

Réduire l'arbitraire par la négociation quitte à concéder

Fabien Delecroix, Maxime Morge et Jean-Christophe Routier

18 février 2015

Résumé

Les conflits sont intrinsèques aux Systèmes Multi-Agents (SMA) et la négociation est un processus permettant de résoudre ces conflits. Nous nous intéressons ici aux problèmes de décision collective où les préférences des individus sont partielles, certaines alternatives étant incomparables ou équivalentes. Afin d'évaluer les alternatives du point de vue de la société d'agents, nous raffinons ici le critère de Pareto-optimalité en définissant la notion de compromis et examinons ces compromis grâce à la théorie du bien-être social. Nous proposons dans cet article un jeu de négociation bilatérale, c.-à-d. un protocole et deux stratégies qui s'appuient sur des concessions : l'une conciliante et l'autre temporisatrice. Finalement, nous montrons que la première est meilleure socialement et la seconde meilleure individuellement. Nos expériences montrent que temporiser est une stratégie dominante dans un nombre très restreint de situations. De plus, le résultat de la négociation est plus restreint que celui d'une décision mono-agent et donc réduit l'arbitraire de la décision.

1 Introduction

Les Systèmes Multi-Agents (SMA) représentent un paradigme de premier ordre pour l'analyse, la conception et l'implémentation de systèmes composés d'entités autonomes en interaction. Les conflits caractérisent ces systèmes. Ces conflits existent entre les agents parce que chacun d'eux peut avoir ses propres objectifs.

Des mécanismes bien connus tels que le vote [1] ou les jeux de négociation [10] permettent de résoudre ces conflits en agrégeant les points de vue pour atteindre un accord sur un plan d'action. Nous nous limitons ici aux négociations bilatérales en nous focalisant sur les processus de marchandage qui consistent en un échange d'offres et de contre-offres. Contrairement aux travaux existants [12, 7, 9, 8], nous considérons que :

1. la rationalité des agents se fonde sur une relation de préférence éventuellement partielle - certaines alternatives étant incomparables ou équivalentes [13] ;
2. les agents ne connaissent pas les préférences de leur interlocuteur.

Afin d'évaluer les alternatives du point de vue de la société d'agents, nous raffinons ici le critère de Pareto-optimalité en définissant la notion de compromis et examinons ces compromis grâce à la théorie du bien-être social. Nous proposons dans cet article un jeu de négociation bilatérale, c.-à-d. un protocole et deux stratégies : l'une conciliante et l'autre temporisatrice. De plus, nous montrons formellement que, si les participants sont conciliants, notre processus permet d'atteindre un accord qui est un Pareto-Optimal compromis égalitaire, mais que si les participants temporisent alors ils améliorent leur satisfaction individuelle. Comme cette situation de jeu n'est pas nécessairement Pareto-optimale, l'intérêt individuel des participants va à l'encontre de l'intérêt commun.

Cet article est une version étendue de [6]. D'une part, contrairement à la stratégie présentée dans [6], les alternatives rationnelles ne sont pas celles qui sont non-dominées parmi les alternatives légales mais des ajustements minimaux. Ce raffinement de la stratégie permet de garantir que les accords obtenus en coopérant sont tous des compromis. D'autre part, nous présentons ici le résultat de nos expérimentations. Nous montrons que la stratégie temporisatrice est une stratégie dominante dans un nombre très restreint de situations. Pour ce faire, le nombre d'alternatives *ex aequo* - c.-à-d. les alternatives incomparables ou équivalentes - doit être borné. De plus, nos expériences montrent que, le nombre d'alternatives obtenues à l'issue d'une négociation est bien plus réduit que le nombre d'alternatives obtenues par le processus de décision d'un agent seul dans les mêmes conditions : il est plus facile de décider à deux que seul.

Nous commençons dans la section 2 par définir la rationalité de nos agents. Dans la section 3, nous présentons le problème de la décision collective en caractérisant les accords possibles en terme de Pareto-optimalité puis nous introduisons la notion de compromis. La section 4 permet d'évaluer la qualité de ces compromis d'un point vue global grâce à la théorie du choix social. Nous présentons ensuite notre jeu de négociation (cf. section 5). La section 6 est consacrée aux expérimentations. La section 7 présente les travaux connexes. Nous terminons cet article par une discussion.

2 Décision mono-agent

Décider consiste à sélectionner une ou plusieurs alternatives parmi un ensemble donné. On suppose ici qu'il existe une relation de préférence sur ces alternatives, représentant les penchants du décideur et permettant de les comparer les unes aux autres.

Définition 1 (Relation de préférence) *Soit \mathcal{X} un ensemble fini non-vide d'alternatives. On appelle **relation de préférence** sur \mathcal{X} , une relation de préordre sur \mathcal{X} (notée \succsim). Si $x \succsim y$, on dit que x l'alternative x est au moins aussi bonne que y . À partir de cette relation de préférence large, on peut définir :*

- la **relation de préférence stricte**, notée \succ , telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{X}^2, x \succ y \Leftrightarrow x \succsim y \text{ et } \neg(y \succsim x)$$

si $x \succ y$, on dit que x est strictement préférée à y ;

– la **relation d'équivalence**, notée \sim , telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{X}^2, x \sim y \Leftrightarrow x \succsim y \text{ et } y \succsim x$$

si $x \sim y$, on dit que x est équivalente à y ;

– la **relation d'incomparabilité**, notée \boxtimes , telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{X}^2, x \boxtimes y \Leftrightarrow \neg(x \succsim y) \text{ et } \neg(y \succsim x)$$

si $x \boxtimes y$, on dit que x et y sont incomparables.

Alors que la relation de préférence large est un préordre, c.-à-d. réflexive et transitive, la relation de préférence stricte est un ordre strict, c.-à-d. transitive et asymétrique. L'équivalence indique l'indifférence du décideur entre deux alternatives. Elle signifie que le décideur estime que, au sens des préférences, il n'existe pas de différence réelle entre x et y . De plus, on remarque qu'une relation de préférence large est potentiellement partielle. Deux alternatives sont incomparables si le décideur trouve difficile leur comparaison. On peut interpréter l'incomparabilité comme le refus du décideur de s'engager sur un jugement incertain.

Une relation de préférence est généralisable pour comparer non plus des alternatives mais des ensembles d'alternatives [2].

Définition 2 (Préférences sur les ensembles) Soit (\mathcal{X}, \succsim) un ensemble d'alternatives fini non vide muni d'une relation de préférence. Soient A et B , deux ensembles d'alternatives. On dit que A est strictement préféré à B (noté $A \succ B$) ssi :

$$\begin{cases} \exists a \in A \setminus B, \forall b \in B \setminus A \ a \succ b \text{ et} \\ \nexists b \in B \setminus A, \exists a \in A \setminus B \ b \succ a \end{cases}$$

On peut représenter une relation de préférences par un graphe orienté où les sommets sont les alternatives.

Définition 3 (Graphe de préférences) Soit (\mathcal{X}, \succsim) un ensemble d'alternatives fini non vide muni d'une relation de préférence, on appelle graphe de préférences le graphe orienté $G = (V, A)$ tel que :

- $V = \mathcal{X}$;
- $A = \{(x, y) \in \mathcal{X}^2 \mid x \neq y, x \succsim y, \nexists z \in \mathcal{X} \setminus \{x, y\}, x \succsim z, z \succsim y\}$.

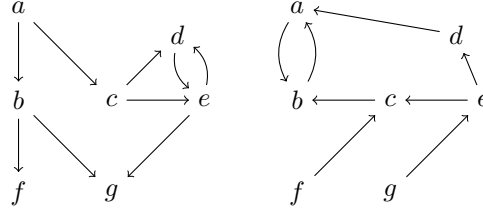
Dans un graphe de préférences, le fait que x est au moins aussi bonne que y est représenté par un chemin depuis x vers y . Ainsi, l'ensemble des arcs du graphe correspond à la réduction réflexo-transitive de la relation de préférence.

Les préférences du décideur lui permettent de sélectionner les meilleures alternatives.

Définition 4 (Optimalité) Soit (\mathcal{X}, \succsim) un ensemble fini non-vidé d'alternatives muni d'une relation de préférence sur \mathcal{X} . Une alternative $x \in \mathcal{X}$ est dite **optimale** sur l'ensemble \mathcal{X} ssi : $\forall y \in \mathcal{X}, x \succsim y$.

Dans le cas général, c.-à-d. si la relation de préférence large est partielle, il n'existe pas nécessairement d'alternative optimale. La notion de non-dominance, moins restrictive, permet de distinguer, dans un ensemble d'alternatives, celles auxquelles on ne préfère aucune autre.

FIGURE 1 – Relation de préférence \succsim_1 (à gauche) et \succsim_2 (à droite)



Définition 5 (Ensemble des non-dominés) Soit (\mathcal{X}, \succsim) un ensemble fini non-vide d'alternatives muni d'une relation de préférence sur \mathcal{X} . L'ensemble des **alternatives non-dominées** sur \mathcal{X} pour \succsim est l'ensemble

$$ND(\mathcal{X}, \succsim) = \{x \in \mathcal{X} \mid \forall y \in \mathcal{X}, \neg(y \succ x)\}$$

On peut remarquer qu'il existe toujours au moins une alternative non dominée.

