# SUR LES CHAMPS PHYSIQUES DE DIVERGENCE NULLE ET LES CHAMPS EN CORDE.

Jean Louis Jonot

▶ **To cite this version:**

Jean Louis Jonot. SUR LES CHAMPS PHYSIQUES DE DIVERGENCE NULLE ET LES CHAMPS EN CORDE.. [Rapport de recherche] Académie de Versailles. 2015. hal-01072257v2

**HAL Id: hal-01072257**

**https://hal.science/hal-01072257v2**

Submitted on 29 Mar 2015 (v2), last revised 3 Aug 2020 (v4)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# SUR LES CHAMPS PHYSIQUES DE DIVERGENCE NULLE ET LES CHAMPS EN CORDE.

JEAN LOUIS JONOT

Abstract. We present a study of certain complex fields. The first study is made on the fields which preserve the shape volume along their continuous flow, i.e, the divergence of the fields is zero. The Lie derivative for these fields can be linked to an essentially self-adjoint operator. The spectral analysis and the extension of this operator in the Fock space

$$\mathcal{F}\left(L^2\left(\Omega, d\lambda\right)\right)$$

allows *"to quantify"* this field.

The second study is made on fields said in *"strings"*. It is the geometrical representation which allows to quantify the product of the mass and the tension of the *"string"*.

## 1. Champs essentiellement autoadjoints

Soit $\left(\mathbb{R}^4, \eta\right)$ l'univers de Minkowski où $\eta = -dt^2 + d^2x + d^2y + d^2z$, la mesure de Lebesgue associée est $\sqrt{|\det \eta|}dtdxdydz = dtdxdydz$, c'est-à-dire, la mesure standard de $\mathbb{R}^4$ qui est notée par la suite $d\lambda$.

$L^2\left(\mathbb{R}^4, d\lambda\right)$ est l'espace de Hilbert pour le produit $\langle f \mid g\rangle = \int_{\mathbb{R}^4} f\overline{g}d\lambda$. L'opérateur $\frac{\partial}{\partial t} = \partial_t$ est défini sur

$$\mathrm{dom}\left(i\partial_t\right) = \left\{f \in L^2\left(\mathbb{R}^4, d\lambda\right) : i\partial_t f \in L^2\left(\mathbb{R}^4, d\lambda\right)\right\},$$

c'est-à-dire, l'ensemble des classes de fonctions de $L^2\left(\mathbb{R}^4, d\lambda\right)$, ayant un représentant dérivable presque partout pour la mesure de Lebesgue, dont la classe est dans $L^2\left(\mathbb{R}^4, d\lambda\right)$.

**Lemma 1.** *L'opérateur non borné, $T = \left(\mathrm{dom}\left(i\partial_t\right), i\partial_t\right)$, est densément défini et symétrique.*

*Proof.* $C_c^\infty\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}\right)$ est dense dans $L^2\left(\mathbb{R}^4, d\lambda\right)$ et $C_c^\infty\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}\right) \subset \mathrm{dom}\left(i\partial_t\right)$. Pour deux fonctions $f$ et $g$ de $C_c^\infty\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}\right)$,

$$\int_{\mathbb{R}^4} i\partial_t f\overline{g}d\lambda = \int_{\mathbb{R}^3}\left(\int_{\mathbb{R}} i\partial_t f\overline{g}dt\right)dxdydz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3}\left(\int_{\mathbb{R}} f\overline{i\partial_t g}dt\right)dxdydz = \int_{\mathbb{R}^4} f\overline{i\partial_t g}d\lambda.$$

Les théorèmes de convergence de Lebesgue permettent d'étendre l'égalité précédente aux fonctions presque partout dérivables par rapport à la variable $t$, dont la dérivée presque partout est dans $L^2\left(\mathbb{R}^4, d\lambda\right)$.

*Key words and phrases.* Opérateur de type Dirac, opérateur essentiellement autodjoint, champ en corde, dérivée de Lie, connexion, section de Dirac.

Soit $\phi$ une fonction $C^\infty$, à support compact telle que $0 \leqslant \phi \leqslant 1$ et $\int_{\mathbb{R}^4} \phi d\lambda = 1$. Soit $\{\phi_n\}$, l'approximation de l'identité définie par

$$\phi_n(u) = n^4 \phi(nu),\ u \in \mathbb{R}^4.$$

On a, d'après l'égalité démontrée précédemment,

$$\int_{\mathbb{R}^4} i\partial_t (f * \phi_n) \overline{g * \phi_n} d\lambda = \int_{\mathbb{R}^4} f * \phi_n \overline{i\partial_t (g * \phi_n)} d\lambda$$

pour toutes fonctions $f$, $g$ appartenant à $\mathrm{dom}(i\partial_t)$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. On vérifie que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^4} i\partial_t (f * \phi_n) \overline{g * \phi_n} d\lambda = \int_{\mathbb{R}^4} i\partial_t f \overline{g} d\lambda,$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^4} i\partial_t (f * \phi_n) \overline{g * \phi_n} d\lambda - \int_{\mathbb{R}^4} i\partial_t f \overline{g} d\lambda \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^4} \left| i\partial_t (f * \phi_n) \overline{g * \phi_n} - i\partial_t f \overline{g} \right| d\lambda,$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^4} \left| i\partial_t (f * \phi_n) \overline{g * \phi_n} - i\partial_t f \overline{g * \phi_n} \right| d\lambda + \int_{\mathbb{R}^4} \left| i\partial_t f \overline{g * \phi_n} - i\partial_t f \overline{g} \right| d\lambda.$$

On a

$$\int_{\mathbb{R}^4} \left| i\partial_t (f * \phi_n) \overline{g * \phi_n} - i\partial_t f \overline{g * \phi_n} \right| d\lambda \leqslant \left\| \partial_t (f * \phi_n) - \partial_t f \right\|_2 \left\| g * \phi_n \right\|_2,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^4} \left| i\partial_t f \overline{g * \phi_n} - i\partial_t f \overline{g} \right| d\lambda \leqslant \left\| \partial_t f \right\|_2 \left\| g * \phi_n - g \right\|_2.$$

Pour la première inégalité

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| \partial_t (f * \phi_n) - \partial_t f \right\|_2 = \lim_{n\to+\infty} \left\| (\partial_t f) * \phi_n - \partial_t f \right\|_2 = 0$$

et

$$\left\| g * \phi_n \right\|_2 \leqslant \left\| g \right\|_2 \left\| \phi_n \right\|_1 = \left\| g \right\|_2.$$

Pour la deuxième inégalité

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| g * \phi_n - g \right\|_2 = 0,$$

on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^4} i\partial_t (f * \phi_n) \overline{g * \phi_n} d\lambda = \int_{\mathbb{R}^4} i\partial_t f \overline{g} d\lambda,$$

et comme conséquence

$$\int_{\mathbb{R}^4} i\partial_t f \overline{g} d\lambda = \int_{\mathbb{R}^4} f \overline{i\partial_t g} d\lambda.$$

□

**Corollary 1.** *$T$ est fermable.*

L'opérateur $\overline{T}$ désigne la plus petite extension fermée de $T$, $\mathrm{dom}\left(\overline{T}\right)$ est l'espace de Sobolev $H_t^1\left(\mathbb{R}^4\right)$. La fermeture $\overline{T}$ est symétrique.

**Proposition 1.** *$T$ est essentiellement autoadjoint.*

*Proof.* $\mathrm{Ran}(\partial_t \pm \mathrm{Id})$ contient les fonctions indicatrices des boréliens de $\mathbb{R}^4$ dont la frontière est de mesure nulle. On a

$$\partial_t \mathbf{1}_B \pm \mathbf{1}_B \underset{pp}{=} \pm \mathbf{1}_B,$$

$\mathrm{Ran}(\partial_t \pm \mathrm{Id})$ est dense, donc $\mathrm{Ran}\left(\overline{T} \pm i\,\mathrm{Id}\right)$ contient $i\,\mathrm{Ran}(\partial_t \pm \mathrm{Id})$ qui est dense dans $L^2\left(\mathbb{R}^4, d\lambda\right)$, $T$ est essentiellement autoadjoint. □

Par abus de langage, on note encore $i\partial_t$, l'opérateur $T$ et on pose $\partial_0 = \partial_t, \partial_1 = \partial_x, \partial_2 = \partial_y$ et $\partial_3 = \partial_z$ la base canonique. Tout champ $X$ de $\mathbb{R}^4$ s'écrit, $X = X^j\partial_j$. L'opérateur associé à ce champ est $(\mathrm{dom}\,(L_X), L_X)$ où $L_X$ est la dérivée de Lie le long du champ $X$ et

$$\mathrm{dom}\,(L_X) = \left\{ f \in L^2\left(\mathbb{R}^4, d\mu\right) : L_X(f) \in L^2(\mathbb{R}^4, d\mu),\ f \text{ a un représentant } C^1 \text{ pp} \right\},$$

$d\mu = \rho d\lambda$, $\rho > 0$ sauf peut-être sur un ensemble de Lebesgue de mesure nulle. Le théorème donne une condition sur les $X^j$ pour que l'opérateur $L_X$ soit essentiellement autoadjoint.

