4)$  et  $\text{val}(y) = (5, 3)$ . La multiplicité d'intersection de  $f_1$  avec  $f_2$  est  $(f_1.f_2) = 18$ . On vérifie que  $\text{val}(f'_x) = (42, 26)$  et  $\text{val}(f'_y) = (43, 27)$ . On en déduit tous les translatés obtenus par la multiplication par  $x^i y^j$ . De plus, la non-quasi-homogénéité de  $f_1$  fait apparaître la multi-valuation  $\text{val}(6x f'_x + 5y f'_y) = (56, 30)$ . On complète avec les multi-valuations déduites de celles-ci à partir des propriétés 4.3 et 4.4. On obtient alors la figure 1, où les croix représentent les multi-valuations de  $\mathcal{J}_D$ .

Pour vérifier qu'aucune multi-valuation n'a été oubliée, notons que  $\text{val}_2(f'_x) = \text{val}_2(f_1) + \text{val}_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)$  et  $\text{val}_2(f'_y) = \text{val}_2(f_1) + \text{val}_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)$ , et comme  $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 3x^2$  et  $\frac{\partial f_2}{\partial y} = -4y^3$ , on peut vérifier que  $\text{val}_2(\alpha f'_x + \beta f'_y) \neq \inf(\text{val}_2(\alpha f'_x), \text{val}_2(\beta f'_y))$  si et seulement si  $\alpha \partial_x + \beta \partial_y \in \text{Der}(-\log D_2)$ . Comme  $\text{Der}(-\log D_2)$  est connu (voir exemple 2.10), on peut faire les calculs, qui ne donnent pas de nouvelles multi-valuations.

De même, en notant  $f_h = x^5 - y^6$  la partie quasi-homogène de  $f_1$ , et  $\text{Der}(-\log D_h)$  les champs logarithmiques de  $f_h = 0$ , on a :  $\text{val}_1(\alpha f'_x + \beta f'_y) \neq \inf(\text{val}_1(\alpha f'_x), \text{val}_1(\beta f'_y))$  si et seulement si  $\alpha \partial_x + \beta \partial_y \in \text{Der}(-\log D_h)$ . On vérifie de même que cela ne donne pas de multi-valuations supplémentaires. On a donc bien déterminé le semigroupe de  $\mathcal{J}_D$ .

On représente ci-dessous par des cercles les points vérifiant  $\Delta(v, \mathcal{J}_D) = \emptyset$ .

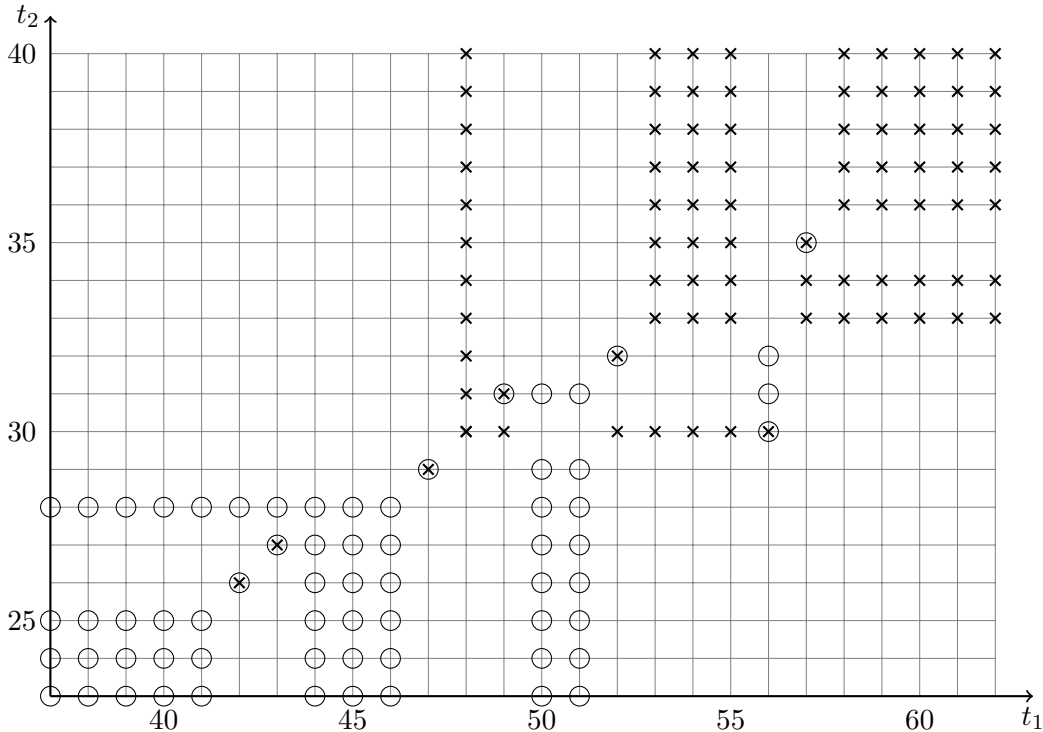


FIGURE 1 – Semigroupe de  $\mathcal{J}_D$

D'autre part, le conducteur du semigroupe de la courbe est  $\gamma = (38, 24)$  (voir proposition 4.11). On obtient par symétrie un ensemble de multi-valuations "potentielles" de  $\mathcal{R}_D$  :

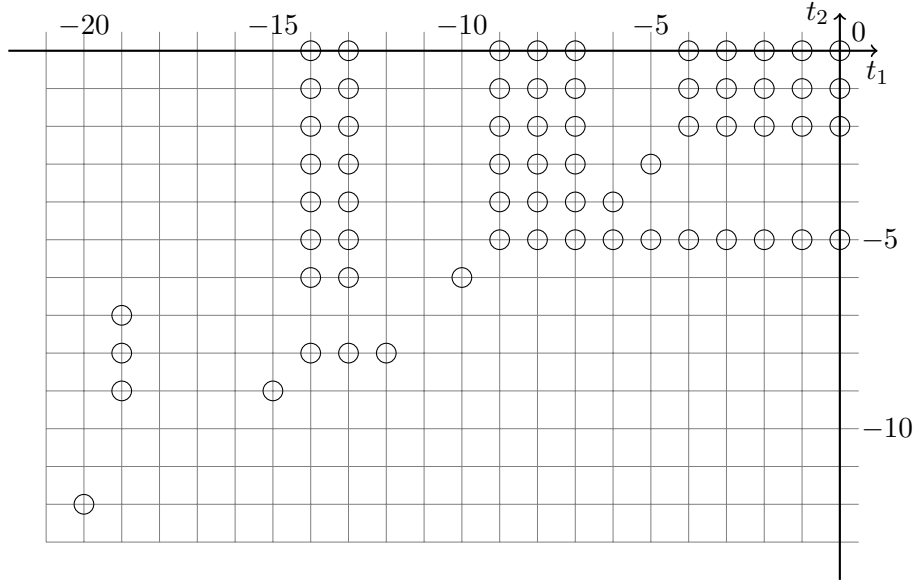


FIGURE 2 – Ensemble  $\mathcal{V}$  des multi-valuations potentielles de  $\mathcal{R}_D$

On notera en particulier que les  $(v_1, 0)$  et  $(0, v_2)$  sont exactement les résidus d'une part de  $D_1$ , d'autre part de  $D_2$ , et le produit cartésien qui en découle est l'ensemble des multi-valuations négatives des multi-valuations de  $\mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2$ .

Ce n'est en fait pas spécifique à cet exemple, comme nous allons le voir.

Nous aurons besoin du théorème suivant permet de relier les conducteurs des composantes irréductibles au conducteur de la courbe  $D$  (voir [DdlM87], théorème (2.7)) :

**Proposition 4.11.** *Soit  $f = f_1 \cdots f_p$  l'équation réduite d'une courbe plane, où les  $f_i$  sont irréductibles. On note  $D_i$  la courbe plane définie par  $f_i$ , et  $c_i$  son conducteur. Alors le conducteur de  $D$  est*

$$\gamma = \left( c_1 + \sum_{i=2}^p \text{val}_1(f_i), \dots, c_p + \sum_{i=1}^{p-1} \text{val}_p(f_i) \right)$$

Ce résultat va nous servir pour prouver le résultat attendu :

**Proposition 4.12.** *Soit  $f = f_1 \cdots f_p$  une équation réduite de courbe plane, les  $f_i$  irréductibles.*

*Soient  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$  des sous-ensembles de  $\mathbb{Z}$ . On suppose que  $\Gamma_j \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$ .*

*Si le produit cartésien  $\Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_p \subseteq \mathcal{V}$  alors  $\Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_p \subseteq \text{val}(\mathcal{R}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}_p)$*

**Preuve.** On notera que  $\text{val}(\mathcal{R}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}_p) = \text{val}(\mathcal{R}_1) \times \cdots \times \text{val}(\mathcal{R}_p)$ , et donc il suffit de montrer que tout  $0 > v_j \in \Gamma_j$  est dans  $\text{val}(\mathcal{R}_j)$ , les positifs y étant par l'inclusion de  $\mathcal{O}_{\tilde{D}_j}$  dans  $\mathcal{R}_j$ . D'après la proposition 4.2, cela revient à montrer que  $c_j \leq c_j - v_j - 1 \notin \text{val}(\mathcal{J}_j)$ . Sans nuire à la généralité, nous allons considérer  $0 > v_1 \in \Gamma_1$ . On pose  $w_1 = c_1 - v_1 - 1$ .

Soit  $(n_1, \dots, n_p) \in \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_p \cap \mathbb{N}^p$  (existe par hypothèse).

Alors comme  $\Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_p \subseteq \mathcal{V}$ ,  $\Delta(\gamma_1 - v_1 - 1, \gamma_2 - n_2 - 1, \dots, \gamma_p - n_p - 1, \mathcal{J}_D) = \emptyset$ , et  $\gamma_i - n_i - 1 < \gamma_i$ , donc cela implique que  $\gamma_1 - v_1 - 1 \notin \text{val}_1(\mathcal{J}_D)$ . (Rappelons que  $\mathcal{J}_D \subseteq \mathcal{C}_D$ , et donc si  $\gamma_1 - v_1 - 1 \in \text{val}_1(\mathcal{J}_D)$  il existe pour  $j \geq 2$  des  $w_j \geq \gamma_j$  tels que  $(\gamma_1 - v_1 - 1, w_2, \dots, w_p) \in \text{val}(\mathcal{J}_D)$  et donc  $\Delta(\gamma - v - 1, \mathcal{J}_D) \neq \emptyset$ ). Il suffit de voir que cette dernière condition implique que  $c_1 \leq c_1 - v_1 - 1 \notin \text{val}_1(\mathcal{J}_1)$ .