Exemple 1 Nous considérons ici deux relations de préférence \succsim_1 et \succsim_2 exprimées sur un ensemble d'alternatives $\mathcal{X} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Le graphe de préférences correspondant à la relation \succsim_1 (respectivement \succsim_2) est représenté à gauche (resp. à droite) de la figure 1. On peut noter que :

- a est optimale sur \mathcal{X} pour \succsim_1 et $ND(\mathcal{X}, \succsim_1) = \{a\}$;
- il n'y a pas d'alternative optimale pour \succsim_2 mais $ND(\mathcal{X}, \succsim_2) = \{f, g\}$.

3 Décision multi-agents

Nous considérons ici un ensemble d'agents (deux ou plus). Nous commençons par définir la notion de consensus puis celles de concession et de compromis pour finalement proposer un algorithme centralisé de recherche de compromis.

Nous considérons ici un ensemble fini et non-vide d'alternatives \mathcal{X} , un ensemble d'agents Ω et pour tout agent $a_i \in \Omega$, \succsim_i la relation de préférence large de a_i sur \mathcal{X} .

3.1 Consensus

Le critère de Pareto permet de comparer deux alternatives du point de vue d'un groupe d'agents. Une alternative x Pareto-domine une alternative y pour un groupe d'agents si x est au moins aussi bien que y pour tous les agents et qu'au moins un agent préfère strictement x à y .

Définition 6 (Pareto-dominance) On définit la relation de **Pareto-dominance** $\succ_{\Omega} \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathcal{X}^2$,

$$x \succ_{\Omega} y \Leftrightarrow (\forall a_i \in \Omega, x \succsim_i y) \wedge (\exists a \in \Omega, x \succ_i y)$$

On peut remarquer que la relation de Pareto-dominance est une relation d'ordre strict.

Propriété 1 (Pareto-dominance) La relation de Pareto-dominance $\succ_{\Omega} \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ est une relation transitive et asymétrique.

Une alternative est considérée comme Pareto-optimale si elle n'est pas Pareto-dominée.

Définition 7 (Pareto-optimalité) L'ensemble des alternatives **Pareto-optimales** pour Ω sur \mathcal{X} est l'ensemble $ND(\mathcal{X}, \succ_{\Omega}) = \{x \in \mathcal{X} \mid \forall y \in \mathcal{X} \neg(y \succ_{\Omega} x)\}$

La Pareto-optimalité capture la notion de rationalité multi-agents. En effet, les alternatives dominées le sont car, du point de vue du groupe d'agents, de meilleures alternatives sont disponibles. De plus, l'existence d'une alternative Pareto-optimale est garantie.

Propriété 2 (Existence d'un Pareto-optimal) $ND(\mathcal{X}, \succ_{\Omega}) \neq \emptyset$

Toutefois, comme le montre l'exemple, la Pareto-optimalité n'est pas un critère suffisamment discriminant.

Exemple 2 Dans l'exemple précédent (cf. figure 1), l'ensemble de Pareto-optimalité est $\{a, c, e, f, g\}$. On peut remarquer que b n'est pas Pareto-optimal car a domine b pour a_1 et a est au moins aussi bien que b pour a_2 . Ainsi, a Pareto-domine b . Même si a est Pareto-optimale, cette alternative ne semble pas satisfaisante. En effet, a est non-dominée pour a_1 sur \mathcal{X} mais a est également une des pires alternatives pour a_2 . Il en va de même pour g qui est non-dominée pour a_2 sur \mathcal{X} et g est une des pires alternatives pour a_1 . c , e et f semblent des solutions plus équilibrées.

Contrairement à la Pareto-optimalité, l'intersection des alternatives non-dominées capture la notion de consensus, c.-à-d. un choix multi-agents réalisé en l'absence de conflits. De telles alternatives sont considérées comme les meilleures par tous les agents. C'est un critère plus restrictif que la Pareto-optimalité.

Propriété 3 (Pareto-optimalité de l'intersection des non-dominés)

$$\bigcap_{a_i \in \Omega} ND(\mathcal{X}, \succ_{a_i}) \subseteq ND(\mathcal{X}, \succ_{\Omega})$$

Exemple 3 Dans l'exemple précédent (cf. figure 1), l'intersection des non-dominés est vide.

Comme l'illustre cet exemple, le consensus est un critère de décision multi-agents trop restrictif car son existence n'est pas garantie.

3.2 Concessions et compromis

Nous souhaitons établir un ou des critères de décision multi-agents qui soient plus restrictifs que la Pareto-optimalité et qui nous garantissent l'existence d'une solution. Nous appelons ces solutions des compromis.

Afin d'introduire la notion de compromis, on définit une concession pour une alternative comme l'ensemble des alternatives qui lui sont strictement préférées.

Définition 8 (Concession mono-agent) Soit $x \in \mathcal{X}$ une alternative et a_i un agent, on appelle **concession** pour x dans \mathcal{X} l'ensemble suivant :

$$Con_i(x, \mathcal{X}) = \{y \in \mathcal{X} \mid y \succ_i x\}.$$

On remarque que $Con_i(x, \mathcal{X})$ est l'ensemble des alternatives à écarter pour que x ne soit pas dominé : $x \in ND(\mathcal{X} - Con_i(x, \mathcal{X}), \succ_i)$

La notion de concession peut être étendue à un ensemble d'agents.

Définition 9 (Concession multi-agents) Soit $x \in \mathcal{X}$ une alternative et Ω un ensemble d'agents, on appelle ensemble des alternatives concédées par Ω pour x (noté $Con_\Omega(x, \mathcal{X})$) :

$$Con_\Omega(x, \mathcal{X}) = \bigcup_{a_i \in \Omega} Con_i(x, \mathcal{X})$$

Une concession multi-agents est dite minimale (au sens de l'inclusion) si l'abandon de toutes les alternatives qui la composent est nécessaire pour qu'au moins une alternative fasse l'unanimité. Autrement dit, aucun des sous-ensembles d'une concession minimale n'est lui-même une concession pour une autre alternative.

Définition 10 (Concession multi-agents minimale) Soit $x \in \mathcal{X}$ une alternative, Ω un ensemble d'agents et $C = Con_\Omega(x, \mathcal{X})$ la concession associée. C est une **concession minimale** (notée $conMin(C, \mathcal{X}, \Omega)$) pour Ω sur \mathcal{X} et x est un **compromis** pour Ω (noté $compromis(x, \mathcal{X}, \Omega)$) ssi : $\nexists y \in \mathcal{X}, Con_\Omega(y, \mathcal{X}) \subsetneq Con_\Omega(x, \mathcal{X})$

Un compromis est une alternative qui fait l'objet d'un consensus après soustraction d'une concession minimale.

On peut remarquer qu'il existe toujours au moins une concession minimale et donc toujours un compromis.

Propriété 4 (Existence d'un compromis) Soit \mathcal{X} un ensemble d'alternatives et Ω un ensemble d'agents. Il existe toujours $C \subseteq \mathcal{X}$ tel que $conMin(C, \mathcal{X}, \Omega)$.

On peut remarquer que l'ensemble des compromis est une restriction de l'ensemble des Pareto-optimaux.

Propriété 5 (Pareto-optimalité des compromis) $compromis(x, \mathcal{X}, \Omega) \Rightarrow x \in ND(\mathcal{X}, \succ_\Omega)$

Tous les compromis sont Pareto-optimaux mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai.

Exemple 4 Dans l'exemple précédent (cf. figure 1), les concessions minimales sont :

- $\{a, b\}$ et le compromis associé est f ;
- $\{a, c, g\}$ et le compromis associé est e ;
- $\{a, e, f, g\}$ et le compromis associé est c ;
- $\{c, d, e, f, g\}$ et le compromis associé est a :

Ici, on a plusieurs concessions minimales de cardinalité différente. En outre, on peut remarquer que g n'est pas un compromis alors qu'il est Pareto-optimal.

En résumé, il est raisonnable de vouloir atteindre un compromis car son existence est garantie et ce critère est plus restrictif que la Pareto-optimalité. Toutefois, on peut s'interroger sur la qualité des compromis.

Algorithme 1: Fonction itérative de recherche des compromis via les concessions minimales

Données : \mathcal{X} : l'ensemble d'alternatives, Ω l'ensemble des agents

Résultat : Res : l'ensemble des compromis

```

1  $Candidats = \{\emptyset\}$  ;
2  $Sol = \emptyset$  ;
3  $Res = \emptyset$  ;
4 tant que  $Candidats \neq \emptyset$  faire
5    $C = enleverTete(Candidats)$  ;
6    $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \setminus C$  ;
7    $Comp = \bigcap_{a \in \Omega} ND(\mathcal{X}', \succsim_a)$ ;
8   si  $Comp \neq \emptyset$  alors
9      $Sol = Sol \cup C$  ;
10     $Res = Res \cup Comp$  ;
11    pour chaque  $E \in Candidats$  faire
12      si  $C \subseteq E$  alors
13         $enlever(E, Candidats)$  ;
14      fin
15    fin
16  sinon
17    pour chaque  $x \in \bigcup_{a \in \Omega} ND(\mathcal{X}', \succsim_a)$  faire
18       $Nouv = C \cup \{x\}$  ;
19      si  $\neg Nouv \subseteq Candidats \wedge \nexists Cmin \in Sol, Cmin \subseteq Nouv$  alors
20         $ajouterEnQueue(Nouv, Candidats)$ 
21      fin
22    fin
23  fin
24 fin
25 retourner  $Res$  ;

```

TABLE 1 – Côté des compromis pour chaque agent.

x	$cout(x, \mathcal{X}, \succsim_{a_1})$	$cout(x, \mathcal{X}, \succsim_{a_2})$
a	0	3
c	1	2
e	2	1
f	2	0

En effet, dans notre exemple, le compromis a ne semble être ni \hat{z} optimal, ni \hat{z} équilibré.

