



HAL
open science

Sous-groupes de génération compacte des groupes de Lie résolubles

Gaël Meigniez

► **To cite this version:**

Gaël Meigniez. Sous-groupes de génération compacte des groupes de Lie résolubles. 1992. hal-01069028

HAL Id: hal-01069028

<https://hal.science/hal-01069028>

Preprint submitted on 30 Sep 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Gaël Meigniez

Sous-Groupes de Génération Compacte
des Groupes de Lie Résolubles

Juin 1992

N°33

UNIVERSITE PARIS 7 - U.F.R de Mathématiques
C.N.R.S - Unité de Recherche Associée 212 - "Théories Géométriques"
Aile 45-55 - 5ème étage
2, Place Jussieu F.75251 PARIS cedex 05

FAX : (33.1) 44 27 69 35

Sous-Groupes de Génération Compacte des Groupes de Lie Résolubles

Gaël Meigniez

Soient G un groupe de Lie (dans cet article, ces mots signifient "groupe de Lie réel connexe") et Γ un sous-groupe de type fini. Supposons Γ *uniforme*, c'est-à-dire qu'il existe une partie compacte K de G tel que $\Gamma K = G$. Mais ne supposons pas Γ discret – les questions débattues ici sont triviales quand Γ est discret.

Choisissons pour Γ une partie génératrice finie \mathcal{G} . On appelle *trace* d'un mot $\gamma_1 \dots \gamma_n$, où $\gamma_i \in \mathcal{G} \cup \mathcal{G}^{-1}$, l'ensemble des $n + 1$ produits partiels $1, \gamma_1, \gamma_1 \gamma_2, \dots, \gamma_1 \dots \gamma_n$.

Définition — Γ est de *génération compacte* dans G si pour toute partie compacte K de G il existe une partie compacte K' de G tel que tout élément de $\Gamma \cap K$ puisse être écrit comme un mot dont la trace est contenue dans K' .

On vérifie facilement que cette propriété ne dépend pas du choix de la partie génératrice finie \mathcal{G} .

Le but de cet article est d'établir un critère pratique pour reconnaître les sous-groupes de génération compacte dans les groupes de Lie résolubles.

La notion de génération compacte a été d'abord définie par A. Haefliger dans le cadre plus général des pseudogroupes d'isométries : voir [Hae2]. La définition dans le cadre restreint des sous-groupes d'un groupe de Lie, que nous avons énoncée ci-dessus, a été obtenue par Y. Carrière dans ses travaux sur la dynamique transverse des feuilletages riemanniens : [C1], [C2].

L'intérêt porté à cette notion a sa source dans l'étude des *G-feuilletages de Lie* des variétés compactes. On trouvera en appendice à ce papier quelques éléments sur ces objets. A chacun d'eux est attaché son *groupe d'holonomie*, qui est un sous-groupe de type fini uniforme dans G . Le problème central dans la classification de ces feuilletages est d'établir la liste des sous-groupes de G qui apparaissent comme groupe d'holonomie de l'un d'eux. La génération compacte intervient comme une condition nécessaire :

Proposition (Haefliger) — Si Γ est le groupe d'holonomie d'un *G-feuilletage de Lie* d'une variété compacte, alors il est de *génération compacte* dans G .

Question (Haefliger) — La réciproque est-elle vraie ?

Ce sont cette proposition (dont on trouvera une démonstration dans l'appendice B) et cette question ouverte (que nous ne résolvons pas) qui motivent la présente étude.

La lecture de cet article ne suppose aucune connaissance des feuilletages de Lie, qui n'en sont pas le sujet. Le lecteur qui ne feuillette guère préférera peut-être retenir comme motivation le cas particulier suivant de la proposition précédente :

Supposons un autre groupe de Lie H contenant un sous-groupe *discret* cocompact (c'est-à-dire uniforme) Γ_H , et un homomorphisme surjectif p de H sur G . Alors $p(\Gamma_H)$ est de *génération compacte* dans G . En d'autres termes, la génération compacte est une condition nécessaire pour être l'image d'un sous-groupe discret cocompact d'un autre groupe de Lie. Cependant l'un des corollaires du présent travail sera que cette condition n'est pas suffisante (exemple VI.5).

Notre critère fait intervenir les *racines* de G . Désignons par g et d l'algèbre de Lie et la dimension de G . Rappelons que le théorème de Lie pour les groupes résolubles énonce que l'algèbre de Lie complexe $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} g$ admet une suite de Jordan-Hölder d'idéaux, $0 = g_0 \subset \dots \subset g_d = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} g$ telle que $g_i/g_{i-1} \cong \mathbb{C}$. La représentation adjointe induit d homomorphismes $\rho_i : G \rightarrow \text{aut}_{\mathbb{C}}(g_i/g_{i-1}) \cong \mathbb{C}^*$: les racines de G .

Considérons les sous-groupes $G_i = \exp(g_i \cap g) \subset G$. Nous dirons que ρ_i est Γ -critique si $G_i \cap (\Gamma \cap G')$

n'est pas contenu dans $G_{i-1}(\Gamma \cap G')$ (l'apostrophe désigne le sous-groupe dérivé, engendré par les commutateurs).

Pour chaque homomorphisme $\chi : G \rightarrow \mathbf{R}$ continu non nul, on considère le "demi-groupe" ouvert $\chi^{-1}(]0, +\infty[)$, et l'image $\rho_i(\Gamma \cap \chi^{-1}(]0, +\infty[))$ qui est un sous-ensemble de \mathbf{C} . Si le nombre complexe 1 est combinaison linéaire entière d'éléments de $\rho_i(\Gamma \cap \chi^{-1}(]0, +\infty[))$, et ceci pour tout homomorphisme $\chi : G \rightarrow \mathbf{R}$ continu non nul, alors nous dirons que le triplet (G, Γ, ρ_i) est *unifère*.

Noter qu'une combinaison linéaire entière d'éléments de $\rho_i(\Gamma)$ n'est rien d'autre qu'un polynôme de Laurent à coefficients entiers en les nombres complexes $\rho_i(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$ — donc la propriété ci-dessus parle de relations algébriques entre les racines des générateurs de Γ .

Théorème A — *Soient G un groupe de Lie résoluble et Γ un sous-groupe uniforme de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) Γ est de *génération compacte*.

b) *Pour chaque racine ρ_i de G , si ρ_i est Γ -critique, alors (G, Γ, ρ_i) est unifère.*

Le lecteur peut se reporter dès maintenant à l'appendice A où nous traitons en détail plusieurs exemples d'application de ce critère.

En outre, les questions débattues ici sont étroitement liées à l'invariant Σ^1 introduit et étudié par Bieri-Neumann-Strebel, voir [BNS]. Nous ne le ferons pas dans cet article, mais en employant nos méthodes on pourrait montrer que la condition b) peut être remplacée par la condition suivante :

Pour tout homomorphisme $\chi : G \rightarrow \mathbf{R}$ continu non nul, $\chi|_{\Gamma} \in \Sigma^1(\Gamma)$.

Après avoir démontré le théorème A, nous en déduisons les corollaires suivants. Soient G un groupe de Lie résoluble et Γ un sous-groupe uniforme de type fini.

Corollaire VI.1 — *Si G est nilpotent, alors Γ est de génération compacte.*

En fait, comme l'a remarqué Haefliger dans [Hae1], il résulte des travaux de Malcev (voir [R]) que Γ est dans ce cas l'image d'un sous-groupe discret cocompact Γ_H dans un groupe de Lie nilpotent H par un homomorphisme surjectif de H sur G .

Plus généralement, on a le :

Corollaire VI.3 — *Si Γ est polycyclique, alors il est de génération compacte. Plus généralement, si Γ contient un sous-groupe polycyclique uniforme dans G , alors Γ est de génération compacte.*

Rappelons qu'un groupe Γ est *polycyclique* s'il s'obtient à partir du groupe trivial par un nombre fini d'extensions cycliques, finies ou infinies. Dans le cas d'un sous-groupe de type fini de G , cela revient à dire que son groupe dérivé Γ' est également de type fini. Ce corollaire généralise le précédent car un groupe nilpotent de type fini est toujours polycyclique.

Cependant notre théorème montre qu'il y a des groupes de génération compacte qui ne contiennent point de sous-groupe polycyclique uniforme : voir l'exemple VI.5, et à l'appendice A les cas 4 et 5 de l'exemple A.1.

Demandons-nous maintenant si dans un groupe de Lie G résoluble non nilpotent, les sous-groupes de génération compacte sont "nombreux".

Pour chaque n -uplet $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in G^n$, notons $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$ le sous-groupe de G qu'ils engendrent. On rappelle que pour n assez grand, l'ensemble des $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in G^n$ tels que $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$ est dense dans G contient un ouvert dense dans G^n .

Corollaire VI.4 — *On suppose que G n'est pas nilpotent. Alors pour n assez grand, l'ensemble des $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in G^n$ tels que $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$ est de génération compacte est un ensemble rare mais dense dans G^n .*

Ici *rare* signifie *contenu dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide*. Mais si G est un groupe de Lie algébrique réel, la même proposition est vraie en prenant *rare* au sens de Zariski.

Au contraire la génération compacte est une condition ouverte lorsqu'on déforme le sous-groupe Γ sans modifier sa structure de groupe abstrait. De façon précise, munissons Γ de la topologie discrète et $\text{hom}(\Gamma, G)$ de la topologie usuelle (celle de la convergence simple). L'inclusion id de Γ dans G est un point de cet espace.

Corollaire VI.6 — Si Γ est de génération compacte dans G , alors pour tout $\phi \in \text{hom}(\Gamma, G)$ assez proche de id , le groupe $\phi(\Gamma)$ est de génération compacte dans G .

Ce travail n'aurait pas existé sans les conversations où Etienne Ghys m'a expliqué la problématique des groupes de génération compacte. J'ai également profité de discussions fructueuses et stimulantes avec André Haefliger. Je les remercie de l'intérêt qu'ils ont accordé à ce travail. Je remercie aussi Yves Benoist qui a bien voulu me guider dans les groupes de Lie résolubles, et l'Institut de Mathématiques de l'Université de Genève de sa chaleureuse hospitalité.

I — Préliminaires

Notations

Dans tout groupe G , nous noterons 1 l'élément neutre. Par convention ce sera la valeur de tout produit à 0 facteurs d'éléments de G .

Quels que soient $\alpha, \beta \in G$, nous noterons :

$$\alpha^\beta = \beta\alpha\beta^{-1}$$

$$[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$$

Quels que soient $A, B \subset G$, nous noterons :

$$AB = \{\alpha\beta/\alpha \in A \text{ et } \beta \in B\}$$

$$A^{-1} = \{\alpha^{-1}/\alpha \in A\}$$

$$A^B = \{\alpha^\beta/\alpha \in A \text{ et } \beta \in B\}$$

$$[A, B] = \{[\alpha, \beta]/\alpha \in A \text{ et } \beta \in B\}$$

Nous noterons $\langle A \rangle$ le sous-groupe de G engendré par A .

Nous noterons $\langle A \rangle_B$ l'ensemble des $\gamma \in G$ qui s'écrivent d'une manière au moins comme un produit : $\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_n$ tel que $n \geq 0$, que chaque $\alpha_i \in A \cup A^{-1}$ et que, pour chaque $m \in \{0, \dots, n\}$, le produit partiel $\alpha_1 \dots \alpha_m$ appartient à B .

Nous noterons $\mathbf{Z}[G]$ l'anneau du groupe G . Les éléments de $\mathbf{Z}[G]$ seront qualifiés de chaînes. On appelle support de $c = \sum_{\gamma \in G} n_\gamma \gamma \in \mathbf{Z}[G]$ l'ensemble $\text{spt}(c) = \{\gamma \in G / n_\gamma \neq 0\}$. Tout homomorphisme ϕ de G dans le groupe A^* des unités d'un anneau A s'étend de façon unique en un homomorphisme d'anneaux de $\mathbf{Z}[G]$ dans A , encore noté ϕ .

Nous noterons $G' = \langle [G, G] \rangle$ le sous-groupe dérivé de G et $G'' = (G')'$ le deuxième sous-groupe dérivé. La notation $G^{(k)}$ désignera le k -ième terme de la suite centrale descendante, définie par $G^{(0)} = G$ et $G^{(k+1)} = \langle [G^{(k)}, G] \rangle$.

Si G est un groupe de Lie, nous noterons $\mathcal{K}(G)$ l'ensemble des parties compactes de G et $\text{hom}(G, \mathbf{R})$ (respectivement $\text{hom}(G, \mathbf{C}^*)$) l'ensemble des homomorphismes continus de G dans \mathbf{R} (respectivement \mathbf{C}^*).