Remarquons que  $\frac{\partial f}{\partial x} = f_2 \cdots f_p \frac{\partial f_1}{\partial x} + \cdots + f_1 \cdots f_{p-1} \frac{\partial f_p}{\partial x}$  donne, en restriction à  $D_1$ ,  $f_2 \cdots f_p \frac{\partial f_1}{\partial x}$ , et idem pour  $\frac{\partial f}{\partial y}|_{D_1} = f_2 \cdots f_p \frac{\partial f_1}{\partial y}$ . Par conséquent,  $\text{val}_1(f_2) + \cdots + \text{val}_1(f_p) + \text{val}_1(\mathcal{J}_1) \subseteq \text{val}_1(\mathcal{J}_D)$ . En passant aux complémentaires :

$$\text{val}_1(\mathcal{J}_D)^c \subseteq \text{val}_1(f_2) + \cdots + \text{val}_1(f_p) + (\text{val}(\mathcal{J}_1))^c$$

D'après la proposition 4.11, on a  $\gamma_1 = c_1 + \text{val}_1(f_2) + \cdots + \text{val}_1(f_p)$  et donc la condition  $\gamma_1 - v_1 - 1 \notin \text{val}_1(\mathcal{J}_D)$  implique  $c_1 - v_1 - 1 \in (\text{val}_1(\mathcal{J}_1))^c$ . Et donc par la proposition 4.2,  $v_1 \in \text{val}_1(\mathcal{R}_1)$ .  $\square$

Pour terminer cette partie, signalons le résultat suivant qui donne l'influence des champs de vecteurs logarithmiques des branches sur les multi-valuations de l'idéal jacobien :

**Proposition 4.13.** *Si  $(v_1 + \mathbb{N}, v_2, \dots, v_p) \subseteq \text{val } \mathcal{J}_D$ , il existe un  $g \in \mathcal{J}_D$  nul sur  $D_1$  et de multi-valuation  $(v_2, \dots, v_p)$  sur  $D_2 \cup \cdots \cup D_p$ .*

**Preuve.** Rappelons que  $\mathcal{C}'$  désigne l'idéal conducteur de l'idéal jacobien,  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_p)$  désigne le conducteur de l'idéal jacobien, et que  $\text{val}(\mathcal{C}') = \nu + \mathbb{N}^p \subseteq \text{val}(\mathcal{J}_D)$ . (voir définition 4.6)

Soit  $h \in \mathcal{J}_D$  tel que  $\text{val}(h) = (v'_1, v_2, \dots, v_p)$  avec  $v'_1 > \nu_1$ . Alors  $h|_{D_1} = \sum_{j \geq v'_1} a_j t_1^j$ . On choisit  $(v'_2, \dots, v'_p) \in \mathbb{Z}^{p-1}$  tels que  $\forall i \in \{2, \dots, p\}, v'_i > \max(v_i, \nu_i)$ . On considère alors :

$$g := h - \sum_{j \geq v'_1} a_j \left( t_1^j, t_2^{v'_2+j}, \dots, t_p^{v'_p+j} \right)$$

C'est alors un élément de  $\mathcal{J}_D$  qui est nul sur  $D_1$  et a la multi-valuation souhaitée sur  $D_2 \cup \cdots \cup D_p$ . En effet, par définition de  $\nu$  et  $\mathcal{C}'$ , on a  $\mathcal{C}' = (t_1^{\nu_1} \mathbb{C}\{t_1\}, \dots, t_p^{\nu_p} \mathbb{C}\{t_p\})$ . Par conséquent, pour tout  $j \geq v'_1, a_j(t_1^j, t_2^{v'_2+j}, \dots, t_p^{v'_p+j}) \in \mathcal{C}'$ , et comme  $\sum_{j \geq v'_1} a_j t_1^j$  converge, les sommes  $t_i^{v'_i} \sum_{j \geq v'_1} a_j t_i^j$  aussi, ce qui assure que  $g$  est dans  $\mathcal{J}_D$ .  $\square$

**Corollaire 4.14.** *Soit  $(v_2, \dots, v_p) \in \mathbb{N}^{p-1}$ . Il existe  $v_1 \in \mathbb{N}$  tel que  $(v_1 + \mathbb{N}, v_2, \dots, v_p) \subseteq \text{val } \mathcal{J}_D$  si et seulement si il existe  $\delta \in \text{Der}(-\log D_1)$  tel que pour  $j \geq 2$ ,  $\text{val}_j(\delta(f_j)) = v_j - \sum_{i \neq j} \text{val}_j(f_i)$ .*

**Preuve.** L'implication  $\Leftarrow$  est claire : si  $\delta \in \text{Der}(-\log D_1)$  alors

$$\delta(f) = (0, f_1 f_3 \cdots f_p \delta(f_2), \dots, f_1 \cdots f_{p-1} \delta(f_p))$$

Pour le sens  $\Rightarrow$ , la proposition précédente nous donne  $g \in \mathcal{J}_D$  tel que  $\text{val}(g) = (\infty, v_2, \dots, v_p)$ . Comme  $g \in \mathcal{J}_D$ ,  $g = a f'_x + b f'_y$  et donc  $a \partial_x + b \partial_y \in \text{Der}(-\log D_1)$ .  $\square$

### 4.3 Multi-valuations et dimension

Dans [DdlM88] est décrite une manière algorithmique de déterminer la dimension du quotient  $\mathcal{O}_D/\mathcal{C}_D$ . (Qui n'est autre que  $\delta$  dans notre cas, les courbes planes étant Gorenstein).

Plus précisément :

Soit  $I \subseteq Q(\mathcal{O}_D)$  un idéal fractionnaire de type fini sur  $\mathcal{O}_D$  et  $\alpha \in \mathbb{Z}^p$ . On pose  $\ell(\alpha, I) = \dim_{\mathbb{C}} I/\{g \in I, \text{val}(g) \geq \alpha\}$ . On a  $\ell(\alpha, I) < \infty$ .

On note  $(e_1, \dots, e_p)$  la base canonique de  $\mathbb{Z}^p$ . On pose pour un ensemble  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{Z}^p$  et  $v \in \mathbb{Z}^p$   $\Lambda_i(v, \mathcal{M}) = \{\alpha \in \mathcal{M}, \alpha_i = v_i \text{ et } \forall j \neq i, \alpha_j \geq v_j\}$ . (C'est-à-dire les éléments de  $\mathcal{M}$  qui sont dans une face du cadran au-dessus de  $v$ )

On peut étendre la proposition 1.11 de [DdlM88] au cas d'un idéal fractionnaire :

**Proposition 4.15.** *Soit  $I \subseteq Q(\mathcal{O}_D)$  un idéal fractionnaire de type fini sur  $\mathcal{O}_D$ . Pour tout  $\alpha \in \mathbb{Z}^p$ ,  $\ell(\alpha + e_i, I) - \ell(\alpha, I) \in \{0, 1\}$  et  $\ell(\alpha + e_i, I) = \ell(\alpha, I) + 1$  si et seulement si  $\Lambda_i(\alpha, \text{val}(I)) \neq \emptyset$ .*

**Remarque 4.16.** Cette proposition nous offre un moyen combinatoire de lire la dimension à partir des multi-valuations : par exemple, pour déterminer  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_D/\mathcal{C}_D$ , il suffit de construire une suite finie  $(\alpha^{(j)})_{1 \leq j \leq n}$  telle que  $\alpha^{(0)} = 0$ , et pour tout  $j$ , il existe  $i \in \{1, \dots, p\}$  tel que  $\alpha^{(j+1)} = \alpha^{(j)} + e_i$ , et aboutissant à  $\alpha^{(n)} = \gamma$ . Alors par la proposition 4.15,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_D/\mathcal{C}_D = \ell(\gamma, \text{val}(\mathcal{O}_D)) = \text{Card} \left( \{j ; j < n, \Lambda_i(\alpha^{(j)}, \mathcal{O}_D) \neq \emptyset, \text{ où } \alpha^{(j+1)} = \alpha^{(j)} + e_i\} \right)$$

On aurait bien sûr exactement la même chose avec  $\mathcal{I}_D$  sur  $\mathcal{C}'$ , en faisant démarrer la suite à  $\gamma$  et en la finissant à  $\nu$  (voir définition 4.6 pour les notations), mais aussi pour  $\mathcal{R}_D$  sur  $\mathcal{O}_{\tilde{D}}$ . Notons qu'en revanche, on ne peut pas utiliser cette méthode pour calculer directement la dimension du quotient  $\mathcal{C}_D/\mathcal{I}_D$ , les multi-valuations de ce dernier n'étant pas un cadran.

L'idée de ce qui va suivre est la suivante : rappelons que  $\mathcal{V}$  désigne notre ensemble de multi-valuations "potentielles" du module des résidus, et notre objectif est de montrer qu'il n'y a pas d'intrus, c'est-à-dire que  $\mathcal{V} = \text{val}(\mathcal{R}_D)$ . On a déjà montré que  $\text{val}(\mathcal{R}_D) \subseteq \mathcal{V}$  (voir 4.8).

La première étape permet de relier les dimensions de  $\mathcal{R}_D/\mathcal{O}_{\tilde{D}}$  et  $\mathcal{I}_D/\mathcal{C}'$  grâce à la dualité de Gorenstein.

La deuxième étape consiste à montrer que s'il y a des intrus, alors il y en a forcément un dont toutes ses coordonnées sont inférieures ou égales à 0.

La troisième étape sera de voir que si l'on se donne une suite de la forme décrite dans 4.16, et qui passe par notre intrus, le décompte décrit dans la remarque précédente donne un résultat strictement plus grand que la dimension de  $\mathcal{R}_D/\mathcal{O}_{\tilde{D}}$ .

La quatrième étape consiste à relier cette suite à une suite permettant de calculer  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{I}_D/\mathcal{C}'$ , ce qui permettra d'aboutir au résultat :  $\mathcal{V} = \text{val}(\mathcal{R}_D)$ .

### Première étape

**Proposition 4.17.** *On a :*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{R}_D/\mathcal{O}_{\tilde{D}} = \sum_{i=1}^p (\nu_i - \gamma_i) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{I}_D/\mathcal{C}'$$

**Preuve.** On a :  $\sum_{i=1}^p (\nu_i - \gamma_i) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C}_D/\mathcal{C}' = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C}_D/\mathcal{I}_D + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{I}_D/\mathcal{C}'$ .

Et par dualité, l'anneau  $\mathcal{O}_D$  étant Gorenstein,  $\sum_{i=1}^p (\nu_i - \gamma_i) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{R}_D/\mathcal{O}_{\tilde{D}} + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{I}_D/\mathcal{C}' \square$

### Deuxième étape

Nous allons montrer que s'il y a des intrus dans  $\mathcal{V}$ , il y en a forcément un dans le cadran négatif. Pour cela, nous aurons besoin du résultat suivant, analogue à la proposition 4.3 :

**Proposition 4.18.** *Soit  $w, w' \in \mathcal{V}$ . Alors  $\inf(w, w') \in \mathcal{V}$ .*

**Preuve.** On pose  $v = \gamma - w - 1$  et  $v' = \gamma - w' - 1$ ,  $v'' = \gamma - \inf(w, w') - 1 = \max(v, v')$ . Par définition de  $\mathcal{V}$ , on a  $\Delta(v, \mathcal{I}_D) = \emptyset$  et  $\Delta(v', \mathcal{I}_D) = \emptyset$ . Supposons que  $\Delta(v'', \mathcal{I}_D) \neq \emptyset$ . Il existe donc  $i$  et  $\alpha \in \text{val}(\mathcal{I}_D)$  tels que  $\alpha \in \Delta_i(v'', \mathcal{I}_D)$ . Alors  $\alpha_i \in \{v_i, v'_i\}$  et  $\alpha_j > \max(v_j, v'_j)$  pour  $i \neq j$ . Sans nuire à la généralité, on peut supposer que  $\alpha_i = v_i$ . Mais alors  $\alpha \in \Delta(v, \mathcal{I}_D)$ , ce qui est contradictoire. Donc  $\Delta(v'', \mathcal{I}_D) = \emptyset$ , et  $\inf(w, w') \in \mathcal{V}$ .  $\square$