**Theorem 1.** *$L_X$ est essentiellement autoadjoint si les conditions suivantes sont réalisées*

$$\partial_j\left(X^j\rho\right) \underset{pp}{=} 0, \tag{1.1}$$

*pour la mesure $d\lambda$ et*

$$\mathrm{Re}\left(X^j\right) = 0. \tag{1.2}$$

*Proof.* Si $f$ et $h$ sont des représentants dérivables presque partout dans les classes choisies dans $L^2\left(\mathbb{R}^4, d\mu\right)$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^4} \left(X^j\partial_j f\right)\overline{h}\rho d\lambda = \int_{\mathbb{R}^4} \left(\partial_j f\right) X^j\overline{h}\rho d\lambda,$$

l'intégrale est convergente et on a, si $\rho$ est de classe $C^1$ presque partout

$$\int_{\mathbb{R}^4} \left(\partial_j f\right) X^j\overline{h}\rho d\lambda = \int_{\mathbb{R}^4} f i\partial_j\left(-iX^j\overline{h}\rho\right) d\lambda,$$

$$\int_{\mathbb{R}^4} f\partial_j\left(X^j\overline{h}\rho\right) d\lambda = \int_{\mathbb{R}^4} f\overline{h}\partial_j\left(X^j\rho\right) d\lambda + \int_{\mathbb{R}^4} f\left(\overline{\overline{X^j}\partial_j h}\right)\rho d\lambda,$$

pour que l'opérateur soit symétrique, il faut que

$$\int_{\mathbb{R}^4} f\overline{h}\partial_j\left(X^j\rho\right) d\lambda + \int_{\mathbb{R}^4} f\left(\overline{\overline{X^j}\partial_j h}\right)\rho d\lambda = \int_{\mathbb{R}^4} f\left(\overline{X^j\partial_j h}\right)\rho d\lambda$$

pour toutes fonctions $f$, $h$ et pour une fonction $\rho$ presque partout de classe $C^1$. On déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^4} f\overline{h}\partial_j\left(X^j\rho\right) d\lambda = 0,$$

et

$$X^j \underset{pp}{=} \overline{X^j}, \text{ pour } j = 0, 1, 2, 3.$$

L'égalité presque partout est une égalité pour des fonctions de classe $C^\infty$, donc

$$\mathrm{Re}\left(X^j\right) = 0,$$

et

$$\partial_j\left(X^j\rho\right) \underset{pp}{=} 0,$$

ce qui est équivalent à

$$L_X(\rho) \underset{pp}{=} -\,\mathrm{div}\,(X).\rho.$$

L'opérateur est symétrique, donc fermable. $\mathrm{Ran}\,(L_X \pm \mathrm{Id})$ est dense dans

$$L^2\left(\mathbb{R}^4, d\mu\right)$$

car l'opérateur $X^j\partial_j \pm \mathrm{Id}$ a une image dense puisqu'il contient les boréliens bornés, de frontière de mesure $\mu$ nulle. □

On a une généralisation de ce résultat lorsque le support du champ $X$ est l'univers $\Omega$ muni d'une métrique pseudo-riemannienne $g$, $\Omega$ est orientable. Si $\lambda$ représente la forme volume associée à $g$, on a

$$\mathcal{L}_X(\lambda) = \operatorname{div}(X).\lambda,$$

$\mathcal{L}_X$ est la dérivée de Lie sur les 4-formes différentielles de $\Omega$. Ceci permet de définir de façon intrinsèque la divergence d'un champ $X$ sur l'univers $\Omega$. Le domaine de $L_X$ se généralise comme suit,

$$\operatorname{dom}(L_X) = \left\{ f \in L^2(\Omega, \rho d\lambda) : L_X(f) \in L^2(\Omega, \rho d\lambda) \right\},$$

on note encore $L_X$, l'opérateur non borné

$$(\operatorname{dom}(L_X), L_X),$$

dans tout ce qui suit $\rho \geqslant 0$, éventuellement nulle sur un ensemble de mesure nulle pour la mesure $d\lambda$.

On peut donner une généralisation du théorème précédent,

**Theorem 2.** *$L_X$ est essentiellement autoadjoint si les conditions suivantes sont réalisées*

$$L_X(\rho) + \operatorname{div}(X)\rho \underset{pp}{=} 0, \tag{1.3}$$

*pour la mesure $d\lambda$ et*

$$\operatorname{Re} X = o.$$

**Remark 1.** *Si $\rho = 1$, $\operatorname{div}(X) = 0$. Les champs essentiellement autoadjoints sont les champs qui conservent le volume le long de leur flot.*

**Definition 1.** *1)Les champs $X$ pour lesquels $L_X$ est essentiellement autoadjoint sont les champs autoadjoints pour la métrique $g$.*

*2)Les champs réels autoadjoints $X$, pour la métrique $g$, sont les champs pour lesquels $iX$ est autoadjoint pour $g$.*

Le champ réel $X$ est autoadjoint si, lorsque l'on munit l'univers $\Omega$ orientable d'une pseudo-métrique de riemann $g$, la 4-forme différentielle $\lambda$ vérifient

$$L_X(\rho) \underset{pp}{=} -\operatorname{div}(X).\rho, \tag{1.4}$$

pour la mesure $d\lambda$ et où, la divergence de $X$ est définie par l'équation

$$\mathcal{L}_X(\lambda) = \operatorname{div}(X).\lambda. \tag{1.5}$$

Sur $\mathbb{R}^4$, si on cherche une mesure de la forme $\rho d\lambda$ qui rende le champ $X$ autoadjoint, il faut que

$$\partial_j\left(X^j\rho\right) \underset{pp}{=} 0,$$

en particulier, $\rho$ est presque partout dérivable pour la mesure de Lebesgue. Cette équation s'écrit

$$\left(\partial_j X^j\right)\rho + X^j\partial_j\rho \underset{pp}{=} 0.$$

On s'intéresse au champ chronologique $\partial_t$ comme opérateur de $L^2\left(\mathbb{R}^4, d\mu\right)$ avec une mesure $d\mu = \rho d\lambda$. Par abus de langage, $\partial_t$ est autoadjoint si

$$\partial_t\rho \underset{pp}{=} 0 \tag{1.6}$$

pour la mesure de Lebesgue $d\lambda$. L'équation 1.6, permet d'affirmer qu'il existe un sous ensemble $E$ de mesure de Lebesgue nulle tel que sur chaque composante connexe de $\mathbb{R}^4 \setminus E$, $\rho$ est une fonction indépendante de la variable temps $t$, donc

$$\rho(t,x,y,z) \underset{pp}{=} \zeta(x,y,z)$$

pour la mesure de Lebesgue et

$$\int_{\mathbb{R}^4} \phi\overline{\psi} d\mu = \sum_C \int_C \zeta\phi\overline{\psi} d\lambda,$$

où $C$ parcourt l'ensemble des composantes connexes de $\mathbb{R}^4 \setminus E$. Si on pose $\phi_C = \mathbf{1}_C\phi$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^4} \phi\overline{\psi} d\mu = \sum_C \int_{\mathbb{R}^4} \zeta_C\phi_C\overline{\psi_C} d\lambda.$$

Le champ $\rho\partial_t$ s'écrit, en utilisant le procédé de sommation d'Einstein pour les sommes infinies

$$\rho\partial_t = \zeta_C\partial_t^C,$$

où la classe de $\partial_t^C\phi$ dans $L^2\left(\mathbb{R}^4, d\lambda\right)$ est celle de $\partial_t\left(\mathbf{1}_C\phi\right)$. On a une décomposition de l'opérateur $\rho\partial_t$ en une somme d'opérateurs proportionnels au champ chronologique dont le coefficient de proportionalité ne dépend que de la position espace de l'événement considéré.