Triplets unifères

Soient G un groupe de Lie résoluble, Γ un sous-groupe uniforme — qui peut ne pas être de type fini, et M un Γ -module — c'est-à-dire un module sur l'anneau $\mathbf{Z}[\Gamma]$.

Soient c, c' deux éléments de $\mathbf{Z}[\Gamma]$. Nous dirons que c opère comme c' sur M si $c \cdot m = c' \cdot m$ pour tout $m \in M$. Nous dirons que c opère identiquement sur M si elle opère comme 1. Nous dirons que c annule M si elle opère comme 0.

Définition I.1 — Le triplet (G, Γ, M) est unifié si, pour tout $\chi \in \text{hom}(G, \mathbf{R})$ non nul, il existe $c \in \mathbf{Z}[\Gamma]$ à support dans $\chi^{-1}(]0, +\infty[)$ qui opère identiquement sur M .

Par exemple, si M est un Γ -module trivial, c'est-à-dire si $\gamma \cdot m = m$ quels que soient $\gamma \in \Gamma$ et $m \in M$, alors (G, Γ, M) est unifié.

Tout homomorphisme $\rho : \Gamma \rightarrow \mathbf{C}^*$, munit \mathbf{C} d'une structure de Γ -module : $\gamma \cdot z = \rho(\gamma)z$. Nous noterons \mathbf{C}_ρ ce Γ -module, et nous dirons que (G, Γ, ρ) est unifié pour dire que $(G, \Gamma, \mathbf{C}_\rho)$ est unifié. On retrouve ainsi la définition de l'introduction.

II — Quatre lemmes concernant les triplets unifiés

Soient G un groupe de Lie résoluble et Γ un sous-groupe uniforme — qui peut ne pas être de type fini.

Notre premier lemme et ses corollaires sont des remarques élémentaires que nous emploierons beaucoup dans la démonstration du théorème A.

Lemme II.1 — Soit une suite exacte courte de Γ -modules :

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$$

(G, Γ, M_2) est unifié si et seulement si (G, Γ, M_1) et (G, Γ, M_3) le sont.

Le sens "seulement si" est évident. Si réciproquement (G, Γ, M_1) et (G, Γ, M_3) sont unifiés, c'est-à-dire que pour chaque $\chi \in \text{hom}(G, \mathbf{R})$ non nul il existe $c_1, c_3 \in \mathbf{Z}[\Gamma]$ à support dans $\chi^{-1}(]0, +\infty[)$ tels que c_1 opère identiquement sur M_1 ainsi que c_3 sur M_3 , alors $1 - c_1$ annule M_1 et $1 - c_3$ annule M_3 , si bien que $(1 - c_1)(1 - c_3) = 1 - (c_1 + c_3 - c_1c_3)$ annule M_2 , et donc $c_2 = c_1 + c_3 - c_1c_3$ opère identiquement sur M_2 . Comme $\chi^{-1}(]0, +\infty[)$ est un sous-monoïde de G , il est clair qu'il contient le support de c_2 .

Corollaire II.2 — La condition b) du théorème : "pour chaque racine ρ_i de G , si ρ_i est Γ -critique, alors (G, Γ, ρ_i) est unifié" est équivalente à la suivante : " $(G, \Gamma, (\Gamma \cap G')/(\Gamma \cap G'))$ est unifié".

En effet, les Γ -modules $M_i = (\Gamma \cap G' \cap G_i)/(\Gamma \cap G')$ forment une suite de composition de $(\Gamma \cap G')/(\Gamma \cap G')$.

Quand ρ_i n'est pas Γ -critique, le quotient M_i/M_{i-1} est nul.

Quand ρ_i est Γ -critique, M_i/M_{i-1} est un sous-module non nul de G_i/G_{i-1} , qui est un quotient de $(g_i \cap g)/(g_{i-1} \cap g)$, qui est un sous-module de g_i/g_{i-1} , qui est isomorphe à \mathbf{C}_{ρ_i} : il est clair que (G, Γ, ρ_i) est unifié si et seulement si $(G, \Gamma, M_i/M_{i-1})$ l'est. Le corollaire résulte donc évidemment du lemme II.1 et d'une récurrence sur d .

Nous emploierons plusieurs fois la remarque suivante, qui résulte trivialement du lemme II.1.

Corollaire II.3 — Soient A, B, U, V, X cinq sous-groupes normaux de Γ , tels que $A \subset U \subset V \subset B$ et $A \subset X \subset B$ et que $V/U, X/A, B/X$ sont abéliens. Si $(G, \Gamma, X/A)$ et $(G, \Gamma, B/X)$ sont unifiés, alors $(G, \Gamma, V/U)$ est unifié.

Notre deuxième lemme est de nature géométrique et donne un nouveau sens au mot "unifié"; il forme, avec le lemme de relèvement, le cœur de la démonstration de l'implication b) \Rightarrow a) du théorème A.

Lemme II.4 — Soit M un Γ -module quelconque. (G, Γ, M) est unifère si et seulement si il existe $K \in \mathcal{K}(G)$ tel que quel que soit $c \in \mathbf{Z}[\Gamma]$, il existe $c' \in \mathbf{Z}[\Gamma]$ à support dans KG' et qui opère comme c sur M .

Le sens "si" est facile à démontrer mais nous ne l'emploierons pas. Démontrons le sens "seulement si" qui est le véritable contenu de ce lemme.

Notons $G_{ab} = G/G'$ et $p : G \rightarrow G_{ab}$ la projection canonique et T le sous-groupe compact connexe maximal de G_{ab} et V le quotient G_{ab}/T et $q : G_{ab} \rightarrow V$ la projection canonique et $r = q \circ p : G \rightarrow V$. Munissons V , qui est isomorphe à un espace vectoriel réel de dimension finie, d'un produit scalaire euclidien quelconque, noté $(v, w) \mapsto v \cdot w$. Notons $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$ la norme associée et $B_R = \{v \in V / \|v\| \leq R\}$ la boule de rayon R et $S = \{v \in V / \|v\| = 1\}$ la sphère unité.

Pour chaque $c \in \mathbf{Z}[\Gamma]$, considérons dans S le sous-ensemble ouvert :

$$S_c = \{v \in S / v \cdot w > 0 \text{ pour tout } w \in r(\text{spt}(c))\}$$

La propriété " (G, Γ, M) est unifère" signifie que quand c parcourt l'ensemble des chaînes qui opèrent identiquement sur M , les ouverts S_c recouvrent S . Extrayons-en un recouvrement fini : $S = S_{c_1} \cup S_{c_2} \cup \dots \cup S_{c_n}$. En d'autres termes il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que :

Quel que soit $v \in S$ il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que quel que soit $w \in r(\text{spt}(c_i))$ on ait $v \cdot w > \epsilon$.

On considère maintenant la fonction "produit scalaire avec v " comme la fonction de Busemann attachée à la demi-droite de V portée par v . En d'autres termes, on remarque que quels que soient $v \in S$ et $w \in V$ on a :

$$v \cdot w = \lim_{R \rightarrow +\infty} R - \|Rv - w\|$$

De plus cette limite est croissante. On en déduit aisément que si R est assez grand alors dans la propriété énoncée précédemment on peut remplacer $v \cdot w$ par $R - \|Rv - w\|$:

Il existe $R_0 \in \mathbf{R}$ tel que quel que soit $R \geq R_0$ et quel que soit $v \in S$, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que quel que soit $w \in r(\text{spt}(c_i))$ on ait $R - \|Rv - w\| > \epsilon$.

Soit γ un élément quelconque de Γ . Supposons que $\|r(\gamma)\| > R_0$. Notons $R = \|r(\gamma)\|$. Nous allons voir qu'il existe une chaîne à support dans $r^{-1}(B_{R-\epsilon})$ qui opère comme γ sur M .

Le vecteur $v = -r(\gamma)/R$ appartient à S , donc il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que quel que soit $w \in r(\text{spt}(c_i))$ on ait $R - \|Rv - w\| > \epsilon$. En d'autres termes $r(\text{spt}(c_i))$ est contenu dans la boule de centre Rv et de rayon $R - \epsilon$. Translatons du vecteur $r(\gamma) = -Rv$: l'ensemble $r(\gamma) + r(\text{spt}(c_i)) = r(\text{spt}(\gamma c_i))$ est contenu dans la boule de centre $Rv - Rv = 0$ et de rayon $R - \epsilon$. Comme c_i opère identiquement sur M , la chaîne γc_i opère comme γ sur M .

En appliquant répétitivement ce procédé, on obtient que pour toute chaîne c , il existe une chaîne à support dans $r^{-1}(B_{R_0})$ qui opère comme c sur M . Prenons pour K une partie compacte de G telle que $p(K)$ contient $r^{-1}(B_{R_0})$: le saturé KG' contient $r^{-1}(B_{R_0})$, ce qui démontre le lemme II.4.

Remarque concernant le lemme II.4 — La même construction joue un rôle important dans l'étude de l'invariant Σ^1 des groupes métabéliens : [BS], lemma 1.1.

Notre troisième lemme et ses corollaires sont des remarques élémentaires. Ils montrent comment dans certaines situations simples décider si (G, Γ, ρ) est unifère ou non par simple examen de $\rho(\Gamma)$, sous-groupe de \mathbf{C}^* .

Lemme II.5 — Soit une suite exacte courte de groupes de Lie résolubles :

$$1 \rightarrow G_1 \hookrightarrow G_2 \xrightarrow{p} G_3 \rightarrow 1$$

(On ne suppose pas G_1 connexe).

Soient Σ un sous-groupe de G_2 et $\rho \in \text{hom}(G_3, \mathbf{C}^*)$. On suppose que $\Sigma \cap G_1$ est uniforme dans G_1 . Alors $(G_2, \Sigma, \rho \circ p)$ est unifère si et seulement si $(G_3, p(\Sigma), \rho)$ est unifère.

Le sens "seulement si" est évident. Démontrons le sens "si". Soit χ un élément quelconque non nul de $\text{hom}(G_2, \mathbf{R})$. Il y a deux cas.

Premier cas : $G_1 \subset \ker(\chi)$. Il existe donc $\psi \in \text{hom}(G_3, \mathbf{R})$ tel que $\chi = \psi \circ p$. Comme $(G_3, p(\Sigma), \rho)$ est unifère, il existe $c \in \mathbf{Z}[p(\Sigma)]$ tel que $\text{spt}(c) \subset \psi^{-1}(]0, +\infty[)$ et $\rho(c) = 1$. Notons-la $c = \sum_{\sigma \in p(\Sigma)} n_\sigma \sigma$.

Choisissons un élément σ' dans chaque fibre $\Sigma \cap p^{-1}(\sigma)$ et posons $c' = \sum_{\sigma \in p(\Sigma)} n_{\sigma} \sigma'$: c'est un élément de $\mathbf{Z}[\Sigma]$ tel que $\text{spt}(c') \subset \chi^{-1}(]0, +\infty[)$ et $\rho \circ p(c') = 1$.

Second cas : $G_1 \not\subset \ker(\chi)$. Comme $\Sigma \cap G_1$ est uniforme dans G_1 , il existe un élément σ de $\Sigma \cap G_1$ qui appartient aussi à $\chi^{-1}(]0, +\infty[)$. La chaîne $c = \sigma \in \mathbf{Z}[\Sigma]$ est à support dans $\chi^{-1}(]0, +\infty[)$ et $\rho \circ p(c) = 1$.

Conclusion : $(G_2, \Sigma, \rho \circ p)$ est unifère.

Rappelons qu'une *unité algébrique* est un nombre complexe non nul qui est un entier algébrique sur \mathbf{Z} , et dont l'inverse est aussi un entier algébrique sur \mathbf{Z} .

Corollaire II.6 — Soit $\rho \in \text{hom}(G, \mathbf{C}^*)$.

Si tous les éléments de $\rho(\Gamma)$ sont des unités algébriques, alors (G, Γ, ρ) est unifère.

Si (G, Γ, ρ) est unifère et si $\rho(\Gamma)$ est un groupe cyclique (fini ou infini), alors tous ses éléments sont des unités algébriques.

Supposons d'abord que les éléments de $\rho(\Gamma)$ sont des unités algébriques et démontrons que (G, Γ, ρ) est unifère. Donnons-nous un $\chi \in \text{hom}(G, \mathbf{R})$ quelconque non nul. Choisissons un $\gamma \in \Gamma \cap \chi^{-1}(]0, +\infty[)$. Le nombre complexe $\rho(\gamma)$ est racine d'un polynôme P à coefficients entiers dont le coefficient constant $P(0)$ vaut 1. Formons la chaîne $c = 1 - P(\gamma)$ (ici 1 désigne l'élément neutre de Γ) : on a $\rho(c) = 1$. Comme c est combinaison linéaire entière de puissances strictement positives de γ , son support est contenu dans $\chi^{-1}(]0, +\infty[)$.