**Lemme 4.19.** *Si  $\mathcal{V} \neq \text{val}(\mathcal{R}_D)$ , il existe un intrus  $w \in \mathcal{V} \setminus \text{val}(\mathcal{R}_D)$  tel que toutes ses coordonnées soient négatives ou nulles.*

**Preuve.** Soit  $w \in \mathcal{V} \setminus \text{val}(\mathcal{R}_D)$ .

Alors  $\inf(w, 0) \in \mathcal{V}$  par la propriété précédente, vu que  $0 \in \text{val}(\mathcal{R}_D)$ . Mais  $w = \inf(w, 0) + \alpha$ , avec  $\alpha \geq 0$ , donc  $\alpha \in \text{val}(\mathcal{O}_{\bar{D}}) \subseteq \text{val}(\mathcal{R}_D)$ . Comme  $w \notin \text{val}(\mathcal{R}_D)$ ,  $\inf(w, 0) \notin \text{val}(\mathcal{R}_D)$ , et a toutes ses coordonnées négatives ou nulles, ce qui prouve le lemme.  $\square$

**Proposition 4.20.** *Supposons que  $\mathcal{V} \neq \text{val}(\mathcal{R}_D)$ .*

*Soit alors par la proposition précédente  $w^{(0)} \in \mathcal{V} \setminus \text{val}(\mathcal{R}_D)$  tel que  $w^{(0)} \leq 0$ . Alors il existe  $j \in \{1, \dots, p\}$  tel que  $\Lambda_j(w^{(0)}, \text{val}(\mathcal{R}_D)) = \emptyset$  et de plus  $w_j^{(0)} < 0$ .*

**Preuve.** Si tous les  $\Lambda_i(w^{(0)}, \text{val}(\mathcal{R}_D)) \neq \emptyset$ , alors pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$  il existe  $\alpha^{(i)} \in \text{val}(\mathcal{R}_D)$  tel que  $\alpha_i^{(i)} = w_i^{(0)}$  et  $\alpha_j^{(i)} \geq w_j^{(0)}$ . Par conséquent, d'après la proposition 4.3,  $\inf(\alpha^{(i)}, w^{(0)}) = w^{(0)} \in \text{val}(\mathcal{R}_D)$ , ce qui est contradictoire. Ce qui nous donne l'existence d'un  $\Lambda_j(w^{(0)}, \text{val}(\mathcal{R}_D)) = \emptyset$ . Le fait que  $w_j^{(0)} < 0$  est immédiat car si  $w_j^{(0)} = 0$ , alors  $0 \in \Lambda_j(w^{(0)}, \text{val}(\mathcal{R}_D))$ , qui est donc non vide.  $\square$

### Troisième étape

Pour cette étape, on suppose que  $\mathcal{V} \neq \text{val}(\mathcal{R}_D)$  et on se donne  $w^{(0)} \in \mathcal{V} \setminus \text{val}(\mathcal{R}_D)$  vérifiant  $w^{(0)} \leq 0$ . Pour fixer les idées, on suppose que c'est  $\Lambda_p(w^{(0)}, \text{val}(\mathcal{R}_D))$  qui est vide. Nous allons choisir une suite convenable qui passe par  $w^{(0)}$ .

Considérons la suite  $(\alpha^{(j)})_{0 \leq j \leq n_0}$ , où  $n_0 = \sum \nu_i - \gamma_i$ , de la forme 4.16 définie par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \underbrace{\gamma - \nu}_{=\alpha^{(0)}} & \xrightarrow{(+e_1) \bullet} & \underbrace{(w_1^{(0)}, \gamma_2 - \nu_2, \dots, \gamma_p - \nu_p)}_{=\alpha^{(n_1)}} & \xrightarrow{(+e_2) \bullet} & \dots & \xrightarrow{(+e_{p-1}) \bullet} & \underbrace{(w_1^{(0)}, \dots, w_{p-1}^{(0)}, \gamma_p - \nu_p)}_{=\alpha^{(n_{p-1})}} \\ & & & & & & \\ & \xrightarrow{(+e_p) \bullet} & \underbrace{(w_1^{(0)}, \dots, w_{p-1}^{(0)}, 0)}_{=\alpha^{(n_p)}} & \xrightarrow{(+e_{p-1}) \bullet} & \underbrace{(w_1^{(0)}, \dots, w_{p-2}^{(0)}, 0, 0)}_{=\alpha^{(n_{p+1})}} & \xrightarrow{(+e_{p-2}) \bullet} & \dots & \xrightarrow{(+e_1) \bullet} & \underbrace{(0, \dots, 0)}_{=\alpha^{(n_{2p-1})}} \end{array}$$

où  $n_{2p-1} = n_0$ .

Plus précisément : la première étape de la suite consiste à ajouter  $e_1$  autant de fois que nécessaire pour arriver à  $(w_1^{(0)}, \gamma_2 - \nu_2, \dots, \gamma_p - \nu_p)$ . Ainsi,  $\alpha^{(j+1)} = \alpha^{(j)} + e_1$  pour  $j < w_1^{(0)} - \gamma_1 + \nu_1$ , et ainsi de suite pour les étapes suivantes. Chaque terme de la suite est obtenu en ajoutant un des vecteurs  $e_j$  au terme précédent.

Dans le cas  $p = 2$ , on peut la représenter par le dessin suivant, où les cercles gris représentent les éléments de la suite  $\alpha$  :

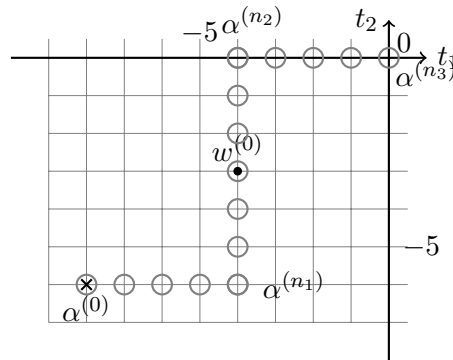


FIGURE 3 – Suite  $\alpha$  dans le cas  $p = 2$



Vu que  $\nu + \mathbb{N}^p \subseteq \text{val}(\mathcal{I}_D)$ , toutes les multi-valuations de  $\mathcal{R}_D$  sont supérieures ou égales à  $\gamma - \nu$ . Cette suite permet donc de calculer  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{R}_D / \mathcal{O}_{\bar{D}}$  :

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{R}_D / \mathcal{O}_{\bar{D}} = \text{Card} \left( \{j \in \{0, \dots, n_0\} ; \Lambda_i(\alpha^{(j)}, \text{val}(\mathcal{R}_D)) \neq \emptyset, \text{ où } \alpha^{(j+1)} = \alpha^{(j)} + e_i\} \right)$$

Nous allons comparer ce nombre avec

$$\ell' := \text{Card} \left( \{j \in \{0, \dots, n_0\} ; \Lambda_i(\alpha^{(j)}, \mathcal{V}) \neq \emptyset, \text{ où } \alpha^{(j+1)} = \alpha^{(j)} + e_i\} \right)$$

où on remarquera que  $\ell'$  peut dépendre de la suite  $\alpha$  choisie, dans la mesure où on ne sait pas si  $\mathcal{V}$  est l'ensemble des multi-valuations d'un  $\mathcal{O}_D$ -module. La proposition 4.15 n'a donc pas de raison de s'appliquer.

**Lemme 4.21.** *Pour la suite  $\alpha$  définie ci-dessus, on a l'inégalité suivante :*

$$\ell' \geq 1 + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{R}_D / \mathcal{O}_{\bar{D}}$$

**Preuve.** Il suffit de remarquer que  $\Lambda_i(\alpha^{(j)}, \text{val}(\mathcal{R}_D)) \neq \emptyset \Rightarrow \Lambda_i(\alpha^{(j)}, \mathcal{V}) \neq \emptyset$ , et que de plus comme il existe  $j_0$  tel que  $\alpha^{(j_0)} = w^{(0)}$  et  $\alpha^{(j_0+1)} = \alpha^{(j_0)} + e_p$ ,  $\Lambda_p(\alpha^{(j_0)}, \mathcal{V}) \neq \emptyset$ , mais par hypothèse sur  $w^{(0)}$ ,  $\Lambda_p(\alpha^{(j_0)}, \text{val}(\mathcal{R}_D)) = \emptyset$ . Ce qui prouve l'inégalité.  $\square$

Dans la suite, notre suite  $\alpha$  est fixée.

*Quatrième étape*

Revenons maintenant à ce qui se passe avec  $\mathcal{I}_D$ . On pose  $v^{(0)} = \gamma - w^{(0)} - 1$  le symétrique de  $w^{(0)}$ . En particulier,  $\Delta(v^{(0)}, \mathcal{I}_D) = \emptyset$  par définition de  $\mathcal{V}$ .

D'autre part, nous allons choisir une suite  $\beta$  permettant de calculer  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{I}_D / \mathcal{C}'$  afin d'utiliser la première étape. Cette suite  $\beta$  n'est pas choisie au hasard ! On la définit pour  $i \in \{0, \dots, n_0\}$  par  $\beta^{(i)} = \gamma - \alpha^{(n_0-i)}$ . On peut remarquer que la suite  $\beta^{(i)}$  correspond au diagramme :

$$\underbrace{\gamma}_{=\beta^{(0)}} \xrightarrow{(+e_1) \bullet} \underbrace{(v_1^{(0)} + 1, \gamma_2, \dots, \gamma_p)}_{=\beta^{(m_1)}} \xrightarrow{(+e_2) \bullet} \dots \xrightarrow{(+e_{p-1}) \bullet} \underbrace{(v_1^{(0)} + 1, \dots, v_{p-1}^{(0)} + 1, \gamma_p)}_{\beta^{(m_{p-1})}}$$

$$\xrightarrow{(+e_p) \bullet} \underbrace{(v_1^{(0)} + 1, \dots, v_{p-1}^{(0)} + 1, \nu_p)}_{=\beta^{(m_p)}} \xrightarrow{(+e_{p-1}) \bullet} \underbrace{(v_1^{(0)} + 1, \dots, v_{p-2}^{(0)} + 1, \nu_{p-1}, \nu_p)}_{\beta^{(m_{p+1})}} \xrightarrow{(+e_{p-2}) \bullet} \dots \xrightarrow{(+e_1) \bullet} \underbrace{\nu}_{\beta^{(m_{2p-1})}}$$

où  $m_{2p-1} = n_{2p-1} = n_0$ .

Ce qui peut être représenté pour  $p = 2$  par :

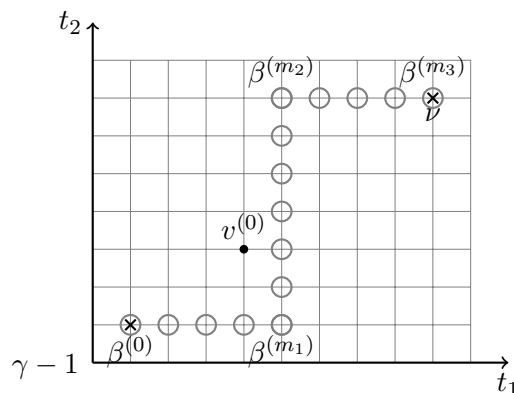


FIGURE 4 – Suite  $\beta$  dans le cas  $p = 2$

La proposition suivante permet de relier  $\ell'$  à la dimension du quotient  $\mathcal{J}_D/\mathcal{C}'$  :

**Proposition 4.22.** *Avec les notations ci-dessus, on a :*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{J}_D/\mathcal{C}' \leq \sum_{i=1}^p (\nu_i - \gamma_i) - \ell'$$

**Preuve.** On remarque que les suites  $\alpha^{(j)}$  et  $\beta^{(j)}$  ont le même nombre de termes, à savoir  $n_0 = \sum_{i=1}^p (\nu_i - \gamma_i)$ .