**Proposition 2.** *Si $\partial_t\rho \underset{pp}{=} 0$ pour la mesure de Lebesgue alors $\rho\partial_t$ est un champ autoadjoint pour la métrique de Minkowski.*

**Conclusion 1.** *Le champ chronologique $\partial_t$ est autoadjoint pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^4$. Si on change la mesure de $\mathbb{R}^4$ par une mesure $d\mu$, cette mesure est de la forme $d\mu = \rho d\lambda$. Le champ chronologique reste autoadjoint pour cette mesure si*

$$\partial_t\rho \underset{pp}{=} 0,$$

*presque partout pour la mesure de Lebesgue $d\lambda$.*

## 2. Analyse spectrale des champs autoadjoints

Le théorème de Von Neumann permet d'associer à chaque champ autoadjoint $X$, une mesure spectrale

$$E_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}\left(L^2(\Omega, d\lambda)\right),$$

qui à chaque borélien $B$ de $\mathbb{R}$ associe un projecteur $E_X(B)$ de l'espace d'Hilbert complexe $L^2(\Omega, d\lambda)$. Pour chaque couples $(\phi,\psi)$ de fonctions de $L^2(\Omega, d\lambda)$, on définit la mesure complexe $\nu_{(\phi,\psi)}$ sur les boréliens de $\mathbb{R}$

$$\nu_{(\phi,\psi)}(B) = \int_\Omega E_X(B)(\phi)\,\overline{\psi} d\lambda.$$

En utilisant la décomposition de Paul Levy, $\nu_\phi = \nu_{(\phi,\phi)}$ s'écrit comme une somme de mesures

$$\nu_\phi = \nu_\phi^{ac} + \nu_\phi^p + \nu_\phi^{sc},$$

où $\nu_\phi^{ac}$ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, $\nu_\phi^p$ est une somme de mesures de Dirac et $\nu_\phi^{sc}$ est une mesure singulièrement continue, c'est-à-dire, la fonction de répartition est une fonction continue et la mesure

n'est chargée que sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Pour chaque $\phi \in L^2(\Omega, d\lambda)$, il existe trois fonctions $\phi^{ac}$, $\phi^p$ et $\phi^{sc}$ telles que

$$\phi = \phi^{ac} + \phi^p + \phi^{sc},$$

cette décomposition est unique et chaque fonction vérifie

$$\nu_{\phi^\bullet}(B) = \int_\Omega E_X(B)(\phi^\bullet)\,\overline{\phi^\bullet} d\lambda, \text{ où } \bullet \text{ est } ac, p \text{ ou } sc.$$

Chaque champ autoadjoint $X$ décompose $L^2(\Omega, d\omega)$ en une somme orthogonale de trois sous-espaces

$$L^2(\Omega, d\lambda) = {L^2}_{X,ac}(\Omega, d\lambda) \oplus {L^2}_{X,p}(\Omega, d\lambda) \oplus {L^2}_{X,sc}(\Omega, d\lambda).$$

Plus généralement si $T$ désigne un opérateur non borné, autoadjoint dont la mesure spectrale est

$$E_T : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(L^2(\Omega, d\lambda)),$$

il y a une décomposition en somme orthogonale

$$L^2(\Omega, d\lambda) = {L^2}_{T,ac}(\Omega, d\lambda) \oplus {L^2}_{T,p}(\Omega, d\lambda) \oplus {L^2}_{T,sc}(\Omega, d\lambda),$$

la partie ${L^2}_p(\Omega, d\lambda)$ est une somme orthogonale de sous-espaces propres de la fermeture de $T$, on dit que $\phi^p$ est la *"représentation discrétisée"* ou *"quantique"* de l'onde pour l'opérateur $T$. L'onde $\phi^{ac}$ est la partie mesurable pour $T$ et $\phi^{sc}$ est la partie résiduelle de l'onde $\phi$. La décomposition orthogonale dépend de l'opérateur, mais également du choix de la mesure Lebesguienne fixée sur l'univers $\Omega$.

**Definition 2.** *Les valeurs propres d'un opérateur $T$ sont les valeurs $\mu \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le sous-espace*

$$E_\lambda = \left\{\phi \in L^2(\Omega, d\lambda) : T\phi = \mu\phi\right\},$$

*est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega, d\lambda)$, non réduit à $\{o\}$. Si la dimension de ce sous-espace propre est fini, on dit que la valeur propre $\lambda$ est de type fini. $\mathcal{V}_T$ sont les valeurs propres de $T$ et $\mathcal{W}_T$ sont les valeurs propres de type fini.*

**Remark 2.** *Si $T$ est borné, les sous-espaces $E_\lambda$ sont fermés.*

**Lemma 2.** *Si $T$ est autoadjoint et $\mu \in \mathcal{V}_T$ alors $E_T(\{\mu\})$ est le projecteur sur le sous-espace propre $E_\mu$ parallèlement à $E_\mu^\perp$.*

**Lemma 3.** ${L^2}_{T,p}(\Omega, d\lambda)$ *est la somme orthogonale des sous-espaces propres de $T$.*

L'opérateur $i\partial_t$ est essentiellement autoadjoint. Une valeur propre $\mu$ de $i\partial_t$ est une valeur réelle pour laquelle $\ker(i\partial_t - \mu\,\mathrm{Id})$ est un sous espace vectoriel fermé et non nul. L'équation

$$i\partial_t\phi \underset{pp}{=} \mu\phi$$

pour la mesure de Lebesgue, a des solutions dans $L^2\left(\mathbb{R}^4, d\lambda\right)$, non nulles. Soit $\phi_n(t) = \mathbf{1}_{[-n,n]}(t)\exp(-i\mu t)\,\psi(x,y,z)$, $\phi_n \in L^2\left(\mathbb{R}^4, d\lambda\right)$ si $\psi \in L^2\left(\mathbb{R}^3, dxdydz\right)$. La suite $\{\phi_n\}$ est dans $\ker(i\partial_t - \mu\,\mathrm{Id})$, mais

$$\lim_{n\to+\infty} \phi_n(t) = \phi(t),$$

avec $\phi(t) = \exp(-i\mu t)\,\psi(x,y,z)$ et $\phi \notin L^2\left(\mathbb{R}^4, d\lambda\right)$. En particulier,

$$L^2_{\partial_t,p}\left(\mathbb{R}^4, d\lambda\right) = \{o\}$$

relativement au champ chronologique $\partial_t$, les ondes $\phi$ n'ont pas de *"partie discrétisée"*.

On a le *"procédé de discrétisation"* suivant. Soit $f$ une fonction borélienne localement intégrable sur $\mathbb{R}$, l'application $B \to E_{f(\partial_t)}(B) = E_{\partial_t}\left(f^{-1}(B)\right)$ est une mesure spectrale, d'après le théorème de Von Neumann, il existe un unique opérateur autoadjoint, noté $f(i\partial_t)$, dont la mesure spectrale est $E_{f(i\partial_t)}$. Les valeurs propres $\mu$ de cet opérateur sont celles pour lesquelles $\ker(f(i\partial_t) - \mu \mathrm{Id})$ est un sous espace vectoriel fermé non nul.

Pour quantifier $\partial_t$, on prend une partition de $\mathbb{R}$ formée d'une suite de boréliens $\{B_n\}$ de $\mathbb{R}$. On se fixe une suite $\mu_n \in \mathbb{R}$, la quantification de $\partial_t$ est $f(i\partial_t)$ où

$$f = \sum_n \mu_n \mathbf{1}_{B_n}.$$

Dans cette situation, on dit que l'on a discrétisé le temps le long de la suite $\{(B_n, \mu_n)\}$ et on a

$$f(i\partial_t) = \sum_n \mu_n E_{\partial_t}(B_n). \tag{2.1}$$

**Remark 3.** *Si* $\sum_n |\mu_n| < +\infty$ *et* $\sup\{\|E_{\partial_t}(B_n)\|\} < +\infty$ *alors* $f(i\partial_t)$ *est borné.*

## 3. Les espaces de Sobolev attachés aux fibrés des états de l'univers

On généralise la notion d'espace de Hilbert $L^2(\Omega, d\lambda)$ définie par une mesure Lebesguienne $d\lambda$ sur l'univers $\Omega$, à un fibré

$$\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{H})$$

des états de l'univers $\Omega$. Dans cette situation, $\mathcal{H}$ est un espace d'Hilbert, $E$ est l'espace total et $\pi$ est la projection de $E$ sur $\Omega$. On rappelle qu'un fibré d'état de l'univers $\Omega$ est un fibré complexe muni d'une section hermitienne, notée $\langle \bullet \mid \bullet \rangle$, induite par la fibre $\mathcal{H}$ [5]. Chaque fibre est muni d'un produit scalaire hermitien. L'univers $\Omega$ est muni d'une orientation et d'une mesure Lebesguienne $\lambda$. On définit le produit scalaire

$$\langle \phi \mid \psi \rangle = \int_\Omega \langle \phi(\omega) \mid \psi(\omega) \rangle_\omega \, d\lambda(\omega),$$

$\phi$ et $\psi$ sont deux sections de $\zeta$. L'espace $L^2(\zeta)$ est la complétion de l'espace vectoriel normé

$$\{\phi \in \Gamma(E) : \|\phi\| < +\infty\}$$

où $\Gamma(E)$ est l'ensemble des sections de classe $C^\infty$ de $\zeta$ et $\|\phi\|^2 = \langle \phi \mid \phi \rangle$. L'espace $L^2(\zeta)$ est un espace d'Hilbert que l'on note par la suite $L^2(E, d\lambda)$.