Supposons maintenant que (G, Γ, ρ) est unifère et que $\rho(\Gamma)$ est cyclique, et démontrons que ses éléments sont des unités algébriques. Quitte à remplacer G par son revêtement universel et Γ par son image inverse dans ce revêtement, nous pouvons supposer G simplement connexe (lemme II.5).

Distinguons deux cas, suivant la nature de $\rho(G)$. Les sous-groupes de Lie de \mathbf{C}^* sont : $\{1\}$, $\{z \in \mathbf{C}^* / |z| = 1\}$ (qui sont compacts), les autres sous-groupes à 1 paramètre, et \mathbf{C}^* (qui ne sont pas compacts).

Premier cas : $\rho(G)$ n'est pas compact. Posons $\chi = \log(|\rho|)$: c'est un homomorphisme continu non nul de G dans \mathbf{R} , donc il existe $c \in \mathbf{Z}[\Gamma]$ à support dans $\chi^{-1}(]0, +\infty[)$ telle que $\rho(c) = 1$. Choisissons $\gamma \in \chi^{-1}(]0, +\infty[)$ tel que $\rho(\gamma)$ engendre $\rho(\Gamma)$ et identifions l'anneau de groupe $\mathbf{Z}[\rho(\Gamma)]$ à l'anneau des polynômes de Laurent à coefficients entiers, $\mathbf{Z}[X, X^{-1}]$, en posant $X = \rho(\gamma)$. Soit P l'image de c dans $\mathbf{Z}[X, X^{-1}]$: il ne contient que des monômes de degré strictement positif, et $P(\rho(\gamma)) = 1$. Ceci montre que $\rho(\gamma)^{-1}$ est un entier algébrique. Un raisonnement semblable avec $\chi = -\log(|\rho|)$ montre que $\rho(\gamma)$ est également un entier algébrique.

Second cas : $\rho(G)$ est compact. Ecartons le cas trivial où $\rho(G) = \{1\}$, et plus généralement le cas trivial où $\rho(\Gamma)$ est fini. On a $\rho(G) = \{z \in \mathbf{C}^* / |z| = 1\}$. Comme nous avons supposé G simplement connexe il existe $\chi \in \text{hom}(G, \mathbf{R})$ tel que $\rho = e^{i\chi}$. Un raisonnement semblable au précédent avec cet homomorphisme non nul montre que $\rho(\gamma)^{-1}$ est un entier algébrique, donc une unité algébrique.

Corollaire II.7 — Soit $\rho \in \text{hom}(G, \mathbf{C}^*)$. On suppose que $\Gamma \cap \ker(\rho)$ est uniforme dans $\ker(\rho)$. Alors (G, Γ, ρ) est unifère si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vraie :

i) $\rho(G)$ est compact — c'est-à-dire égal à $\{1\}$ ou au cercle $\{z \in \mathbf{C}^* / |z| = 1\}$.

ii) Le nombre complexe 1 est combinaison linéaire entière d'éléments de $\rho(\Gamma) \cap \{z \in \mathbf{C}^* / |z| < 1\}$. Il est aussi combinaison linéaire entière d'éléments de $\rho(\Gamma) \cap \{z \in \mathbf{C}^* / |z| > 1\}$.

En effet, d'après le lemme II.5, (G, Γ, ρ) est unifère si et seulement si $(\rho(G), \rho(\Gamma), id)$ l'est. Or $\text{hom}(\rho(G), \mathbf{R})$ est réduit à $\{0\}$ si $\rho(G)$ est compact, et à la droite vectorielle engendrée par $z \mapsto \log(|z|)$ si $\rho(G)$ n'est pas compact, ce qui ramène aux conditions i) et ii).

Exemple II.8 — Au vu du corollaire précédent on peut se demander si la propriété " (G, Γ, ρ) est unifère" ne serait pas toujours équivalente à la disjonction des conditions i) et ii), que $\Gamma \cap \ker(\rho)$ soit ou non uniforme dans $\ker(\rho)$. L'exemple suivant montre que ce n'est pas le cas.

Soient G le groupe des matrices 2×2 réelles triangulaires supérieures dont les éléments diagonaux sont strictement positifs, Γ le sous-groupe (uniforme, de type fini) engendré par :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et ρ l'unique racine non triviale de G , qui à chaque matrice associe le quotient de ses éléments diagonaux. La condition ii) est vérifiée puisque $1 = 3 - 2$ et $1 = 2^{-1} + 2^{-1}$. Mais (G, Γ, ρ) n'est pas unifiée : soit :

$$\chi : \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \mapsto \log(x)$$

On ne peut pas écrire 1 comme combinaison linéaire entière d'éléments de $\rho(\Gamma \cap \chi^{-1}(]0, +\infty[))$ car ce sont des rationnels de la forme $2^p 3^q$ avec p entier et q entier strictement positif.

Notre quatrième lemme sera employé dans la démonstration de $b) \Rightarrow a)$, dans le seul cas où Γ n'est pas dense dans G . Il peut être omis en première lecture.

Lemme II.9. — Soit ρ un homomorphisme continu de G dans \mathbf{C}^* . Soit H un sous-groupe de G fermé, connexe, contenant G' , et tel que ΓH est fermé dans G . Si (G, Γ, ρ) est unifiée, alors $(H, \Gamma \cap H, \rho|_H)$ est unifiée.

Commençons par le cas où G est simplement connexe. Alors il existe un homomorphisme continu $\pi : G \rightarrow \mathbf{R}^n$ tel que $\text{Ker}(\pi) = H$ et $\pi(\Gamma) = \mathbf{Z}^n$. En procédant par récurrence sur n , on se ramène au cas $n = 1$.

Choisissons un élément $\xi \in \Gamma$ tel que $\pi(\xi) = 1$. Chaque $c \in \mathbf{Z}[\Gamma]$ s'écrit donc de façon unique sous la forme :

$$c = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i \xi^i$$

où les $c_i \in \mathbf{Z}[\Gamma \cap H]$ sont presque tous nuls.

Fixons un $\chi \in \text{hom}(H, \mathbf{R})$ non nul. L'élément de $\mathbf{Z}[\Gamma \cap H]$ que nous devons exhiber sera le résultant de deux éléments a, b judicieusement choisis dans $\mathbf{Z}[\Gamma]$, et considérés comme des polynômes en ξ .

D'après le lemme II.4, il existe $K \in \mathcal{K}(G)$ tel que pour toute chaîne $c \in \mathbf{Z}[\Gamma]$, il existe une chaîne $c' \in \mathbf{Z}[\Gamma]$ à support dans KG' telle que $\rho(c') = \rho(c)$. Par ailleurs, comme nous avons pris la précaution de supposer G simplement connexe, χ s'étend en un homomorphisme continu de G dans \mathbf{R} , encore noté χ . Soient N un entier plus grand strictement que le maximum de $|\pi|$ sur KG' , et R un réel plus grand que le maximum de $|\chi|$ sur KG' . Il est clair que $\Gamma \cap H$ est uniforme dans H , choisissons donc un $\eta \in \Gamma \cap H$ tel que $\chi(\eta)$ est grand devant N, R et $\chi(\xi)$ — la condition précise est : $\chi(\eta) > R + N|\chi(\xi)|$. Pour chaque couple d'entiers (p, q) , soit $c_{p,q} \in \mathbf{Z}[\Gamma]$ une chaîne à support dans KG' telle que $\rho(c_{p,q}) = \rho(\xi^p \eta^q)$. On forme les chaînes :

$$a = 1 - \xi^N \eta (c_{N,1} + c_{-N,-1}) + \xi^{2N} \eta^2$$

$$b = 1 - \xi^N \eta^{-1} (c_{-N,1} + c_{N,-1}) + \xi^{2N} \eta^{-2}$$

Soit la matrice carrée $4N \times 4N$ suivante, à coefficients dans $\mathbf{Z}[\Gamma \cap H]$:

Pour chaque $i \in \{2N + 1, \dots, 4N\}$, $m_{i, \sigma(i)} = b_{\sigma(i) - i + 2N}$. Examinons les valeurs de χ sur le support de b_k .

Le support de b_0 est $\{1\}$. Grâce à notre choix de η , $\chi(1) = 0$ est $> \chi(\eta^{-2})$. Le support de b_{2N} est $\{\eta^{-2}\}$. Pour tout $k \in \{1, \dots, 2N - 1\}$, le support de b_k est contenu dans $\xi^{N-k} \eta^{-1} K G'$. Sur cet ensemble les valeurs de χ sont supérieures ou égales à $-\chi(\eta) + (N - k)\chi(\xi) - R$ qui grâce à notre choix de η est $> \chi(\eta^{-2})$.

En résumé $\chi(\gamma_i) \geq \chi(\eta^{-2})$, l'égalité n'étant réalisée que pour $\sigma(i) = i$.

Au total $\chi(\gamma) \geq 2N \times 0 + 2N \times \chi(\eta^{-2}) = \chi(\eta^{-4N})$ et l'égalité n'est pas réalisée puisque $\sigma \neq id$.

Passons au cas général, où G n'est peut-être pas simplement connexe. Désignons par $p: \bar{G} \rightarrow G$ un revêtement simplement connexe et par \bar{H} la composante connexe neutre de $p^{-1}(H)$. Il est clair que \bar{H} est un sous-groupe de \bar{G} fermé et connexe, qu'il contient \bar{G}' , et que $p^{-1}(\Gamma)\bar{H} = p^{-1}(\Gamma H)$ est fermé. D'après le lemme II.5, du fait que (G, Γ, ρ) est unifère il résulte que $(\bar{G}, p^{-1}(\Gamma), \rho \circ p)$ l'est également. D'après l'étude précédente, $(\bar{H}, p^{-1}(\Gamma) \cap \bar{H} = p^{-1}(\Gamma \cap H), \rho \circ p|_{\bar{H}})$ l'est également. D'une nouvelle application du lemme II.5, on tire que $(H, \Gamma \cap H, \rho|_H)$ est également unifère.

III — Démonstration de l'implication a) \Rightarrow b) du théorème A

Fixons G et Γ comme dans les hypothèses du théorème A ; supposons Γ de génération compacte.

La démonstration requiert le choix précis d'une partie génératrice finie \mathcal{G} pour Γ et d'une partie Γ -génératrice finie \mathcal{A} pour Γ' .

Désignons par T le sous-groupe de Γ formé des éléments dont la classe modulo Γ' est de torsion dans Γ/Γ' : le groupe quotient Γ/T est donc abélien libre de type fini. Choisissons dans Γ des éléments $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ dont les classes modulo T forment une base de Γ/T .

Choisissons aussi dans T des éléments $\gamma_{p+1}, \dots, \gamma_q$ tels que T/Γ' est la somme directe des groupes cycliques engendrés respectivement par les classes de $\gamma_{p+1}, \dots, \gamma_q$ modulo Γ' . Nous noterons ν_i l'ordre de la classe de γ_i modulo Γ' .

Au total $\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_q \rangle \Gamma'$ (rappelons que $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_q \rangle$ désigne le sous-groupe engendré par $\gamma_1, \dots, \gamma_q$) donc il existe des éléments de Γ' en nombre fini $\gamma_{q+1}, \dots, \gamma_r$ tels que $\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_r \rangle$. Notons :

$$\mathcal{G} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$$

$$\mathcal{A} = \{[\gamma_i^{\pm 1}, \gamma_j^{\pm 1}] / 1 \leq i, j \leq r\} \cup \{\gamma_i^{\nu_i} / p + 1 \leq i \leq q\} \cup \{\gamma_i / q + 1 \leq i \leq r\}$$

Fixons maintenant un $\chi \in \text{hom}(G, \mathbf{R})$ non nul.

Premier pas — Il existe un réel t tel que $\Gamma' = \langle \Gamma' \cap \langle \mathcal{G} \rangle_{\chi^{-1}(]t, +\infty])} \rangle$.

(Pour cette notation, se reporter au paragraphe I). Remarquons d'abord que :

Lemme III.1 — Dans un groupe de Lie résoluble, tout sous-groupe possède une partie génératrice relativement compacte.

Cela résulte d'une récurrence facile sur la dimension.