L'algorithme représenté dans la figure 1 est un algorithme centralisé permettant d'identifier l'ensemble des compromis.

4 Évaluation sociale

Afin d'évaluer la qualité d'un compromis, nous introduisons ici différentes métriques. De la même manière que les fonctions d'utilité permettent d'évaluer la satisfaction individuelle d'un agent, nous introduisons le coût d'une alternative pour un agent, c.-à-d. l'effort consenti par l'agent en acceptant cette alternative.

Définition 11 (Fonction de coût individuel) Soient \mathcal{X} l'ensemble des alternatives et \succsim_i la relation de préférence large de l'agent a_i sur \mathcal{X} . La fonction de coût d'une alternative x pour \succsim_i dans \mathcal{X} est définie tel que $cout(x, \mathcal{X}, \succsim_i) = card(Con_i(x, \mathcal{X}))$

Contrairement à [?], nous choisissons de déterminer le coût d'une alternative par le nombre d'alternatives qui lui sont préférables, autrement dit par la cardinalité de l'ensemble de concession correspondant.

Exemple 5 En considérant les préférences dans la figure 1, le tableau 5 présente les coûts des compromis pour chaque agent.

[11] propose plusieurs fonctions pour agréger les utilités des individus, comme par exemple le bien-être utilitaire. Nous les adaptions ici au problème de décision collective afin d'évaluer une alternative du point de vue global.

Définition 12 (Coût social) Soient \mathcal{X} un ensemble d'alternatives, Ω un ensemble d'agents et $x \in \mathcal{X}$ une alternative. Une fonction de coût social est une fonction qui associe aux alternatives l'effort consenti par la société d'agents.

- Le **coût utilitaire** considère le bien-être de toute la société :

$$cout_u(x, \mathcal{X}, \Omega) = \frac{\sum_{a \in \Omega} cout(x, \mathcal{X}, \succsim_a)}{card(\Omega)}$$

- Le **coût égalitaire** considère le bien-être de l'agent le plus pauvre :

$$cout_e(x, \mathcal{X}, \Omega) = \max_{a \in \Omega} cout(x, \mathcal{X}, \succsim_a)$$

TABLE 2 – Coût social des compromis

x	$cout_u$	$cout_e$
a	1,5	3
c	1,5	2
e	1,5	2
f	1	2

Nous avons choisi d'étudier le coût utilitaire, correspondant au coût moyen, ainsi que le coût égalitaire qui vise à minorer l'effort maximal. Nous ne considérons pas le bien-être de Nash car le coût individuel d'une alternative peut être nul.

Exemple 6 *D'après les préférences de la figure 1, les coûts sociaux des compromis sont indiqués dans le tableau 6.*

5 Négociation bilatérale pour un compromis

Nous proposons ici un jeu de négociation bilatérale afin d'atteindre un accord. Pour ce faire, nous commençons par présenter le protocole, puis deux stratégies permettant de jouer la négociation. Finalement, nous évaluons le mécanisme proposé.

5.1 Protocole

Pour ne pas favoriser un agent en lui donnant la parole en premier, nous considérons ici un jeu simultané à plusieurs tours. Pour ce faire, on introduit un mécanisme d'arbitrage qui synchronise les tours de parole.¹

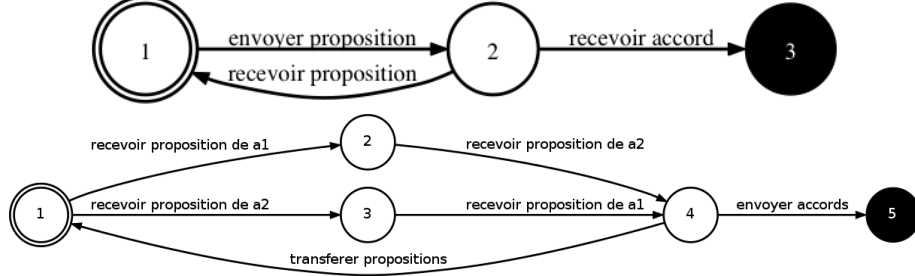
À chaque tour, l'arbitre récolte les propositions - chacune constituée d'une ou plusieurs alternatives. Le protocole interdit la répétition d'une alternative dans les propositions d'un même participant. Dès qu'une alternative a été proposée par les deux participants, l'arbitre clôt le jeu, détecte l'ensemble des accords et en informe les participants. Sinon, il transmet ces propositions aux participants et un nouveau tour débute (cf. figure 2²).

Dans la suite de l'article, on dénote $p_1(k)$ l'ensemble d'alternatives proposées par l'agent a_1 au tour $k \geq 1$. Au tour t , on note $H_1(t)$ l'historique des propositions de l'agent a_1 tel que $H_1(t) = \bigcup_{k < t} p_1(k)$ et $H(t)$ l'historique du jeu tel que $H(t) = H_1(t) \cup H_2(t)$. De plus, l'ensemble des alternatives émises par l'agent a_1 au cours de l'historique $H_1(t)$ est noté $\mathcal{P}_1(t) = \{x \in \mathcal{X} \mid \exists p \in H_1(t), x \in p\}$.

1. Par soucis de clarté, nous avons choisi d'implémenter la synchronisation des tours de parole à l'aide d'un arbitre. Toutefois, on peut imaginer d'autres solutions ne nécessitant pas de médiateur.

2. Par simplification, nous avons utilisé des machines à état pour représenter le protocole quitte à omettre l'aspect temporel qui aurait pu être représenté par un réseau de Pétri.

FIGURE 2 – Protocole du point de vue des participants (en haut) et du point de vue de l'arbitre (en bas). Les états initiaux sont représentés par un double cercle et les finaux sont en noir.



À un pas t , si l'arbitre identifie au moins une alternative proposée par les deux participants, le jeu s'arrête. L'arbitre privilégie alors la ou les alternatives qui apparaissent le plus tôt dans l'historique (cf. algorithme 2) et retourne l'ensemble de ces alternatives, appelées **accords**, aux participants. Un accord n'est donc pas nécessairement unique. Pour aboutir effectivement à une décision collective, l'arbitre peut choisir de manière pseudo-aléatoire l'une des alternatives restantes.

Algorithme 2: Mécanisme d'arbitrage

Données : $H(t)$: l'historique, $p_1(t)$ et $p_2(t)$: les propositions

```

1 pour  $k = 0$  à  $t$  faire
2    $A = (p_1(k) \cap p_2(t)) \cup (p_2(k) \cap p_1(t))$  ;
3   si  $A \neq \emptyset$  alors
4      $send(\{a_1, a_2\}, agreement(A))$ ;
5     retourner;
6   fin
7 fin
8  $send(a_2, proposal(p_1(t)))$ ;
9  $send(a_1, proposal(p_2(t)))$ ;
  
```

5.2 Stratégies

La stratégie d'un participant s'interface avec le protocole via les conditions d'énonciation et d'interprétation des coups. En l'occurrence, un agent émet et reçoit à chaque tour une proposition contenant une ou plusieurs alternatives. Trivialement, lorsqu'un joueur reçoit une proposition, il met à jour sa représentation de l'historique. Le contenu des propositions émises est déterminé par la stratégie du joueur.

Dans cette section, nous adoptons le point de vue de l'agent a_1 (les rôles étant symétriques). Sa stratégie (cf. algorithme 3) est légale : les al-

ternatives ne sont pas répétées dans ses propositions (ligne 1). De plus, sa stratégie est rationnelle : l'agent choisit parmi les alternatives légales (\mathcal{X}') celles qui peuvent constituer des compromis de son point de vue. L'heuristique de négociation consiste à choisir parmi les alternatives rationnelles (cf. ligne 3).

Algorithme 3: Stratégie de proposition d'un participant

Données : $H(t)$: l'historique, \mathcal{X} : l'ensemble des alternatives
1 $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \setminus \mathcal{P}_1(t)$;
2 $Rat = \{x \in \mathcal{X}' \mid \nexists y \in \mathcal{X}', Con(y, \mathcal{X}) \subsetneq Con(x, \mathcal{X})\}$;
3 $E = select(Rat, H(t))$;
4 $send(arbitrator, proposal(E))$;

Un agent conciliant sélectionne l'ensemble des alternatives rationnelles pour favoriser une issue au plus tôt ($select(Rat, H(t)) = Rat$). A contrario, un agent temporisateur adapte ses propositions à celles de son interlocuteur. En plus de chercher à minimiser le coût des accords, il repousse l'obtention d'un accord tant que faire se peut (cf. algorithme 4).

Algorithme 4: Minimiser le coût et repousser l'accord si possible

Données : Rat : ensemble rationnel d'alternatives, $H(t)$: l'historique
Résultat : un ensemble d'alternatives
1 $Min = \operatorname{argmin}_{x \in Rat} \{cout(x, \mathcal{X}, \succ_1)\}$;
2 $Inedit = Min \setminus \mathcal{P}_2(t)$;
3 **si** $Inedit \neq \emptyset$ **alors**
4 | **retourner** $random(Inedit)$;
5 **sinon**
6 | **retourner** $choix(Min, H(t))$;
7 **fin**

Afin de choisir parmi les alternatives rationnelles (cf. ligne 6 dans l'algorithme 4), l'agent opte pour celles dont le coût est minimal. Comme l'illustre l'algorithme 5, l'agent privilégie ensuite les alternatives émises en dernier lieu par son interlocuteur. Supposons que lors d'un même tour l'interlocuteur émette une alternative conduisant également à un accord. Dans ce cas, un agent temporisateur favorise un accord sur les alternatives qu'il a précédemment proposées en sélectionnant une (dans son ensemble stratégique) émise en dernier lieu par son interlocuteur. En effet, le mécanisme d'arbitrage tranche en faveur de l'alternative proposée en premier lieu. Enfin, l'agent temporisateur renvoie (aléatoirement) une unique alternative.

