



HAL
open science

Conception, connaissance et concept

Nicolas Balacheff

► **To cite this version:**

Nicolas Balacheff. Conception, connaissance et concept. Séminaire de l'équipe DidaTech, IMAG, 1995, Grenoble, France. pp.219-244. hal-01072247

HAL Id: hal-01072247

<https://hal.science/hal-01072247>

Submitted on 7 Oct 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Conception, connaissance et concept

N. Balacheff*

1. INTRODUCTION : UN PROBLÈME ÉPISTÉMOLOGIQUE

“En juxtaposant dans la simultanéité d’un espace unique la série complète des oppositions temporelles qui sont mises en œuvre successivement par des agents différents dans des situations différentes et qui ne peuvent jamais être mobilisées pratiquement toutes ensemble parce que les nécessités de l’existence n’exigent jamais une telle compréhension synoptique et la découragent même par les urgences, le schéma du calendrier crée de toute pièces une foule de relations [...] entre des repères de niveaux différents qui, n’étant jamais confrontés dans la pratique, sont pratiquement compatibles même s’ils sont logiquement contradictoires” (Bourdieu 1980, p.140).

Cette explication du paradoxe de la cohabitation dans une communauté d’agent d’une raison rationnelle et de connaissances qui, pour l’observateur, apparaissent contradictoires, peut être étendue à un seul agent qui serait observé dans des situations différentes. Les éléments essentiels de cette explication sont d’une part le temps, d’autre part la diversité des situations.

Le temps organise séquentiellement l’action du sujet dont les connaissances contradictoires sont cependant également opératoires parce qu’elles apparaissent à des moments distincts de son histoire ; elles peuvent s’ignorer mutuellement. La diversité des situations introduit un élément d’une autre nature. Elle est une explication dans la mesure où l’on reconnaît que la connaissance n’est pas abstraite mais qu’elle a, au contraire, un domaine de validité où elle est un outil reconnu. Ce qui est mis en évidence, c’est qu’il n’y a pas de transfert qui aille de soit d’une situation à une autre, même si, aux yeux de l’observateur, ces situations peuvent apparaître isomorphes. De la même façon la “course à 20” n’appellera pas les mêmes connaissances, pratiquée comme un jeu de société, en famille, et comme situation fondamentale sur la division euclidienne (Brousseau 1975), ou encore, la résolution des problèmes arithmétiques concrets ne sollicitent pas les mêmes connaissances des jeunes élèves selon qu’ils sont rencontrés dans leur univers quotidien ou dans celui de la classe de mathématique (Nuñez et al. 1983, Lave et Wenger 1989).

* Laboratoire Leibniz, IMAG, BP 53, 38041 GRENOBLE cedex 9, France. Nicolas.Balacheff@imag.fr

Les caractéristiques épistémiques de ces situations sont différentes, comme le sont, au sens de Brousseau le non-didactique, l'adidactique et le didactique, ou au sens de Resnick, l'école et son extérieur (1987 pp.13-15).

A la façon de Bourdieu, nous parlerons de *sphères de pratique* pour désigner ces contextes mutuellement exclusifs dans l'histoire et aux caractéristiques épistémiques différentes, au sein desquels le sujet rationnel est réconcilié avec le sujet connaissant.

Les états contradictoires ainsi mis en évidence ne sont reconnus comme tels que par un observateur qui a la capacité de mettre en relation des situations qui sont, par ailleurs, vécues comme distinctes et autonomes par le sujet lui-même. Dans le *référentiel de l'observateur*, ces états observés devraient pouvoir être étiquetés de la même façon ; ainsi, on parle volontiers de la connaissance qu'a le sujet des nombres décimaux, de la continuité ou de la symétrie orthogonale pour ensuite déplorer, éventuellement, qu'elle soit incohérente.

Mais diagnostiquer un état de connaissance contradictoire réfute le principe théorique d'une structure mentale construite dans un processus d'adaptation réglé par des critères de fiabilité et d'adéquation à la résolution d'un problème ou à l'accomplissement d'une tâche : "la connaissance rationnelle est opératoire ou n'est pas" (Vergnaud 1991, p.136). Nous pourrions compléter par : la connaissance rationnelle est libre de contradictions, ou si des contradictions sont attestées elle ne peut survivre qu'en les dépassant.

C'est la contradiction révélée par cette réfutation d'un corollaire naturelle des théories constructiviste qu'il s'agit de dépasser. Ce problème épistémologique a reçu de multiples réponses, en Didactique, dont nous retiendrons les plus significatives : celles qui relèvent du paradigme des "*misconceptions*" (Confrey 1986), et celles qui relèvent de ce que nous appellerons le paradigme de l'erreur (Brousseau 1976).

1.1 LE PARADIGME DES MISCONCEPTIONS

Le paradigme des *misconceptions* cherche initialement, dans les années 70, à dépasser l'étonnement face au constat d'une réussite au sens scolaire ("adéquate scores", Confrey 1986, p.4) cohabitant avec des échecs manifestes en relation avec des concepts fondamentaux : "*misconceptions were defined empirically as documented failures of large numbers of students to solve problems which appeared to be related to fundamental concepts. [...] Surprise, pervasiveness, resilience and deviation from the expected answers were its defining characteristics.*" (ibid. p.4). La principale évolution de ce paradigme est attestée par la définition que propose Confrey au milieu des années 80 : "*a misconception does not require the postulation of an inadequate "picture" of the world; it does require the notion of a successful completion of a number of problems wherein the cycle of problem formulation (expectation), problem-solving (action) and problem*

reconstruction (re-viewing) are successfully carried out” (ibid. p.28). En d’autres termes, une *misconception* a un domaine de validité. Au sens où nous l’avons défini plus haut, rien ne distinguerait donc une *misconception* d’une connaissance, sinon qu’il en existe une réfutation connue (au moins du point de vue de l’observateur).

Ce paradigme revient, en vérité, à donner un statut épistémologique particulier à des connaissances qui se révéleraient erronées. De plus, la reconnaissance de l’existence de *misconceptions* a pour corollaire celle de connaissances qui seraient intrinsèquement correctes, proposition aujourd’hui clairement réfutée par l’analyse critique de l’histoire du développement des connaissances, en particulier scientifiques¹.

Une proposition voisine est celle de reconnaître l’existence de *connaissances locales*. Léonard et Sackur (1991, p.209) en proposent une caractérisation par deux propriétés : “(1) c’est une connaissance correcte dans certaines limites, (2) l’élève ignore ces limites”. Le concept de connaissance locale marque une évolution épistémologique, il s’agit de connaissance, cependant, parce qu’il a pour corollaire l’existence de connaissances globales, nous l’associons au paradigme des *misconceptions* (dans l’acception de Confrey). Mais pour les mêmes raisons que celles évoquées ci-dessus, le concept de connaissance globale ne résiste pas à un examen critique à la lumière de l’histoire des connaissances scientifiques : pour toute connaissance il existe, au moins potentiellement, un point de vue qui permettrait de la considérer comme locale.

1.2 LE PARADIGME DE L’ERREUR

Le paradigme de l’erreur est contemporain de celui des *misconceptions*. Il se développe à partir du postulat qui exprime que l’erreur est un témoignage de connaissance (cf. supra p.10). “Le réel n’est jamais “ ce qu’on pourrait croire ” mais il est toujours ce qu’on aurait dû penser”, écrit joliment Bachelard (1938 p.13), ainsi la connaissance — même des mathématiques — est toujours en devenir. L’erreur manifeste à la fois l’inertie “fonctionnelle” de la connaissance dûment éprouvée et son caractère vivant dans un environnement qu’elle modifie et qui la modifie en retour. Ce postulat prend une signification forte dans le cadre des théories constructivistes pour lesquelles le mécanisme de prise de conscience d’une contradiction et de son dépassement est le moteur fondamental de l’apprentissage.