Choisissons donc un $K \in \mathcal{K}(G')$ (rappelons que $\mathcal{K}(G')$ désigne l'ensemble des parties compactes de G') tel que $\Gamma' = \langle \Gamma' \cap K \rangle$. Comme par hypothèse Γ est de génération compacte, il existe un $L \in \mathcal{K}(G)$ tel que $\Gamma \cap K$ est contenu dans $\langle \mathcal{G} \rangle_L$.

Soit t un réel minorant strictement $\chi(L)$: alors L est contenu dans $\chi^{-1}(]t, +\infty])$, donc $\langle \mathcal{G} \rangle_L$ est contenu dans $\langle \mathcal{G} \rangle_{\chi^{-1}(]t, +\infty])}$ et donc $\Gamma' = \langle \Gamma' \cap \langle \mathcal{G} \rangle_{\chi^{-1}(]t, +\infty])} \rangle$.

Nous pouvons évidemment supposer t strictement négatif, et le ferons désormais.

Deuxième pas — $\Gamma' = \langle \mathcal{A}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]t, +\infty[)} \rangle$.

Vu le résultat précédent, il suffit de prouver que pour tout mot w (= suite finie d'éléments de $\mathcal{G} \cup \mathcal{G}^{-1}$, qui seront qualifiés de lettres), si la trace de w est contenue dans $\chi^{-1}(]t, +\infty[)$, et si l'élément γ_w de Γ représenté par w appartient au groupe dérivé Γ' , alors $\gamma_w \in \langle \mathcal{A}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]t, +\infty[)} \rangle$.

Le raisonnement qui suit est emprunté à [BNS]; nous le reproduisons pour la commodité du lecteur.

Commençons par le cas particulier où la puissance totale de chaque élément de \mathcal{G} dans le mot w est nulle. Et pour montrer dans ce cas que $\gamma_w \in \langle \mathcal{A}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]t, +\infty[)} \rangle$, procédons par récurrence sur la longueur du mot w .

Quand cette longueur est nulle, l'élément γ_w est l'élément neutre et l'appartenance est donc triviale. Supposons donc la propriété vérifiée par tous les mots plus courts que w .

Désignons par ξ la plus à gauche des lettres de w dont l'image par χ est ≤ 0 . La lettre opposée ξ^{-1} doit elle aussi apparaître dans w , de sorte que w est de la forme $w_1 \eta w_2 \eta^{-1} w_3$, où $\eta = \xi$ ou ξ^{-1} . Ecrivons w_2 comme une suite de lettres : $w_2 = \xi_1 \dots \xi_s$, où $s \geq 0$. Donc :

$$\gamma_w = w_1 (\eta \xi_1 \eta^{-1}) (\eta \xi_2 \eta^{-1}) \dots (\eta \xi_s \eta^{-1}) w_3$$

Soit encore :

$$\gamma_w = w_1 [\eta, \xi_1] \xi_1 [\eta, \xi_2] \xi_2 [\eta, \xi_3] \xi_3 \dots [\eta, \xi_s] \xi_s w_3$$

Ce qu'on peut encore exprimer ainsi :

$$\gamma_w = [\eta, \xi_1]^{w_1} [\eta, \xi_2]^{w_1 \xi_1} [\eta, \xi_3]^{w_1 \xi_1 \xi_2} \dots [\eta, \xi_s]^{w_1 \xi_1 \xi_2 \dots \xi_{s-1}} w_1 w_2 w_3$$

Les exposants de cette expression sont de la forme $w_1 \tau$, où τ appartient à la trace de w_2 . Montrons que tout élément de cette forme appartient à $\chi^{-1}(]t, +\infty[)$.

Dans le cas où $\eta = \xi$, on a $\chi(\eta) \leq 0$ donc $\chi(w_1 \tau) \geq \chi(w_1 \eta \tau)$. Or $w_1 \eta \tau$ appartient à la trace de w , donc $\chi(w_1 \eta \tau) > t$ donc au total $\chi(w_1 \tau) > t$.

Dans le cas contraire : $\eta = \xi^{-1}$, dans le mot w les sous-mots w_1 et w_2 sont situés à gauche de ξ , donc chaque lettre apparaissant dans w_1 ou w_2 est d'image par χ strictement positive, donc $\chi(w_1 \tau) \geq 0$, donc $\chi(w_1 \tau) > t$.

Donc dans l'expression ci-dessus chaque facteur de la forme $[\eta, \xi_s]^{w_1 \tau}$ appartient au sous-groupe $\langle \mathcal{A}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]t, +\infty[)} \rangle$.

Reste le facteur $\gamma_{w_1 w_2 w_3}$ représenté par le mot $w_1 w_2 w_3$, auquel nous aimerions appliquer l'hypothèse de récurrence. Sa longueur est bien inférieure de 2 à celle de w ; et la puissance totale de chaque lettre y est bien nulle. Montrons que sa trace est contenue dans $\chi^{-1}(]t, +\infty[)$. Soit σ un élément quelconque de la trace de $w_1 w_2 w_3$. Il y a trois cas :

Premier cas : σ appartient à la trace de w_1 . Alors σ appartient aussi à la trace de w , donc appartient bien à $\chi^{-1}(]t, +\infty[)$.

Deuxième cas : σ est le produit de w_1 par un élément de la trace de w_2 . Nous avons montré plus haut que tout élément de cette forme appartient bien à $\chi^{-1}(]t, +\infty[)$.

Troisième cas : $\sigma = w_1 w_2 \tau$ où τ appartient à la trace de w_3 . Dans ce cas $\chi(\sigma) = \chi(w_1 \eta w_2 \eta^{-1} \tau)$ qui est bien $> t$ puisque $w_1 \eta w_2 \eta^{-1} \tau$ appartient à la trace de w .

L'hypothèse de récurrence entraîne donc que $\gamma_{w_1 w_2 w_3} \in \langle \mathcal{A}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]t, +\infty[)} \rangle$. Au total $\gamma_w \in \langle \mathcal{A}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]t, +\infty[)} \rangle$, ce qu'il fallait démontrer.

Ne supposons plus maintenant que la puissance totale de chaque élément γ_i de \mathcal{G} dans le mot w est nulle. Soit μ_i cette puissance. Comme $\gamma_w \in \Gamma'$, l'entier μ_i est nul pour $1 \leq i \leq p$ et divisible par ν_i pour $p+1 \leq i \leq q$. Considérons le mot $w' = w \gamma_{p+1}^{-\mu_{p+1}} \gamma_{p+2}^{-\mu_{p+2}} \dots \gamma_r^{-\mu_r}$.

Les générateurs $\gamma_{p+1}, \dots, \gamma_r$ sont de torsion modulo Γ' donc ils sont dans le noyau de χ . Il en résulte immédiatement que les valeurs de χ sur la trace de w' coïncident avec les valeurs de χ sur la trace de w . De plus la puissance totale de chaque lettre dans w' est nulle. Donc d'après l'étude précédente $\gamma_{w'} \in \langle \mathcal{A}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]t, +\infty[)} \rangle$. Par ailleurs $\gamma_{p+1}^{-\mu_{p+1}}, \dots, \gamma_r^{-\mu_r}$ appartiennent à $\langle \mathcal{A} \rangle$, donc aussi à $\langle \mathcal{A}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]t, +\infty[)} \rangle$ qui est un ensemble plus grand. Au total $\gamma_w \in \langle \mathcal{A}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]t, +\infty[)} \rangle$, ce qu'il fallait démontrer.

Troisième pas — Il existe une partie finie \mathcal{B} de Γ' telle que $\Gamma' = \langle \mathcal{B}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]0, +\infty[)} \rangle$.

En effet, Γ étant uniforme dans G , il existe un $\gamma \in \Gamma$ tel que $\chi(\gamma) \leq t$. Donc $\langle \mathcal{A}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]t, +\infty[)} \rangle$ est contenu dans $\langle \mathcal{A}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]x(\gamma), +\infty[)} \rangle$ qui est égal à $\langle \mathcal{A}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]0, +\infty[)} \gamma \rangle$ qui est égal à $\langle \mathcal{B}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]0, +\infty[)} \rangle$ où $\mathcal{B} = \mathcal{A}^\gamma$.

Quatrième pas — $(G, \Gamma, \Gamma'/\Gamma'')$ est unifère .

Désignons par $\gamma \mapsto \bar{\gamma}$ la projection de Γ sur Γ/Γ' et par β_1, \dots, β_n les éléments de \mathcal{B} . Chaque β_i appartient à Γ' donc à $\langle \mathcal{B}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]0, +\infty[)} \rangle$. En projetant cette relation dans Γ/Γ' et en passant en notation additive, on obtient qu'il existe des chaînes $c_{ij} \in \mathbf{Z}[\Gamma]$, à support dans $\chi^{-1}(]0, +\infty[)$, telles que :

$$\bar{\beta}_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} \bar{\beta}_j$$

(Noter que cette relation ne peut être la relation triviale $\bar{\beta}_i = \bar{\beta}_i$ car la chaîne 1 n'est pas à support dans $\chi^{-1}(]0, +\infty[)$ puisque $\chi(1) = 0$) .

En d'autres termes, si l'on note δ_{ij} l'indice de Kronecker :

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - c_{ij}) \bar{\beta}_j = 0$$

Noter que l'action par automorphismes intérieurs de Γ' sur Γ'/Γ'' est triviale, donc que l'action de l'anneau $\mathbf{Z}[\Gamma]$ sur son module Γ'/Γ'' passe au quotient par l'anneau $\mathbf{Z}[\Gamma/\Gamma']$ (pour fixer les idées, si par exemple Γ/Γ' est un groupe abélien libre de rang n , alors son anneau $\mathbf{Z}[\Gamma/\Gamma']$ est isomorphe à l'anneau des séries de Laurent à n variables et à coefficients entiers) . Désignant par $c \mapsto \bar{c}$ la projection de $\mathbf{Z}[\Gamma]$ sur $\mathbf{Z}[\Gamma/\Gamma']$, on a pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ la relation linéaire :

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - \bar{c}_{ij}) \bar{\beta}_j = 0$$

L'anneau $\mathbf{Z}[\Gamma/\Gamma']$ étant commutatif, on dispose de la théorie des déterminants : considérons le déterminant $d = \det(\delta_{ij} - \bar{c}_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. En le développant, on trouve une expression de la forme $d = 1 - \bar{c}$ où c est une combinaison linéaire entière des c_{ij} et de leurs produits deux par deux, trois par trois, ..., n par n . Comme ces c_{ij} sont à support dans $\chi^{-1}(]0, +\infty[)$, qui est une partie de G stable par multiplication, c est aussi à support dans $\chi^{-1}(]0, +\infty[)$.

Par ailleurs, les n relations linéaires précédentes impliquent que $d\bar{\beta}_i = 0$ pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$. En d'autres termes $c\bar{\beta}_i = \bar{\beta}_i$. Comme les $\bar{\beta}_i$ engendrent Γ'/Γ'' considéré comme un $\mathbf{Z}[\Gamma]$ -module, il en résulte que c opère identiquement sur Γ'/Γ'' .

Comme χ était quelconque, on a bien prouvé que $(G, \Gamma, \Gamma'/\Gamma'')$ est unifère .

Conclusion — Considérons les inclusions entre sous-groupes normaux de Γ : $\Gamma'' \subset (\Gamma \cap G')' \subset \Gamma \cap G' \subset \Gamma$ et $\Gamma'' \subset \Gamma' \subset \Gamma$. Le triplet $(G, \Gamma, \Gamma'/\Gamma'')$ est unifère, nous venons de le montrer . Le triplet $(G, \Gamma, \Gamma/\Gamma')$ est également unifère, puisque Γ/Γ' est un Γ -module trivial . D'après le corollaire II.3, le triplet $(G, \Gamma, (\Gamma \cap G')/(\Gamma \cap G')')$ est unifère . D'après le corollaire II.2, pour chaque racine ρ_i de G , si ρ_i est Γ -critique, alors (G, Γ, ρ_i) est unifère .

IV — Le lemme de relèvement

L'objet de ce paragraphe est d'établir un lemme de relèvement de chemins que nous utiliserons à plusieurs reprises dans la démonstration de $b) \Rightarrow a)$. C'est une version sophistiquée de [C2], lemme 2.1.3.

Tout d'abord nous utiliserons constamment les propriétés suivantes, qui sont des conséquences immédiates de la définition de $\langle A \rangle_B$ (voir le paragraphe I).

Lemme IV.1 — Soient A, B, C trois parties d'un même groupe .