En résumé, nous considérons deux stratégies : une conciliante et une temporisatrice. La stratégie **conciliante** (notée C) combine :

1. la stratégie de proposition d'un participant (cf. algo. 3) ;
2. la sélection de l'intégralité des alternatives ($select(Rat, H(t)) = Rat$).

Algorithme 5: Choix des alternatives les plus récentes

Données : Rat : ensemble rationnel d'alternatives, $H(t)$: l'historique

Résultat : un ensemble d'alternatives

```
1 pour  $k = card(H_2(t))$  à 1 faire
2    $P = p_2(k) \cap Rat$  ;
3   si  $P \neq \emptyset$  alors
4     retourner  $random(P)$ ;
5   fin
6 fin
```

TABLE 3 – Traces des négociations avec les stratégies conciliantes (C_i) et temporisatrices (T_i)

C_1	C_2	T_1	C_2	T_1	T_2
$\{a\}$	$\{f, g\}$	$\{a\}$	$\{f, g\}$	$\{a\}$	$\{f\} \{g\}$
$\{b, c\}$	$\{e\}$	$\{b\} \{c\}$	$\{e\}$	$\{b\} \{c\}$	$\{g\} \{f\}$
$\{d, e, f\}$	$\{c, d\}$	$\{c\} \{b\}$	$\{c, d\}$	$\{c\} \{b\}$	$\{e\}$
$\{f\}$		$\{c\}$		$\{d\}$	$\{d\}$
				$\{d\}$	

À l'inverse, la stratégie **temporisatrice** (notée T) résulte de la combinaison de :

1. la stratégie de proposition d'un participant (cf. algo. 3) ;
2. la restriction aux alternatives dont le coût est minimal et le report si possible d'un accord (cf. algo. 4) ;
3. la sélection d'une alternative parmi les plus récentes si l'accord n'est pas repoussable (cf. algo. 5).

Exemple 7 *Considérons les préférences de la figure 1. Dans le tableau 7, nous représentons les traces des négociations où l'agent a_1 (resp. a_2) adopte soit une stratégie conciliante C_1 (resp. C_2) soit une stratégie temporisatrice T_1 (resp. T_2). Par souci de concision, le jeu (C_1, T_2) est omis car il est similaire à (T_1, C_2) . Prenons pour exemple, le jeu qui oppose l'agent a_1 adoptant T_1 à l'agent a_2 adoptant C_2 et qui aboutit à un accord sur c . Pour ce faire, l'agent a_1 (resp. a_2) commence par proposer la seule alternative a (resp. les alternatives f et g). Au deuxième tour, l'agent a_1 peut proposer indifféremment b ou c alors que l'agent a_2 propose systématiquement e . Au troisième tour, l'agent a_1 propose c s'il avait proposé b au tour précédent et b sinon, alors que l'agent a_2 propose c et d .*

5.3 Évaluation théorique

Dans cette section, nous caractérisons les accords obtenus à l'issue des négociations d'un point de vue collectif et d'un point de vue individuel.

On peut tout d'abord remarquer que notre jeu de négociation permet d'aboutir à un accord.

TABLE 4 – Matrice de l’ensemble des accords obtenus pour chaque configuration de jeu

	C_2	T_2
C_1	A_{CC}	A_{CT}
T_1	A_{TC}	A_{TT}

Propriété 6 (Arrêt du jeu de négociation) *Notre jeu de négociation s’arrête.*

Le tableau 5.3 décrit les résultats du jeu dans ses différentes configurations. On note $A_{SS'}$ l’ensemble des accords issu d’un jeu de négociation où le joueur a_1 adopte la stratégie S et le joueur a_2 adopte la stratégie S' .

Évaluation collective. Tout accord obtenu à l’issue d’une négociation entre deux participants conciliants est Pareto-optimal et un compromis. Tout accord est un optimal social égalitaire.

Théorème 1 (Pareto-optimalité des accords Conciliant/Conciliant)

Si les participants adoptent une stratégie conciliante, alors l’ensemble des accords obtenus $A_{CC} \subseteq \mathcal{X}$ vérifie que $A_{CC} \subseteq ND(\mathcal{X}, \succsim_\Omega)$.

Théorème 2 (Les accords Conciliant/Conciliant sont des compromis)

Si les participants adoptent une stratégie conciliante, alors l’ensemble des accords obtenus $A_{CC} \subseteq \mathcal{X}$ vérifie que : $x_{CC} \in A_{CC} \Rightarrow \text{compromis}(x_{CC}, \Omega, \mathcal{X})$;

Théorème 3 (Les accords Conciliant/Conciliant sont des optimaux égalitaires)

Si les participants adoptent une stratégie conciliante, alors l’ensemble des accords obtenus $A_{CC} \subseteq \mathcal{X}$ vérifie que : $A_{CC} \subseteq \text{argmin}_{\{x \in \mathcal{X}\}} \text{cout}_e(x, \mathcal{X}, \Omega)$.

On peut noter que, si les deux participants sont conciliants, le résultat de jeu n’est pas nécessairement socialement optimal (pour le coût utilitaire). Considérons deux participants a_1 et a_2 tels que : $a \succ_1 e \succ_1 b \succ_1 c \succ_1 d$ et $d \succ_2 c \succ_2 b \succ_2 a \succ_2 e$. Le résultat du jeu est alors b tandis que le compromis qui minimise le coût utilitaire est a .

Le jeu a pour but de répartir les efforts consentis par les deux participants. Si l’un des participants temporise, le jeu n’atteint pas nécessairement une décision collectivement satisfaisante. Dans notre exemple (cf figure 1), si les deux participants temporisent, l’unique accord atteint est d qui n’est ni un compromis ni même Pareto-optimal.

Évaluation individuelle. En fixant les fonctions pseudo-aléatoires (cf. ligne 4 de l’algo. 4 et ligne 4 de l’algo. 5), nous pouvons comparer la satisfaction individuelle des participants dans les différentes configurations de jeu. Sous cette condition, que le joueur a_2 soit temporisateur ou conciliant, le joueur a_1 ne peut pas obtenir de meilleure alternative en étant conciliant.

Théorème 4 (Non-dominance de la stratégie conciliante sur la stratégie temporisatrice)

Si la fonction random d’un joueur temporisateur est fixée arbitrairement alors :

1. $\forall x_{CC} \in A_{CC} \setminus A_{TC}, \forall x_{TC} \in A_{TC}, \neg(x_{CC} \succ_1 x_{TC})$;
2. $\forall x_{CT} \in A_{CT} \setminus A_{TT}, \forall x_{TT} \in A_{TT}, \neg(x_{CT} \succ_1 x_{TT})$.

En résumé, utiliser la stratégie conciliante ne permet pas à un agent d'arriver à un accord préférable à ceux atteignables avec la stratégie temporisatrice. Autrement dit, un joueur n'a pas intérêt individuellement à opter pour une stratégie conciliante, quelque soit la stratégie choisie par son adversaire (conciliante ou temporisatrice). Or, la configuration de jeu (C_1, C_2) est la seule qui garantisse la présence d'un compromis dans l'ensemble des accords.

6 Expérimentation

Nos expérimentations ont pour objectifs : d'une part de mesurer la proportion dans laquelle un agent a intérêt à adopter la stratégie Temporisatrice; et d'autre part de comparer, toutes choses étant égales par ailleurs, le nombre d'alternatives retournées par un processus de décision mono-agent et par un processus de décision multi-agents.

6.1 Protocole expérimental

La génération pseudo-aléatoire d'une relation de préférences est paramétrée par :

- $card(\mathcal{X})$, le nombre d'alternatives;
- $txEqMin$, la proportion minimale de couples d'alternatives différentes équivalentes (avec $0 \leq txEqMin \leq 1$);
- $txIncMax$, la proportion maximale de couples d'alternatives différentes incomparables (avec $0 \leq txIncMax \leq 1$).

À partir de ces paramètres, nous générons un graphe de préférences (cf. définition 3). Cette génération consiste à enrichir un graphe initialement sans arc en ajoutant :

1. des relations d'équivalence, jusqu'à atteindre un taux de couples équivalentes supérieur ou égal à $txEqMin$ (cf. algorithme 6);
2. des relations de préférence, jusqu'à atteindre un taux de couples incomparables inférieur ou égal à $txIncMax$ (cf. algorithme 7).