Notons que le constructivisme n’a pas pour corollaire ce statut de l’erreur. Pour Aebli (1963), développant “[l’]application à la didactique de la psychologie de Jean Piaget”, l’erreur est un témoignage d’incompréhension ou d’habitudes (“réflexes conditionnés déclenché par un signal inducteur”, ibid. p.53), aussi “les *réactions fausses* auxquelles peut donner lieu la solution d’un certain problème doivent être étudiées soigneusement

¹ Y compris les mathématiques longtemps laissées à part, notamment par Popper et Bachelard.

dans la classe, pour que les élèves comprennent les raisons qui font qu'un certain procédé n'est pas correct et saisissent exactement les différences et les rapports entre la réaction correcte et l'erreur." (ibid. p.101). D'une certaine façon l'enfant est sujet cognitif, il n'est pas encore pleinement un sujet connaissant. "Sous le rapport fonctionnel, l'enfant est identique à l'adulte ; [...] mais avec une mentalité dont la structure varie selon les stades de son développement" (Piaget 1969, p.224), engagé dans un processus continue de construction "il est sans cesse obligé d'accommoder ses organes sensori-moteurs ou intellectuels à la réalité extérieure, aux particularités des choses, dont il a tout à apprendre" (ibid. p.225). Le contenu de cette "mentalité" de l'enfant n'a pas encore le statut de connaissance, bien que tous les éléments théoriques qui permettraient ce point de vue soient en fait réunis. La révolution copernicienne du constructivisme piagétien n'est pas achevée au début des années 70.

L'originalité de la Didactique est d'avoir articulé le point de vue constructiviste et le postulat bachelardien : "l'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes ou béhavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant, se révèle fausse, ou simplement inadaptée" (Brousseau 1976, p.171). L'un des premiers travaux dans cette problématique (Salin 1976), met en évidence des caractéristiques cognitives de l'erreur qui seront essentielles pour le développement de ce paradigme en Didactique. Salin l'exprime dans un exemple : "un enfant de 3 ans projette de faire une tour de cubes, haute comme lui. Il ne réussit pas, c'est à dire que la tour s'effondre avant d'être suffisamment haute : c'est un échec de son action dont il a conscience. L'adulte, qui le voit mal placer les cubes, peut analyser cet échec en termes d'erreurs, en l'occurrence le non-respect des contraintes dues à la gravité, parce qu'il dispose d'un système de validation de l'action supérieur à celui de l'enfant pour lequel, à cet âge, le seul système est celui de la réussite ou de l'échec. [...] devant une production d'enfant, non conforme à l'objectif, soit qu'il s'est lui-même fixé, soit qui lui a été fixé par le maître, on peut parler d'échec. Mais l'analyse en terme d'erreur suppose de distinguer le point de vue du maître et le point de vue de l'enfant." (ibid. p.1). Les caractéristiques cognitives mises en évidence par Salin sont d'une part que l'erreur est un point de vue d'une connaissance sur une autre connaissance (éventuellement chez un même sujet, d'une connaissance nouvelle sur une connaissance ancienne), d'autre part que l'existence d'une erreur ne peut être perçue que si le feedback de l'environnement peut être lu comme témoignage d'un échec (une attente non satisfaite).

La thèse développée par Brousseau dans ce paradigme, dès les années 70, va plus loin que de donner aux processus mentaux sources d'erreur, le statut de connaissance. Elle énonce que certaines de ces connaissances sont nécessaires à l'apprentissage : la trajectoire de l'élève devrait passer par la construction (provisoire) de connaissances erronées parce que la prise de conscience de ce caractère erroné serait constitutif du sens

de la connaissance dont la construction est visée. Ces points de passage obligés, il les nomme, à la suite de Bachelard (1938, pp.13-22), *obstacles épistémologiques* : “une connaissance, comme un obstacle, est toujours le fruit d’une interaction de l’élève avec son milieu et plus précisément avec une situation qui rend cette connaissance “intéressante”. En particulier elle reste “optimale” dans un certain domaine défini par des caractéristiques numériques “informationnelles” de la situation.” (ibid. p.175).

Ce qui sépare le paradigme des misconceptions du paradigme de l’erreur est la signification épistémologique de chacun d’eux. Le statut de la connaissance est différent. Les misconceptions sous-entendent l’existence d’une connaissance de référence globale et juste. Le paradigme de l’erreur, en particulier dans la problématique des obstacles épistémologiques, ne requiert que la mise en relation explicite de deux connaissances dans une perspective de développement. Chaque connaissance est ce qu’elle est, qu’elle s’avère ou non erronée, partielle ou mal adaptée ; elle est d’abord le résultat d’une adaptation optimale du système sujet/milieu sous des critères d’adéquation et d’effectivité (Balacheff 1995).

Par nature du système sujet/milieu, toute connaissance a un caractère provisoire, ou plutôt toute connaissance peut être l’objet de remaniements, d’élargissements de son champ de validité à la suite de perturbations, et donc de problèmes qu’il serait vain de déclarer improbables.²

2. CONCEPTION, CONNAISSANCE ET CONCEPT

2.1 CONCEPTION

Nous proposons de revenir au concept de *conception*. pour résoudre le problème de modélisation posé par la coexistence chez un sujet de structures mentales contradictoires du point de vue d’un observateur de leurs mises en œuvre, et cependant cohérentes lorsqu’elles sont replacées dans le contexte d’une mise en œuvre particulière dans le référentiel du sujet (en générale une classe de situations ou de tâches).

Le mot “conception” est utilisé depuis de nombreuses années dans les recherches sur l’apprentissage et l’enseignement des mathématiques, on le trouve chez Brousseau (op. cit.) aussi bien que chez Confrey (op. cit.) mais il fonctionne “sans qu’au départ les auteurs semblent éprouver le besoin d’en donner une définition didactique” (Artigue 1991, p.266). *Conception* fonctionne ainsi comme un concept “paradidactique” : il est

² La tentation cependant existe toujours, elle est dans la nature même de la connaissance. Une connaissance éprouvée, qui multiplie les succès, peut paraître définitive. Et le scientifique qui en est porteur, infaillible. On croit ce que l’on sait. Les débats scientifiques deviennent idéologiques, voire des débats d’autorité lorsque c’est entre génération de chercheurs que le doute s’exprime. La dérive peut être plus sévère encore lorsque se mêlent à ces querelles des enjeux de culture ou des enjeux politiques.

présent, de fait, dans les travaux de recherche comme un outil³ mais sans accéder au rang d'objet d'étude, pour lui-même. Dans une acception dominante, comme le montre Artigue (ibid.), le terme de conception renvoie à un "objet local" et par là il ne se détache pas nettement du statut épistémologique particulier des misconceptions ou des "connaissances locales".

L'acception que nous entendons ici forger est issue du paradigme de l'erreur et de la problématique des obstacles, une conception n'a pas en soit de caractère local, elle est d'abord une connaissance au sens d'un état d'équilibre dynamique du système en interaction sujet/milieu (Balacheff 1995).⁴

Pour résoudre les problèmes dont nous venons de décrire les principaux aspects, nous avons choisi *un détour théorique par une formalisation* dont nous attendons qu'elle permette de dépasser la contradiction liée à la coexistence chez un sujet de connaissances recouvrant une multiplicité de conceptions éventuellement contradictoires.