- a) Si $1 \notin B$ alors $\langle A \rangle_B = \emptyset$
- b) $\langle A \rangle_B \subset \langle A \rangle \cap B$
- c) $\langle A^{-1} \rangle_B = \langle A \rangle_B$
- d) Si $X \subset \langle A \rangle$ est fini alors il existe $Y \subset \langle A \rangle$ fini tel que $X \subset \langle A \rangle_Y$
- e) $\langle A \rangle_B \langle A \rangle_C \subset \langle A \rangle_{BC}$
- f) $(\langle A \rangle_B)^{-1} \subset \langle A \rangle_{B^{-1}B}$
- g) $\langle \langle A \rangle_B \rangle_C \subset \langle A \rangle_{CB}$

Il nous faut généraliser la notion de *génération compacte* au cas d'une partie génératrice éventuellement infinie .

Définition IV.2 — Soit \mathcal{G} une partie (finie ou infinie) d'un groupe de Lie G . Nous dirons que \mathcal{G} engendre compactement $\langle \mathcal{G} \rangle$ si pour tout $K \in \mathcal{K}(G)$, il existe $L \in \mathcal{K}(G)$ tel que :

$$\langle \mathcal{G} \rangle \cap K \subset \langle \mathcal{G} \rangle_L$$

Soit \mathcal{G} une partie finie de G . On voit que $\langle \mathcal{G} \rangle$ est de génération compacte exactement quand il est engendré compactement par \mathcal{G} . Et alors, il est engendré compactement par toute autre partie génératrice finie .

Par contre, si deux parties de G dont l'une au moins est infinie engendrent le même sous-groupe, ce sous-groupe peut être engendré compactement par l'une d'elles mais pas par l'autre.

Lemme IV.3 (de relèvement) — Soit une suite exacte courte de groupes de Lie :

$$1 \rightarrow H \hookrightarrow G \xrightarrow{p} G/H \rightarrow 1$$

(On ne suppose pas H connexe) .

Soient Σ un sous-groupe de G , \mathcal{S} une partie génératrice de Σ et Δ un sous-groupe de $\Sigma \cap H$. On fait les hypothèses suivantes :

- 1) \mathcal{S} est relativement compacte dans G .
- 2) $p(\Sigma)$ est compactement engendré par $p(\mathcal{S})$.
- 3) Δ est normal dans Σ et uniforme dans H .

Alors :

- 1) Pour tout $K \in \mathcal{K}(G)$, il existe $K' \in \mathcal{K}(G)$ tel que :

$$\Sigma \cap KH \subset \Delta \langle \mathcal{S} \rangle_{K'}$$

- 2) Pour tout $K \in \mathcal{K}(G)$, il existe $K'' \in \mathcal{K}(G)$ tel que :

$$\Sigma \cap K \subset (\Delta \cap K'') \langle \mathcal{S} \rangle_{K''}$$

- 3) Si l'on suppose de plus que Δ est de type fini et de génération compacte dans H , alors Σ est compactement engendré par \mathcal{S} .

Démontrons d'abord la première conclusion . Fixons $K \in \mathcal{K}(G)$. Comme $p(\Sigma)$ est compactement engendré par $p(\mathcal{S})$ (hypothèse 2), il existe $K_1 \in \mathcal{K}(G/H)$ tel que $p(\Sigma) \cap p(K) \subset p(\mathcal{S})_{K_1}$.

Montrons d'abord qu'il existe une partie finie \mathcal{D} de Δ et une partie compacte $V \in \mathcal{K}(G)$ telles que

- i) L'élément neutre $1 \in V$
- ii) $V \mathcal{S} \cap p^{-1}(K_1) \subset V \mathcal{D}$

Pour cela, choisissons $K_2 \in \mathcal{K}(G)$ assez grand pour que $p(K_2)$ contienne K_1 . Comme par ailleurs Δ est uniforme dans H (hypothèse 3), il existe $K_3 \in \mathcal{K}(H)$ telle que $H = K_3 \Delta$. Soit V un voisinage compact de $K_2 K_3$, qui contienne aussi 1 .

L'ensemble $p^{-1}(K_1)$ est alors contenu dans $\overset{\circ}{V} \Delta$. En effet $p^{-1}(K_1)$ est contenu dans $K_2 H = K_2 K_3 \Delta$, qui est bien contenu dans $\overset{\circ}{V} \Delta$.

Considérons $K_4 = V \mathcal{S} \cap p^{-1}(K_1)$. C'est une partie relativement compacte de $p^{-1}(K_1)$ (ici on emploie l'hypothèse 1) . Or $p^{-1}(K_1)$ est recouvert par les ouverts $\overset{\circ}{V} \delta$, où δ décrit Δ . Donc il existe une

partie finie \mathcal{D} de Δ telle que K_4 est recouvert par les $\overset{\circ}{V} \delta$, où δ décrit \mathcal{D} . Les propriétés i) et ii) sont bien vérifiées.

Nous allons prouver que $\Sigma \cap KH \subset \Delta \langle \mathcal{S} \cup \mathcal{D}^{-1} \rangle_{K_5}$, où $K_5 = V \cup V \mathcal{D}^{-1}$.

Soit ξ un élément quelconque de $\Sigma \cap KH$. Donc $p(\xi)$ appartient à $p(\Sigma) \cap p(K)$, donc aussi à $\langle p(\mathcal{S}) \rangle_{K_1}$, c'est-à-dire qu'il s'écrit comme un mot : $p(\xi) = p(\sigma_1)p(\sigma_2)\dots p(\sigma_n)$ où $\sigma_i \in \mathcal{S} \cup \mathcal{S}^{-1}$ et dont la trace $\{ p(\sigma_1\dots\sigma_m) / 0 \leq m \leq n \}$ est contenue dans K_1 .

Déduisons-en qu'il existe n éléments $\delta_1, \dots, \delta_n$ de \mathcal{D} tels que chaque produit $\xi_m = \sigma_1 \delta_1^{-1} \sigma_2 \delta_2^{-1} \dots \sigma_m \delta_m^{-1}$ appartienne à V .

Définissons δ_m par récurrence sur m . Le "produit" $\xi_0 = 1$ appartient bien à V (point i). En supposant que $\delta_1, \dots, \delta_{m-1}$ sont définis et que ξ_{m-1} appartient à V , on a $p(\xi_{m-1}\sigma_m) = p(\sigma_1\dots\sigma_m)$ qui appartient à K_1 . Donc $\xi_{m-1}\sigma_m$ appartient à $V \mathcal{S} \cap p^{-1}(K_1)$. Donc (point ii) il existe un $\delta_m \in \mathcal{D}$ tel que $\xi_{m-1}\sigma_m$ appartient à $V\delta_m$. Le produit $\xi_m = \xi_{m-1}\sigma_m\delta_m^{-1}$ appartient bien à V : la récurrence est assurée.

Considérons le mot $\sigma_1 \delta_1^{-1} \sigma_2 \delta_2^{-1} \dots \sigma_n \delta_n^{-1}$ en les éléments de $\mathcal{S} \cup \mathcal{D}^{-1}$: chacun des éléments de sa trace appartient à V ou à $V \mathcal{D}^{-1}$. Donc le produit ξ_n appartient à $\langle \mathcal{S} \cup \mathcal{D}^{-1} \rangle_{K_5}$.

Comme $\delta_1, \dots, \delta_n$ appartiennent à Δ qui est normal dans Σ (hypothèse 3), les éléments ξ et ξ_n sont congrus modulo Δ . Nous avons bien montré que $\xi \in \Delta \langle \mathcal{S} \cup \mathcal{D}^{-1} \rangle_{K_5}$.

Enfin, comme \mathcal{D}^{-1} est fini et contenu dans Σ , il existe un ensemble fini $K_6 \subset \Sigma$ tel que :

$$\mathcal{D}^{-1} \subset \langle \mathcal{S} \rangle_{K_6}$$

(lemme IV.1, propriété d). Donc, si l'on choisit un $K_7 \in \mathcal{K}(G)$ qui contient \mathcal{S} (hypothèse 1), on a :

$$\mathcal{S} \cup \mathcal{D}^{-1} \subset \langle \mathcal{S} \rangle_{K_6 \cup K_7}$$

Donc $\langle \mathcal{S} \cup \mathcal{D}^{-1} \rangle_{K_5}$ est contenu dans $\langle \langle \mathcal{S} \rangle_{K_6 \cup K_7} \rangle_{K_5}$ qui est lui-même contenu (lemme IV.1, propriété g) dans $\langle \mathcal{S} \rangle_{K_5(K_6 \cup K_7)}$. Posons $K' = K_5(K_6 \cup K_7)$: on a bien :

$$\Sigma \cap KH \subset \Delta \langle \mathcal{S} \rangle_{K'}$$

Quant à la deuxième conclusion, fixons $K \in \mathcal{K}(G)$. La première conclusion nous fournit un $K' \in \mathcal{K}(G)$ tel que tout élément ξ de $\langle \mathcal{S} \rangle \cap K$ s'écrit $\xi = \delta \xi'$ avec $\delta \in \Delta$ et $\xi' \in \langle \mathcal{S} \rangle_{K'}$. En particulier $\delta = \xi \xi'^{-1}$ appartient à KK'^{-1} , donc ξ appartient à $(\Delta \cap K'') \langle \mathcal{S} \rangle_{K''}$, où $K'' = (KK'^{-1}) \cup K'$.

Passons à la démonstration de la troisième conclusion. Fixons $L \in \mathcal{K}(G)$. D'après la deuxième conclusion, il existe $L' \in \mathcal{K}(G)$ tel que $\Sigma \cap L \subset (\Delta \cap L') \langle \mathcal{S} \rangle_{L'}$. Soit \mathcal{D}' une partie génératrice finie de Δ . Puisque Δ est de génération compacte dans H , il existe $L'' \in \mathcal{K}(H)$ tel que $\Delta \cap L' \subset \langle \mathcal{D}' \rangle_{L''}$. Comme \mathcal{D}' est fini et contenu dans Σ , il existe un ensemble fini $L''' \subset \Sigma$ tel que $\mathcal{D}' \subset \langle \mathcal{S} \rangle_{L'''}$ (lemme IV.1, propriété d). Donc $\langle \mathcal{D}' \rangle_{L''} \subset \langle \langle \mathcal{S} \rangle_{L'''} \rangle_{L''}$, qui est lui-même contenu (lemme IV.1, propriété g) dans $\langle \mathcal{S} \rangle_{L''L'''} \subset \langle \langle \mathcal{S} \rangle_{L'''} \rangle_{L''}$. Au total $\Sigma \cap L$ est contenu dans $\langle \mathcal{S} \rangle_{L''L'''} \langle \mathcal{S} \rangle_{L'}$, qui est lui-même contenu dans $\langle \mathcal{S} \rangle_{L''L'''}L'$ (lemme IV.1, propriété e). Nous avons montré que Σ est compactement engendré par \mathcal{S} , ce qui termine la démonstration du lemme de relèvement.

Voici deux premiers corollaires du lemme de relèvement.

Proposition IV.4 — Soient N un groupe de Lie nilpotent, \mathcal{G} une partie de N relativement compacte, et Γ le sous-groupe de N engendré par \mathcal{G} . Alors Γ est compactement engendré par \mathcal{G} .

La démonstration se fait bien sûr par récurrence sur la dimension de N . Le cas de la dimension 0 est trivial ! Supposons donc la propriété vraie dans tous les groupes de Lie nilpotents de dimension inférieure. Alors :

Si Γ n'est pas uniforme dans N , alors Γ est contenu dans un sous-groupe fermé connexe strict de N (voir par exemple [R]), auquel s'applique l'hypothèse de récurrence.

Nous pouvons donc supposer que Γ est uniforme dans N . Soit alors H le dernier élément non égal à 1 de la suite centrale descendante de N : l'intersection $\Gamma \cap H$ est uniforme dans H (proposition V.2), donc contient un sous-groupe Δ discret et uniforme dans H . Appliquons le lemme de relèvement avec $\Sigma = \Gamma$ et $\mathcal{S} = \mathcal{G}$. Les hypothèses 1) et 3) sont évidemment satisfaites; l'hypothèse 2) du lemme résulte

de notre hypothèse de récurrence . De plus Δ étant un sous-groupe discret cocompact de H , est de type fini et de génération compacte dans H . Donc (troisième conclusion) Γ est compactement engendré par \mathcal{G} : la récurrence est assurée .

Proposition IV.5 — Soit $p : G_1 \rightarrow G_2$ un revêtement de groupes de Lie . Un sous-groupe de type fini uniforme dans G_2 est de génération compacte si et seulement si son image inverse par p est de génération compacte dans G_1 .