Nous allons montrer que si  $\Lambda_i(\alpha^{(j)}, \mathcal{V}) \neq \emptyset$  alors  $\Lambda_i(\beta^{(n_0-(j+1))}, \text{val}(\mathcal{J}_D)) = \emptyset$ , ce qui nous donnera le résultat vu que :

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{J}_D/\mathcal{C}' = \text{Card} \left( \{j \in \{0, \dots, n_0\} ; \Lambda_i(\beta^{(j)}, \text{val}(\mathcal{J}_D)) \neq \emptyset, \text{ où } \beta^{(j+1)} = \beta^{(j)} + e_i\} \right)$$

Soit donc  $j \in \{0, \dots, n_0 - 1\}$  tel que  $\alpha^{(j+1)} = \alpha^{(j)} + e_i$  et  $\Lambda_i(\alpha^{(j)}, \mathcal{V}) \neq \emptyset$ .

On notera que  $\beta^{(n_0-j)} = \gamma - \alpha^{(j)} = \gamma - \alpha^{(j+1)} + e_i = \beta^{(n_0-j-1)} + e_i$ , vu que  $\alpha^{(j+1)} = \alpha^{(j)} + e_i$ . Soit  $w \in \Lambda_i(\alpha^{(j)}, \mathcal{V})$ . Alors  $w \geq \alpha^{(j)}$ ,  $w_i = \alpha_i^{(j)}$  et  $\Delta(\gamma - w - 1, \mathcal{J}_D) = \emptyset$  par définition de  $\mathcal{V}$ .

Alors  $\gamma - w - 1 \leq \gamma - \alpha^{(j)} - 1$ , et  $\beta_i^{(n_0-j-1)} = \gamma_i - \alpha_i^{(j)} - 1 = \gamma_i - w_i - 1$ , et pour  $k \neq i$ , on a :  $\beta_k^{(n_0-j-1)} = \gamma_k - \alpha_k^{(j)} > \gamma_k - w_k - 1$ . Donc si  $v \in \Lambda_i(\beta^{(n_0-j-1)}, \text{val}(\mathcal{J}_D))$  alors  $v \in \Delta_i(\gamma - w - 1, \mathcal{J}_D)$ , ce qui contredit  $\Delta(\gamma - w - 1, \mathcal{J}_D) = \emptyset$ . Par conséquent,  $\Lambda_i(\beta^{(n_0-j-1)}, \text{val}(\mathcal{J}_D)) = \emptyset$ , d'où le résultat.  $\square$

Nous avons à présent tous les ingrédients pour conclure :

**THÉORÈME 4.23.** *Soit  $v \in \mathbb{Z}^p$ . Alors :*

$$v \in \text{val}(\mathcal{R}_D) \iff \Delta(\gamma - v - 1, \mathcal{J}_D) = \emptyset$$

**Preuve.** Le sens  $\Rightarrow$  a été montré en 4.8.

Pour l'autre implication, la proposition 4.22 donne l'inégalité :

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{J}_D/\mathcal{C}' \leq \sum_{i=1}^p (\nu_i - \gamma_i) - \ell'$$

Or, par la première étape,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{R}_D/\mathcal{O}_{\tilde{D}} = \sum_{i=1}^p (\nu_i - \gamma_i) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{J}_D/\mathcal{C}'$$

D'où l'inégalité :

$$\ell' \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{R}_D/\mathcal{O}_{\tilde{D}} \tag{11}$$

Or, par le lemme 4.21, si  $\mathcal{V} \neq \text{val}(\mathcal{R}_D)$ ,  $\ell' \geq 1 + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{R}_D/\mathcal{O}_{\tilde{D}}$ . Par conséquent, l'inégalité (11) implique que  $\mathcal{V} = \text{val}(\mathcal{R}_D)$ , et donc on a l'équivalence voulue.  $\square$

En fait, le résultat peut être étendu au cas d'un idéal fractionnaire  $I \subseteq \mathcal{O}_D$ .

**THÉORÈME 4.24.** *Soit  $I \subseteq \mathcal{O}_D$  un idéal fractionnaire. Alors*

$$v \in \text{val}(I^{\vee}) \iff \Delta(\gamma - v - 1, I) = \emptyset$$

En effet, si on se donne  $I \subseteq \mathcal{O}_D$  un idéal fractionnaire (ce qui implique  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_D/I < \infty$ , car  $\mathcal{O}_D$  est un anneau de dimension 1 et  $I$  contient par définition un non diviseur de zéro) en notant  $\mathcal{C}'$  son idéal conducteur et  $\nu$  son conducteur, la preuve s'adapte en changeant :

dans l'étape 1 :  $\dim_{\mathbb{C}} I^\vee/\mathcal{C}'_D = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\widehat{D}}/\mathcal{C}' - \dim_{\mathbb{C}} I/\mathcal{C}'$

dans l'étape 2 : il existe un intrus dans le cadran  $\leq \gamma$

dans l'étape 3 : la suite commence à  $\gamma - \nu$  et finit à  $\gamma$

dans l'étape 4 : la suite commence à 0 et finit à  $\nu$

## 5 Déformations et résidus

Soit  $D$  une courbe plane définie par  $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}(U)$  sur un voisinage ouvert  $U$  de l'origine. Soit  $F$  une déformation de  $f$  au-dessus d'un espace complexe  $0 \in S \subseteq \mathbb{C}^p$  d'anneau  $\mathcal{O}_S$ , c'est-à-dire que  $F(x, y, s) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$  vérifie  $F(x, y, 0) = f(x, y)$ . On note  $X = U \times S$ ,  $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ ,  $W = F^{-1}(0) \subseteq U \times S$ .

Pour  $s \in S$ , on note  $D_s = W \cap \mathbb{C}^2 \times \{s\}$ ,  $\mathfrak{m}_{S,s}$  l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{S,s}$ , et  $F_s = F(., s)$ . En particulier,  $D_0 = D$  et  $F_0 = f$ .

### 5.1 Déformation admissible de courbes planes

Notre étude porte sur les diviseurs libres (dont les courbes planes font partie), et une déformation quelconque de  $D$  n'est pas toujours satisfaisante : on voudrait que les champs logarithmiques puissent s'étendre. Dans [Tor13] sont introduites les déformations "admissibles" :

**Définition 5.1.** *Soit  $D$  un diviseur libre défini dans un voisinage de l'origine de  $\mathbb{C}^n$  par une équation réduite  $f$ . Une déformation admissible  $X$  de  $D$  au-dessus d'un espace complexe  $S$  est une déformation de  $D$  (i.e. définie par une équation  $F(x, s)$  telle que  $F(x, 0) = f(x)$ ) mais telle que de plus elle induise une déformation plate du lieu singulier, c'est-à-dire que le module  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S, 0}/(F, F'_x, F'_y)$  est un  $\mathcal{O}_{S, 0}$ -module plat.*

Notons que les courbes planes sont les uniques diviseurs libres à singularités isolées, le lieu singulier d'un diviseur libre étant de codimension 2 dans l'espace ambiant. (voir [Ale88])

Nous disposons dans le cas à singularité isolée des nombres de Milnor et de Tjurina. Par le "principe de conservation du nombre" (voir [dJP00], th.6.4.5), le nombre de Milnor de  $D_0 = D$  à l'origine est égal à la somme des nombres de Milnor des points critiques de  $F_s$ , pour des voisinages convenables de  $0 \in \mathbb{C}^n$  et  $0 \in S$ . Concernant le nombre de Tjurina, si on suppose de plus la déformation admissible, on a aussi la préservation de la somme des nombres de Tjurina des singularités de chaque fibre.

La proposition suivante donne une déformation admissible en terme de nombre de Tjurina.

**Proposition 5.2.** *Si  $F$  est une déformation de  $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}(U)$  au-dessus d'un espace  $S$  vérifiant pour tout  $s \in S$ ,  $\sum_{x_j \in \text{Sing}(D_s)} \tau_{x_j} = \tau_0$  où  $\tau_0$  est le nombre de Tjurina de  $D_0$  alors c'est une déformation admissible au sens de la définition 5.1.*

**Preuve.** On applique le théorème 1.80 de [GLS07] pour  $\mathcal{F} = p_*(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2 \times S}/(F, F'_x, F'_y))$  avec  $p : \mathbb{C}^2 \times S \rightarrow S$  la surjection canonique (qui est finie). L'application  $s \mapsto \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_s/\mathfrak{m}_{S,s} \mathcal{F}_s$  est constante donc  $\mathcal{F}_0$  est un  $\mathcal{O}_{S, 0}$ -module plat. Comme  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2 \times S, 0}/(F, F'_x, F'_y)$ , on a le résultat.  $\square$

Dans la suite, on suppose que  $\mu$  est constant le long de la section  $s \in S \mapsto 0 \times s \in \mathbb{C}^2 \times S$ . En particulier, la singularité "ne se divise pas".

**Proposition 5.3.** *Soit  $F(x, s)$  une déformation admissible de  $f$  au-dessus d'un espace complexe  $S$ , et soit  $(\delta_1, \delta_2)$  une base des champs de vecteurs logarithmiques de  $f$ . Ce sont en particulier des relations entre  $f, f'_x, f'_y$ . Par platitude, on les étend en champs de vecteurs logarithmiques relatifs  $\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2 \in \text{Der}_{U \times S} / \mathfrak{m}_S \text{Der}_{U \times S}$  de  $F$ . Alors sur un voisinage de  $0 \in S$ ,  $(\tilde{\delta}_1(s), \tilde{\delta}_2(s))$  est une base des champs de vecteurs logarithmiques de  $F_s$ .*

**Preuve.** Comme  $\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2$  sont des champs de vecteurs logarithmiques relatifs, ils sont tangents aux fibres  $D_s$  et donc leur déterminant s'annule sur  $D_s : F_s$  divise  $\det(\tilde{\delta}_1(s), \tilde{\delta}_2(s))$ . Il existe donc  $U$  tel que sur un voisinage de l'origine,  $\det(\tilde{\delta}_1(s), \tilde{\delta}_2(s)) = U(s, x, y)F(s, x, y)$  et  $U(0, x, y)$  est inversible. Donc  $U$  est inversible sur un voisinage de  $0$ , ce qui donne le résultat.  $\square$

**Corollaire 5.4.** *Si  $\tilde{\delta}_i = A_i(x, y, s)\partial_x + B_i(x, y, s)\partial_y$ , on en déduit la base duale  $(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$  de  $\Omega^1(\log D)$ , et alors :*

$$\begin{cases} \text{res}(\tilde{\omega}_1)(s) = \frac{-\beta(s)A_2(s) + \alpha(s)B_2(s)}{U(s)(\alpha(s)F'_x(s) + \beta(s)F'_y(s))} \\ \text{res}(\tilde{\omega}_2)(s) = \frac{\beta(s)A_1(s) - \alpha(s)B_1(s)}{U(s)(\alpha(s)F'_x(s) + \beta(s)F'_y(s))} \end{cases}$$

engendrent le module des résidus pour tout  $s$  au voisinage de  $0$ , où pour tout  $s$ ,  $\alpha(s), \beta(s) \in \mathbb{C}$  sont telles que  $\alpha(s)F'_x(s) + \beta(s)F'_y(s)$  n'est pas un diviseur de zéro de  $\mathcal{O}_{D_s}$ .