Algorithme 6: Ajout de relations d'équivalences

Données : (\mathcal{X}, A) : graphe de préférence, $txEqMin$

- 1 $nbCouples = card(\mathcal{X}) \times (card(\mathcal{X}) - 1)$;
- 2 $txEq = card(\{(x, y) \in \mathcal{X}^2 | (x \sim y)\}) / nbCouples$;
- 3 **tant que** $txEq < txEqMin$ **faire**
- 4 $Inc = \{(x, y) \in \mathcal{X}^2 | (x \bowtie y)\}$;
- 5 $(a, b) = random(Inc)$;
- 6 $A = A \cup \{(a, b)\} \cup \{(b, a)\}$;
- 7 $txEq = card(\{(x, y) \in \mathcal{X}^2 | (x \sim y)\}) / nbCouples$;
- 8 **fin**

Algorithme 7: Ajout de relations de dominance

Données : (\mathcal{X}, A) : graphe de préférence, $txIncMax$

- 1 $nbCouples = card(\mathcal{X}) \times (card(\mathcal{X}) - 1)$;
- 2 $txInc = card(\{(x, y) \in \mathcal{X} \mid (x \bowtie y)\}) / nbCouples$;
- 3 **tant que** $txInc > txIncMax$ **faire**
- 4 $Inc = \{(x, y) \in \mathcal{X}^2 \mid (x \bowtie y)\}$;
- 5 $(a, b) = random(Inc)$;
- 6 $A = A \cup \{(a, b)\}$;
- 7 $txInc = card(\{(x, y) \in \mathcal{X}^2 \mid (x \bowtie y)\}) / nbCouples$;
- 8 **fin**

Étant donné deux agents dont les préférences ont été générées de manière pseudo-aléatoire comme indiqué ci-dessus, une expérience correspond à 4 jeux de négociation. Les accords obtenus sont ACC , ACT , ATC et ATT respectivement quand les deux agents sont conciliants, quand l'agent a_1 est conciliant et l'agent a_2 est temporisateur, quand leur rôle sont inversés et quand ils sont tous les deux temporisateurs. Afin de comparer les résultats obtenus par une stratégie indépendamment de la stratégie adverse, le choix du temporisateur n'est pas pseudo-aléatoire mais arbitraire (c.-à-d. l'ordre lexicographique sur les alternatives). Les paramètres pour la génération des préférences des deux joueurs sont identiques : $card(\mathcal{X}) = 10$, $txEqMin \in [0, 0.3]$ et $txIncMax \in [0, 0.7]$. Chaque expérience a été exécutée 1000 fois et nous présentons ci-dessous la moyenne des résultats obtenus.

6.2 Résultats

Nous étudions l'intérêt qu'à un agent de jouer T plutôt que C en distinguant les cas où son interlocuteur joue C (fig. 6.2) de ceux où il joue T (fig. 6.2). Si l'autre agent joue C , la stratégie T s'avère gagnante dans un peu moins de 15% des exécutions au maximum, avec des relations comportant quelques incomparables et quelques équivalents. Face à un agent temporisateur, la proportion de cas où on gagne à jouer la stratégie T est de l'ordre de deux fois plus importante, on arrive au maximum à un peu moins de 30% des exécutions. La proportion des où la stratégie Temporisatrice domine la stratégie Conciliante pour l'agent a_1 (c.-à-d. où à la fois $ATC \succ_1 ACC$ et $ATT \succ_1 ACT$) n'excède pas les 5%. Ainsi, s'il y a des cas où on peut tirer profit de la stratégie Temporisatrice, ceci est loin d'être systématique.

Nous nous plaçons à présent dans le cas où les deux agents temporisent et souhaitons mesurer les conséquences sur la qualité sociale des accords. La figure 6.2 donne l'espérance moyenne d'obtenir un compromis égalitaire à l'issue d'un jeu de négociation où les deux agents temporisent. On peut remarquer que plus le nombre d'alternatives équivalentes est élevé, moins il est probable d'obtenir une alternative qui soit un compromis égalitaire. Toutefois, dans le pire des cas, c.-à-d. avec un taux d'équivalents minimal de 0.3, on a encore une espérance d'environ 50% d'obtenir

FIGURE 3 – Proportion d'exécution pour lesquelles l'ensemble d'accords obtenu est préférable en jouant T plutôt que C quand l'adversaire joue C en fonction du taux d'incomparabilité et du taux d'équivalence

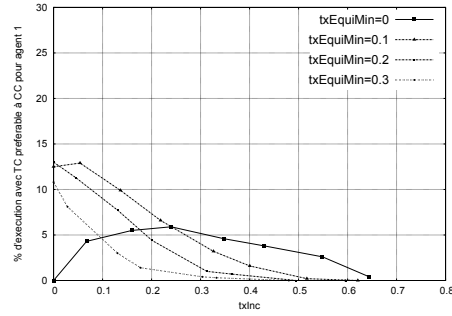


FIGURE 4 – Proportion d'exécution pour lesquelles l'ensemble d'accords obtenu est préférable en jouant T plutôt que C quand l'adversaire joue T en fonction du taux d'incomparabilité et du taux d'équivalence

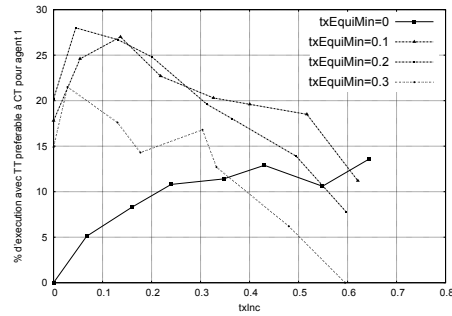
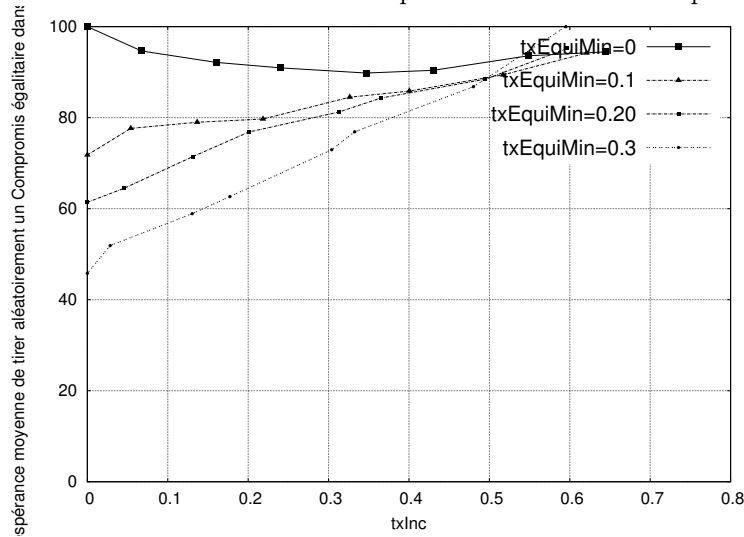


FIGURE 5 – Espérance d’obtenir un Compromis égalitaire quand les deux agents temporisent en fonction du taux d’incomparabilité et du taux d’équivalence



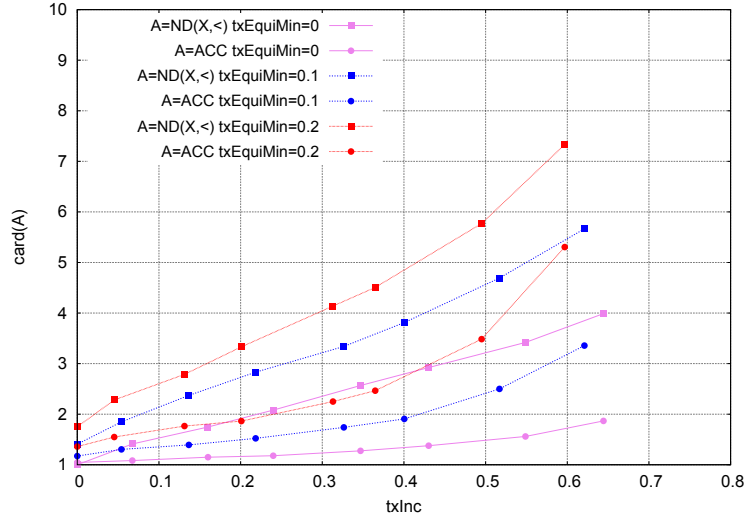
un compromis égalitaire. Un taux d’incomparabilité élevé n’implique pas nécessairement une baisse de l’espérance d’obtenir un compromis égalitaire. Ceci s’explique par le fait que davantage d’incomparabilité dans les relations implique davantage de compromis égalitaires.

Dans la figure 6.2, nous comparons pour chaque expérience, la cardinalité moyenne (sur les exécutions) des alternatives non-dominées, c.-à-d. le résultat du processus de décision mono-agent et la cardinalité de l’ensemble des accords issu d’une négociation entre deux agents similaires (ayant les même taux d’incomparabilité et d’équivalence). Évidemment, plus il y a d’alternatives dont les coûts sont ex æquo - incomparables ou équivalentes -, plus les cardinalités sont élevées. De plus, on constate que, pour chaque expérience, le nombre d’accords est inférieur au nombre d’alternatives non-dominées. En d’autres termes, le résultat d’une négociation est d’autant moins arbitraire que l’incertitude qu’a chacun des agents dans ses préférences peut être levée par les préférences de son interlocuteur.