Le sens "si" est trivial . Pour démontrer le sens "seulement si" on applique le lemme de relèvement à la suite

$$1 \rightarrow \ker(p) \hookrightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow 1$$

avec pour Σ l'image inverse de notre sous-groupe dans G_1 , pour \mathcal{S} une partie génératrice finie quelconque de Σ , et pour Δ le groupe $\ker(p)$ lui-même .

Exemple IV.6 — Par contre il peut arriver qu'un sous-groupe de type fini uniforme dans G_1 ne soit pas de génération compacte mais que son image dans G_2 le soit .

Soit par exemple G_1 le produit semi-direct $\mathbf{R} \times \mathbf{C}$, où l'action se fait par rotations (revêtement universel du groupe des déplacements plans) :

$$(t_1, z_1)(t_2, z_2) = (t_1 + t_2, z_1 + e^{2\pi i t_1} z_2)$$

Soit $G_2 = G_1/(\mathbf{Z} \times 0)$ (groupe des déplacements plans) . Le sous-groupe $\langle (0, 1), (0, i), (t, 0) \rangle$ n'est pas de génération compacte dans G_1 si l'on a pris soin que $e^{2\pi i t}$ ne soit pas une unité algébrique (théorème A et corollaire II.6) . Mais son image dans G_2 est de génération compacte dans G_2 car elle contient l'image de $\langle (0, 1), (0, i) \rangle$ qui est polycyclique et uniforme dans G_2 (corollaire VI.3) .

V — Démonstration de l'implication b) \Rightarrow a) du théorème A

Fixons G et Γ comme dans les hypothèses du théorème A ; supposons que pour chaque racine Γ -critique ρ_i de G , le triplet (G, Γ, ρ_i) est unifère, et prouvons que Γ est de génération compacte .

En première lecture, on peut aborder cette démonstration en faisant l'hypothèse que Γ est dense dans G : avec cette hypothèse, le sous-groupe S introduit ci-dessous n'est autre que G ; le résultat du lemme V.3 est une trivialité; le premier pas de la démonstration devient un cas particulier très simple de la proposition IV.4 (un sous-groupe de type fini d'un groupe de Lie abélien est toujours de génération compacte); le deuxième pas devient une simple application du corollaire II.2 et n'emploie plus le lemme II.9; le résultat du quatrième pas ne fait que répéter celui du troisième .

Préliminaires — 1. Le principe de cette démonstration est d'appliquer le lemme de relèvement à une suite exacte courte du type :

$$1 \rightarrow N \hookrightarrow G \rightarrow G/N \rightarrow 1$$

où N est un sous-groupe de G fermé, connexe, normal, nilpotent, et où G/N est abélien . Mais pour appliquer ce lemme, il est crucial que $\Gamma \cap N$ soit uniforme dans N . Or il n'y a pas toujours de sous-groupe N réunissant ces propriétés, voici un exemple où il n'y en a pas .

Exemple V.1 — G est le produit semi-direct $(\mathbf{R} \times \mathbf{C}) \times (\mathbf{R} \times \mathbf{R})$, avec la loi :

$$(x_1, z_1, s_1, t_1)(x_2, z_2, s_2, t_2) = (x_1 + e^{s_1} x_2, z_1 + e^{2\pi i t_1} z_2, s_1 + s_2, t_1 + t_2)$$

Il est immédiat que $G' = \mathbf{R} \times \mathbf{C} \times 0 \times 0$ et que c'est le seul sous-groupe de G fermé, connexe, nilpotent, et contenant G' . On remarque par ailleurs que $0 \times \mathbf{C} \times \mathbf{R} \times 0$ est un sous-groupe de G isomorphe à \mathbf{R}^3 . On choisit dans ce sous-groupe un réseau A générique : $A \cap (0 \times \mathbf{C} \times 0 \times 0) = \{0\}$. Soit Γ le sous-groupe

de G engendré par $\mathbf{Z} \times A \times \mathbf{Z}$: il est de type fini, uniforme dans G (sa fermeture est le sous-groupe $\mathbf{R} \times A \times \mathbf{Z}$) et son intersection avec G' n'est pas uniforme dans G' .

Au contraire dans les groupes *nilpotents* on a la :

Proposition V.2 (Malcev) — Si Σ est un sous-groupe uniforme d'un groupe de Lie nilpotent N , alors pour tout $k \geq 0$, $\Sigma^{(k)}$ est uniforme dans $N^{(k)}$.

(Pour les notations, voir le paragraphe I) . Voir [R], théorème 2.3, corollaire 1 .

Pour contourner cette difficulté, nous considérerons la composante connexe neutre de la fermeture de $\Gamma G'$, que nous noterons S . C'est un sous-groupe de G normal, contenant G' , fermé, connexe . Il est clair que ΓS est fermé dans G et que $\Gamma \cap S$ est uniforme dans S .

Lemme V.3 — $\Gamma \cap S'$ est uniforme dans S' .

C'est un corollaire du résultat de Mostow suivant . Soit R un groupe de Lie résoluble . Un élément γ de R est *régulier* dans R quand pour chaque racine ρ de R , si $\rho(\gamma) = 1$, alors $\rho(R) = \{1\}$. On note $R^{(\infty)} = \bigcap_{k \in \mathbf{N}} R^{(k)}$ l'intersection de tous les termes de la suite centrale descendante de R .

Proposition V.4 (Mostow : [Mo], paragraphe 5, lemme 5) — Soit $\Sigma \subset R$ un sous-groupe uniforme . Si Σ contient un élément régulier de R alors $\Sigma \cap R^{(\infty)}$ est uniforme dans $R^{(\infty)}$.

Déduisons-en le lemme V.3 .

Comme G' est un sous-groupe de S à la fois fermé, connexe, nilpotent et normal, il est contenu dans le noyau de toutes les racines de S . Or $(\Gamma \cap S)G'$ est dense dans S . Il est donc évident que $\Gamma \cap S$ contient des éléments réguliers de S . Nous pouvons donc appliquer le résultat de Mostow à $\Gamma \cap S$ comme sous-groupe de S , et en déduire que $\Gamma \cap S^{(\infty)}$ est uniforme dans $S^{(\infty)}$.

Considérons la projection $p : S \rightarrow N = S/S^{(\infty)}$. La suite centrale descendante de S est stationnaire, si bien que N est nilpotent . L'image $p(\Gamma \cap S)$ est uniforme dans N . Donc $p(\Gamma \cap S) \cap N'$ est uniforme dans $N' = p(S')$ (proposition V.2) . Comme de plus $\Gamma \cap \ker(p)$ est uniforme dans $\ker(p)$, il est clair que $\Gamma \cap S'$ est uniforme dans S' .

2. Par ailleurs, choisissons une partie génératrice finie \mathcal{G} de Γ . Notons que comme Γ est de type fini et comme $\Gamma \cap G'$ et $\Gamma \cap S$ contiennent Γ' , les groupes $\Gamma \cap G'$ et $\Gamma \cap S$ sont de type fini comme Γ -groupes, c'est-à-dire qu'il existe une partie finie \mathcal{X} de $\Gamma \cap G'$ et une partie finie \mathcal{Y} de $\Gamma \cap S$ telles que :

$$\Gamma \cap G' = \langle \mathcal{X}^\Gamma \rangle \text{ et } \Gamma \cap S = \langle \mathcal{Y}^\Gamma \rangle$$

Premier pas — $\Gamma/(\Gamma \cap S')$ est de génération compacte dans G/S' .

Considérons les inclusions entre sous-groupes normaux de Γ : $(\Gamma \cap G')' \subset \Gamma \cap S' \subset \Gamma \cap S \subset \Gamma$ et $(\Gamma \cap G')' \subset \Gamma \cap G' \subset \Gamma$. Le triplet $(G, \Gamma, (\Gamma \cap G')/(\Gamma \cap G')')$ est unifère (corollaire II.2) . Le triplet $(G, \Gamma, \Gamma/(\Gamma \cap G'))$ est également unifère, puisque $\Gamma/(\Gamma \cap G')$ est un Γ -module trivial . Donc (corollaire II.3) le triplet $(G, \Gamma, (\Gamma \cap S)/(\Gamma \cap S'))$ est unifère . Il existe donc (lemme II.4) un $K \in \mathcal{K}(G)$ tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe une chaîne $c \in \mathbf{Z}[\Gamma]$ telle que :

D'une part c a même action que γ sur $(\Gamma \cap S)/(\Gamma \cap S')$. Donc $\mathcal{Y}^\gamma \subset \langle \mathcal{Y}^{\text{spt}(c)} \rangle (\Gamma \cap S')$.

D'autre part c est à support dans $G'K$. Or G' est contenu dans S , et $\Gamma/(\Gamma \cap S)$ est discret, donc il existe une partie finie F de $\Gamma \cap S$ telle que $\Gamma \cap G'K \subset F(\Gamma \cap S)$ et finalement c est à support dans $F(\Gamma \cap S)$.

Au total \mathcal{Y}^Γ est contenu dans $\langle \mathcal{Y}^{F(\Gamma \cap S)} \rangle (\Gamma \cap S')$, qui est évidemment contenu dans $\langle \mathcal{Y}^F \rangle (\Gamma \cap S')$.

De tout ce qui précède, il résulte que $\Gamma \cap S = \langle \mathcal{Y}^F \rangle (\Gamma \cap S')$: le groupe $(\Gamma \cap S)/(\Gamma \cap S')$ est de type fini .

Appliquons le lemme de relèvement (IV.3) à la suite :

$$1 \rightarrow S/S' \hookrightarrow G/S' \rightarrow G/S \rightarrow 1$$

en prenant $\Gamma/(\Gamma \cap S')$ pour groupe Σ , l'image de \mathcal{G} dans G/S' pour partie génératrice \mathcal{S} , et $(\Gamma \cap S)/(\Gamma \cap S')$ pour groupe Δ .

Les hypothèses du lemme sont vérifiées : \mathcal{S} est fini donc relativement compact, G/S est abélien donc l'image de Γ y est de génération compacte, et nous avons déjà mentionné que $\Gamma \cap S$ est uniforme dans S . De plus nous venons de montrer que $(\Gamma \cap S)/(\Gamma \cap S')$ est de type fini, et S/S' est abélien donc $(\Gamma \cap S)/(\Gamma \cap S')$ y est de génération compacte.

D'après la troisième conclusion du lemme, $\Gamma/(\Gamma \cap S')$ est de génération compacte dans G/S' .

Deuxième pas — $(S, \Gamma \cap S, (\Gamma \cap G')/(\Gamma \cap G'))$ est unifère.

Dans le cas où $S = G$, il s'agit simplement de la reformulation de la propriété b) que donne le corollaire II.2. Dans le cas général, on applique le lemme II.9, pour conclure que pour chaque racine Γ -critique ρ_i de G , le triplet $(S, \Gamma \cap S, \rho_i|_S)$ est unifère. Le résultat annoncé s'obtient alors en copiant la démonstration du corollaire II.2.

Troisième pas — Il existe $K_1 \in \mathcal{K}(G)$ tel que $\mathcal{X}^{\Gamma \cap S} \subset \langle \mathcal{X}^{\Gamma \cap S' K_1} \rangle (\Gamma \cap G)'$.

D'après le résultat du pas précédent et le lemme II.4, il existe un $K_1 \in \mathcal{K}(S)$ tel que pour tout $\gamma \in \Gamma \cap S$, il existe une chaîne $c \in \mathbf{Z}[\Gamma \cap S]$ telle que :

D'une part c a même action que γ sur $(\Gamma \cap G')/(\Gamma \cap G)'$. Donc $\mathcal{X}^\gamma \subset \langle \mathcal{X}^{\text{spt}(c)} \rangle (\Gamma \cap G)'$. D'autre part c est à support dans $S'K_1$. Au total $\mathcal{X}^{\Gamma \cap S}$ est contenu dans $\langle \mathcal{X}^{\Gamma \cap S' K_1} \rangle (\Gamma \cap G)'$.

Quatrième pas — Il existe $K_2 \in \mathcal{K}(G)$ tel que $\mathcal{X}^\Gamma \subset \langle \mathcal{X}^{\Gamma \cap S' K_2} \rangle (\Gamma \cap G)'$.

Exploisons de nouveau la propriété b). Le triplet $(G, \Gamma, (\Gamma \cap G')/(\Gamma \cap G)')$ est unifère (corollaire II.2). Il existe donc (lemme II.4) un $K \in \mathcal{K}(G)$ tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe une chaîne $c \in \mathbf{Z}[\Gamma]$ telle que :

D'une part c a même action que γ sur $(\Gamma \cap G')/(\Gamma \cap G)'$. Donc $\mathcal{X}^\gamma \subset \langle \mathcal{X}^{\text{spt}(c)} \rangle (\Gamma \cap G)'$.