On peut définir de façon analogue, les espaces de Sobolev sur $\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{H})$. Si $\nabla$ est une connexion sur le fibré $\zeta$, les extensions de $\nabla$ s'écrivent

$$d_n^\nabla : \Gamma(\Lambda^n(\Omega) \otimes E) \to \Gamma\left(\Lambda^{n+1}(\Omega) \otimes E\right)$$

avec, $d_0^\nabla = \nabla$, $\Lambda^0(\Omega) \otimes E = E$ et

$$d_n^\nabla(\psi \otimes s) = d\psi \otimes s + (-1)^n \psi \wedge \nabla s, \psi \in \Lambda^n(\Omega).$$

On définit l'extension de rang $n$ d'une section $\gamma$ de Dirac, par la section $\gamma_n \in \Gamma(\mathrm{L}(\Lambda^n(\Omega) \otimes E, E))$ où

$$\gamma_n\left(\left(d^1 \wedge d^2 \wedge \cdots \wedge d^n\right) \otimes s\right) = \left[\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \cdots, \gamma^{d^n}\right](s), \tag{3.1}$$

et on prolonge $\gamma_n$ par $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$-linéarité sur $\Lambda^n(\Omega) \otimes E$ [2]. Alors

$$\nabla_\gamma^n = \gamma_n \circ \nabla_{n-1} \text{ avec } \nabla_{n-1} = d_{n-1}^\nabla \circ \cdots \circ d_0^\nabla$$

appartient à $\mathrm{End}(\zeta)$. On définit pour une section $\phi$ la norme d'ordre $p$, $\|\phi\|_p = \int_\Omega |\phi|^p \, d\lambda$ avec, $|\phi| = \sqrt{\langle \phi \mid \phi \rangle}$ et

$$\|\phi\|_{m,p} = \sum_{k=0}^{m} \left\|\nabla_\gamma^k \phi\right\|_p, \, 1 \leqslant p < +\infty \text{ et } \nabla_\gamma^0 \phi = \phi.$$

On pose $\Gamma^{m,p}(\zeta) = \left\{\phi \in \Gamma(\zeta) : \|\phi\|_{m,p} < +\infty\right\}$, les espaces de Sobolev attachés au fibré hermitien $\zeta$ sont définis par la complétion des espaces normés $\Gamma^{m,p}(\zeta)$ et sont notés

$$\mathcal{W}^{m,p}(\zeta).$$

Par construction, ces espaces sont des espaces de Banach. Si on pose

$$\mathcal{H}^m(\zeta) = \mathcal{W}^{m,2}(\zeta),$$

les espaces obtenus sont des espaces d'Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle \phi \mid \psi \rangle_m = \sum_{k=0}^{m} \int_\Omega \left\langle \nabla_\gamma^k \phi \mid \nabla_\gamma^k \phi \right\rangle d\lambda.$$

L'exemple le plus simple est celui de l'univers de Minkowski $\left(\mathbb{R}^4, \eta\right)$, dans cette situation tous les fibrés des états sont triviaux

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}^k \\ \downarrow \pi \\ \mathbb{R}^4 \end{array},$$

et sont munis de la section hermitienne canonique

$$z^1 \overline{z^2} = \sum_{\mu=1}^{k} z_\mu^1 \overline{z_\mu^2}, \; z^\nu = (z_1^\nu, z_2^\nu, \cdots, z_k^\nu) \in \mathbb{C}^k,$$

la connexion est la connexion de Levi-Civita $\nabla_\eta$ associée à la métrique de Minkowski $\eta$. Les matrices de Dirac associées à la section de Dirac $\gamma$, $\gamma^\mu(\phi) = \gamma(d_\mu \otimes \phi)$ où $\{d_\mu\}$ est la base duale de $\{\partial_\mu\}$, doivent vérifier

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I_4 \text{ [2] [3]},$$

on en déduit $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = O_4$ si $\mu \neq \nu$, $\left\{\gamma^0, \gamma^0\right\} = -2I_4$ et $\{\gamma^\mu, \gamma^\mu\} = 2I_4$ pour $\mu = 1, 2, 3$. On peut écrire

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu \text{ si } \mu \neq \nu,$$
$$\left(\gamma^0\right)^2 = -I_4,$$
$$\left(\gamma^\mu\right)^2 = I_4.$$

**Definition 3.** *Le goupe $\mathcal{M}$ engendré par les $\gamma^\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ et ayant pour relations $\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu$, $\left(\gamma^0\right)^2 = -I_4$ et $\left(\gamma^\mu\right)^2 = I_4$ est le groupe de Minkowski, on le note*

$$\mathcal{M} = \left\{\gamma^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3 : \gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu, \left(\gamma^0\right)^2 = -I_4, \left(\gamma^\mu\right)^2 = I_4\right\}.$$

*Dans le cas général, le groupe de Dirac sur $\left(\mathbb{R}^4, g\right)$ est*

$$\mathcal{D} = \left\{\gamma^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3 : \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I_4\right\}.$$

**Remark 4.** *On peut généraliser le groupe de Dirac à $(\Omega, g)$ muni d'un fibré des états ayant une connexion $\nabla$ et une section de Dirac $\gamma$.*

**Proposition 3.** *Les matrices* $\gamma^0 = \begin{pmatrix} O_2 & I_2 \\ -I_2 & O_2 \end{pmatrix}$ *et* $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} O_2 & \sigma_\mu \\ \sigma_\mu & O_2 \end{pmatrix}$, $\mu = 1,2,3$ *où les matrices* $\sigma_\mu$ *sont les matrices de Pauli d'ordre* 2, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, *vérifient* $\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$, $\left(\gamma^0\right)^2 = -I_4$ *et* $\left(\gamma^\mu\right)^2 = I_4$ *pour* $\mu = 1,2,3$.

**Remark 5.** *Ce résultat est à comparer à [4].*

La section de Dirac est entièrement définie par les matrices de Dirac, la connexion est définie par la connexion de Levi-Civita de la métrique et la mesure définie par cette métrique $\eta$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^4$. On peut ainsi, définir tous les espaces de Sobolev des états attachés à l'univers de Minkowski $\left(\mathbb{R}^4, \eta\right)$.

**Remark 6.** *Les espaces de Hilbert* $\mathcal{H}^m(\zeta)$ *sont définis pour l'étude spectrale de l'extension de la dérivée de Lie aux champs complexes en identifiant* $\mathcal{L}_X$ *à un opérateur*

$$\mathcal{L}_X : \mathcal{H}^m(\zeta) \to \mathcal{H}^m(\zeta),\ \mathcal{L}_X(Y) = [X,Y]$$

*avec* $\zeta = (T_{\mathbb{C}}\Omega, \pi, \Omega, \mathcal{H})$.

## 4. Opérateur de type Dirac associé à un champ essentiellement autoadjoint

Soit $\mathcal{H}$ un espace d'Hilbert, on note $\mathcal{H}^{\otimes n}$, le tensorialisé d'ordre $n$ et $\mathcal{H}_+^{\otimes n}$ et $\mathcal{H}_-^{\otimes n}$ sont respectivement le symétrisé et l'antisymétrisé de $\mathcal{H}^{\otimes n}$.

$\mathcal{H}_+^{\otimes n}$ est engendré par

$$\{h_1, h_2, \cdots, h_n\} = \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}(\{1,2,\cdots,n\})} h_{\sigma(1)} \otimes h_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes h_{\sigma(n)} \tag{4.1}$$

et $\mathcal{H}_-^{\otimes n}$ est engendré par

$$[h_1, h_2, \cdots, h_n] = \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}(\{1,2,\cdots,n\})} \epsilon(\sigma)\, h_{\sigma(1)} \otimes h_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes h_{\sigma(n)}, \tag{4.2}$$

où $\mathrm{Perm}(\{1,2,\cdots,n\})$ est l'ensemble des permutations de $\{1,2,\cdots,n\}$ et $\epsilon(\sigma)$ est la signature de $\sigma$. On note

$$[h_1, h_2, \cdots, h_n]_+ = \{h_1, h_2, \cdots, h_n\}$$

et

$$[h_1, h_2, \cdots, h_n]_- = [h_1, h_2, \cdots, h_n].$$

L'espace de *Bose-Fock* et l'espace de *Fermi-Fock* sont respectivement

$$\mathcal{F}_+(\mathcal{H}) = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_+^{\otimes n} \text{ et } \mathcal{F}_-(\mathcal{H}) = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_-^{\otimes n}$$

avec $\mathcal{H}_S^{\otimes 0} = \mathcal{H}_A^{\otimes 0} = \mathcal{H}^{\otimes 0} = \mathbb{C}$, l'espace de *Bose-Fermi-Fock est*