**Proposition 5.5.** *Soit  $F$  une déformation à  $\mu$  constant d'une courbe irréductible définie par  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ . Alors c'est une déformation équisingulière au sens de [Zar86]. En particulier, le semigroupe est constant.*

Nous aurons besoin de résultats dans le cas réductible :

**THÉORÈME 5.6 (Théorème d'équisingularité pour les courbes planes, [Tei77], §3.7).**

Soit  $F \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \hat{\otimes} \mathcal{O}_S$  une déformation de  $f = f_1 \cdots f_p \in \mathbb{C}\{x, y\}$  avec  $(S, 0)$  isomorphe à  $(\mathbb{C}^k, 0)$  pour un  $k \in \mathbb{N}$ . On suppose que pour tout  $s$ ,  $F_s(0) = 0$  et que les  $f_j$  sont irréductibles. On note  $W = F^{-1}(0) \subseteq \mathbb{C}^2 \times S$ , et  $D_s = W \cap \mathbb{C}^2 \times \{s\}$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Toutes les fibres  $(D_s, 0)$  ont le même nombre de Milnor (i.e. c'est une déformation à  $\mu$  constant)
2. Le delta-invariant de  $(D_s, 0)$  est égal au delta-invariant de  $(D, 0)$ , et le nombre de branches de  $D_s$  est indépendant de  $s$ .
3. La composée  $q : \tilde{W} \xrightarrow{n} W \rightarrow S$  est une submersion d'espace non singuliers dans un voisinage de  $n^{-1}(0)$ ,  $n$  induit la normalisation  $\tilde{W}_s = \tilde{D}_s \rightarrow D_s$  pour tout  $s$ , et  $q : (n^{-1}(0 \times S))_{\text{red}} \rightarrow S$  est un revêtement de degré  $p$  de  $S$ .
4. Pour tout  $s_1, s_2$  dans un voisinage de zéro, il existe une bijection  $b$  entre l'ensemble des branches de  $D_{s_1}$  et celles de  $D_{s_2}$  telle que si  $D_{s_1, i}$  est une branche de  $D_{s_1}$  alors  $b(D_{s_1, i})$  a le même semigroupe que  $D_{s_1, i}$ , et les multiplicités d'intersection en  $0$  ( $b(D_{s_1, i}) \cdot b(D_{s_1, j})$ ) et  $(D_{s_1, i} \cdot D_{s_1, j})$  sont égales.

Comme nous supposons que notre déformation est à  $\mu$  constant, le troisième point du théorème 5.6 assure que le paramétrage se déforme, ce qui nous permet de regarder comment évoluent les multi-valuations de l'idéal jacobien dans la déformation, et par symétrie, l'évolution des multi-valuations du module des résidus. On note  $\text{val}_{D_s}$  la multi-valuation le long de  $D_s$ . Une conséquence du théorème d'équisingularité est la suivante :

**Corollaire 5.7.** *Avec les mêmes notations que pour le théorème 5.6, si les propriétés du théorème 5.6 sont vérifiées, alors :*

1. Toutes les fibres  $D_s$  ont le même conducteur  $\gamma$ .
2. On note  $x(t, s) = (x_1(t_1, s), \dots, x_p(t_p, s))$ ,  $y(t, s) = (y_1(t_1, s), \dots, y_p(t_p, s))$  un paramétrage de  $D_s$ . On rappelle que pour  $v, w \in \mathbb{Z}^p$ , on note  $\inf(v, w) = (\min(v_1, w_1), \dots, \min(v_p, w_p))$ .  
Pour tout  $s \in S$ ,

$$\inf(\text{val}_{D_s}(x(t, s)), \text{val}_{D_s}(y(t, s))) = \inf(\text{val}_D(x(t, 0)), \text{val}_D(y(t, 0))) = (m^{(1)}, \dots, m^{(p)})$$

où  $m^{(j)}$  est la multiplicité de la composante  $D_j$  de  $D$ .

**Preuve.**

1. Comme les semigroupes des branches ne dépendent pas de  $s$ , les conducteurs des branches sont eux-aussi indépendants de  $s$ . De plus, les multiplicités d'intersection des branches sont indépendantes de  $s$ . Comme le conducteur de  $D$  est obtenu à partir des conducteurs des branches et des multiplicités d'intersection (voir théorème 4.11), on en déduit que le conducteur de  $D$  ne dépend pas de  $s$ .
2. On remarque que pour toute branche  $D_{s,i}$  de  $D_s$ , la plus petite valuation non nulle est obtenue comme valuation de  $x_i(t_i, s)$  ou de  $y_i(t_i, s)$ , et par l'invariance des semigroupes des branches, elle ne dépend pas de  $s$ . Donc

$$\inf(\text{val}_{D_{s,i}}(x_i(t_i, s)), \text{val}_{D_{s,i}}(y_i(t_i, s))) = \inf(\text{val}_{D_{0,i}}(x_i(t_i, 0)), \text{val}_{D_{0,i}}(y_i(t_i, 0)))$$

ce qui nous donne le résultat, la dernière égalité venant du fait que  $\min(\text{val}_{D_i}(x), \text{val}_{D_i}(y))$  est la multiplicité de la courbe  $D_i$ .  $\square$

## 5.2 Escaliers et valuations

Par la symétrie du théorème 4.23, étudier le semigroupe de l'idéal jacobien donne les multi-valuations du module des résidus. Le problème qui se pose alors est de déterminer le semigroupe de l'idéal jacobien. Dans cette partie, on développe un cas où les valuations sont entièrement déterminées grâce à "l'escalier" de la courbe (voir définition 5.13).

Commençons par déterminer quelques propriétés générales des multi-valuations de l'idéal jacobien.

**Lemme 5.8.** *Soit  $D$  un germe de courbe plane défini par une équation réduite  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ , et  $\mathbb{C}\{t_1\} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\{t_p\} \rightarrow \mathbb{C}\{x, y\}/(f)$  sa normalisation. Alors les multi-valuations données par cette normalisation vérifient :*

$$\begin{aligned} \text{val}(f'_x) &= \gamma + \text{val}(y) - 1 \\ \text{val}(f'_y) &= \gamma + \text{val}(x) - 1 \end{aligned}$$

**Preuve.** Pour  $f$  irréductible, le résultat est donné par le lemme de Teissier (2.3 de [CNP11]). Pour passer au cas non irréductible, on utilise la proposition 4.11 et le fait que  $\text{val}_j\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \sum_{i \neq j} \text{val}_j(f_i) + \text{val}_j\left(\frac{\partial f_j}{\partial x}\right)$ . Le cas irréductible donne alors le résultat.  $\square$

**Corollaire 5.9.** *Avec les notations du lemme, on a :  $(\mathbb{N}\text{val}(x) + \mathbb{N}\text{val}(y)) \setminus \{0\} + \gamma - 1 \subseteq \text{val}(\mathcal{J}_D)$ .*

**Preuve.** Soit  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ ,  $(i, j) \neq (0, 0)$ . Par exemple,  $i \neq 0$ . Alors  $\text{val}(x^{i-1}y^j f'_y) = \gamma - 1 + i\text{val}(x) + j\text{val}(y)$ .  $\square$

Nous allons regarder un germe de courbe plane irréductible  $D$  défini par une équation réduite  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$  de la forme  $f(x, y) = x^a - y^b$  avec  $\text{pgcd}(a, b) = 1$ . Un paramétrage de  $D$  est donné par :

$$\begin{cases} x(t) = t^b \\ y(t) = t^a \end{cases}$$

Le semigroupe de  $D$  est  $\Gamma = \mathbb{N}a + \mathbb{N}b$ , et son conducteur est  $c = \mu = (a - 1)(b - 1)$ .

Considérons une déformation  $F$  à  $\mu$  constant de  $f$ . Elle est de la forme :

$$F(x, y, s) = x^a - y^b + \sum_{\substack{1 < i < a-1 \\ 1 < j < b-1 \\ ib+ja > ab}} s_{ij} x^i y^j \quad (12)$$

Cela implique en particulier la préservation du semigroupe, et donc les valuations de  $x$  et  $y$  ne changent pas. D'après ce qui a été signalé précédemment, il y a déformation du paramétrage :  $x(s, t) = t^b + g(s, t)$ ,  $y(s, t) = t^a + h(s, t)$ ,  $g, h \in \mathbb{C}\{s, t\}$ ,  $\text{val}_t(g) > b$ ,  $\text{val}_t(h) > a$ .

On note  $\Gamma$  le semigroupe de  $f$ ,  $\Gamma = \mathbb{N}a + \mathbb{N}b$ . D'après le corollaire 5.9, on a :

**Corollaire 5.10.** *On considère la fonction irréductible  $F(x, y, s)$  de la forme définie en (12).*

*Alors pour tout  $s \in S$ ,  $c + \Gamma^* - 1 \subseteq \text{val}(\mathcal{J}_s)$ , où  $\Gamma^* = \Gamma \setminus \{0\}$  et  $\mathcal{J}_s = (F'_x(s), F'_y(s)) \subseteq \mathbb{C}\{x, y\}/(F_s)$ .*

**Corollaire 5.11.** *En particulier, le conducteur  $\nu$  de  $\mathcal{J}_s$  vérifie  $\nu \leq 2c - 1$ .*

**Remarques 5.12.**

- Dans le cas d'une branche irréductible à plusieurs paires de Puiseux, il n'est pas vrai en général que  $c + \Gamma^* - 1 \subseteq \text{val}(\mathcal{J}_D)$ . Un contre-exemple est fourni par la courbe plane irréductible définie par  $f(x, y) = (x^3 - y^2)^2 - 4x^5y - x^7$ , dont un paramétrage est  $x(t) = t^4$  et  $y(t) = t^6 + t^7$ . Le conducteur est  $c = 16$ , et on vérifie que  $\text{val}(\mathcal{O}_D) = \{1, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 14, 16 + \mathbb{N}\}$ , 13 étant obtenu comme valuation de  $x^2 - y^3$ . En revanche, les calculs montrent que  $\text{val}(\mathcal{J}_D) = \{19, 21, 23, 25, 26, 27, 29 + \mathbb{N}\}$ , et donc  $16 + 13 - 1 = 28$  n'est pas dans  $\text{val}(\mathcal{J}_D)$ .
- Dès que la courbe n'est pas quasi-homogène (ce qui revient à  $\mu \neq \tau$ ) l'inclusion est stricte, pour des raisons de dimension. Ce résultat ne suffit donc pas à déterminer les valuations de  $\mathcal{J}_s$ . En revanche, on notera que dans notre déformation à  $\mu$  constant, les valuations  $c + \Gamma^* - 1$  apparaissent pour toutes les fibres. Il ne reste donc qu'un nombre fini de possibilités pour placer les  $\mu - \tau$  valuations supplémentaires.