D'autre part c est à support dans KG' . Or G' est contenu dans S , et $\Gamma \cap S$ est uniforme dans S : donc il existe $K' \in \mathcal{K}(S)$ tel que $S = K'(\Gamma \cap S)$. Finalement c est à support dans $(\Gamma \cap KK')(\Gamma \cap S)$.

Au total :

$$\mathcal{X}^\Gamma \subset \langle \mathcal{X}^{(\Gamma \cap KK')(\Gamma \cap S)} \rangle (\Gamma \cap G)'$$

qui s'écrit aussi $\langle (\mathcal{X}^{\Gamma \cap S})^{\Gamma \cap KK'} \rangle (\Gamma \cap G)'$. Donc :

$$\mathcal{X}^\Gamma \subset \langle (\mathcal{X}^{\Gamma \cap S' K_1})^{\Gamma \cap KK'} \rangle (\Gamma \cap G)'$$

Or $(\mathcal{X}^{\Gamma \cap S' K_1})^{\Gamma \cap KK'}$ s'écrit aussi $\mathcal{X}^{(\Gamma \cap KK')(\Gamma \cap S' K_1)}$, et $(\Gamma \cap KK')(\Gamma \cap S' K_1)$ est clairement contenu dans $\Gamma \cap S' K K' K_1$. Au total :

$$\mathcal{X}^\Gamma \subset \langle \mathcal{X}^{\Gamma \cap S' K K' K_1} \rangle (\Gamma \cap G)'$$

Il suffit donc de prendre $K_2 = K K' K_1$.

Cinquième pas — Il existe $K_3 \in \mathcal{K}(G)$ tel que $\Gamma \cap G'$ est engendré par son intersection avec $\langle \mathcal{G} \rangle_{K_3}$.

Appliquons le lemme de relèvement à la suite :

$$1 \rightarrow S' \hookrightarrow G \rightarrow G/S' \rightarrow 1$$

en prenant Γ pour groupe Σ , \mathcal{G} pour partie génératrice \mathcal{S} et $\Gamma \cap S'$ pour groupe Δ . Les hypothèses 1, 2 et 3 du lemme sont bien réunies puisque $\Gamma/(\Gamma \cap S')$ est de génération compacte dans G/S' (premier pas) et puisque $\Gamma \cap S'$ est uniforme dans S' (lemme V.3). D'après la première conclusion du lemme, il existe $K'' \in \mathcal{K}(G)$ tel que :

$$\Gamma \cap S' K_2 \subset (\Gamma \cap S') \langle \mathcal{G} \rangle_{K''}$$

Par conséquent :

$$\mathcal{X}^\Gamma \subset \langle \mathcal{X}^{(\Gamma \cap S') \langle \mathcal{G} \rangle_{K''}} \rangle (\Gamma \cap G)'$$

De la formule élémentaire $\xi^\gamma \kappa = [\gamma, \xi^\kappa] \xi^\kappa$, il résulte que pour $\xi \in \Gamma \cap G'$, $\gamma \in \Gamma \cap G'$ et $\kappa \in \Gamma$, les éléments $\xi^\gamma \kappa$ et ξ^κ sont congrus modulo $(\Gamma \cap G)'$. Conclusion :

$$\mathcal{X}^\Gamma \subset \langle \mathcal{X}^{\langle \mathcal{G} \rangle_{K''}} \rangle (\Gamma \cap G)'$$

Or il existe $K_3 \in \mathcal{K}(G)$ tel que $\mathcal{X}^{(G)_{K_3}} \subset \langle \mathcal{G} \rangle_{K_3}$ (lemme IV.1, propriétés d, e et f) :

$$\mathcal{X}^\Gamma \subset \langle \Gamma \cap G' \cap \langle \mathcal{G} \rangle_{K_3} \rangle (\Gamma \cap G)'$$

Donc :

$$\Gamma \cap G' = \langle \Gamma \cap G' \cap \langle \mathcal{G} \rangle_{K_3} \rangle (\Gamma \cap G)'$$

Or dans les groupes abstraits nilpotents on a le lemme élémentaire suivant :

Lemme V.5 — Soient N un groupe nilpotent et Σ un sous-groupe. Si $\Sigma N' = N$, alors $\Sigma = N$. Voir par exemple [Hal], corollary 10.3.3.

Donc $\Gamma \cap G' = \langle \Gamma \cap G' \cap \langle \mathcal{G} \rangle_{K_3} \rangle$.

Conclusion — Appliquons une ultime fois le lemme de relèvement à la suite :

$$1 \rightarrow S' \hookrightarrow G \rightarrow G/S' \rightarrow 1$$

en prenant encore Γ pour groupe Σ , \mathcal{G} pour partie génératrice \mathcal{S} et $\Gamma \cap S'$ pour groupe Δ . Mais exploitons cette fois la deuxième conclusion du lemme : pour tout $L \in \mathcal{K}(G)$ il existe $L' \in \mathcal{K}(G)$ tel que :

$$\Gamma \cap L \subset \langle \Gamma \cap S' \cap L' \rangle \langle \mathcal{G} \rangle_{L'}$$

Comme G' est nilpotent, $\Gamma \cap G'$ est compactement engendré par $\Gamma \cap G' \cap \langle \mathcal{G} \rangle_{K_3}$ (proposition IV.4). Donc il existe $L'' \in \mathcal{K}(G')$ tel que $\Gamma \cap S' \cap L' \subset \langle \Gamma \cap G' \cap \langle \mathcal{G} \rangle_{K_3} \rangle_{L''}$. Au total $\Gamma \cap L \subset \langle \langle \mathcal{G} \rangle_{K_3} \rangle_{L''} \langle \mathcal{G} \rangle_{L'}$ qui est contenu dans $\langle \mathcal{G} \rangle_{L'' K_3 L'}$ (lemme IV.1, propriétés e et g). Ainsi pour tout $L \in \mathcal{K}(G)$, $\Gamma \cap L$ est contenu dans $\langle \mathcal{G} \rangle_{L'' K_3 L'}$: nous avons bien montré que Γ est de génération compacte.

VI — Quelques corollaires du théorème A

Soient G un groupe de Lie résoluble et Γ un sous-groupe de type fini uniforme.

Corollaire VI.1 — Si G est nilpotent, alors Γ est de génération compacte.

Commentaire . — Plus simplement le corollaire VI.1 est un cas particulier de la proposition IV.4.

Notre deuxième corollaire repose sur un critère qui ne semble pas figurer dans la littérature malgré sa simplicité et son utilité. Rappelons qu'une *unité algébrique* est un nombre complexe non nul qui est un entier algébrique sur \mathbf{Z} , et dont l'inverse est aussi un entier algébrique sur \mathbf{Z} .

Proposition VI.2 — Γ est polycyclique si et seulement si toutes les racines de tous ses éléments sont des unités algébriques.

Démonstration — Une suite de composition de G est une suite de sous-groupes fermés connexes normaux S_i tels que :

$$\{1\} = S_n \subset S_{n-1} \subset \dots \subset S_0 = G$$

Et que S_i/S_{i+1} soit abélien.

Il existe une suite de composition (S_i) telle que $\Gamma \cap S_i$ est uniforme dans S_i , pour chaque i . En effet, il suffit de prendre pour S_1 la composante neutre de la fermeture de $\Gamma G'$ (voir paragraphe V, préliminaire 1), et pour tout $i \geq 2$, $S_i = (S_1')^{(i-2)}$ (voir le paragraphe I pour cette notation). Le lemme V.3 et la proposition V.2 assurent que $\Gamma \cap S_i$ est uniforme dans S_i pour chaque i .

Si Γ est polycyclique, alors $\Gamma \cap S_i$ est de type fini. Après projection dans S_i/S_{i+1} , puis relèvement par l'application exponentielle de s_i/s_{i+1} (algèbres de Lie de S_i et S_{i+1}) sur S_i/S_{i+1} , on obtient dans s_i/s_{i+1} un sous-groupe additif A_i uniforme, de type fini, et Γ -invariant. Le produit tensoriel $R \otimes_{\mathbf{Z}} A_i$ est un espace vectoriel réel de dimension finie qui contient A_i comme réseau et se surjecte sur s_i/s_{i+1} . Fixons un élément $\gamma \in \Gamma$. L'adjoint de γ , vu comme un automorphisme linéaire de s_i/s_{i+1} , préserve A_i donc se relève en un automorphisme linéaire de $R \otimes_{\mathbf{Z}} A_i$. Comme cet automorphisme préserve le réseau A_i , son polynôme caractéristique P_i est à coefficients entiers.

Formons le produit $P = P_0 \dots P_n : P_i(\text{Ad}(\gamma))$ annule s_i/s_{i+1} (théorème de Cayley-Hamilton) donc $P(\text{Ad}(\gamma))$ annule g . Or P est un polynôme unitaire à coefficients entiers. Donc les valeurs propres de $\text{Ad}(\gamma)$ sont des entiers algébriques.

Le même raisonnement s'applique aux racines de γ^{-1} qui sont les inverses des racines de γ , ce sont donc des unités algébriques.

Inversement, supposons que les racines des éléments de Γ sont des unités algébriques. Les racines fournissent un homomorphisme d'anneaux $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_d) : \mathbf{Z}[\Gamma] \rightarrow \mathbf{C}^n$, dont l'image est précisément le sous-anneau de \mathbf{C}^n engendré par les racines des éléments de Γ . C'est donc un \mathbf{Z} -module de type fini. En d'autres termes, si l'on note N le sous-groupe de G formé des éléments unipotents, l'anneau $\mathbf{Z}[\Gamma/(\Gamma \cap N)]$ est un \mathbf{Z} -module de type fini.

Par ailleurs, Γ/Γ' est un \mathbf{Z} -module de type fini, donc son sous-module $(\Gamma \cap N)/\Gamma'$ est également de type fini. Or Γ'/Γ'' étant un $\mathbf{Z}[\Gamma]$ -module de type fini, son quotient $\Gamma'/(\Gamma \cap N)'$ est également un $\mathbf{Z}[\Gamma]$ -module de type fini. Au total $(\Gamma \cap N)/(\Gamma \cap N)'$ est un $\mathbf{Z}[\Gamma]$ -module de type fini. En d'autres termes $(\Gamma \cap N)/(\Gamma \cap N)'$ est un $\mathbf{Z}[\Gamma/(\Gamma \cap N)]$ -module de type fini.

En réunissant nos résultats, on voit que $(\Gamma \cap N)/(\Gamma \cap N)'$ est un \mathbf{Z} -module de type fini. Ainsi $\Gamma \cap N$ est un groupe nilpotent dont l'abélianisé est de type fini. Ceci implique qu'il est lui-même de type fini (lemme V.5) c'est-à-dire polycyclique. Donc Γ , en tant qu'extension de $\Gamma \cap N$ par un groupe abélien de type fini, est lui aussi polycyclique.

Corollaire VI.3 — Si Γ contient un sous-groupe Σ polycyclique uniforme dans G , alors Γ est de génération compacte.

C'est un corollaire évident de la proposition VI.2 (appliquée à Σ), du corollaire II.6 (appliqué à Σ), et du théorème A (appliqué à Γ).

Corollaire VI.4 — On suppose que G n'est pas nilpotent. Alors pour n assez grand, l'ensemble des $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in G^n$ tels que $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$ est de génération compacte est un ensemble rare (au sens de Zariski ou de Baire suivant que G est ou n'est pas algébrique) mais dense dans G^n .

Démontrons d'abord que cet ensemble est dense. Il est facile de construire dans G des ouverts connexes en nombre fini U_1, \dots, U_N tels que l'élément neutre 1 de G appartienne à la fermeture de chaque U_i et que pour chaque $\chi \in \text{hom}(G, \mathbf{R})$ non nul, l'un au moins des U_i soit contenu dans $\chi^{-1}(]0, +\infty[)$.

Tout sous-groupe d'un groupe de Lie, s'il est connexe par arcs, est un sous-groupe de Lie (Yamabe, [Y]). On en déduit aisément que pour toute partie connexe par arcs de \mathbf{R}^p , le sous-groupe qu'elle engendre est fermé.