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \mathcal{F}_+(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{F}_-(\mathcal{H}).$$

Les éléments de l'espace de Fock s'écrivent $\phi = \{\phi^n\}$, on identifie $\phi^n$ à

$$\{0, 0, \cdots, \phi^n, 0, \cdots\},$$

on pose $\mathbf{1}_{\pm}=\{1,0,0,\cdots\}\in\mathcal{F}_{\pm}(\mathcal{H})$, $\mathbf{1}_{+}$ représente le *"boson fock vacuum"* et $\mathbf{1}_{-}$ le *"fermion fock vacuum"*. En général, si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ sont deux espaces de Hilbert, l'espace de Bose-Fermi-Fock pour le couple $(\mathcal{H},\mathcal{K})$ est

$$\mathcal{F}(\mathcal{H},\mathcal{K})=\mathcal{F}_{+}(\mathcal{H})\otimes\mathcal{F}_{-}(\mathcal{K}),$$

pour nous $\mathcal{H}=L^{2}(\Omega,d\lambda)$ pour les champs scalaires et $\mathcal{H}=L^{2}(T_{\mathbb{C}}\Omega,d\lambda)$ dans le cas des champs de vecteurs complexes, où $T_{\mathbb{C}}\Omega$ est muni d'une section hermitienne et $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue induite par la métrique de Lorentz sur l'univers $\Omega$.

Si $\mathcal{H}=\mathcal{K}$, on pose

$$\mathcal{F}(\mathcal{H})=\mathcal{F}(\mathcal{H},\mathcal{H}).$$

Pour tout champ $X\in\mathcal{H}(g)$, on peut construire des opérateurs densément définis, fermés et non bornés, qui sont les opérateurs dits d'*annulation* et dont les duaux sont les opérateurs de *création* des *champs bosoniques* et des *champs fermioniques*

$$A(X)\left([X_1,X_2,\cdots,X_n]_{\pm}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\epsilon_{\pm}(j)\langle X\mid X_j\rangle_{\mathcal{H}(g)}\left[X_1,X_2,\cdots,\widehat{X_j},\cdots,X_n\right]_{+},\tag{4.3}$$

avec

$$\epsilon_{+}(j)=1\text{ et }\epsilon_{-}(j)=(-1)^{j-1}.$$

Les propriétés de ces opérateurs sont les suivantes

$$A_{\pm}(X)\mathbf{1}_{\pm}=0,$$

$$\mathcal{H}_{\pm}^{\otimes n}=\overline{\text{Vect}\left\{A_{\pm}(X_1)^{*}\cdots A_{\pm}(X_n)^{*}\mathbf{1}_{\pm}:X_j\in\mathcal{H}(g),j=1,2,\cdots,n\right\}},$$

et on a les règles d'anticommutation

$$\left[A_{\pm}(X),A_{\pm}(Y)^{*}\right]_{\mp}=\langle X\mid Y\rangle_{\mathcal{H}(g)},$$

$$\left[A_{\pm}(X),A_{\pm}(Y)\right]_{\mp}=0,$$

$$\left[A_{\pm}(X)^{*},A_{\pm}(Y)^{*}\right]_{\mp}=0.$$

**Remark 7.** *Avec les conventions* $[A,B]_{-}=AB-BA$ *et* $[A,B]_{+}=AB+BA$.

La construction précédente peut se faire en prenant pour espace de Hilbert, l'espace $\mathcal{H}=L^{2}(\Omega,d\lambda)$ ou $\mathcal{H}=L^{2}(T_{\mathbb{C}}\Omega,d\lambda)$, où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue définie par la métrique Lorentzienne $g$. On construit les opérateurs d'*annulation* $A_{\pm}$ et de création $A_{\pm}^{*}$ qui à chaque onde $\phi$ associe un opérateur sur l'espace $\mathcal{F}_{\pm}$. On étend ces opérateurs à l'espace de Fock $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ comme suit

$$A^{+}(\phi)=A_{+}(\phi)\otimes\text{Id}\text{ et }A^{-}(\phi)=\text{Id}\otimes A_{-}(\phi),$$

Id est l'application identique sur les espaces respectifs $\mathcal{F}_{-}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{F}_{+}(\mathcal{H})$.

Lorsque le champ $X$ est essentiellement autoadjoint, la fermeture de la dérivée de Lie $\overline{L_X}$ est densément définie et autoadjointe. $\overline{L_X}^{*}$ est l'application duale. On pose $\mathcal{D}_X$, le sous-espace vectoriel défini par

$$\mathcal{D}_X=\text{Vect}\left\{\begin{array}{c}A^{+}(\phi_1)^{*}\cdots A^{+}(\phi_n)^{*}A^{-}(\psi_1)^{*}\cdots A^{-}(\psi_p)^{*}\mathbf{1}:\\ \phi_j\in\text{dom}(T),\psi_k\in\text{dom}(T^{*}),n,p\in\mathbb{N}\end{array}\right\}$$

où $\mathbf{1}=\mathbf{1}_{+}\otimes\mathbf{1}_{-}$.

**Theorem 3.** *Si $X$ est un champ essentiellement autoadjoint, il existe un unique opérateur $d_X$ , densément défini et fermé de l'espace de Fock $\mathcal{F}\left(L^2(\Omega, d\lambda)\right)$ vérifiant,*
*1)$\mathcal{D}_X$ est un coeur de $d_X$,*
*2)Pour*

$$\Psi = A^+(\phi_1)^* \cdots A^+(\phi_n)^* A^-(\psi_1)^* \cdots A^-(\psi_p)^* \mathbf{1}, \tag{4.4}$$

*on a*

$$d_X \Psi = 0 \text{ pour } n = 0,$$

$$d_X \Psi = \sum_{j=1}^{n} A^+(\phi_1)^* \cdots \widehat{A^+(\phi_j)} \cdots A^+(\phi_n)^* A^-(\psi_1)^* \cdots A^-(\psi_p)^* \mathbf{1}.$$

*De plus, $d_X^2 = o$ et pour chaque base hilbertienne $\{e_n\} \subset \mathrm{dom}\left(\overline{L_X}^*\right)$*

$$d_X \Psi = \sum_{n=1}^{\infty} A^+\left(\overline{L_X}^* e_n\right) A^-(e_n)\Psi,\ \Psi \in \mathcal{D}_X,$$

*pour la topologie forte de $\mathcal{F}\left(L^2(\Omega, d\lambda)\right)$, si $\{\phi_n\} \subset \mathrm{dom}\left(\overline{L_X}\right)$ alors*

$$\langle \Phi \mid \Psi \rangle_{\mathcal{F}(L^2(\Omega,d\lambda))} = \lim_{N\to\infty} \left\langle \Phi \mid \sum_{n=1}^{N} A^+(e_n) A^-\left(\overline{L_X} e_n\right)\Psi \right\rangle,\ \Phi,\ \Psi \in \mathcal{D}_X. \tag{4.5}$$

$\mathcal{D}_X \subset \mathcal{D}(d_X^*)$ *et*

$$d_X^* \Psi \tag{4.6}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \epsilon_-(k) A^+\left(\overline{L_X}^* \psi_k\right)^* A^+(\phi_1)^* \cdots A^+(\phi_n)^* A^-(\psi_1)^* \cdots \widehat{A^-(\psi_k)}^* \cdots A^-(\psi_p)^* \mathbf{1},$$

*si $\Psi$ vérifie l'équation 4.4.*

*Proof.* C'est un cas particulier de la proposition 2.1 de [1], appliqué à l'opérateur non borné fermable et symétrique associé à la dérivée de Lie pour un champ de divergence nulle, c'est-à-dire, essentiellement autoadjoint pour la métrique $g$. □

**Definition 4.** *L'opérateur de Dirac associé au champ essentiellement autoadjoint est défini par*

$$Q_X = d_X + d_X^*,\ \mathrm{dom}(Q_X) = \mathrm{dom}(d_X) \cap \mathrm{dom}(d_X^*).$$

Pour l'opérateur, non borné autoadjoint $T$ sur un espace d'Hilbert $\mathcal{H}$, il existe un unique opérateur autoadjoint $T_n$ sur $\mathcal{H}^{\otimes n}$, pour lequel le produit tensoriel algébrique de $n$ exemplaires de $\mathrm{dom}(T)$ soit un *"coeur" de* $\mathrm{dom}(T_n)$, $T_n$ vérifie

$$T_n(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n) = \sum_{j=1}^{n} \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_{j-1} \otimes T(\phi_j) \otimes \phi_{j+1} \otimes \cdots \otimes \phi_n,$$

où $\phi_j \in \mathrm{dom}(T_n)$, si on pose $T_0 = o$ l'opérateur identiquement nul, on construit l'opérateur autoadjoint

$$\Gamma(T) = \oplus_{n=0}^{\infty} T_n,$$

cet opérateur défini sur

$$\oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n},$$

est appelée la deuxième quantification de l'opérateur $T$ [8]. On a,

$$\Gamma(T)\left(\mathcal{F}_{\pm}(\mathcal{H})\right) \subset \mathcal{F}_{\pm}(\mathcal{H}).$$