Dans cette formalisation, nous proposons une redéfinition des termes *conception*, *connaissance* et *concept* pour les constituer en des entités abstraites qui se distingueront par leurs fonctions et par leurs relations. Il s'agira, au cours de cette élaboration et à sa suite, de montrer l'adéquation de ces choix pour rendre compte de ce que les mêmes termes recouvrent dans les théorisations en Didactique.

Nous appelons *conception* C , un quadruplet (P, R, L, Σ) dans lequel :

- P est un ensemble de problèmes sur lequel C est opératoire ;
- R est un ensemble d'opérateurs ;
- L est un système de représentation, il permet d'exprimer les éléments de P et de R ;
- Σ est une structure de contrôle, elle assure la non contradiction de C .

En particulier, un problème p de P est résolu si il existe r de R et s de Σ tel que $s(r(p))=vrai$.

Un opérateur transforme un problème en un nouveau problème, une condition minimale pour qu'un problème appartienne à P est qu'il existe une suite de transformations par des éléments de R qui conduise à un problème résolu au sens de Σ .

Cette approche permet une caractérisation d'un état du système sujet/milieu : le système de représentation doit permettre d'exprimer et de mettre en œuvre les opérateurs tant du point de vue du sujet émetteur-actif que du milieu récepteur-réactif, les structures de contrôle

³ Il permet au moins de désigner une classe de travaux sur les conceptions qu'auraient les élèves de savoirs particuliers : conception de la limite, conception du cercle, conception du nombre, etc.

⁴ C est bien cette acception qui nous semble être attaché au terme conception dans le texte de Brousseau de 1976 sur les obstacles et, plus nettement encore, dans celui de 1989 où il écrit : "un obstacle sera une connaissance, une conception, pas une difficulté ou un manque de connaissance" (p.43).

doivent tout autant modéliser les moyens du sujet-acteur que la capacité du milieu-réacteur à retourner des feedbacks intelligibles.

Cette formalisation est dérivée de la définition pragmatique d'un concept déjà proposée par Vergnaud (1991 p.145)⁵. Elles s'en distinguent par plusieurs aspects. D'abord dans le choix du vocabulaire de description des éléments de cette définition. Il s'agit de se libérer des contraintes du vocabulaire de la psychologie dont nous ne voulions pas faire un usage approximatif, mais sur lequel il faudra cependant revenir. Ensuite par l'explicitation des structures de contrôle. Ces structures sont implicites dans la formalisation de Vergnaud, elles sont par exemple impliquées de fait par le recours au concept de théorème-en-acte ou celui d'inférence (ibid. pp.141-2) qui n'ont de sens qu'associés à la reconnaissance chez le sujet de procédures permettant de s'assurer de la légitimité et de la correction de la mise en œuvre des conduites correspondantes. C'est, par ailleurs, à ce niveau des structures de contrôle que nous plaçons les connaissances stratégiques (Artigue 1993) et les métaconnaissances (Robert 1993) spécifiques d'une classe de problème mathématiques⁶.

Cette formalisation de *conception* est cohérente avec les caractérisations que proposent Confrey de *misconception* et Léonard et Sackur de *connaissance locale*. En particulier, dans ce dernier cas, elle satisfait bien les deux critères fondamentaux de validité (exprimée par l'ensemble P) et de cohérence (assurée par Σ), en revanche elle n'exprime rien sur le critère d'efficacité et ni sur le caractère limité d'une connaissance locale que souligne ces auteurs (op. cit. p.211).

En effet, le critère d'efficacité n'a de sens que s'il existe un choix entre au moins deux conceptions (faute de quoi, il ne peut y avoir de jugement d'efficacité, il suffira d'avoir une conception opératoire)⁷ ; ce critère est en revanche pertinent dans une perspective d'apprentissage ou de développement. Nous y reviendrons.

Quant au caractère local, il ne peut avoir de sens que s'il existe une possibilité de caractériser une classe de problèmes sur laquelle la conception considérée *devrait être* opératoire, et qui inclurait la classe de ceux sur laquelle elle *est* opératoire. Cette remarque montre simplement que le caractère de "localité" ne peut être que relatif, il exprime un type de relation d'une conception relativement à une autre ; c'est aussi un aspect sur lequel nous reviendrons plus loin.

Mais, auparavant, nous devons nous arrêter sur une difficulté que cette remarque révèle : comment est défini P, et comment sont caractérisés ses éléments — en d'autres termes : qu'est-ce qu'un problème dans ce modèle.

⁵ Cette définition proposée par Vergnaud remonte en fait au début des années 80.

⁶ Nous répondons là en particulier à une question de Marc Rogalski à la suite d'une première présentation de ce modèle lors de l'Ecole d'été de didactique des mathématiques de 1993.

⁷ Dans l'article de Léonard et Grisvard, le jugement d'efficacité porte implicitement sur la mise en rapport de la conception des élèves et de la conception cible objet de l'enseignement (ibid. pp.215-6).

Nous désignons par problème le résultat d'une perturbation de l'équilibre de la relation sujet/milieu (Balacheff 1995), mais cela n'a de sens que si cette perturbation peut être attestée par le sujet *et* par le milieu. Une perturbation que le sujet ne pourrait percevoir, ou dont le milieu ne pourrait rendre compte de façon discernable ne pourra être source de problèmes. Ce que nous pouvons traduire, pour une conception particulière, par le fait que pour la description d'un état particulier du système, il existe une primitive de contrôle, élément de Σ , qui permet de lui attribuer la valeur "faux" ou "non résolu".

La question de la définition de l'ensemble des problèmes entrant dans la caractérisation d'une conception est plus complexe. A la façon de Vergnaud pour les structures additives (op. cit. p.146), par exemple, on pourrait renvoyer à "l'ensemble des situations" qui appellent la mise en œuvre de la conception considérée. Ou, au contraire, on pourrait vouloir réduire cet ensemble à un nombre fini de *problèmes définitoires*, suggérant avec Brousseau que toute connaissance peut se caractériser par une (ou des) situations didactiques (1986 p.48 — Brousseau parle alors de situations fondamentales) ; ces problèmes pourraient constituer une ensemble générateur. Les deux solutions occupent manifestement des positions extrêmes sur le spectre des possibles, avec des caractéristiques différentes :

- la solution à-la-Vergnaud semble apporter une réponse simple, mais elle a le désavantage de renvoyer à un ensemble trop peu spécifique — que l'on pense par exemple à quel ensemble de problèmes renverrait le "nombre entier".
- la solution à-la-Brousseau présente un avantage théorique en cherchant à associer une conception à un ensemble de problèmes spécifiques, mais la difficulté est ici de montrer la constructibilité d'un tel ensemble pour toute conception⁸.

De fait, les travaux sur les conceptions cherchent, à partir d'une analyse de la genèse historique et/ou mathématique, à définir des ensembles de problèmes significatifs pour le diagnostic et opératoires pour la construction des processus didactiques. Nous dirons qu'ils proposent une *caractérisation pragmatique*. Cette définition pourrait être aussi recherchée par la caractérisation des sphères de pratiques, problème que devrait aborder l'approche ethno-mathématique dont le développement est actuellement très important dans les pays d'Amérique latine et aux Etats-Unis (cf. par exemple d'Ambrosio 1993, Lave 1988, Nuñez *et al.* 1983).

⁸ Ces questions prennent aujourd'hui une importance particulière à propos de recherches portant sur des concepts mathématiques avancés, telle ceux de l'algèbre linéaire, pour lesquels la problématique serait moins de trouver des situations fondamentales que des problématiques spécifiquement mathématiques justifiant que soient forgés des concepts nouveaux (dont la fonction serait par exemple d'abord d'être unificateur et simplificateur). Voir en particulier, à ce sujet, les travaux de Dorier, Robert et Rogalski.