Pour déterminer les valuations de  $\mathcal{J}_s$  dans le cas de la fonction définie par (12), nous allons utiliser "l'escalier" de la courbe. Pour cela, on pose pour  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ ,  $\rho(i, j) = ib + ja$ , et on définit un ordre monomial par  $(i, j) < (i', j')$  si et seulement si  $\rho(i, j) < \rho(i', j')$  ou  $(\rho(i, j) = \rho(i', j')$  et  $i < i')$ . De plus, si  $H = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j \in \mathbb{C}\{x, y\}$  est non nulle, on note  $\exp(H) = \min((i, j), a_{i,j} \neq 0)$  son exposant privilégié, et  $\rho(H) := \rho(\exp(H))$ . Cette partie utilise les résultats de [BGM88].

**Définition 5.13.** *On définit pour tout  $s \in S$  l'ensemble*

$$E(s) = \{\exp(g), g \in (F(s), F'_x(s), F'_y(s)) \subseteq \mathbb{C}\{x, y\}\}$$

*des exposants privilégiés pour l'ordre défini ci-dessus. L'escalier de  $I_s := (F(s), F'_x(s), F'_y(s))$  est alors  $\Delta(s) = \mathbb{N}^2 \setminus E(s)$ .*

On regarde l'escalier de  $I_s$  et non de  $\left(\frac{\partial F_s}{\partial x}, \frac{\partial F_s}{\partial y}\right)$  car le point de vue qui nous intéresse est celui des valuations : il faut donc tenir compte de  $F_s$ , ce que l'on voit déjà en calculant la valuation de

$bxF'_x + ayF'_y - abF$ , qui n'est pas égale au poids de l'exposant de  $bxF'_x + ayF'_y$  dès que  $F$  n'est pas quasi-homogène.

On introduit encore quelques notations, qui seront plus compréhensibles avec un dessin :

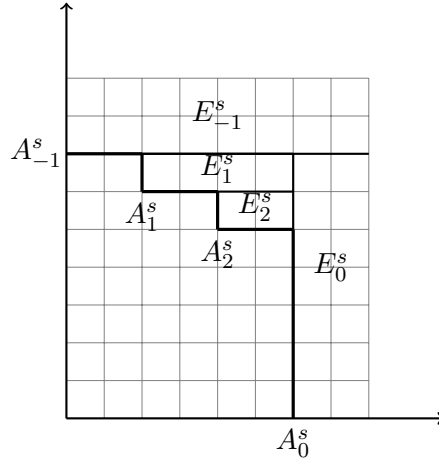


FIGURE 5 – Escalier

On pose  $A_{-1}^s = (0, b-1)$  et  $A_0^s = (a-1, 0)$ . On renvoie à [BGM88] pour les détails de l'algorithme qui permet d'obtenir une suite finie de points  $(A_j^s)_{-1 \leq j \leq K_s}$  telle que les  $A_j^s$  soient les "sommets" de l'escalier, c'est-à-dire que  $E = \cup A_j^s + \mathbb{N}^2$ , et aucun des  $A_j^s$  ne peut être enlevé.

En particulier,  $A_j^s \in \{1, \dots, a-1\} \times \{1, \dots, b-1\}$  pour tout  $j \in \{1, \dots, K\}$ .

On définit  $\Delta_j^s = \mathbb{N}^2 \setminus \left( \cup_{i=-1}^j A_i^s + \mathbb{N}^2 \right)$ , et  $E_j^s = \Delta_{j-1}^s \setminus \Delta_j^s$ .

Dans [BGM88] est donné explicitement l'escalier générique d'une telle fonction  $F(x, y, s)$ , et la figure 5 est en fait l'escalier générique de la déformation à  $\mu$  constant de  $x^7 - y^8$ .

Pour déterminer les valuations de l'idéal jacobien à partir de l'escalier, nous allons avoir besoin du lemme suivant :

**Lemme 5.14.** *Soient  $1 \leq i \leq a-1$  et  $1 \leq j \leq b-1$  et  $(i', j')$  tels que  $\rho(i, j) = \rho(i', j')$ . Alors  $(i, j) = (i', j')$ .*

**Preuve.**

$$ib + ja = i'b + j'a \iff (i - i')b = (j' - j)a$$

Et comme  $\text{pgcd}(a, b) = 1$ , et  $1 \leq i \leq a-1$  et  $1 \leq j \leq b-1$ , on vérifie qu'on a bien l'égalité.  $\square$

Pour une fonction de la forme (12), ce lemme va nous permettre de déterminer entièrement les valuations de  $\mathcal{J}_s$ , et donc par symétrie celles du module des résidus.

**Proposition 5.15.** *On a l'égalité suivante :*

$$\text{val}(\mathcal{J}_s) = \bigcup_{i=-1}^{K_s} \left( \rho(A_i^s) + \Gamma \right)$$

**Preuve.** Commençons par l'inclusion  $\bigcup_{i=-1}^{K_s} \left( \rho(A_i^s) + \Gamma \right) \subseteq \text{val}(\mathcal{J}_s)$ .

Il suffit de montrer que  $\rho(A_j^s) \in \text{val}(\mathcal{J}_s)$ . Par définition des  $A_j^s$ , il existe  $H_j \in I_s$ ,  $H_j = a_1F(s) + a_2F'_x(s) + a_3F'_y(s)$  tel que  $\exp(H_j) = A_j^s$ . Le lemme précédent assure que  $\text{val}(H_j) = \rho(A_j^s)$ . De plus,  $\text{val}(H_j) = \text{val}(a_2F'_x(s) + a_3F'_y(s))$  et donc  $\rho(A_j^s) \in \text{val}(\mathcal{J}_s)$ .

Réciproquement, soit  $H \in \mathcal{I}_s$  non nulle. Montrons que  $\text{val}(H) \in \bigcup_{i=-1}^{K_s} (\rho(A_i^s) + \Gamma)$ .

Notons que  $(\rho(A_{-1}^s) + \Gamma) \cup (\rho(A_0^s) + \Gamma) = c + \Gamma^* - 1$ , donc si  $\text{val}(H) \geq 2c - 1$ ,  $\text{val}(H) \in (\rho(A_{-1}^s) + \Gamma) \cup (\rho(A_0^s) + \Gamma)$ .

Sinon, on utilise le théorème de division avec unicité : si  $(H_{-1}, \dots, H_K)$  est une base standard de  $I_s$  telle que  $\exp(H_j) = A_j^s$ , alors il existe une unique écriture de  $H$  sous la forme :

$$H = \sum_{i=-1}^K G_i H_i$$

où les monômes apparaissant dans  $G_i H_i$  sont dans  $E_i$ .

On a  $\text{val}(G_i H_i) = \text{val}(G_i) + \text{val}(H_i) = \text{val}(G_i) + \rho(A_i^s) \in \rho(A_i^s) + \Gamma$ .

Etant donné que les  $E_i$  sont disjoints, les exposants des  $G_i H_i$  pour  $i \neq -1, 0$  sont tous différents et dans  $\{1, \dots, a-1\} \times \{1, \dots, b-1\}$ . D'après le lemme 5.14, si un des  $G_i$  pour  $i \neq -1, 0$  est non nul, alors  $\rho(H) = \text{val}(H) \in \rho(A_j^s) + \Gamma$  pour un certain  $j$ . Il reste le cas où tous les  $G_i$  pour  $i \neq -1, 0$  sont nuls.

Dans ce cas, si  $\rho(\exp(H))$  n'est atteint dans  $H$  que par un monôme, il n'y a pas de problème. Un problème pourrait survenir si plusieurs monômes de  $H$  ont le poids de l'exposant, et s'ils se compensent. Supposons que c'est le cas, c'est-à-dire que  $\text{val}(H) > \rho(H)$ . D'après la remarque ci-dessus, si  $\rho(H) \geq 2c - 1$ , on a le résultat. On suppose donc de plus que  $\rho(H) < 2c - 1 < 2ab$ .

Si  $ib + ja = i'b + j'a < 2ab$  avec  $i > i'$  alors en particulier  $i, i' < 2a$  et  $j, j' < 2b$ . On a  $i = i' + ma$  et  $j + mb = j'$  pour un  $m \in \mathbb{Z}$ . La condition que l'on vient d'énoncer implique que  $0 \leq m < 2$ . Si  $m = 0$  cela signifie que  $(i, j) = (i', j')$ , et si  $m = 1$ ,  $i = i' + a$  et  $j' = j + b$ , et ce sont les deux seuls monômes de poids  $\rho(H)$ .

Si ces monômes se compensent dans  $H$ , on voit apparaître  $\lambda(x^{i'} y^j x^a - x^{i'} y^j y^b)$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Alors :

$$H = \lambda x^{i'} y^j F + H^{(1)}$$

où  $\rho(\exp(H^{(1)})) > \rho(\exp(H))$  et  $H^{(1)} \in I_s$ ,  $\text{val}(H) = \text{val}(H^{(1)})$ .

On continue jusqu'à trouver ou bien un  $H^{(k)}$  tel que  $\rho(H^{(k)}) = \text{val}(H^{(k)})$  ou  $\rho(H^{(k)}) \geq 2c - 1$ .

Ce qui prouve que  $\text{val}(H) = \rho(g)$  pour un  $g \in I_s$  et donc  $\text{val}(H) \in \bigcup_{i=-1}^{K_s} (\rho(A_i^s) + \Gamma)$ .  $\square$

Cette propriété combinée à l'algorithme décrit dans [BGM88] permet de calculer les valuations de l'idéal jacobien d'une telle courbe, et par symétrie, les valuations du module des résidus.

### 5.3 Stratification par le module des résidus

On considère une déformation à  $\mu$  constant de  $D$  au-dessus d'un espace  $S$  tel que  $(S, 0)$  est isomorphe à  $(\mathbb{C}^k, 0)$  pour un  $k \in \mathbb{N}$ . On note  $\mathcal{R}_s$  le module des résidus de  $D_s$ . L'objectif de cette partie est d'étudier quelles propriétés vérifie la partition  $S = \bigcup S_{\mathcal{V}}$ , où  $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{Z}^p$ , et  $s \in S_{\mathcal{V}}$  si et seulement si  $\text{val}(\mathcal{R}_s) = \mathcal{V}$ .

**Définition 5.16.** Soit  $F(x, s)$  une déformation à  $\mu$  constant de  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$  réduite (mais pas forcément irréductible), au-dessus d'un espace complexe  $S$ . On définit la stratification par le module des résidus comme étant la partition de  $S$  définie ci-dessus.

Commençons par quelques propriétés :

#### Proposition 5.17.

1. Si  $s$  et  $s'$  ne sont pas dans la même strate pour la stratification par  $\tau$ , les multi-valuations des modules des résidus correspondant sont nécessairement différentes.



2. Dans une strate à  $\tau$  constant, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour les multi-valuations du module des résidus.

**Preuve.**

1. L'assertion est claire vu que la dimension se lit sur les multi-valuations, et la dimension de  $\mathcal{R}_D$  modulo les fonctions régulières de la normalisée est  $\tau - \delta$ , avec  $\delta$  constant comme  $\mu$  est constant.
2. D'après le corollaire 5.7, le conducteur de  $D_s$  ne dépend pas de  $s$ , et pour tout  $s$ ,

$$\inf(\text{val}_{D_s}(x(t, s)), \text{val}_{D_s}(y(t, s))) = \inf(\text{val}_D(x(t, 0)), \text{val}_D(y(t, 0)))$$

Par conséquent, en vertu du lemme 5.8, de même

$$\inf(\text{val}_{D_s}(F'_x(s)), \text{val}_{D_s}(F'_y(s))) = \inf(\text{val}_D(f'_x), \text{val}_D(f'_y))$$

On va choisir une combinaison linéaire convenable de  $F'_x$  et  $F'_y$ , de sorte que sa multi-valuation soit indépendante de  $s$ .