On pose $\Gamma_{\pm}(T) = \Gamma(T) \mid_{\mathcal{F}_{\pm}(\mathcal{H})}$, pour la fermeture de l'opérateur associé à la dérivée de Lie, on pose $\Gamma_{\pm}(X) = \Gamma(X) \mid_{\mathcal{F}_{\pm}(\mathcal{H})}$. Le Laplacien associé à l'opérateur de type Dirac est

$$\Delta_X = \Gamma_+\left(\overline{L_X}^* \circ \overline{L_X}\right) \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \Gamma_-\left(\overline{L_X} \circ \overline{L_X}^*\right). \tag{4.7}$$

**Theorem 4.** *Si* $\mathrm{div}(X) = o$ *alors*

$$\Delta_X = Q_X^2 = d_X^* d_X + d_X d_X^*. \tag{4.8}$$

*Proof.* Ce théorème est une conséquence directe du théorème 2.2 de [1]. □

On rappelle que deux champs $X$ et $Y$, essentiellement autoadjoints sont fortement commutatifs, si les mesures spectrales de $\overline{L_X}$ et $\overline{L_Y}$ commutent. En d'autres termes, ils sont dits fortement anticommutatifs si

$$\exp\left(it\overline{L_X}\right)\overline{L_Y} \subset \overline{L_Y}\exp\left(-it\overline{L_X}\right),\ t \in \mathbb{R}.\ [7],\ [9]$$

Le théorème qui suit est une caractérisation de l'anticommutation des opérateurs $Q_X$ et $Q_Y$.

**Theorem 5.** *$Q_X$ et $Q_Y$ sont fortement anticommutatifs si et seulement si $\overline{L_X}$ et $\overline{L_Y}$ sont fortement anticommutatifs. Dans ce cas, $\overline{L_X} \pm \overline{L_Y}$ sont des opérateurs non bornés autoadjoints et $Q_{X\pm Y} = Q_X \pm Q_Y$.*

*Proof.* La preuve est une conséquence directe du théorème 3.1 de [1], appliqués aux opérateurs $\overline{L_X}$ et $\overline{L_Y}$. □

**Conclusion 2.** *L'ensemble des champs essentiellement autoadjoints, noté $\mathcal{Q}(\Omega, g)$ sont les champs qui conservent le volume le long de leur flot. Le sous-espace $\mathcal{Q}(\Omega, g)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\Gamma(\Omega)$,*

$$\mathcal{Q}(\Omega, g) = \ker(\mathrm{div}).$$

*La fermeture de l'opérateur défini par la dérivée de Lie, le long d'un champ de $\mathcal{Q}(\Omega, g)$ est un opérateur autoadjoint, non borné. Cet opérateur définit dans l'espace de Fock associé à l'espace d'Hilbert $L^2(\Omega, d\lambda)$, un opérateur de type Dirac noté $Q_X$, qui quantifie le champ essentiellement autoadjoint $X$.*

## 5. Les champs en cordes

On a donné une étude des champs de façon analytique en introduisant la dériveé de Lie de ce champ, on étudie les champs par une approche géométrique. Dans cette section, on suppose que l'univers $\Omega$ est une variété de dimension 4, orientée. Le fibré tangent est muni d'une connexion $\nabla$ et d'une section de Dirac $\gamma$ qui vérifie l'équation relativiste quantique dans toute carte

$$Ric^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R\gamma^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta} + \Lambda_0\gamma^{\alpha\beta},\ [5] \tag{5.1}$$

$\gamma^{\alpha\beta}$ est le tenseur de Poisson défini par

$$\gamma^{\alpha\beta} = \frac{1}{8}\mathrm{Trace}\left(\left\{\gamma^{\alpha}, \gamma^{\beta}\right\}\right) = \frac{1}{4}\mathrm{Trace}\left(\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\right),$$

$\gamma^{\alpha}$ sont les matrices de Dirac associées à $\gamma$ dans cette carte.

On définit l'opérateur d'évolution sur le complexifié du fibré tangent comme la section du fibré $\Lambda^1_{\mathbb{C}}\Omega \otimes T_{\mathbb{C}}\Omega$,

$$\Phi(X + iY) = \gamma \circ \nabla(X) + i\gamma \circ \nabla(Y).$$

L'équation d'évolution des champs complexes est

$$\Phi(\Psi) = -i\frac{mc}{\hbar}\Psi, \tag{5.2}$$

où $m$ est la densité de masse associée au champ $\Psi$. Lorsque l'on munit l'univers d'une métrique de Lorentz avec une orientation du temps défini par un champ chronologique $T$, l'opérateur pseudo-hamiltonien $H$ de l'équation Dirac-Weyl-Fock est

$$H = -\frac{\hbar}{mc}\mathcal{L}_T \circ \Phi - i\partial_T(\log(m))\,\mathrm{Id}_{T_{\mathbb{C}}\Omega}, \tag{5.3}$$

$\mathcal{L}_T$ est l'extension de la dérivée de Lie $\partial_T$ aux champs complexes [6]. On peut définir l'équation de Dirac par sur un fibré par

$$H\phi = i\lambda\nabla_T\phi$$

où

$$H = \gamma \otimes \nabla$$

$\nabla$ est une connexion définie sur le fibré et $\gamma$ est une section de Dirac du fibré.

**Remark 8.** *1)Dans une première approche on parlera de champ complexe et de masse ponctuelle pour définir la notion de pseudo-particule et de masse.*

*2)La connexion et la section de Dirac sont définies et vérifient dans tout "local frame" l'équation relativiste quantique 5.1. L'opérateur $i\Phi$ est un opérateur hermitien pour une structure hermitienne donnée. L'ensemble de toutes les sections des formes hermitiennes de $T_{\mathbb{C}}\Omega$ qui rendent l'opérateur $i\Phi$ hermitien est noté $\mathcal{H}_\Phi$.*

*3)Un champ $\Psi$ vérifie une équation d'évolution de type 5.2. La masse ponctuelle ou densité de masse associée à $\Psi$ est la fonction $m$ fixée par une section de $\mathcal{H}_\Phi$.*

**Definition 5.** *Les champs en corde sont des champs complexes $\Psi$ pour lesquels*

$$\dim(\mathrm{Vect}\{\mathrm{Re}\,\Psi, \mathrm{Im}\,\Psi\}) = 2,$$

*et*

$$[\mathrm{Re}\,\Psi, \mathrm{Im}\,\Psi] \in \mathrm{Vect}\{\mathrm{Re}\,\Psi, \mathrm{Im}\,\Psi\}.$$

Ces hypothèses permettent de définir un feuilletage de l'univers, de dimension 2. Chaque feuille représente une trajectoire possible d'une corde, dite surface d'univers, la corde est une feuille du feuilletage de $S$, défini par $\mathrm{Im}\,\Psi$. Sous les hypothèses précédentes, il existe deux fonctions réelles $a$ et $b$, de classe $C^\infty$ sur $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$[\mathrm{Re}\,\Psi, \mathrm{Im}\,\Psi] = a\,\mathrm{Re}\,\Psi + b\,\mathrm{Im}\,\Psi.$$

On peut associer à un champ en corde une fonction définie sur $\Omega$ à valeurs complexes, $\Theta = a + ib$.

**Remark 9.** $[\mathrm{Re}\,\Psi, \mathrm{Im}\,\Psi] = \mathcal{L}_{\mathrm{Re}\,\Psi}\,\mathrm{Im}\,\Psi$ *où $\mathcal{L}_{\mathrm{Re}\,\Psi}$ est la dérivée de Lie étendue aux champs réels.*

**Definition 6.** *1)Une supercorde de $S$ est une réunion de cordes de $S$. Si cette réunion est finie, une supercorde est une "particule".*

*2)La fonction $\Theta$ est la fonction d'onde associée au champ $\Psi$.*

Soit $S$ une surface d'univers et $\mathrm{in} : S \to \Omega$, l'inclusion de $S$ dans $\Omega$. $T_\omega \mathrm{in} : T_\omega S \to T_\omega \Omega$ est un isomorphisme de $T_\omega S$ sur $\mathrm{Vect}\{\mathrm{Re}\,\Psi(\omega), \mathrm{Im}\,\Psi(\omega)\}$. Par la suite, on identifie $T_\omega S$ et $\mathrm{Vect}\{\mathrm{Re}\,\Psi(\omega), \mathrm{Im}\,\Psi(\omega)\}$ à l'aide de cet isomorphisme. On définit les deux 1-formes $\lambda$ et $\mu$ sur $S$ par $\lambda(\omega)(u) = \alpha$ et $\mu(\omega)(u) = \beta$ pour $T_\omega \mathrm{in}(u) = \alpha\,\mathrm{Re}\,\Psi(\omega) + \beta\,\mathrm{Im}\,\Psi(\omega) \in T_\omega \mathrm{in}(T_\omega S)$. Ces deux 1-formes définissent la 2-forme $\sigma = \lambda \wedge \mu$ sur $S$. On prend pour orientation de $S$, l'orientation définie par $\sigma$.