7 Travaux connexes

Assez peu de stratégies de marchandage ont été proposées dans la littérature. La plupart d’entre-elles, comme celles proposées ici, s’inspirent de la stratégie de concession monotone [12]. Selon cette stratégie, un agent commence par proposer l’alternative qu’il préfère et à chaque tour : soit il concède soit il persévère à reposer la même alternative. Par concession monotone, [12] désigne une nouvelle proposition meilleure pour l’interlocuteur. Adopter une telle stratégie suppose qu’un agent connaisse les préférences de son interlocuteur. Dans notre travail, nous ne faisons pas

FIGURE 6 – Cardinalités des accords et des alternatives non-dominées en fonction du taux d'incomparabilité et du taux d'équivalence



une telle hypothèse. Nous considérons ici qu'un agent concède en écartant tout ou partie de ses précédentes propositions. De plus, la plupart des stratégies de marchandage font l'hypothèse, comme [12], que les préférences des agents sont totales. C'est le cas notamment de [7, 9] qui supposent que les agents sont équipés d'une fonction d'utilité. Comme nous l'avons signalé dans cet article, la rationalité de nos agents s'appuie sur une relation de préférence large - potentiellement partielle. Alors que [7] envisage la théorie des choix social pour permettre à un agent de choisir parmi les propositions celle qui est la plus intéressante socialement en connaissant les préférences de ses interlocuteurs, nous utilisons la notion de bien-être social pour apprécier le résultat de jeu. La stratégie Conciliante (resp. Temporisatrice) est proche de la stratégie *Conceder* (resp. *Boulware*) proposée dans [9]. Toutefois, le cadre de négociation proposé dans [9] suppose non seulement que les agents disposent d'une fonction d'utilité pour évaluer les offres mais que les stratégies sont temporelles : les offres émises dépendent de l'instant auquel elles sont soumises. Ce n'est pas le cas dans notre modèle. Alors que le modèle de négociation de [9] est plus adapté à la conception d'un système de négociation automatique, nous nous situons dans un cadre de résolution distribuée de problème où les actions des agents sont régulées par un ordonnanceur. Plus récemment, [8] ont proposé une stratégie de marchandage pour la résolution du problème des mariages stables. Comme dans notre travail, les agents ne connaissent pas les préférences de leur interlocuteurs. Toutefois, les listes des préférences sur lesquelles se fonde la rationalité de leur agent sont complètes et totales. L'incomparabilité et les équivalences entre alternatives ne sont pas considérées.

8 Conclusion

Dans les SMA, il n'est pas rare que la satisfaction individuelle des agents aille à l'encontre de leur intérêt commun. Comme dans le dilemme des prisonniers, les participants à notre jeu ne devraient pas coopérer même si c'est dans leur intérêt commun. Toutefois, en pratique, les conditions pour lesquels un agent a intérêt à trahir sont très restreintes. Le protocole que nous avons proposé ici est un protocole de marchandage entre deux agents échangeant des offres et des contre-offres. Deux stratégies sont envisageables. Soit coopérer, en révélant ses préférences et en recherchant un accord autant que faire se peut. Soit trahir, en repoussant la révélation de ses préférences et un accord autant que possible. Si les agents sont coopératifs alors ce jeu aboutit à un compromis où les concessions - les efforts réalisés par les participants - sont minimales (au sens de l'inclusion) et équitablement réparties. Le nombre total de concessions - le coût utilitaire de l'accord - n'est pas nécessairement minimal. La solution qui minimise le coût utilitaire peut rester hors d'atteinte avec notre jeu qui s'appuie sur la réciprocité des efforts. C'est le prix de l'équité. Nous avons montré que le résultat d'une négociation est d'autant moins arbitraire que l'incertitude qu'a chacun des agents dans ses préférences est levé par les préférences de son interlocuteur au prix de concessions.

Dans notre travail, nous considérons les alternatives comme des entités atomiques. Afin de se rapprocher des applications pratiques, il pourrait être intéressant d'étendre notre travail à de la négociation multi-attributs, c.-à-d. où l'objet de la négociation est un vecteur de valeurs. De plus, on peut envisager de combiner notre jeu de négociation avec un jeu de demande d'information telle que nous l'avons proposé dans [4, 5, 3] afin de guider la recherche d'un compromis.

A Démonstrations

Démonstration 1 (Prop. 1 - Pareto-dominance)

On montre que :

- la relation de Pareto-dominance est transitive car pour tout agent $a_i \in \Omega$, \succsim_i et \succ_i sont transitives ;
- la relation de Pareto-dominance est asymétrique car pour tout agent $a_i \in \Omega$, \succ_i est asymétrique.

Démonstration 2 (Prop. 2 - Existence d'un Pareto-optimal) *Comme la Pareto-dominance est un ordre strict (cf. Prop. 1) sur un ensemble fini non-vide, cet ensemble ordonné contient au moins un élément maximal.*

Démonstration 3 (Prop. 3 - Pareto-optimalité des non-dominés)

Considérons $x \in \bigcap_{a_i \in \Omega} ND(\mathcal{X}, \succsim_i)$. Par définition, $\forall y \in \mathcal{X}, \forall a_i \in \Omega, \neg(y \succ_i x)$. Ainsi, pour tout $y \in \mathcal{X}$, y ne Pareto-domine pas x sur \mathcal{X} pour Ω . En conclusion, x est Pareto-optimale sur \mathcal{X} pour Ω .

Démonstration 4 (Prop. 4 - Existence d'un compromis) *L'ensemble des concessions associé à la relation d'inclusion ensembliste est un ensemble ordonné, fini et non vide. Cet ensemble dispose donc toujours d'un*

moins un élément minimal, c.-à-d. une concession minimale et donc il existe toujours un compromis.

Démonstration 5 (Prop. 5 - Pareto-optimalité des compromis)

Soit x un compromis sur \mathcal{X} pour Ω . Démontrons par l'absurde que x est Pareto-optimale sur \mathcal{X} pour Ω . On suppose qu'il existe une alternative $y \in \mathcal{X}$ qui Pareto-domine x . De la définition 6, on déduit qu'il existe un agent $a_i \in \Omega$ tel que $y \succ_i x$. De plus, de la définition 10, on déduit qu'il existe une concession minimale $C \subseteq \mathcal{X}$ pour laquelle $x \in \bigcap_{a_i \in \Omega} ND(\mathcal{X} \setminus C, \succ_i)$. On en conclut que $y \in C$ et donc $y \in \bigcap_{a_i \in \Omega} ND(\mathcal{X} \setminus (C \setminus \{y\}), \succ_i)$. Ainsi C n'est pas une concession minimale et x n'est pas un compromis, ce qui vient contredire notre hypothèse de départ.

Démonstration 6 (Prop. 6 - Arrêt du jeu de négociation) Comme l'ensemble des alternatives est fini et que le protocole interdit la répétition d'une alternative par un même participant, le jeu s'arrête.

Notation 1 Dans les démonstrations suivantes, on note $\mathcal{P}_i^{SS'}(t)$ l'historique de l'agent a_i dans la configuration (S, S') à l'instant t . À un pas donné, toute alternative proposée par un agent temporisateur le sera dans une configuration de jeu où le même agent est conciliant.

Démonstration 7 (Théo. 1 - accords Conciliant/Conciliant)

Soit $x_{CC} \in A_{CC}$ un accord obtenu.

Démontrons par l'absurde que $A_{CC} \subseteq ND(\mathcal{X}, \succ_\Omega)$.

On suppose $x_{CC} \notin ND(\mathcal{X}, \succ_\Omega)$. Alors, $\exists y_{CC}, (y_{CC} \succ_1 x_{CC} \wedge y_{CC} \succ_2 x_{CC}) \vee (y_{CC} \succ_2 x_{CC} \wedge y_{CC} \succ_1 x_{CC})$. $\exists t, (y_{CC} \in \mathcal{P}_1^{CC}(t)) \wedge (y_{CC} \in \mathcal{P}_2^{CC}(t)) \wedge (x_{CC} \notin \mathcal{P}_1^{CC}(t) \vee x_{CC} \notin \mathcal{P}_2^{CC}(t))$. Donc $x_{CC} \notin A_{CC}$, ceci est une contradiction.

Lemme 1 Soit $\Omega = \{a_1, a_2\}$ deux agents conciliants, soit $\theta > 0$ l'instant auquel le jeu de négociation s'arrête.

$$\forall t, 0 < t \leq \theta, \mathcal{P}_1^{CC}(t) \cap \mathcal{P}_2^{CC}(t) = \emptyset \quad (1)$$

$$\forall a_i \in \Omega, \forall t, 0 < t \leq \theta, \forall u \in \mathcal{X}, u \in p_i(t) \Rightarrow Con_i(u) \subseteq \mathcal{P}_i^{CC}(t) \quad (2)$$

$$\forall u \in \mathcal{X}, u \in (\mathcal{P}_1^{CC}(\theta + 1) \cap \mathcal{P}_2^{CC}(\theta + 1)) \Rightarrow Con_1(u, \mathcal{X}) \cap Con_2(u, \mathcal{X}) = \emptyset \quad (3)$$

$$\forall u \in \mathcal{X}, compromis(u, \mathcal{X}, \Omega) \Rightarrow Con_1(u, \mathcal{X}) \cap Con_2(u, \mathcal{X}) = \emptyset \quad (4)$$

Soit $(u, v) \in \mathcal{X}^2$ tel que $v \in A_{CC}$ et $Con_\Omega(u, \mathcal{X}) \subseteq Con_\Omega(v, \mathcal{X})$, on vérifie que

$$\forall b \in \mathcal{X}, b \in Con_2(u, \mathcal{X}) \wedge b \notin \mathcal{P}_2^{CC}(\theta) \Rightarrow b \succ_1 v \quad (5)$$

Soit $(u, v) \in \mathcal{X}^2$ tel que $v \in A_{CC}$, $Con_\Omega(u, \mathcal{X}) \subseteq Con_\Omega(v, \mathcal{X})$ et $Con_2(u, \mathcal{X}) \setminus \mathcal{P}_2^{CC}(\theta) \neq \emptyset$, on vérifie que

$$\exists z \in Con_2(u, \mathcal{X}) \wedge z \notin \mathcal{P}_2^{CC}(\theta) \text{ tel que } Con_2(z, \mathcal{X}) \subseteq \mathcal{P}_2^{CC}(\theta) \quad (6)$$

Soit $(u, v) \in \mathcal{X}^2$ tel que $v \in A_{CC}$ et $Con_\Omega(u, \mathcal{X}) \subseteq Con_\Omega(v, \mathcal{X})$. Soit $z \in Con_2(u, \mathcal{X}) \wedge z \notin \mathcal{P}_2^{CC}(\theta)$ tel que $Con_2(z, \mathcal{X}) \subseteq \mathcal{P}_2^{CC}(\theta)$, on vérifie que

$$Con_2(z, \mathcal{X}) \subseteq Con_2(v, \mathcal{X}) \quad (7)$$

$$\forall (u, v) \in \mathcal{X}^2, \text{Con}_\Omega(u, \mathcal{X}) \subsetneq \text{Con}_\Omega(v, \mathcal{X}) \wedge v \in A_{CC} \Rightarrow \forall a_i \in \Omega, \text{Con}_i(u) \subseteq \mathcal{P}_i^{CC}(\theta) \quad (8)$$

Démonstration 8 (Démonstration lemme (1))

Notre protocole de négociation repose sur un mécanisme d'arbitrage décrit dans l'algo. 2. Or, cet algorithme spécifie que le jeu s'arrête dès qu'une alternative a été proposée par les deux agents. C'est pourquoi, à tout instant du jeu de négociation, aucune alternative n'est contenue à la fois dans l'historique (c.-à-d. les coups joués au(x) tour(s) précédent(s)) de l'un et de l'autre des deux agents, car si tel était le cas, le jeu serait déjà terminé.