La question d'une *caractérisation minimale* d'une conception reste posée. Annoncée comme un postulat dans la modélisation de Brousseau, elle doit être considérée comme un problème pour la Didactique. Il s'agirait, pour une conception C , de déterminer l'existence :

- d'un ensemble de problèmes définitoires (i.e. auxquels pourrait être ramené tout autre problème relevant de cette conception),
- d'un ensemble d'opérateurs élémentaires minimal (i.e. générateur de ceux constitutifs d'autres caractérisations),
- d'une grammaire générative minimale, productrice du système de représentation,
- d'un ensemble de primitives constituant une structure de contrôle minimale.

2.2 A PROPOS DE QUELQUES EXEMPLES

Les travaux sur les conceptions sont nombreux dans divers domaines des mathématiques, ils sont hétérogènes par les méthodes employées (questionnaires, études cliniques en situation de résolution de problème, observation d'élèves dans le cours d'un processus didactique, etc.) et la façon de rendre compte des résultats. On trouve des éléments de synthèse dans l'ouvrage de Johsua et Dupin (1993, pp.121-192). Il ne s'agit ici, à propos de quelques exemples, que de signaler des voies d'analyse que la formalisation proposée suggère d'explorer montrant ainsi sa potentialité d'outil pour la recherche en didactique. Dans l'état actuel, chacun des exemples peut être regardé comme un cas sur lequel il s'agirait de mettre en œuvre la caractérisation proposée. Exercice en général non trivial.

Dérivée d'une fonction en un point

Comme premier exemple nous prendrons diverses conceptions ("ways of understanding a particular piece of mathematics") de la dérivée en un point proposées par Thurston (1993, pp.4-7). La liste est longue. Thurston ne voit d'ailleurs pas de raisons de penser qu'elle puisse avoir un terme, en voici quelques éléments :

2. "Symbolic : the derivative of x^n is nx^{n-1} , the derivative of $\sin(x)$ is $\cos(x)$, the derivative of $f \circ g$ is $f' \circ g' \cdot g'$, etc."
4. "Geometric : the derivative is the slope of a line tangent to the graph of the function, if the graph has a tangent."
6. "Approximation : the derivative of a function is the best linear approximation of the function near a point"
37. "The derivative of a real-valued function f in a domain D is the Lagrangian section of the cotangent bundle $T^*(D)$ that gives the connection form for the unique flat connection on the trivial R -bundle $D \times R$ for which the graph of f is parallel."⁹

⁹ Thurston fait précéder ce nouvel exemple de la remarque : "[...] one person's clear mental image is another person's intimidation" (ibid. p.5).

Selon Thurston il s'agit là d'une variété de points de vue sur un même objet mathématique. Les différences disparaîtraient lorsqu'elles seraient explicitées en des termes formelles, précis. En fait, il nous semble que ce que nous montre Thurston ce sont moins des conceptions que des cadres au sens de Douady (1986, pp.10-11)¹⁰. Les cadres sont du côté des Mathématiques. Pour passer des cadres aux conceptions il faut opérer en quelque sorte un changement de référentiel : une conception sera une modélisation cognitive rendant compte des régularité des conduites d'un sujet relativement à un cadre.

Pour chacune des "définitions" de Thurston, il reste à décrire les termes constitutifs du quadruplet (P, R, L, Σ) pour leur associer une conception et préciser notamment les sphères de pratique de chacune. L'une de ces conceptions, par exemple, devra permettre de rendre compte de l'erreur " $x^3=3x^2$ ", dont Thurston rapporte qu'elle est souvent observée chez les étudiants américains. Plus en relation avec la spécificité des définitions proposées, on pourra essayer de rendre compte des rapports entre les aspects algébriques (symboliques), géométrique ou qualitatif (approximation). On pourra, à ce propos, trouver des éléments dans les travaux communs de didacticiens des mathématiques et de la physique sur le thème "différentiel" (Alibert *et al.* 1987).

Tangente à une courbe

Ce second exemple, étroitement lié au précédent, est utilisé par Artigue (1991) pour illustrer les rapports entre épistémologie et conceptions. Cet exemple est introduit par la présentation de points de vue, dont nous rapportons ci-dessous quelques exemples (ibid. pp.275) :

- "une ligne droite est tangente à une courbe lorsqu'ayant un point commun avec la courbe, on ne peut mener par ce point aucune droite entre elle et la courbe." (Euclide, Les Éléments, livre III, proposition 16)
- "une droite est tangente à une courbe lorsqu'elle a un point commun avec la courbe et reste toujours du même côté de cette courbe" (Appolonius de Perge)
- "la tangente à une courbe en un point M est la limite des sécantes (MP) à la courbe, lorsque le point P, se déplaçant sur la courbe, tend vers M"
- "la tangente à la courbe représentative de la fonction f en un point M est la droite associée à l'application affine tangente à f en ce point"

La problématique qui sous-tend la présentation de ces points de vue est plus proche de celle liée aux conceptions que dans l'exemple précédent. En effet, issus d'un travail d'analyse historique, ils peuvent être replacés, au moins potentiellement, relativement à des pratiques précises qui se distinguent par les moyens de représentations mis en œuvre

¹⁰ "Un cadre est constitué d'objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et à ces relations" (ibid. p.11)

(par exemple, présence ou absence de représentations algébriques) ou des classes de problèmes (éventuellement) différentes.

Cette étude a été poursuivie par l'exploration des conceptions de la tangente du côté des étudiants (Castela 1995). Le rôle joué par la conception liée à la tangente au cercle est clairement mis en évidence, par ailleurs les phénomènes observés sont des indicateurs fort de l'existence de conceptions différenciées : approximation locale, propriété globale de la relation de deux objets comme dans le cercle. En revanche, du fait de la méthode utilisée, il est difficile de percevoir comment fonctionnent ces conceptions, quels problèmes les différencient, quels outils et systèmes de signifiants elles privilégient.

Le cercle

L'étude des conceptions du cercle d'Artigue et Robinet (1982) articule de façon précise l'analyse de l'objet mathématique (ensemble de points à une même distance d'un point donné, courbe de courbure constante, courbe admettant un infinité d'axes de symétrie, etc.) et celle des situations dans lesquelles elles en suscitent le fonctionnement pour l'élève.

La langue naturelle, le dessin (et le maniement des instruments) sont les principaux moyens de représentations disponibles, les contrôles ne peuvent guère s'exprimer qu'au niveau de la perception et d'une approche "expérimentale" dans l'espace graphique accessible aux élèves. Cette recherche montre clairement que les conceptions sont étroitement dépendantes des caractéristiques mathématiques des situations mais aussi des caractéristiques physiques du milieu instrumenté dans lequel la perception joue un rôle déterminant (ibid. p.59).

Les conceptions des élèves que cette recherche met en évidence, et leur évolution ne sont pas une propriété des élèves mais bien des élèves en situation (propriétés du système sujet/milieu). Le problème que nous rencontrerons sera le poids du didactique dans les situations dans lesquelles nous serons amenés à poser le problème de l'identification et de l'analyse du fonctionnement des conceptions.

En conclusion à son article de 1991, Artigue voit là une limitation à la problématique des conceptions, le sujet épistémologique et cognitif s'effaçant pour laisser la place à un sujet didactique dont le comportement serait réglé par les contraintes du système didactique (par exemple, le concept de continuité dans l'enseignement secondaire ne serait pas un concept opératoire pour la résolution de problème, il ne fonctionnerait qu'en terme de reconnaissance d'objet — ibid. p.278).