**Definition 7.** *La tension de la feuille $S$ est*

$$\mathcal{T}(S) = \int_S \sigma, \tag{5.4}$$

La tension est une quantité positive par le choix de l'orientation de $S$. La corde ne peut pas occuper toutes les surfaces d'univers, l'hypothèse que l'on fait est que les trajectoires possibles $S$ sont celles qui rendent minimale $\mathcal{T}(S)$. Il peut y avoir une infinité de surface d'univers. La trajectoire d'une corde définie par un champ en corde est une surface d'univers pour ce champ. La notion de temps peut apparaître dans le choix de la restriction de la section des formes hermitiennes de $T_{\mathbb{C}}\Omega$ à $T\Omega$. On peut représenter cette restriction comme une métrique de Lorentz ou une métrique pseudo-riemannienne de l'univers $\Omega$. Dans le cas d'une métrique de Lorentz, on peut définir les champs chronologiques associés à cette métrique. L'opérateur $\Phi$ est défini par la connexion de Levi-Civita de cette métrique et le tenseur de Poisson s'écrit localement comme le tenseur dual de $g_{\alpha\beta}$.

**Definition 8.** *Un temps relatif sur $S$ est une $C^\infty$-application $\tau : S \to \mathbb{R}$ pour laquelle $\tau|_\gamma$ est constante pour toutes les cordes de $S$.*

La condition nécessaire et suffisante pour que $\tau$ soit un temps relatif est que pour tout $\omega \in S$, $d_\omega \tau(\mathrm{Im}\,\Psi(\omega)) = 0$. Ces égalités sont équivalentes à l'existence d'une $C^\infty$-application $\chi$ de $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant $d\tau = \chi\lambda$. Le temps relatif est orienté positivement si $\chi > 0$ sur $S \smallsetminus \{\chi = 0\}$. Si $\tau$ est orienté négativement, $-\tau$ est orienté positivement. Si $\tau_1$ et $\tau_2$ sont deux temps relatifs sur $S$ alors $\tau_2 - \tau_1$ est un temps relatif sur $S$. Un temps relatif $\tau$ est un temps propre si $\chi = 1$.

Si $S \smallsetminus \{\chi = 0\}$ n'est pas connexe, un temps relatif peut être positif sur une composante connexe et négatif sur l'autre. Dans la suite un temps relatif est tel que $\{\chi = 0\}$ est vide ou une sous-variété de dimension 0.

**Theorem 6.** *Il y a équivalence entre la 1-forme différentielle $\lambda$ est exacte et $S$ est muni d'un temps propre, tous les temps propres $\tau$ de $S$ sont les primitives de $\lambda$. Si $\tau_1$ et $\tau_2$ sont deux temps propres sur $S$ alors $\tau_2 - \tau_1$ est constante sur $S$.*

*Proof.* La fonction $\chi$ est définie par $\chi(\omega) = d_\omega \tau(\mathrm{Re}\,\Psi(\omega))$. Si $\chi = 1$, $d\tau = \lambda$. □

**Definition 9.** *Le champ en corde $\Psi$ est exacte ou totale sur la surface d'univers $S$ si la 1-forme $\lambda$ est exacte.*

Le champ $\Psi$ vérifie une équation de la forme 5.2, la fonction $m$ représente la masse ponctuelle du champ $\Psi$. La masse de la corde $\gamma$ est donnée par

$$\mathcal{M}_\gamma = \int_\gamma m\mu = \int_\gamma m \boldsymbol{\iota}_{\mathrm{Re}\,\Psi}\sigma, \tag{5.5}$$

avec $\mu = \boldsymbol{\iota}_{\mathrm{Re}\,\Psi}\sigma$ qui est une forme volume sur $\gamma$. Et sa tension est définie par

$$\mathcal{T}_\gamma = \int_\gamma \mu = \int_\gamma \boldsymbol{\iota}_{\mathrm{Re}\,\Psi}\sigma. \tag{5.6}$$

**Remark 10.** $\lambda = -\boldsymbol{\iota}_{\operatorname{Im}\Psi}\sigma$.

L'énergie est proportionnelle à la masse de la corde avec un coefficient de proportionnalité positif, noté $c^2$,

$$E_\gamma = \mathcal{M}_\gamma c^2. \tag{5.7}$$

Dans ce qui suit $\Psi$ est un champ en corde **exacte** sur $S$. Si on impose que l'énergie de chaque corde est invariante sur $S$ et vaut $E_S$, alors l'énergie d'une particule au temps $t$ pour le temps propre $\tau$ est

$$E_t = k\left(t\right) E_S \tag{5.8}$$

où $k\left(t\right)$ est le nombre de cordes composant cette particule. Si on passe d'un temps $t$ à $t + \Delta t$, la variation d'énergie est

$$\Delta E = \left(k\left(t + \Delta t\right) - k\left(t\right)\right) E_S = \Delta k\left(t\right) E_S. \tag{5.9}$$

Si on change de temps propre on a

$$\Delta E = \Delta k\left(t + \alpha\right) E_S, \tag{5.10}$$

où la constante $\alpha$ est la différence entre le nouveau et l'ancien temps propre.

**Remark 11.** *Pour les supercordes ayant un nombre infini de composantes, l'hypothèse d'imposer à l'énergie d'être invariante pour chaque corde de $S$, est caduque. Si $\gamma = \sum \gamma_\nu$ alors $E_\gamma$ a une valeur finie si la série $\sum E_{\gamma_\nu}$ est une série convergente et en particulier $\lim_{\nu\to+\infty} E_{\gamma_\nu} = 0$.*

On a quantifié l'énergie en imposant une énergie constante sur chaque corde située sur la surface d'univers. Si on utilise la formule de Planck

$$E_S = h\nu \tag{5.11}$$

où $\nu$ est la fréquence d'oscillation de la corde, alors les cordes ont même fréquence d'oscillation sur $S$.

Les équations d'Einstein et Plank, $E_\gamma = \mathcal{M}_\gamma c^2$ et $E_\gamma = h\nu_\gamma$, permettent d'écrire

$$\mathcal{E}_\gamma = \mathcal{M}_\gamma T_\gamma = \frac{h}{c^2} \tag{5.12}$$

qui est invariant, où $h$ est la constante de Planck et $T_\gamma = \frac{1}{\nu_\gamma}$ est la période d'oscillation de la corde $\gamma$.

On se fixe une métrique riemannienne $g$ canonique, sur $S$ par $g\left(\operatorname{Re}\Psi, \operatorname{Re}\Psi\right) = g\left(\operatorname{Im}\Psi, \operatorname{Im}\Psi\right) = 1$ et $g\left(\operatorname{Re}\Psi, \operatorname{Im}\Psi\right) = g\left(\operatorname{Im}\Psi, \operatorname{Re}\Psi\right) = 0$. Avec cette métrique pour un temps propre, $\operatorname{Re}\Psi = \operatorname{grad}\tau$. L'excitation globale de la surface d'univers de $S$ est une section $\mathcal{E}$ de $S$ à valeurs dans $\operatorname{Isom}_+\left(TS\right)$ qui à chaque événement $\omega \in S$ associe une isométrie de $\left(T_\omega S, g\left(\omega\right)\right)$ conservant l'orientation. La restriction de cette section à une corde $\gamma$ est l'excitation de cette corde sur $S$. On pose $\mathbf{M}_\omega$ la matrice de $\mathcal{E}\left(\omega\right)$ dans la base $\{\operatorname{Re}\Psi\left(\omega\right), \operatorname{Im}\Psi\left(\omega\right)\}$, il existe une $C^\infty$-application $\theta : S \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\mathbf{M}_\omega = \begin{pmatrix} \cos\theta\left(\omega\right) & -\sin\theta\left(\omega\right) \\ \sin\theta\left(\omega\right) & \cos\theta\left(\omega\right) \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