Démonstration 9 (Démonstration lemme (2))

Les deux agents adoptent un comportement rationnel (cf. algo.3). Autrement dit, ils s'autorisent à proposer une alternative si et seulement si ils ont déjà proposé toutes celles qui la dominent au(x) tour(s) précédent(s).

Démonstration 10 (Démonstration lemme (3))

Démontrons par l'absurde. Supposons $u \in (\mathcal{P}_1^{CC}(\theta + 1) \cap \mathcal{P}_2^{CC}(\theta + 1)) \wedge \text{Con}_1(u, \mathcal{X}) \cap \text{Con}_2(u, \mathcal{X}) \neq \emptyset$. Soit $v \in \text{Con}_1(u, \mathcal{X}) \cap \text{Con}_2(u, \mathcal{X})$, alors, d'après le lemme (2), $v \in (\mathcal{P}_1^{CC}(\theta) \cap \mathcal{P}_2^{CC}(\theta))$. Donc d'après l'algo 2, le jeu s'arrête avant l'instant θ et on arrive à une contradiction.

Démonstration 11 (Démonstration lemme (4))

Démontrons par l'absurde. Supposons $\text{compromis}(u, \mathcal{X}, \Omega)$ et $\text{Con}_1(u, \mathcal{X}) \cap \text{Con}_2(u, \mathcal{X}) \neq \emptyset$.

Soit $v \in \text{Con}_1(u, \mathcal{X}) \cap \text{Con}_2(u, \mathcal{X})$, alors $\text{Con}_\Omega(v) \subsetneq \text{Con}_\Omega(u)$.

Donc, par définition 10, $\neg \text{compromis}(u, \mathcal{X}, \Omega)$ et on arrive à une contradiction.

Démonstration 12 (Démonstration lemme (5))

D'après lemme (3), $v \in A_{CC} \Rightarrow \text{Con}_1(v, \mathcal{X}) \cap \text{Con}_2(v, \mathcal{X}) = \emptyset$ (A)

D'après lemme (2) $v \in A_{CC} \Rightarrow \text{Con}_2(v) \subseteq \mathcal{P}_2^{CC}(\theta)$ (B)

Comme $\text{Con}_\Omega(u, \mathcal{X}) \subseteq \text{Con}_\Omega(v, \mathcal{X})$ et $b \in \text{Con}_2(u, \mathcal{X})$ alors $b \in \text{Con}_\Omega(v, \mathcal{X})$ (C)

Par hypothèse, $b \notin \mathcal{P}_2^{CC}(\theta)$, par (B), $\text{Con}_2(v, \mathcal{X}) \subseteq \mathcal{P}_2^{CC}(\theta)$ et par (C) $b \in \text{Con}_\Omega(v, \mathcal{X})$ alors $b \in \text{Con}_1(v, \mathcal{X})$ et, par déf. 8, $b \succ_1 v$.

Démonstration 13 (Démonstration lemme (6))

Soient $A = \text{Con}_2(u, \mathcal{X}) \cap \mathcal{P}_2^{CC}(\theta)$ et $B = \text{Con}_2(u, \mathcal{X}) \setminus \mathcal{P}_2^{CC}(\theta)$

Soit $z \in ND(B, \succ_2)$, z existe car $B \neq \emptyset$ (par hyp.).

$z \in B$ donc $z \notin \mathcal{P}_2^{CC}(\theta) \wedge z \in \text{Con}_2(u, \mathcal{X})$ et on a z est non-dominé dans B donc $\text{Con}_2(z, \mathcal{X}) \cap B = \emptyset$.

Or, $z \in \text{Con}_2(u, \mathcal{X})$ donc $\text{Con}_2(z, \mathcal{X}) \subseteq \text{Con}_2(u, \mathcal{X})$ et $\text{Con}_2(z, \mathcal{X}) \subseteq A \cup B$

Or $A \cap B = \emptyset$ et $\text{Con}_2(z, \mathcal{X}) \cap B = \emptyset$ donc $\text{Con}_2(z, \mathcal{X}) \subseteq A$ et donc $\text{Con}_2(z, \mathcal{X}) \subseteq \mathcal{P}_2^{CC}(\theta)$ par définition de A .

Démonstration 14 (Démonstration lemme (7))

$z \in \text{Con}_2(u, \mathcal{X})$ donc $\text{Con}_2(z, \mathcal{X}) \subseteq \text{Con}_2(u, \mathcal{X})$ et comme $\text{Con}_\Omega(u, \mathcal{X}) \subseteq \text{Con}_\Omega(v, \mathcal{X})$ donc $\text{Con}_2(z, \mathcal{X}) \subseteq \text{Con}_\Omega(v, \mathcal{X})$.

Soit $b \in \text{Con}_2(z, \mathcal{X})$, alors $b \in \text{Con}_\Omega(v, \mathcal{X})$ c'est-à-dire $b \in \text{Con}_1(v, \mathcal{X}) \cup \text{Con}_2(v, \mathcal{X})$.

De plus, $b \in \mathcal{P}_2^{CC}(\theta)$ donc comme $\mathcal{P}_1^{CC}(\theta) \cap \mathcal{P}_2^{CC}(\theta) = \emptyset$ (lemme (1)) alors $b \notin \mathcal{P}_1^{CC}(\theta)$.

Comme $b \notin \mathcal{P}_1^{CC}(\theta)$ et $\text{Con}_1(v, \mathcal{X}) \subseteq \mathcal{P}_1^{CC}(\theta)$ (lemme (2)), alors $b \notin \text{Con}_1(v, \mathcal{X})$ et donc $b \in \text{Con}_2(v, \mathcal{X})$ et donc $\text{Con}_2(z, \mathcal{X}) \subseteq \text{Con}_\Omega(v, \mathcal{X})$.

Démonstration 15 (Démonstration lemme (8))

Démontrons par l'absurde. Supposons $\exists a_2 \in \Omega, \text{Con}_2(u, \mathcal{X}) \setminus \mathcal{P}_2^{CC}(\theta) \neq \emptyset$ alors, d'après le lemme (6), $\exists z \in \text{Con}_2(u, \mathcal{X})$ et $z \notin \mathcal{P}_2^{CC}(\theta)$ tel que $\text{Con}_2(z, \mathcal{X}) \subseteq \mathcal{P}_2^{CC}(\theta)$.

Et donc, d'après le lemme (7), on a $\text{Con}_2(z, \mathcal{X}) \subseteq \text{Con}_2(v, \mathcal{X})$.

Comme $v \in A_{CC}$, il en résulte d'après le lemme (5) que l'on a $z \succ_1 v$.

De plus, $v \in A_{CC}$ et $z \notin \mathcal{P}_2^{CC}(\theta)$, d'après l'algorithme 3 comme $\text{Con}_2(z, \mathcal{X}) \subseteq \text{Con}_2(v, \mathcal{X})$ alors nécessairement $\{z, v\} \subseteq p_2(\theta)$.

Or $z \succ_1 v$ donc z apparaît plus tôt dans l'historique et donc d'après l'algorithme 2, $v \notin A_{CC}$ ce qui contredit notre hypothèse.

Démonstration 16 (Théo.2 - accords Conciliant/Conciliant)

Soit $x \in A_{CC}$ un accord obtenu et θ l'instant où le jeu s'arrête.