Soit  $(L, 0) \subseteq (\mathbb{C}^2, 0)$  une droite tangente à aucune des composantes de  $D$ .

On considère le changement de coordonnées suivant, où  $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2$  sont des constantes complexes telles que  $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$  :

$$\begin{cases} x = \alpha_1 u + \alpha_2 v \\ y = \beta_1 u + \beta_2 v \end{cases}$$

et tel que de plus  $L$  soit définie par  $u = 0$  dans le système de coordonnées  $(u, v)$ . Comme  $L$  est transverse à chacune des composantes de  $D$ , la multiplicité  $m^{(j)}$  de la courbe  $D_j$  est donnée par la multiplicité d'intersection  $(D_j \cdot L)$ . De plus, la déformation étant à  $\mu$  constant, le théorème 5.6 s'applique, et par conséquent, la multiplicité de  $D_{s,j}$  pour  $s$  voisin de 0 est indépendante de  $s$ . Alors pour  $s$  voisin de 0, la droite  $L$  reste transverse à  $D_{s,j}$ . En effet, comme  $u = 0$  est transverse à toutes les composantes de  $D_0$ , par le théorème de préparation de Weierstrass, il existe une unité  $g(u, v, s)$  telle que  $F(u, v, s) = g(u, v, s)(v^n + a_1(u, s)v^{n-1} + \dots + a_n(u, s))$  avec  $a_i(0, 0) = 0$  pour tout  $i$ , et  $n = m^{(1)} + \dots + m^{(p)}$ . Par conséquent, pour  $s$  assez petit, la valuation en  $v$  de  $F(0, v, s)$  est inférieure ou égale à  $n$ , mais comme les multiplicités des branches restent inchangées, elle ne peut pas diminuer, et est donc égale à  $n$ .

En particulier, la multiplicité d'intersection de  $D_{s,j}$  avec  $L$  donne  $m^{(j)}$ . On en déduit que pour tout  $s$ ,  $\text{val}_{D_s}(u) = (m^{(1)}, \dots, m^{(p)})$ , et donc par le corollaire 5.8, la multi-valuation de  $\frac{\partial F_s}{\partial v}$  est  $\gamma + (m^{(1)}, \dots, m^{(p)}) - 1$  qui ne dépend pas de  $s$ . En revenant aux coordonnées initiales cela signifie que  $\text{val}\left(\alpha_2 \frac{\partial F}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial F}{\partial y}\right) = \gamma + (m^{(1)}, \dots, m^{(p)}) - 1$  est indépendante de  $s$ , et en particulier ce n'est pas un diviseur de zéro de  $\mathcal{O}_{D_s}$  pour tout  $s$ .

Comme  $\tau$  est constant, on peut appliquer le corollaire 5.4 : pour tout  $s$ , le module  $\mathcal{R}_s$  est engendré sur  $\mathcal{O}_s$  par deux éléments de la forme :

$$\begin{cases} \rho_1(s) = \frac{-\beta_2 A_2(s) + \alpha_2 B_2(s)}{U(s)(\alpha_2 F'_x(s) + \beta_2 F'_y(s))} \\ \rho_2(s) = \frac{\beta_2 A_1(s) - \alpha_2 B_1(s)}{U(s)(\alpha_2 F'_x(s) + \beta_2 F'_y(s))} \end{cases}$$

On a choisi  $\alpha_2$  et  $\beta_2$  de sorte que la multi-valuation du dénominateur ne dépende pas de  $s$ , la dépendance en  $s$  des multi-valuations de  $\rho_1(s)$  et  $\rho_2(s)$  vient donc des multi-valuations des numérateurs, qui sont positives. Les multi-valuations de  $\mathcal{R}_D$  sont donc toutes supérieures

ou égales à  $-\inf(\text{val}_D(f'_y), \text{val}_D(f'_x))$ . Comme  $\mathcal{O}_{\widetilde{D}_s} \subseteq \mathcal{R}_{D_s}$ , le cadran  $\mathbb{N}^p$  est toujours inclus dans  $\text{val}_{D_s}(\mathcal{R}_{D_s})$ . D'autre part, les multi-valuations restantes sont entièrement déterminées à partir des multi-valuations négatives. En effet, les multi-valuations de  $\mathcal{R}_{D_s}$  qui ne sont pas dans le cadran négatif sont déterminées par les multi-valuations négatives dont au moins une coordonnée est nulle, en utilisant la propriété 4.4, et le fait que si  $\omega \in \text{val}_{D_s}(\mathcal{R}_{D_s})$  alors  $\inf(\omega, 0) \in \mathcal{R}_{D_s}$ .  $\square$

**Proposition 5.18.** *Les strates de la stratification selon le module des résidus dans la strate à  $\mu$  constant sont semi-analytiques.*

**Preuve.** On a déjà signalé que dans des strates à  $\tau$  différents les modules des résidus sont différents.

De plus, la stratification par  $\tau$  est semi-analytique. (voir [Zar86], appendice de Teissier).

Nous allons voir que la stratification par le module des résidus fournit une stratification semi-analytique d'une strate à  $\tau$  constant.

On reprend les notations de la preuve du point 2. de la proposition précédente. Le dénominateur  $\alpha_2 F'_x(s) + \beta_2 F'_y(s)$  est le dénominateur de tous les éléments de  $\mathcal{R}_s$ , et sa multi-valuation est indépendante de  $s$ . Les multi-valuations ne dépendent donc que des numérateurs. On note  $N_i(x, y, s)$  le numérateur de  $\rho_i$ ,  $i = 1, 2$ . Pour tout  $s \in S$ ,  $\mathcal{O}_{\widetilde{D}_s} \subseteq \mathcal{R}_s$  et donc pour différencier les multi-valuations des modules des résidus, d'après ce qu'on a signalé dans la preuve précédente, il suffit de regarder les multi-valuations négatives.

Les restrictions à une branche  $D_j$  de  $D$  de  $N_1$  et  $N_2$  sont holomorphes en  $s$  et en  $t_j$ . On peut écrire  $N_1|_{D_j}(s, t_j) = \sum_{i \geq 0} a_i^{(j)}(s) t_j^i$ , et de même  $N_2|_{D_j}(s, t_j) = \sum_{i \geq 0} b_i^{(j)}(s) t_j^i$ , où les  $a_i^{(j)}$  et  $b_i^{(j)}$  sont analytiques et peuvent être nulles. La semi-analyticité en découle. En particulier, les multi-valuations des générateurs sont alors déterminées par l'annulation ou non des  $a_i^{(j)}$  et  $b_i^{(j)}$ .  $\square$

L'exemple suivant permet de montrer que la stratification par le module des résidus raffine celle par  $\tau$  :

**Exemple 5.19.** Soit  $f(x, y) = x^5 - y^6$ , et  $F(x, y, s_1, s_2, s_3) = x^5 - y^6 + t_1 x^2 y^4 + t_2 x^3 y^3 + t_3 x^3 y^4$ . Le nombre de Milnor est  $\mu = 20$ , le conducteur est  $c = 20$ , et la stratification par  $\tau$  de  $\mathbb{C}^3$  fournit trois strates :  $S_1 = \{0\}$  où  $\tau = 20$ ,  $S_2 = \{(0, 0, s_3), s_3 \neq 0\}$ , où  $\tau = 19$ , et  $S_3 = \{(s_1, s_2, s_3), (s_1, s_2) \neq 0\}$  où  $\tau = \tau_{min} = 18$ .

En calculant les dérivées de  $F$  et un paramétrage de la courbe en un point  $(s_1, s_2, s_3)$ , on voit que les strates  $S_1$  et  $S_2$  coïncident avec des strates du module des résidus, mais en revanche, la strate  $S_3$  se divise en deux strates :  $S'_3 = \{(s_1, s_2, s_3), s_1 \neq 0\}$  et  $S''_3 = \{(0, s_2, s_3), s_2 \neq 0\}$ . Les valuations obtenues sont indiquées dans le tableau ci-dessous :

Strate	$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{R}_{D_s} / \mathcal{O}_{\widetilde{D}_s}$	valuations $< 0$
$S_1$	10	-1, -2, -3, -4, -7, -8, -9, -13, -14, -19
$S_2$	9	-1, -2, -3, -4, -7, -8, -9, -13, -14
$S'_3$	8	-1, -2, -3, -4, -7, -8, -9, -14
$S''_3$	8	-1, -2, -3, -4, -7, -8, -9, -13

On observe donc que la stratification par le module des résidus ne coïncide pas avec la stratification par  $\tau$ .

On se demande maintenant si la stratification par le module des résidus vérifie la condition de "frontière". On dit qu'une stratification  $(S_\alpha)$  de  $S$  vérifie la condition de frontière si lorsque  $S_\alpha \cap \overline{S_\beta} \neq \emptyset$  pour  $\alpha \neq \beta$ , où  $\overline{S_\beta}$  est l'adhérence de  $S_\beta$ , alors  $S_\alpha \subseteq \overline{S_\beta}$ .

Avant de commencer, on étend la propriété 5.10 aux polynômes de la forme :

**Proposition 5.20.** Soit une équation réduite  $f(x, y) = \prod_{j=1}^p (x^a - \lambda_\ell y^b + \sum_{ib+ja>ab} a_{ij}^{(\ell)} x^i y^j)$  avec  $\text{pgcd}(a, b) = 1$  et les  $\lambda_\ell$  des constantes complexes non nulles deux à deux distinctes,  $a_{ij}^{(\ell)} \in \mathbb{C}$ . On note  $\Gamma$  le semigroupe de la courbe  $D$  définie par  $f$ , et  $\gamma$  son conducteur.

Alors :  $\gamma + \Gamma^* - 1 \subseteq \text{val}(\mathcal{I}_D)$ .

**Preuve.** Commençons par déterminer  $\Gamma$ .

**Lemme 5.21.** Les multi-valuations de  $\mathcal{O}_D$  sont l'ensemble  $\Gamma_0$  des  $p$ -uplets  $(v_1, \dots, v_p)$  tels qu'à permutation près, il existe  $\ell \in \{0, \dots, p\}$ ,  $(k, k') \in \mathbb{N}^2$ , et  $(a_1, \dots, a_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$  tels que pour  $j \in \{1, \dots, \ell\}$ ,  $v_j = lab + ka + k'b + a_j$ , et pour  $j \in \{\ell + 1, \dots, p\}$ ,  $v_j = lab + ka + k'b$ .

**Preuve.** Un paramétrage de la branche  $j$  est donné par

$$\begin{cases} x(s, t) = \eta_j t_j^b + \text{termes de valuation} > b \\ y(s, t) = t_j^a \end{cases}$$

avec  $\eta_j^a = \lambda_j$ .

Montrons que  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ .

Pour  $m \in \mathbb{Z}$ , on note  $(\underline{m}) = (m, \dots, m) \in \mathbb{N}^p$ . On vérifie que  $k(\underline{a}) + k'(\underline{b}) \subseteq \Gamma$  pour tout  $(k, k') \in \mathbb{N}^2$ . Ce qui nous donne l'inclusion pour  $\ell = 0$ . Remarquons que toutes les composantes irréductibles ont même le conducteur  $c = ab - b - a + 1 < ab$ , donc en particulier, toute multi-valuation  $(\underline{v})$  avec  $v \geq c$  est atteinte.