De notre point de vue rien ne s'oppose à parler encore, dans ce cas, de conception et à poser le problème de leur caractérisation-formalisation, au sens où la classe est légitimement génératrice de sphères de pratiques¹¹. L'intérêt de la problématique des

¹¹ Une autre question est celle de savoir si certaines connaissances mathématiques peuvent avoir autre chose qu'une "existence didactique", elles n'auraient pas de prise en charge par d'autres institutions (au moins pour la

conceptions n'est pas en cause. Les élèves construisent du sens et des compétences quoiqu'il en soit. En revanche un problème doit être posé, c'est celui de la transposition didactique et du choix des objets d'enseignement.

Les fractions unitaires des Scribes de l'Égypte ancienne

A propos des obstacles épistémologiques, dans son article de 1989, Brousseau prend comme exemple les connaissances sur les fractions des scribes de l'Égypte du deuxième millénaire avant Jésus Christ. Les scribes manipulaient les fractions unitaires pour résoudre des problèmes "de partage proportionnel et surtout des échanges dans une civilisation sans monnaie" (ibid. p.46). Ce que Brousseau appelle les "inventions mathématiques" des scribes, le fonctionnement de leur connaissance, doit être "replacé dans son contexte social, économique et technique, en relation avec les pratiques de référence qui les supportent" (ibid.) pour être compris. Et l'auteur montre bien les apports et limitations de ce système fondé exclusivement sur la représentation et la manipulation des fractions unitaires, mais cette démonstration a lieu dans un système de représentation moderne qui occulte la complexité propre aux formes de l'écriture hiéroglyphique et donc les procédures effectivement utilisées. En particulier la question de l'acceptabilité de numérateurs quelconques (ibid. p.51) laisse imaginer que la notion même de numérateur ait pu avoir un sens. Le codage effectivement utilisé semble faire obstacle à une telle évolution.

L'étude des conséquences des formes symboliques en usage sur le calcul (forme des opérateurs et des procédures) et sur les contrôles reste à faire au-delà de la caractérisation du domaine de validité des fractions unitaires, où encore des sphères de pratique des scribes. Elle permettrait de préciser la nature des objets que manipulaient les scribes. Ce n'était probablement pas des fractions ("la restriction des fractions aux quantités permet de faire des raisonnements similaires à ceux utilisés pour les naturels" (ibid. p.49)), même si aujourd'hui c'est dans ce cadre que l'on peut le mieux rendre compte de ces pratiques au sein des mathématiques.

Calcul de l'aire d'un quadrilatère par des paysans chiliens et brésiliens

La questions des conceptions de l'aire et du périmètre d'une surface plane a fait l'objet d'importants travaux (e.g. Perrin et Douady 1988), nous l'aborderons ici d'un point de vue un peu particulier. De nombreuses recherches, en particulier en Amérique Latine, posent le problème de la relation des mathématiques hors l'École et des mathématiques dans l'École : comment enseigner dans l'École des connaissances qui seront confrontées à l'extérieur à des pratiques efficaces, socialement reconnues (des savoirs), mais mathématiquement fausses ? Tel est le cas du calcul de l'aire de parcelles cultivées par des

paysans du Brésil et du Chili (de Abreu 1995). Ainsi, pour un terrain de forme quadrilatère (ABCD), ces paysans prennent le produit de la demi-somme de paires de côtés opposés, soit : $((AB+CD)/2)*((AD+BC)/2)$. Ce calcul, sauf pour des terrains rectangulaires, donne des résultats faux. L'invocation d'une bonne adéquation pratique de ces calculs et d'une souplesse des mécanismes de compensation (Soto 1995, p.5) ne permettent pas, à eux seuls, de comprendre comment une telle connaissance peut subsister. La présentation qui est faite ne dit rien de précis sur la nature des problèmes qui sont résolus (sauf à mentionner la prévision de récoltes, l'échange de parcelles, etc.) et pour lesquels le calcul de l'aire est un moyen, de la forme la plus commune des parcelles, des moyens de représentation des calculs et des moyens de mesure, enfin des moyens permettant de régler des conflits.

La formalisation des conceptions des paysans brésiliens ou chiliens fournirait un outil pour calculer les situations qui permettraient de mettre en évidence leurs limites — quels sont les problèmes et conflits mal résolus ? — et l'intérêt d'une évolution dont l'École pourrait donner les moyens. Mais cette formalisation doit "rester" dans leur référentiel et non consister en une simple retraduction dans les mathématiques contemporaines qui ne feront que montrer leur caractère manifestement faux ou donnera l'illusion d'une pratique mathématique à la façon du Maître de Philosophie de Monsieur Jourdain.

2.3 RELATIONS ENTRE CONCEPTIONS ET PROPRIÉTÉS

La modélisation que nous proposons est conçue dans la perspective de construire des dispositifs permettant des apprentissages, il nous est donc nécessaire de disposer non seulement d'un moyen d'exprimer les conceptions, mais encore d'outils pour les situer les unes par rapport aux autres.

Nous revenons d'abord sur la question déjà évoquée du caractère local ou de la fausseté d'une conception.

Etant données deux conceptions $C=(P, R, L, \Sigma)$ et $C'=(P', R', L', \Sigma')$

- *C est plus générale que C'* si il existe une fonction de représentation $f : L' \rightarrow L$, telle que pour tout problème p de P' , $f(p) \in P$. En d'autres termes, les problèmes constitutifs de C' sont intelligibles pour C et appartiennent à son domaine de validité.

- *C' est fausse au sens de C* s'il existe une fonction de représentation $f : L' \rightarrow L$, p de P' , r de R' , σ' de Σ' et σ de Σ tels que $\sigma'(r(p))=vrai$ et $\sigma(f(r(p)))=faux$. En d'autres termes, p admet une solution au sens de C' qui est fausse au sens de C .

Ainsi, les notions de "généralité" ou de "globalité", et de "fausseté" d'une conception prennent du sens dans la comparaison de deux conceptions. Le fait de parler en soi de "misconception" ou de "conception locale", a pour origine l'existence de la conception de

l'*observateur* qui s'attribue, le plus souvent de façon implicite et probablement sans en avoir conscience, une position privilégiée lorsqu'il juge ou évalue les connaissances d'un système sujet/milieu. Il ne peut le faire que parce que lui même a des conceptions ou qu'il peut référer à des conceptions qui font autorité (les savoirs de référence).

La position d'observateur nous est nécessaire pour pouvoir passer du concept de conception à celui de connaissance. Nous proposons de considérer une conception particulière C_μ , dont la caractéristique est qu'elle est plus générale que toute autre. Cette existence est un postulat dont il importe peu qu'il ait directement une instance dans une réalisation de notre modèle.

Soient C et C' deux conceptions distinctes, et les fonctions de représentation $f : L \rightarrow L_\mu$ et $f' : L' \rightarrow L_\mu$. Si pour tout p de P , il existe p' de P' tel que $f(p)=f'(p')$, et réciproquement, alors nous dirons de C et C' qu'elles ont le même μ -objet (ou encore, un même objet au sens de C_μ).

Le fait que deux conceptions aient le même objet n'implique ni qu'elle soient comparables au sens de la généralité, ni qu'elles le soient au sens de la fausseté.

C_μ est la conception de référence pour ce μ -objet.