On suppose $\neg \text{compromis}(x, \mathcal{X}, \Omega)$. (A)

D'après (A), déf. 10 et prop. 4, $\exists y \in \mathcal{X}, \text{Con}_\Omega(y, \mathcal{X}) \subsetneq \text{Con}_\Omega(x, \mathcal{X}) \wedge \text{compromis}(y, \mathcal{X}, \Omega)$. (B)

D'après déf. 10 et (B), $\text{Con}_1(y, \mathcal{X}) \cup \text{Con}_2(y, \mathcal{X}) \subsetneq \text{Con}_1(x, \mathcal{X}) \cup \text{Con}_2(y, \mathcal{X})$ (C)

Comme $x \in A_{CC}$, d'après le lemme (2), $\text{Con}_1(x, \mathcal{X}) \subseteq \mathcal{P}_1^{CC}(\theta)$ et $\text{Con}_2(x, \mathcal{X}) \subseteq \mathcal{P}_2^{CC}(\theta)$ (D)

D'après (D) et lemme (1), $\text{Con}_1(x, \mathcal{X}) \cap \text{Con}_2(x, \mathcal{X}) = \emptyset$ (E)

D'après (B) et lemme (4) $\text{Con}_1(y, \mathcal{X}) \cap \text{Con}_2(y, \mathcal{X}) = \emptyset$ (F)

Comme $x \in A_{CC}$ et (B), d'après lemme (8), $\text{Con}_1(x, \mathcal{X}) \subseteq \mathcal{P}_1^{CC}(\theta)$ et $\text{Con}_2(x, \mathcal{X}) \subseteq \mathcal{P}_2^{CC}(\theta)$ (G)

D'après, (C), (D), (E), (F), (G), $\exists (i, j) \in \{1, 2\}^2, \text{Con}_i(y, \mathcal{X}) \subsetneq \text{Con}_i(x, \mathcal{X}) \wedge \text{Con}_j(y, \mathcal{X}) \subseteq \text{Con}_j(x, \mathcal{X})$ (H)

Les deux cas étant symétriques, on suppose $\text{Con}_1(y, \mathcal{X}) \subsetneq \text{Con}_1(x, \mathcal{X})$ et $\text{Con}_2(y, \mathcal{X}) \subseteq \text{Con}_2(x, \mathcal{X})$ (I)

Par (I) et algo 3, $\exists t_y > 0, y \in \mathcal{P}_1^{CC}(t_y) \wedge x \notin \mathcal{P}_1^{CC}(t_y)$. (J)

Par (I) et algo 3, $\nexists t_x > 0, x \in \mathcal{P}_2^{CC}(t_x) \wedge y \notin \mathcal{P}_2^{CC}(t_x)$ (K)

D'après (J), (K) et algo 2, $y \in A_{CC}$ et $x \notin A_{CC}$, ce qui contredit notre hypothèse.

Démonstration 17 (Théo.3 - accords Conciliant/Conciliant)

Soit $x_{CC} \in A_{CC}$ un accord obtenu.

Démontrons par l'absurde que $x_{CC} \in \text{argmin}_{\{x \in \mathcal{X}\}} \text{cout}_e(x, \mathcal{X}, \Omega)$.

On suppose qu'il existe une alternative $y \in \mathcal{X}$ tel que $\text{cout}_e(y, \mathcal{X}, \Omega) < \text{cout}_e(x_{CC}, \mathcal{X}, \Omega)$. Alors, par définition,

$\max_{a \in \Omega} \text{cout}(y, \mathcal{X}, \succ_a) < \max_{a \in \Omega} \text{cout}(x_{CC}, \mathcal{X}, \succ_a)$. Il existe donc un jeu de négociation où les participants sont conciliants et qui aboutit à y avec un nombre d'étapes strictement inférieur. Or dans le jeu de négociation menant à A_{CC} , les participants soumettent à chaque étape uniquement les alternatives pour lesquelles le coût individuel est minimal (cf. ligne 2 de l'algorithme 3). Ce jeu a donc un nombre minimal d'étapes. C'est une contradiction.

Lemme 2 (temporisateur vs conciliant) Si la fonction random d'un

joueur temporisateur est fixée arbitrairement alors :

$$\forall S \in \{C, T\} \forall t > 0, \mathcal{P}_1^{TS}(t) \subseteq \mathcal{P}_1^{CS}(t)$$

Démonstration 18 (temporisateur vs. conciliant) *La stratégie temporisatrice opère une sélection (résultant des algos 4 et 5) dans l'ensemble des alternatives rationnelles (algo 3 ligne 3).*

Démonstration 19 (Théo. 4 - Non-dominance de stratégie)

- (1) Soit $x_{CC} \in ACC \setminus ATC$. Démontrons par l'absurde que $\forall x_{TC} \in ATC$, $\neg(x_{CC} \succ_1 x_{TC})$. Soit $x_{TC} \in ATC$. Supposons que $x_{CC} \succ_1 x_{TC}$. On a :
- dans la configuration de jeu (C_1, C_2) , les deux agents ont proposé x_{CC} ($\exists t > 0, x_{CC} \in \mathcal{P}_1^{CC}(t) \wedge x_{CC} \in \mathcal{P}_2^{CC}(t)$) car il fait partie de l'ensemble des accords du jeu ;
 - dans la configuration de jeu (T_1, C_2) , les deux agents ont proposé x_{TC} ($\exists t' > 0, x_{TC} \in \mathcal{P}_1^{TC}(t') \wedge x_{TC} \in \mathcal{P}_2^{TC}(t')$) car il fait partie de l'ensemble des accords du jeu.

L'agent a_2 conciliant effectue les mêmes propositions dans les deux configurations de jeu ($\forall t > 0, \mathcal{P}_2^{TC}(t) = \mathcal{P}_2^{CC}(t)$). Comme $x_{CC} \notin ATC$, a_1 propose x_{TC} avant x_{CC} ($\exists t > 0, x_{TC} \in \mathcal{P}_1^{TC}(t) \wedge x_{CC} \notin \mathcal{P}_1^{TC}(t)$). Or cette dernière affirmation entre en contradiction avec notre hypothèse ($x_{CC} \succ_1 x_{TC}$).

- (2) Soit $x_{CT} \in ACT \setminus ATT$. Démontrons par l'absurde que $\forall x_{TT} \in ATT$, $\neg(x_{CT} \succ_1 x_{TT})$. Soit $x_{TT} \in ATT$. Supposons que $x_{CT} \succ_1 x_{TT}$. On vérifie que :

1. Dans la configuration de jeu (T_1, T_2) , l'agent a_1 propose x_{CT} avant x_{TT} ($\exists t > 0, x_{CT} \in \mathcal{P}_1^{TT}(t) \wedge x_{TT} \notin \mathcal{P}_1^{TT}(t)$) car $x_{CT} \succ_1 x_{TT}$ (par hypothèse). Cependant, x_{TT} fait partie de l'ensemble des accords du jeu. On en déduit que $\neg(x_{CT} \succ_2 x_{TT})$.
2. Dans la configuration (C_1, T_2) , x_{CT} est une solution. Donc il existe une étape où l'agent a_2 propose x_{CT} plutôt que x_{TT} ($\exists t > 0, x_{TT} \in \mathcal{P}_2^{CT}(t) \wedge x_{CT} \notin \mathcal{P}_2^{CT}(t)$). Or, $\neg(x_{CT} \succ_2 x_{TT})$ (d'après 1) et dans la configuration (T_1, T_2) , a_2 propose x_{TT} avant x_{CT} (c.-à-d. x_{TT} résultat de l'algorithme 5 plutôt que x_{CT}) alors qu'à tout instant, on a $\mathcal{P}_1^{TT}(t) \subseteq \mathcal{P}_1^{CT}(t)$ (lemme). On arrive donc à une contradiction.

Références

- [1] K. J. Arrow, A. Sen, and K. Suzumura, editors. *Handbook of Social Choice and Welfare*. North-Holland, 2002.
- [2] Salvador Barberà, Walter Bossert, and Prasanta K. Pattanaik. *Handbook of utility theory*, chapter Ranking sets of objects. Springer, 2004.
- [3] F. Delecroix, M. Morge, and J.-C. Routier. An algorithm for active learning of lexicographic preferences. In *Proc. of the workshop from Multiple Criteria Decision Aiding to Preference Learning*, pages 115–122, 2012.
- [4] F. Delecroix, M. Morge, and J.-C. Routier. A virtual selling agent which is proactive and adaptive. In *Proc. of the 10th International Conference on Practical Applications of Agents and Multi-Agent Systems (PAAMS)*, pages 57–66. Springer, 2012.

- [5] F. Delecroix, M. Morge, and J.-C. Routier. A virtual selling agent which is persuasive and adaptive. In Sascha Ossowski, editor, *Agreement Technologies*, volume 8 of *Law, Governance and Technology Series*, pages 625–645. Springer Netherlands, 2013.
- [6] Fabien Delecroix, Maxime Morge, and Jean-Christophe Routier. Négociation bilatérale pour la recherche d’un compromis. In *Actes des 21èmes Journées Francophones sur les Systèmes Multi-Agents (JF-SMA2013)*, pages 19–28, 2013.
- [7] U. Endriss. Monotonic concession protocols for multilateral negotiation. In *Proc. of the 5th International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS)*, pages 392–399. ACM, 2006.
- [8] P. Everaere, M. Morge, and G. Picard. Casanova : un comportement d’agent respectant la privacité pour des mariages stables et équitables. *Revue d’Intelligence Artificielle*, 5 :471–494, 2012.
- [9] Peynam Faratin, Carles Sierra, and Nick .R. Jennings. Negotiation decision functions for autonomous agents. *Robotics and Autonomous Systems*, 24(3-4) :159–182, 1998.
- [10] N. R. Jennings, P. Faratin, A. R. Lomuscio, S. Parsons, C. Sierra, and M. Wooldridge. Automated negotiation : Prospects methods and challenges. *Group Decision and Negotiation*, 10(2) :199–215, 2001.
- [11] H. Moulin. *Fair Division and Collective Welfare*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, USA, 2003.
- [12] J. S. Rosenschein and G. Zlotkin. *Rules of Encounter - Designing Conventions for Automated Negotiation among Computers*. MIT Press, 1994.
- [13] B. Roy and D. Bouyssou. *Aide Multicritère à la Décision : Méthodes et Cas*. Economica, Paris, 1993.