Si $\gamma$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^1$ou $\mathbf{I}$=$[0,1]$, on prend un paramétrage par longueur d'arc $\varrho : [0,l] \to \gamma$, l'application $\theta \circ \varrho : [0,l] \to \mathbb{R}$ est prolongeable par périodicité

sur $\mathbb{R}$, la période $T_\gamma$ de cette fonction est la période d'excitation de la corde $\gamma$. La longueur de la corde $l$ qui est la tension $\mathcal{T}_\gamma$ de la corde vérifie

$$\mathcal{T}_\gamma = kT_\gamma,\ k \in \mathbb{N}^*.$$

**Proposition 4.** *La tension de la corde $\gamma$ est un multiple entier de la période $T_\gamma$.*

**Remark 12.** *La fréquence d'excitation de $\gamma$ est $\nu_\gamma = \frac{1}{T_\gamma}$.*

Pour comprendre la notion de fréquence d'excitation d'une corde $\gamma$, on se place dans un voisinage de cette corde dans lequel il existe un temps propre $\tau$. On choisit l'unique temps propre pour lequel $\gamma = \tau^{-1}(t_0)$ et on pose $\gamma_0 = \gamma$. Ensuite, on fait varier le temps propre de $t_0$ à $t_1$. Si on pense $\gamma_0$ comme une corde ouverte ou fermée qui évolue, sur la surface $S$, de $\gamma_0 = \tau^{-1}(t_0)$ à $\gamma_1 = \tau^{-1}(t_1)$ et on se fixe un événement $\omega_{t_0}$ sur $\gamma_0$, cet événement décrit une trajectoire de $\omega_{t_0}$ à $\omega_{t_1} \in \gamma_1$. On pose $\omega_t \in \gamma_t = \tau^{-1}(t)$ un paramétrage de cette courbe. Le transport parallèle le long de cette courbe permet de définir une isométrie de $\varsigma_{\omega_t,\omega_{t_0}} : T_{\omega_{t_0}}S \to T_{\omega_t}S$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$, qui préserve l'orientation. On a

$$\varsigma_{\omega_{t_1},\omega_{t_0}} = \varsigma_{\omega_{t_1},\omega_t} \circ \varsigma_{\omega_t,\omega_{t_0}}. \tag{5.14}$$

L'événement marqué $\omega$ sur $\gamma_0 = \tau^{-1}(t_0)$ suit la trajectoire $\omega_t$ pour laquelle

$$\mathcal{E}(\omega_{t_1}) = \varsigma_{\omega_{t_1},\omega_{t_0}} \circ \mathcal{E}(\omega_0) \circ \varsigma^{-1}_{\omega_{t_1},\omega_{t_0}},\ \forall t_0, t_1. \tag{5.15}$$

Si on se place sur la corde, il y a une excitation donnée en chaque événement $\omega$ par $\mathcal{E}(\omega)$ et les déplacements suivant un temps propre, de chaque événement de la corde, vérifient 5.12. On en déduit la relation de quantification d'une corde,

$$\mathcal{M}_\gamma \mathcal{T}_\gamma = k\frac{h}{c^2}, k \in \mathbb{N}^*. \tag{5.16}$$

On peut fixer l'excitation sur la surface d'univers $S$, en prenant pour fonction $\theta$ dans l'équation 5.13, la fonction qui vérifie $\Theta = \sqrt{a^2+b^2}\exp(i\theta)$ où $\Theta$ est l'onde associée au champ en corde $\Psi$ et est défini par $\Theta(\omega) = a(\omega) + ib(\omega)$ avec

$$[\operatorname{Re}\Psi, \operatorname{Im}\Psi] = a \operatorname{Re}\Psi + b \operatorname{Im}\Psi.$$

Si la surface d'univers est muni d'un temps relatif $\tau$ qui n'est plus propre, on prend un temps relatif $\tau$ qui vérifie $d\tau = \chi\lambda$, pour lequel $\{\chi = 0\}$ est discret et positif sur $S \smallsetminus \{\chi = 0\}$. Les points où $\chi = 0$ correspondent aux points de séparation des cordes ou au regroupement de deux cordes. Sur $S \smallsetminus \{\chi = 0\}$, si on transforme le champ $\Psi$ en $\Psi_\chi = \chi \operatorname{Re}\Psi + i \operatorname{Im}\Psi$ et si on se restreint à la surface $S_\chi = S \smallsetminus \{\Psi_\chi = o\}$, alors $\tau$ est un temps propre pour $\Psi_\chi$ qui est un champ défini sur $S$. Les 1-formes différentielles $\lambda$, $\mu$ se transforment en $\chi\lambda$ et $\mu$, donc $\mathcal{M}_\gamma$ et $\mathcal{T}_\gamma$ sont invariantes et la tension de la surface $S_\chi$ est

$$\mathcal{T}(S_\chi) = \int_S \chi\sigma,$$

la fonction d'onde $\Theta_\chi$ associée au champ $\Psi_\chi$ est $\Theta_\chi = \chi\Theta = \chi\sqrt{a^2+b^2}\exp(i\theta)$, ainsi $\theta_\chi = \theta$ sur $S$. On obtient encore une formule de quantification identique à celle donnée en 5.16.

Dans le cas le plus général, on découpe la surface $S \smallsetminus \{\Psi_\chi = 0\}$, en surfaces ouvertes connexes et on répète le procédé sur chaque composante connexe obtenue. Les événements de $\{\Psi_\chi = 0\}$ sont les points où se collent et se décollent les cordes entre elles qui évoluent dans la surface d'univers $S$.

## 6. Conclusion

La représentation géométrique des champs en corde permet de quantifier l'énergie de la corde définie par le champ. Le produit de la masse et de la tension est discrétisé dans l'équation 5.16. Il serait intéressant de regarder le comportement d'un nombre fini de champs en cordes, notamment en analysant les feuilletages de l'univers induits par ces champs. Que se passe-t-il pour deux champs en cordes dont les feuilletages sont transversaux?

La dérivée de Lie le long d'un champ $X$, considérée comme opérateur de l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, d\lambda)$ est essentiellement autoadjoint si la divergence de $X$ est nulle. Pour ces champs, on a procéde à une quantification de cet opérateur en considérant l'espace de Fock $\mathcal{F}\left(L^2(\Omega, d\lambda)\right)$. On généralise l'espace d'Hilbert $L^2(\Omega, d\lambda)$ aux espaces d'Hilbert $\mathcal{H}^m(\zeta)$ où $\zeta$ est un fibré des états de l'univers $\Omega$, l'extension de $L_X$ aux champs $\mathcal{L}_X$ peut être assimilé à un opérateur de $\mathcal{H}^m(\zeta)$ pour $\zeta = \left(T_{\mathbb{C}}\Omega, \pi, \mathbb{C}^4\right)$. Quelles sont les propriétés de cet opérateur?

On a donc approché les champs complexes par deux procédés différents, l'un est analytique et utilise l'analyse spectrale de *Von Neumann*, l'autre est géométrique et fait appel à des procédés de *géométrie différentielle* sur les surfaces. Ces deux approches sont complémentaires l'une de l'autre mais restent insuffisantes pour l'analyse de tous les champs complexes de l'univers $\Omega$.

## References


[1] Arai A. "A class of Dirac-Type Operators on the Abstract Boson-Fermion Fock Space and Their Strong Anticommutativity", (1999).

[2] M. Arminjon, F. Reifler, "Representations of the Dirac wave function in a curved spacetime", Proc. Fifth International Workshop DICE2010 : current issues in quantum mechanics and beyond, Journal of Physics: Conference Series 306 (2011), 012061.

[3] M.A., F. Reifler, Classical-quantum correspondence and wave packet solutions of the Dirac equation in a curved spacetime", 13th International Conference on Geometry, Integrability and Quantization, (Varna, Bulgarie, 3-8 juin 2011). Journal of Geometry and Symmetry in Physics 24, 77-88 (2011).

[4] M.J. Esteban, E. Séré, Les équations de Dirac-Fock. Séminaire E.D.P(1997-1998), Exposé n°5, U.M.R 7640 C.N.R.S.

[5] Jonot J.L. "$\nabla^\gamma$-quantification des mesures physiques" hal.archives-ouvertes.fr (2014)

[6] Jonot J.L."Dirac-Weyl-Fock equation along a chronological field" hal.archives-ouvertes.fr/hal-01063612 (2014)

[7] Pederson S. "Anticommuting self-adjoint operators", J.Funct. Anal. 89 (1990)

[8] Reed M. and Simon B. "Methods of Modern Mathematical Physics Vol.I: Functional Analysis", Academy Press, New York, (1975)

[9] Vasilescu F.H "Anticommuting self-adjoint operators", Rev. Roum. Math. Pures Appl. 28 (1983)77-91


*E-mail address*: jean-louis.jonot@ac-versailles.fr