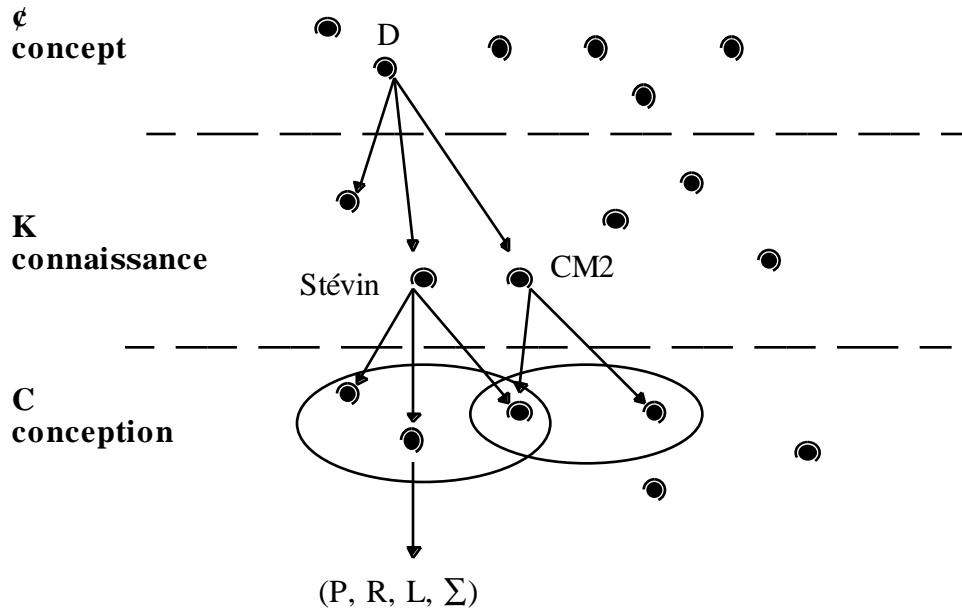
2.4 CONNAISSANCE

Nous appelons *connaissance* : un ensemble de conceptions ayant le même μ -objet. Une connaissance sera caractérisée par un label pour le μ -objet, un nom propre et un ensemble de pointeurs vers les conceptions qui la constituent. Soulignons qu'une connaissance n'est pas une classe d'équivalence au sens de la relation avoir un même μ -objet, mais seulement un sous-ensemble d'une telle classe.

Une telle définition de connaissance permet à la fois de parler de son domaine de validité (union des domaines de validité des conceptions qui la constituent) et cependant de reconnaître son caractère contradictoire (l'une des conceptions qui la constitue est fausse au sens d'une autre).

2.5 CONCEPT

Nous appelons *concept* l'ensemble des connaissances ayant le même μ - objet. Un concept est caractérisé par le label du μ -objet et l'ensemble des pointeurs vers les connaissances qui le constituent.



Ce schéma résume la structure que nous proposons. Le concept de "nombre décimal" (D) est déterminé par son extension, les connaissances D-selon-Stévin, D-en-CM2. Chaque connaissance est déterminée par un ensemble de conceptions qui sont chacune caractérisées par un quadruplet (P, R, L, Σ) .

Remarque : Une *conception* est une instantiation de la connaissance d'un sujet par une situation (elle caractérise le couple sujet/milieu en situation), ou encore une instance d'un concept par un couple sujet/situation.

3. PROBLÈMES ET RELATIONS PROBLÈMES/CONCEPTIONS

Les attributs de généralité et de fausseté, définis plus haut, donnent une première façon de situer des conceptions les unes par rapport aux autres. Pour aller plus loin dans la mise en relation des conceptions, il nous faut revenir sur la relation entre problème et conception. Un problème quelconque peut ne pas entretenir de relation spécifique avec une conception, en général il sera lié de plusieurs façons à plusieurs ensembles de conceptions.

Par ailleurs, nous souhaitons donner une signification à la résolution de problèmes qui ne nous oblige pas à la présentation explicite de l'articulation de règles de calculs ou à la description de l'application d'une méthode. Il est intéressant de pouvoir exprimer, par exemple, que tel problème de géométrie "se résout par Thalès", ou encore que tel problème analyse "se résout par la méthode de Newton". D'une certaine façon, on établit dans ces cas une relation "directe" entre une conception et un problème qui, à un certain

niveau de communication, peut suffire pour caractériser la résolution. En quelque sorte : une conception donnée résout un problème donné.

3.1. RÉOLUTION DE PROBLÈME

Soient un problème p et une famille de n conceptions $\{C_1, \dots, C_n\}$, on dira que $\{C_1, \dots, C_n\}$ résout p si et seulement si il existe une suite d'opérateurs (r_{i1}, \dots, r_{im}) dont chaque terme est pris dans l'un des R_i pour i dans $\{1, \dots, n\}$ telle que

- $p_1 = r_{i1}(p)$
- pour k compris entre 2 et m : $p_k = r_{ik}(p_{i,k-1})$
- il existe s de \sum_{im} vérifiant $s(r_{im}(p_{im-1})) = \text{vrai}$.

On dira, classiquement, que (r_{i1}, \dots, r_{im}) est une solution de p .

3.2. DÉFINITIONS

Nous proposons ici la relecture, dans le modèle, de quelques relations exprimées en Didactique à propos du rapport entre conceptions et problèmes :

Problème élémentaire

Un problème p est *élémentaire* pour une conception C si C résout p

Problème spécifique d'une conception

On dira d'un problème p qu'il est spécifique d'une conception C , si C participe à toute solution de p .

Une caractérisation intéressante, mais non minimale, d'une conception serait celle pour laquelle P serait l'ensemble des problèmes qui lui seraient spécifiques.

Conceptions équivalentes

Deux conceptions C et C' sont équivalentes sur un ensemble de problèmes E si et seulement si pour tout p de E toute substitution de C à C' dans un ensemble de conceptions qui résout p est encore un ensemble de conceptions qui résout p et réciproquement.

On dira, simplement, que C et C' sont équivalentes si $P = P' = E$. ("être équivalente" est une relation plus forte que la relation "avoir le même μ -objet").

Conception partielle

Une conception C est partielle relativement à une conception C' si et seulement si C est équivalente à C' sur une partie stricte de P'

Conceptions de natures différentes

Deux conceptions C et C' sont de natures différentes sur un ensemble de problèmes E si et seulement si pour tout p de E , il existe une solution de p qui contient C (de même pour C'), mais la substitution de C à C' (ou inversement) dans un ensemble de conceptions qui résout p n'est plus un ensemble de conceptions qui résout.

On dira, simplement, qu'elles sont de nature différente si $P=P'=E$.

Champ conceptuel

La notion de champ conceptuel proposée par Vergnaud trouve ici une expression simple : le champ conceptuel d'une conception C est l'ensemble des problèmes à la solution desquels elle participe (Vergnaud 1991, p.146). Plus intéressant serait la réduction du champ conceptuel à ensemble des problèmes spécifiques de C .

La notion de champ conceptuel induit une organisation des conceptions. On dira d'une conception C qu'elle est dans le *champ conceptuel* d'une conception C' si pour tout problème p , tout ensemble de conceptions qui résout p qui contient C' contient aussi C .

4. APPRENTISSAGE

L'apprentissage est un processus permettant le passage d'une conception à une autre. Une caractéristique du système didactique est qu'il explicite a priori la conception cible.

Pour modéliser l'apprentissage dans le cadre de la formalisation envisagée, il est nécessaire de disposer d'un univers de référence permettant d'organiser l'ensemble des conceptions et par rapport auquel pourra être posée une problématique d'évolution.

4.1. UN UNIVERS DE RÉFÉRENCE

On appellera Univers de référence l'ensemble μ des concepts. A chaque concept nous attacherons la conception C_μ qui domine au sens de la généralité les conceptions constitutives des connaissances de son extension¹².

μ est en quelque sorte le troisième monde de Popper pour les Mathématiques ; le plus souvent, nous parlerons simplement des Mathématiques pour désigner μ .