Pour  $\ell = 1$ , on l'obtient en remarquant que  $\text{val}_q(f_j) = ab$  pour  $q \neq j$  et  $\text{val}_q(f_q) = \infty$ . Par la remarque précédente, il existe  $g \in \mathbb{C}\{x, y\}$  de multi-valuation  $(\underline{ab} + \underline{v})$ , et  $\text{val}(x^{k'} y^k (f_q + \alpha g))$  donne le résultat, où  $\alpha \in \mathbb{C}$  est telle qu'il n'y ait pas de compensation des termes de plus bas degré entre  $f_q$  et  $g$ .

Pour  $\ell \in \{1, \dots, p\}$ , on remarque que  $\text{val}_q(f_1 \cdots f_\ell) = \infty$  pour  $q \leq \ell$  et  $\text{val}_q(f_1 \cdots f_\ell) = lab$ . Soit  $q \in \{1, \dots, \ell\}$  et  $v_1 = \dots = v_q < v_{q+1} \leq \dots \leq v_\ell$ . Par la remarque précédente, il existe  $g \in \mathbb{C}\{x, y\}$  de multi-valuation  $(\underline{ab} + \underline{v})$ , et

$$\text{val}(f_1 \cdots f_\ell + \alpha g f_{q+1} \cdots f_\ell) = (lab + v_1, \dots, lab + v_q, \infty, \dots, \infty, lab, \dots, lab)$$

où le dernier  $\infty$  est en position  $\ell$ , et  $\alpha \in \mathbb{C}$  est telle qu'il n'y ait pas de compensation des termes de plus bas degré entre  $f_1 \cdots f_\ell$  et  $g f_{q+1} \cdots f_\ell$ . On procède de même pour  $v_{q+1}, \dots, v_\ell$  pour trouver un élément de  $\mathbb{C}\{x, y\}$  de multi-valuation  $(lab + v_1, \dots, lab + v_\ell, lab, \dots, lab)$ . En multipliant par  $x^{k'} y^k$ , et en considérant les permutations, on a l'inclusion de  $\Gamma_0$  dans  $\Gamma$ .

Il reste à voir qu'aucune multi-valuation n'a été oubliée!

On pose  $\rho(i, j) = ib + ja$  pour  $i, j \in \mathbb{N}$ . On définit une relation d'ordre sur  $\mathbb{N}^2$  en posant  $(i, j) < (i', j') \iff (\rho(i, j) < \rho(i', j'))$  ou  $\rho(i, j) = \rho(i', j')$  et  $i < i'$ . On définit alors pour une fonction  $H \in \mathbb{C}\{x, y\}$  non nulle son exposant privilégié  $\exp(g)$ . On notera  $\rho(g) = \rho(\exp(g))$ , et  $\Gamma = \text{val}(\mathcal{O}_D)$ .

Soit  $H \in \mathbb{C}\{x, y\}$  un non diviseur de zéro de  $\mathcal{O}_D$ ,  $H = \sum b_{ij} x^i y^j$ . Si  $\text{val}(H) = (\underline{\rho(H)})$ , alors  $\text{val}(H) \in \Gamma_0$ .

Supposons que  $\text{val}(H) \neq (\underline{\rho(H)})$ . Quitte à changer l'ordre, on peut supposer que  $\text{val}_j(H) > \rho(H)$  pour  $j \leq \ell$  et  $\text{val}_j(H) = \rho(H)$  pour  $j > \ell$ . Cela signifie que plusieurs monômes de poids  $\rho(H)$  apparaissent. On note  $g = \sum_{ib+ja=\rho(H)} b_{ij} x^i y^j$  la partie de  $H$  constituée de tous les termes de poids  $\rho(H)$  de  $H$ . En particulier,  $\rho(g) = \rho(H)$ . Comme pour tout  $1 \leq q \leq \ell$ ,  $\text{val}_q(g) > \rho(H)$ , et pour  $\ell + 1 \leq q \leq p$   $\text{val}_q(g) = \rho(H)$ , il existe  $g_1 \in \mathbb{C}\{x, y\}$  telle que  $g = g_1(x^a - \lambda_1 y^b) \cdots (x^a - \lambda_\ell y^b)$ . Donc  $\rho(H) = lab + \rho(g_1) = lab + ka + k'b$  pour un couple  $(k, k') \in \mathbb{N}^2$ . Les valuations de  $H$  sur les  $\ell$  premières branches étant strictement plus grandes, on a le résultat souhaité :  $\text{val}(H) \in \Gamma_0$ .  $\square$

Revenons à la preuve de la proposition 5.20.

Par le corollaire 5.9,  $\gamma + (ka + k'b) - 1$ ,  $(k, k') \neq (0, 0)$ , sont dans  $\text{val}(\mathcal{J}_D)$ . Pour les autres, il s'agit essentiellement de trouver un substitut à  $f_1, \dots, f_p$  qui soit dans l'idéal jacobien.

Soit  $\ell \in \{1, \dots, p\}$ . On pose  $h_\ell = \frac{\partial f_\ell}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f_\ell}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}$ .

On notera que  $h_\ell = \sum_{m \neq \ell} \left( \frac{\partial f_\ell}{\partial x} \frac{\partial f_m}{\partial y} - \frac{\partial f_\ell}{\partial y} \frac{\partial f_m}{\partial x} \right) \prod_{k \neq m} f_k$ . En particulier,  $\text{val}_\ell(h_\ell) = \infty$ . En utilisant encore le lemme 5.8, et le fait que les  $\lambda_j$  soient deux à deux distincts, on trouve  $\text{val}(h_\ell) = \gamma + \text{val}(f_\ell) - 1$ .

Pour la fin de la preuve, il s'agit de reprendre la preuve du lemme précédent en remplaçant à chaque fois qu'un produit des  $f_j$  apparaît l'un d'entre eux par le  $h_j$  correspondant pour avoir le résultat.  $\square$

**Exemple 5.22.** On reprend ici un exemple étudié dans [BGM92], exemple 5.2, dans le cadre de la stratification par le polynôme de Bernstein. On se propose ici de l'étudier dans le cadre de la stratification par les multi-valuations des résidus.

On considère le polynôme  $f(x, y) = x^{10} + y^8$ , et la déformation  $F(x, y, s_1, s_2) = f(x, y) + s_1 x^5 y^4 + s_2 x^3 y^6$ , pour des valeurs de  $(s_1, s_2)$  au voisinage de  $(0, 0)$  de sorte que  $\mu$  reste constant. Contrairement à l'exemple (12), la courbe considérée n'est pas irréductible. On définit le poids  $\rho(i, j) = 4i + 5j$ , et l'ordre  $(i, j) < (i', j')$  si et seulement si  $(\rho(i, j) < \rho(i', j'))$  ou  $\rho(i, j) = \rho(i', j')$  et  $j < j'$ .

Remarquons que si  $s_2$  est nul, alors  $F(x, y, s_1, 0)$  est quasi-homogène. La proposition précédente nous donne alors  $\text{val}(\mathcal{J}_{(s_1, 0)}) = \text{val}(\mathcal{O}_{D_{(s_1, 0)}} \setminus \{0\}) + \gamma - 1$ , où  $\text{val}(\mathcal{O}_{D_{s_1, 0}})$  ne dépend pas de  $s_1$  et donc le semigroupe de l'idéal jacobien le long de la strate quasi-homogène ne change pas. Par conséquent, la strate quasi-homogène est une strate de la stratification par le module des résidus.

Des calculs de bases de Gröbner montrent que l'on peut distinguer trois strates pour les valeurs de  $\tau$  : la strate quasi-homogène  $S_1$  définie par  $s_2 = 0$  où  $\tau = 63$ , la strate  $S_2$  définie par  $s_1 = 0$  et  $s_2 \neq 0$  où  $\tau = 54$  et la strate  $S_3$  défini par  $s_1 s_2 \neq 0$  où  $\tau = 53$ . Par conséquent, la stratification par le module des résidus ne peut pas vérifier la condition de frontière : la stratification par le module des résidus étant plus fine que celle par  $\tau$ , il y a une strate  $S \subseteq S_2$  qui contient l'origine dans son adhérence, mais qui ne contient pas toute la strate  $S_1$ .

## Références

- [AF13] Paolo ALUFFI et Eleonore FABER : Splayed divisors and their Chern classes. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 88(2):563–579, 2013.
- [Ale88] A. G. ALEKSANDROV : Nonisolated Saito singularities. *Mat. Sb. (N.S.)*, 137(179)(4):554–567, 576, 1988.
- [BGM88] J. BRIANÇON, M. GRANGER et Ph. MAISONOBE : Le nombre de modules du germe de courbe plane  $x^a + y^b = 0$ . *Math. Ann.*, 279(3):535–551, 1988.
- [BGM92] J. BRIANÇON, F. GEANDIER et Ph. MAISONOBE : Déformation d'une singularité isolée d'hypersurface et polynômes de Bernstein. *Bull. Soc. Math. France*, 120(1):15–49, 1992.
- [CNP11] Pierrette CASSOU-NOGUÈS et Arkadiusz PŁOSKI : Invariants of plane curve singularities and Newton diagrams. *Univ. Iagel. Acta Math.*, (49):9–34, 2011.
- [DdlM87] Félix Delgado de la MATA : The semigroup of values of a curve singularity with several branches. *Manuscripta Math.*, 59(3):347–374, 1987.
- [DdlM88] Félix Delgado de la MATA : Gorenstein curves and symmetry of the semigroup of values. *Manuscripta Math.*, 61(3):285–296, 1988.
- [dJP00] Theo de JONG et Gerhard PFISTER : *Local analytic geometry*. Advanced Lectures in Mathematics. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2000. Basic theory and applications.

- [Fab13] Eleonore FABER : Towards transversality of singular varieties : splayed divisors. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 49(3):393–412, 2013.
- [GLS07] G.-M. GREUEL, C. LOSSEN et E. SHUSTIN : *Introduction to singularities and deformations*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, 2007.
- [GS14] Michel GRANGER et Mathias SCHULZE : Normal crossing properties of complex hypersurfaces via logarithmic residues. *Compos. Math.*, 150(9):1607–1622, 2014.
- [Sai80] Kyoji SAITO : Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 27(2):265–291, 1980.
- [Sch13] Mathias SCHULZE : Saito’s normal crossing condition. *ArXiv.org*, (1311.3795), 2013.
- [Tei77] Bernard TEISSIER : The hunting of invariants in the geometry of discriminants. *In Real and complex singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976)*, pages 565–678. Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977.
- [Tor13] Michele TORIELLI : Deformations of free and linear free divisors. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 63(6):2097–2136, 2013.
- [TS84] Lê Dũng TRÁNG et Kyoji SAITO : The local  $\pi_1$  of the complement of a hypersurface with normal crossings in codimension 1 is abelian. *Ark. Mat.*, 22(1):1–24, 1984.
- [Zar86] Oscar ZARISKI : *Le problème des modules pour les branches planes*. Hermann, Paris, second édition, 1986. Course given at the Centre de Mathématiques de l’École Polytechnique, Paris, October–November 1973, With an appendix by Bernard Teissier.