Nous posons le principe de l'existence d'un système de représentation \mathcal{E} permettant d'exprimer toutes les conceptions C_μ , il sera ainsi possible de parler de problèmes isomorphes, bien qu'exprimés dans des systèmes de représentation différents¹³.

¹² Il nous semble que C_μ correspond au "point de vue" au sens où Castella (1995, p.10) propose de le formaliser à la suite de ses travaux sur les conceptions de la tangente : "Un point de vue est un découpage dans le corps des savoirs mathématiques sur un objet donné, rassemblant définitions, théorèmes, situations et signifiants". On retrouve là les trois éléments P, R, et L. Quant à Σ il reste implicite, donné en quelque sorte par la rationalité mathématique qui donne sa légitimité au point de vue.

¹³ Dans notre cas il est intéressant de considérer que cette langue est un langage de programmation : Prolog, Lisp, C++, etc ...

Pour un problème p donné on appelle *énoncé fondamental* une expression de p dans \mathcal{L} . Soient C une conception, $\mathcal{L}(p)$ l'énoncé fondamental d'un problème p , $f: \mathcal{L} \rightarrow L$, on appellera représentation de p selon C l'image $f(\mathcal{L}(p))$.

Deux problèmes p et p' , connus relativement à deux conceptions C et C' , sont *isomorphes* s'ils ont un même énoncé fondamental.

Nous appellerons problématique d'un concept φ de μ , l'ensemble $\prod \varphi$ des énoncés fondamentaux constitutifs de la conception C_μ correspondante. La problématique d'une connaissance K constitutive d'un concept φ sera l'ensemble problèmes des éléments de la problématique de φ représentables selon au moins l'une des conceptions constitutives de K .

Dans la suite Π désignera l'ensemble des problèmes de Mathématiques, c'est l'union des $\prod \varphi$ pour φ dans μ .

4.2. ETATS DE CONNAISSANCE D'UN SUJET

Nous introduisons ici le sujet S pour nous intéresser à son état de connaissance relativement aux Mathématiques à un moment donné.

Relativement à un ensemble de concepts $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ de μ , l'état de connaissance de S serait, intuitivement, un ensemble de connaissances $\{K_1, \dots, K_m\}$ tel que pour tout i de $\{1, m\}$ il existe j de $\{1, n\}$ tel que K_i soit constitutif de φ_j . Mais en fait, du point de vue pragmatique, notamment dans la tentative de caractérisation expérimentale des connaissances qui pourraient être "attribuée" à un individu donné, l'accès a lieu par les conceptions associées à des capacités de résolution de problèmes.

Aussi nous préférons la caractérisation suivante :

Soit un sous-ensemble Q_s de conceptions constitutives de connaissances attachées aux concepts $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, π_s un sous-ensemble de la problématique Π de μ tel que tout problème p de π_s ait une représentation $f(p)$ selon au moins un élément de Q_s et pour laquelle il existe une famille d'éléments de Q_s qui résolve $f(p)$. On dira que le couple $S=(Q_s, \pi_s)$ est un état de connaissances du sujet S relativement aux concepts $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$

Cet état de connaissance peut être représenté par un graphe biparti dont une classe de sommets est constituée d'éléments de Q_s et l'autre classe d'éléments de π_s . Les connexions de ce graphe sont définies de façon naturelle : il y a une arête $a(C, p)$ si C appartient à une famille de conceptions qui résout p . Cette arête est faible dans le cas général, elle sera dite forte si C est spécifique de $\{p\}$. On pourra ainsi distinguer la structure faible et la structure forte d'un état de connaissance.

4.3. ÉTATS DE CONNAISSANCE D'UN μ -OBJET

Soit M le μ -objet constitutif d'un concept de μ . M définit une classe de conceptions au sens de la relation "avoir même objet modulo μ " ; on dira, simplement, d'un élément de cette classe qu'elle est une conception de M . On peut de façon combinatoire énumérer les états de connaissances relatifs à M :

soient π l'ensemble des problèmes de Π ayant au moins une représentation selon une conception de M , $\text{Part}(\pi)$ l'ensemble des parties de π et $\text{Part}(Q)$ l'ensemble des parties de l'ensemble Q des conceptions de M .

Soit π_e un élément de $\text{Part}(\pi)$ et Q_e un élément de $\text{Part}(Q)$: si tout élément de π_e est représentable dans Q_e et y a une solution possible, alors (Q_e, π_e) constitue un état de connaissance de M .

Cette construction ne prend évidemment pas en charge la question souvent évoquée à propos des modélisations informatiques de la plausibilité psychologique. Probablement, certains états de connaissance ainsi construits n'auront pas d'instance dans un corpus expérimental. Comprendre pour quelle raison peut ne pas manquer d'intérêt, par ailleurs cette démarche offre un cadre pour conduire une analyse a priori au sens de la Didactique : la capacité d'énumérer les états de connaissances pour un objet mathématique donné (un μ -objet) donne accès à l'exploration de l'univers des possibles dans lequel un apprentissage aura lieu.

Pour l'ensemble des états de connaissance relatifs à un μ -objet déterminé M , une structuration assez naturelle est la suivante :

Soient deux états de connaissance de M : $E_1=(Q_{e1}, \pi_{e1})$, $E_2=(Q_{e2}, \pi_{e2})$. On dira que E_1 est un *progrès* sur E_2 :

- si $\pi_{e1} \subset \pi_{e2}$, c'est à dire si E_1 peut participer à la résolution de plus de problèmes que E_2 ;
- si E_1 est plus efficace que E_2 au sens d'une fonction de coût qui doit être défini ;
- Si $\pi_{e1} = \pi_{e2}$ et si E_1 est aussi efficace que E_2 , on préférera l'état de connaissance le plus homogène, $|Q_{e1}| < |Q_{e2}|$.

4.4. PROPRIÉTÉS PARTICULIÈRES DES ÉTATS DE CONNAISSANCE

Un état de connaissance (Q_e, π_e) est incohérent s'il contient deux conceptions contradictoires, c'est-à-dire fausse l'une par rapport à l'autre sur un ensemble de problèmes de π_e . Cet état est potentiellement conflictuel s'il existe un problème p de Π tel que p ait une représentation $f(p)$ selon au moins une conception de Q_e et l'état de connaissance $(Q_e, \pi_e \cup \{f(p)\})$ est incohérent.

On pourra, en reprenant les définitions sur les conceptions, définir des états de connaissance équivalents, de nature différente, partiel l'un par rapport à l'autre, ou faux l'un par rapport à l'autre.

5. EVOLUTION DES ÉTATS DE CONNAISSANCE

La modélisation des conceptions dont nous avons présenté ici les principaux éléments présente un intérêt pour la didactique des mathématiques dans la mesure où elle fournirait un outil pour comprendre des phénomènes cognitifs en relation avec des processus didactique, ou pour concevoir des dispositifs permettant de susciter des apprentissages et d'en assurer le contrôle. Pour cela il faut introduire une perspective dynamique en termes d'évolution des états de connaissance et de condition de telles évolutions.

Un état de connaissance (Q, π) d'un μ -objet M peut évoluer en conséquence de l'évolution de ses constituants Q ou π , ou des deux simultanément.

Une modification de Q peut être le résultat de l'ajout ou au contraire du retrait d'une conception, ou encore la substitution d'une conception à une autre ou à un sous-ensemble d'autres conceptions. De même π peut être modifié en supprimant ou en ajoutant des problèmes, ou en substituant un problème à un sous-ensemble de problèmes.

Une évolution simple est celle qui rend compte de la modification du domaine de validité d'une conception.

Une évolution particulièrement intéressante d'un état de connaissance est celle qui conduit à éliminer les contradictions actuelles dans Q .

On dira que la modification d'un état de connaissance est un *apprentissage* si elle constitue un progrès. La transformation d'un état de connaissance peut correspondre à une évolution de caractère régressif au regard de l'ordre induit sur l'ensemble des états de connaissances. L'une de ces évolutions est intéressante est l'oubli : soit $E=(Q, \pi)$ un état de connaissance, si on substitue à Q un ensemble plus petit de conceptions Q' et que cependant tout problème de π peut être résolu alors on désigne par oubli le passage de E à $E'=(Q', \pi)$. Si au contraire cette modification de Q entraîne qu'un ou plusieurs problèmes de π ne peuvent plus être résolus ou qu'ils le sont moins bien (au sens de l'efficacité), alors on parlera de dégénérescence de E .

Un processus didactique peut être modélisé par une fonction de transition sur un graphe d'états de connaissance qui permet d'une part d'attribuer un état de connaissance à un sujet (fonctions de diagnostic), d'autre part de déterminer un cheminement dans le graphe

qui permette le passage de l'état de connaissance diagnostiqué à un état de connaissance déterminé (objet de l'enseignement).

L'évolution la plus critique est celle qui est obtenue lorsque la conception diagnostiquée est fautive relativement à la conception cible. Pour cela il faut disposer d'un problème qui puisse être exprimé dans les deux systèmes de représentation et qui atteste de la contradiction : sa solution doit pouvoir être envisagée dans la conception diagnostiquée et cependant ne pas pouvoir être résolu selon la structure de contrôle de cette conception. Un tel problème peut ne pas exister d'emblée, la construction de conceptions intermédiaires est alors nécessaire. Une évolution difficile est celle qui correspond à une amélioration de l'efficacité sans que la conception initiale puisse être véritablement invalidée.

Poser le problème de la définition de processus didactiques sur un ensemble d'états de connaissance, ou un ensemble de conception, demande de définir sur cet ensemble une topologie de voisinage dont le critère devrait s'exprimer en terme de résolution de problèmes. Cette modélisation d'un processus didactique, qui ne recouvre pas d'emblée tous les aspects de la théorie des situations didactiques, doit fournir un outil pour la conception de précepteurs artificiels. Une modélisation de ce type a été utilisée dans le cadre de la thèse de Salima Tahri pour la conception d'un précepteur hybride (associant personne et machine dans le "guidage" d'un apprentissage).

* *
*

Ce texte, dans sa forme actuelle est d'abord un document de travail. Des exemples significatifs doivent le compléter, et la dernière partie doit être développée. Néanmoins il décrit assez en détail les grandes lignes d'une approche qui devrait faciliter un travail de synthèse et d'organisation des recherches en didactique portant sur les conceptions des élèves, et, de façon plus ambitieuse, le calcul des situations — il est clair que la place des situations dans ce modèle reste à préciser.

Nous avons montré, lors de l'École d'été de didactique des mathématiques de 1993, comment cette formalisation permettait d'interroger les approches actuelles de l'IA de la modélisation de l'apprenant. Notre objectif est d'aller plus loin, en utilisant cette approche pour spécifier un Environnement Informatique d'Apprentissage Humain (EIAH) à propos d'un contenu mathématique donné.

Nous avons aussi souligné que cette modélisation donnait accès à une caractérisation des EIAH du point de vue de l'interaction. Cet aspect n'est pas repris ici, il le sera dans ultérieurement. Un premier développement a été rédigé à l'occasion d'un article avec R.

Sutherland sur la notion de domaine de validité épistémologique d'un micromonde. Le lecteur pourra s'y reporter (Balacheff et Sutherland 1994).

RÉFÉRENCES

- Aebli H. (1963) *Didactique psychologique*. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.
- Alibert D., et al. (1987) Le thème "différentiel", un exemple de coopération maths-physique dans la recherche. In : Vergnaud G., Brousseau G., Hulin M. (eds.) (1988) *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*. (pp.7-46). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Artigue M. (1991) Épistémologie et didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*. 10(2/3) 241-285.
- Artigue M. (1993) Connaissance et métaconnaissance, une perspective didactique. In : Baron M., Robert A. (eds.) *Métaconnaissances en IA, en EIAO et en didactique des mathématiques*. RR LAFORIA 93/18. (pp.29-42). Paris : Institut Blaise Pascal.
- Artigue M., Robinet J. (1982) Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques*. 3(2) 5-64.
- Bachelard G. (1938) *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : Vrin.
- Balacheff N. (1995) Pour une problématique cognitive en Didactique. (15 pages, à paraître)
- Balacheff N., Sutherland R. (1994) Epistemological domain of validity of microworlds, the case of Logo and Cabri-géomètre. In : Lewis R., Mendelshon P. (eds) *Lessons from learning — Proceedings of the IFIP TC3/WG3.3* (pp.137-150). North-Holland.
- Bourdieu P. (1980) *Le sens pratique*. Paris : Les éditions de Minuit.
- Brousseau G. (1975) *Etude de l'influence des conditions de validation sur l'apprentissage d'un algorithme*. IREM de Bordeaux.
- Brousseau G. (1976) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In : (1983) *Recherches en didactique des mathématiques*. 4(2) 164-198.
- Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 7(2) 33-115.
- Brousseau G. (1989) Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In : Bednarz N., Garnier C. (eds.) *Construction des savoirs*. (pp.41-63) Montréal : Editions Agence d'ARC.
- Castela C. (1995) Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherches en didactique des mathématiques*. 15(1) 7-47.

- Confrey J. (1986) "Misconceptions" across subject matters: charting the course from a constructivist perspective. *Annual meeting of the American Educational Research Association*. Document photocopié.
- de Abreu G. (1995) Mathématiques paysannes. *La Recherche*. 278, 800-802.
- Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*. 7(2) 5-32.
- d'Ambrosio U. (1993) *Etnomatemática*. São Paulo : Editora Atica.
- Devereux G. (1972) *Ethnopsychanalyse complémentariste*. Paris : Flammarion (1985).
- Johsua S., Dupin J.-J. (1993) *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*. Paris : PUF.
- Lave J. (1988) *Cognition into practice*. Cambridge : Cambridge University Press.
- Lave J., Wenger E. (1989) *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Research Report n°IRL 89-0013. Palo-Alto: Institut for Research on Learning.
- Leonard F., Sackur C. (1991) Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche. *Recherches en didactique des mathématiques*. 10(2/3) 205-240.
- Nuñez T., Carraher D., Schliemann A. (1983) *Mathematics in streets and schools*. Cambridge University Press.
- Perrin M.-J., Douady R. (1988) Conceptions des élèves à propos d'aires de surface planes. In : Laborde C. (ed.) *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique* (pp.161-172). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Piaget J. (1969) *Psychologie et pédagogie*. Paris : Éditions Denoël.
- Resnick L. (1987) Learning in school and out. *Educational Researcher*. 16(9) 13-20.
- Robert A. (1993) Présentation du point de vue de la didactique des mathématiques sur les métaconnaissances. In : Baron M., Robert A. (eds.) *Métaconnaissances en IA, en EIAO et en didactique des mathématiques*. RR LAFORIA 93/18. (pp.5-18). Paris : Institut Blaise Pascal.
- Salin M.-H. (1976) *Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques de l'école primaire*. IREM de Bordeaux.
- Soto I. C. (1993) ¿ Matemáticas en la escuela sin la vida ... matemáticas en la vida sin la escuela ? In : Oteiza F. (ed.) *Actes de la IX° conférence CIAEM*. Santiago. (à paraître).
- Thurston W. P. (1993) *On proof and progress in mathematics*. Manuscrit.
- Vergnaud G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*. 10(2/3) 133-169.