Appliquons ceci à l'image de U_i dans $\text{End}_{\mathbf{R}}(g)$ par la représentation adjointe : le sous-groupe additif $\langle \text{Ad}(U_i) \rangle$ de $\text{End}_{\mathbf{R}}(g)$ engendré par $\text{Ad}(U_i)$ est fermé. Mais l'endomorphisme id appartient à la fermeture de $\text{Ad}(U_i)$. Donc $id \in \langle \text{Ad}(U_i) \rangle$, c'est-à-dire qu'il existe une chaîne $c_i \in \mathbf{Z}[G]$, à support dans U_i , telle que $\text{Ad}(c_i) = id$. Soit \mathcal{G} la réunion des supports des c_i , à laquelle on ajoute éventuellement des éléments en nombre fini pour que $\langle \mathcal{G} \rangle$ soit uniforme. Il découle alors évidemment du théorème A que tout sous-groupe de G de type fini qui contient \mathcal{G} est de génération compacte.

Comme \mathcal{G} est une partie finie de G , on voit aisément que pour n assez grand, l'ensemble des $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in G^n$ tels que $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$ contient \mathcal{G} est dense dans G^n .

Passons à la rareté. Fixons un entier n quelconque. Du fait que G n'est pas nilpotent, pour chaque

sous-groupe Γ uniforme, il y a au moins une racine ρ de G telle que ρ est Γ -critique et $\rho(G) \neq \{1\}$ (exercice). Il suffit donc de prouver que pour chaque racine $\rho \neq 1$ fixée, l'ensemble des $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in G^n$ tels que ρ est $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ -critique et $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$ est de génération compacte, est un ensemble rare. D'après le théorème A, il suffit de prouver que :

Pour presque tout $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in G^n$, et pour tout $c \in \mathbf{Z}[\langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle]$, si $\rho(c) = 1$ alors $\text{spt}(c) \cap G' \neq \emptyset$.

Soit Λ le groupe libre à n générateurs. Pour chaque $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in G^n$, considérons l'homomorphisme de Λ dans G qui envoie le i -ème générateur de Λ sur γ_i . Il s'étend en un homomorphisme d'anneaux surjectif :

$$\mathbf{Z}[\Lambda] \rightarrow \mathbf{Z}[G] : c \mapsto c(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

Comme $\mathbf{Z}[\Lambda]$ est dénombrable, il suffit de montrer que pour $c \in \mathbf{Z}[\Lambda]$ fixé on a :

Pour presque tout $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in G^n$, si $\rho(c(\gamma_1, \dots, \gamma_n)) = 1$ alors $\text{spt}(c(\gamma_1, \dots, \gamma_n)) \cap G' \neq \emptyset$.

Considérons l'image \bar{c} de c dans $\mathbf{Z}[\Lambda/\Lambda']$ (anneau des polynômes de Laurent à n variables). On a $\rho(c(\gamma_1, \dots, \gamma_n)) = \bar{c}(\rho(\gamma_1), \dots, \rho(\gamma_n))$. La fonction $G^n \rightarrow \mathbf{C} : (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \mapsto \bar{c}(\rho(\gamma_1), \dots, \rho(\gamma_n))$ est analytique réelle (et même polynomiale quand G est algébrique) comme composée de l'application analytique (respectivement polynomiale) $\rho \times \dots \times \rho : G^n \rightarrow \mathbf{C}^n$, et de l'application polynomiale $\bar{c} : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}$. Donc l'image inverse d'un point par cette fonction est ou rare, ou tout. On est donc dans l'un des deux cas suivants :

Premier cas : pour presque tout $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in G^n$, on a $\bar{c}(\rho(\gamma_1), \dots, \rho(\gamma_n)) \neq 1$. Il n'y a rien à démontrer.

Second cas : pour tout $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in G^n$, on a $\bar{c}(\rho(\gamma_1), \dots, \rho(\gamma_n)) = 1$. En d'autres termes dans \mathbf{C}^n , l'hypersurface algébrique définie par $\bar{c} = 1$ contient le produit cartésien $(\rho(G))^n$. Or $\rho(G)$ est un ensemble infini. Donc $\bar{c} = 1$. Donc l'image de $c(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ dans $\mathbf{Z}[G/G']$ est aussi égale à 1. Il en résulte que $\text{spt}(c(\gamma_1, \dots, \gamma_n)) \cap G' \neq \emptyset$.

Le corollaire VI.4 est-il spécifique aux groupes de Lie résolubles ? On peut montrer que dans un groupe de Lie non compact quelconque, un sous-groupe libre non abélien n'est jamais de génération compacte. Il en résulte, si le groupe n'est pas résoluble, que dans l'ouvert des $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ tels que $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$ est uniforme, l'ensemble des $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in G^n$ tels que $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$ est de génération compacte est encore un ensemble rare. Mais nous ne savons pas s'il est dense ou non.

Exemple VI.5 — Les corollaires VI.1 et VI.4 indiquent en particulier que chaque groupe de Lie résoluble contient un sous-groupe de type fini uniforme et de génération compacte. Ceci est remarquable parce qu'il existe des groupes de Lie résolubles qui ne sont quotient d'aucun groupe de Lie contenant un sous-groupe discret cocompact :

Choisissons un réel $\alpha > 0$ qui ne puisse pas être écrit comme quotient des logarithmes de deux unités algébriques réelles (c'est le cas générique). Soit G le produit semi-direct $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$, avec la loi :

$$(t_1, x_1, y_1)(t_2, x_2, y_2) = (t_1 + t_2, x_1 + e^{\alpha t_1} x_2, y_1 + e^{t_1} y_2)$$

Supposons par l'absurde que G soit l'image d'un groupe de Lie H contenant un sous-groupe discret cocompact Γ par un homomorphisme $p : H \rightarrow G$. On peut supposer H simplement connexe : il est produit semi-direct d'un groupe de Lie résoluble R par un groupe de Lie semi-simple S . On a $p(S) = \{1\}$, donc $p(R) = G$. D'après un théorème d'Auslander (voir [R], *theorem 8.24*) il existe un groupe de Lie résoluble R_1 compris entre R et H tel que $\Gamma \cap R_1$ est un sous-groupe discret cocompact dans R_1 . Or un sous-groupe discret cocompact dans un groupe de Lie résoluble est toujours polycyclique (Mostow, voir [R], *proposition 3.7*). Donc $p(\Gamma \cap R_1)$ serait un sous-groupe polycyclique uniforme dans G . L'existence d'un tel sous-groupe de G est exclue par la proposition VI.2 puisque les racines d'un élément quelconque (t, x, y) sont 1, $e^{\alpha t}$ et e^t , donc ne sont toutes trois des unités algébriques que si $t = 0$.

Rappelons que pour le corollaire suivant, nous munissons Γ de la topologie discrète et $\text{hom}(\Gamma, G)$ de la topologie usuelle (celle de la convergence simple). L'inclusion id de Γ dans G est un point de cet espace.

Corollaire VI.6 — Si Γ est de génération compacte dans G , alors pour tout $\phi \in \text{hom}(\Gamma, G)$ assez proche de id , le groupe $\phi(\Gamma)$ est de génération compacte dans G .

Ce n'est pas au sens strict un corollaire du théorème A, mais de la variante suivante :

Théorème A' — Soient G un groupe de Lie résoluble et Γ un sous-groupe uniforme de type fini .
Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) Γ est de génération compacte .
- b') $(G, \Gamma, \Gamma'/\Gamma'')$ est unifère .

Nous avons déjà démontré cette variante, puisque notre démonstration de a) \Rightarrow b) était une démonstration de a) \Rightarrow b') suivie d'une démonstration de b') \Rightarrow b) .

Démonstration du corollaire VI.6 — D'après le théorème A', si Γ est de génération compacte dans G , alors pour tout $\chi \in \text{hom}(G, \mathbf{R})$ non nul, il existe $c \in \mathbf{Z}[\Gamma]$ telle que c est à support dans $\chi^{-1}(]0, +\infty[)$ et opère identiquement sur Γ'/Γ'' . Pour c fixé, l'ensemble des χ tels que $\chi^{-1}(]0, +\infty[)$ contient le support de c est évidemment un cône ouvert dans l'espace vectoriel réel de dimension finie $\text{hom}(G, \mathbf{R})$. Comme $\text{hom}(G, \mathbf{R}) - 0$ quotienté par \mathbf{R}_+^* est compact, il existe en fait des chaînes en nombre fini $c_i \in \mathbf{Z}[\Gamma]$ telles que :

- i) Chaque c_i opère identiquement sur Γ'/Γ'' .
 - ii) Pour tout $\chi \in \text{hom}(G, \mathbf{R})$ non nul, $\chi^{-1}(]0, +\infty[)$ contient le support de l'une au moins des c_i .
- Pour tout $\phi \in \text{Hom}(\Gamma, G)$, $\phi(c_i)$ opère identiquement sur $(\phi(\Gamma))'/(\phi(\Gamma))''$ puisque c'est un quotient de Γ'/Γ'' . Si de plus ϕ est assez proche de id , les chaînes $\phi(c_i)$ vérifient encore la propriété ii) .

Il résulte alors du théorème A' que $\phi(\Gamma)$ est de génération compacte .

Le corollaire VI.6 est très probablement une propriété générale (non évidente) de la génération compacte : il serait encore vrai si l'on ne supposait plus G résoluble .

Enfin, voici quelques remarques sur le cas où G est *métabélien* — c'est-à-dire où G' est abélien . Dans ce cas on a la variante suivante du théorème A :

Théorème A'' — Soient G un groupe de Lie métabélien et Γ un sous-groupe uniforme de type fini .
Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) Γ est de génération compacte .
- b) Pour chaque racine ρ_i de G , le triplet (G, Γ, ρ_i) est unifère .

Il diffère du théorème A en ce que toutes les racines de G interviennent dans la condition b), et non les seules racines Γ -critiques .

La démonstration de la variante A'' est laissée à la sagacité du lecteur .

Corollaire VI.7 — On suppose que G est métabélien . Si Γ contient un sous-groupe de type fini, uniforme et de génération compacte, alors Γ est lui-même de génération compacte .

Immédiate conséquence du théorème A'' .

Il n'en va en général pas de même quand G n'est pas métabélien : voir l'exemple A.2 de l'appendice A .

Appendice A — Exemples

Exemple A.1 — Illustrons notre théorème en prenant pour G le plus petit groupe de Lie résoluble non nilpotent . On peut le voir comme $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ muni de la structure du produit semi-direct :

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 + a_1 b_2)$$

Les homomorphismes continus de G dans \mathbf{R} sont les $\chi : (a, b) \mapsto k \ln(a)$ avec $k \in \mathbf{R}$, donc $\chi^{-1}(]0, +\infty[) =]0, 1[\times \mathbf{R}$ ou $]1, +\infty[\times \mathbf{R}$. Les racines sont $(a, b) \mapsto 1$ et $(a, b) \mapsto a$. On voit aisément

qu'elles sont critiques pour tout sous-groupe uniforme de G . Notre théorème prend donc la forme suivante :

Soit Γ un sous-groupe de type fini uniforme dans G . Considérons le sous-groupe A de \mathbf{R}_+^* image de Γ . Alors Γ est de génération compacte si et seulement si :

- i) On peut trouver des éléments de $A \cap]0, 1[$ qui aient une combinaison linéaire entière égale à 1 ;
- ii) On peut également trouver des éléments de $A \cap]1, +\infty[$ qui aient une combinaison linéaire entière égale à 1 .

Examinons quelques cas typiques .

Choisissons pour Γ une partie génératrice finie $\{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$. Donc A est le groupe multiplicatif engendré par les a_i . Comme Γ est uniforme dans G , A n'est pas réduit à $\{1\}$.

Γ est polycyclique exactement quand les éléments de A sont tous des unités algébriques (proposition VI.2) .

Cas 1 — Les a_i sont algébriquement indépendants sur \mathbf{Q} . Les relations linéaires demandées en i) et ii) ne peuvent exister car ce seraient des relations algébriques non triviales entre les a_i . Donc Γ n'est pas de génération compacte.

Appliquons maintenant la proposition B1 : nous retrouvons en corollaire un résultat de [G] : Γ dans ce cas n'est pas groupe d'holonomie d'un G -feuilletage de Lie .

Cas 2 — A contient une unité algébrique $a \neq 1$. On a donc deux relations linéaires à coefficients entiers entre puissances de a , du type :

$$\begin{aligned} a^p &= \mu_{p-1}a^{p-1} + \mu_{p-2}a^{p-2} + \dots + \mu_0 \\ a^{-q} &= \nu_{q-1}a^{-q+1} + \nu_{q-2}a^{-q+2} + \dots + \nu_0 \end{aligned}$$

Divisons la première par a^p et multiplions la seconde par a^q :

$$\begin{aligned} 1 &= \mu_{p-1}a^{-1} + \mu_{p-2}a^{-2} + \dots + \mu_0a^{-p} \\ 1 &= \nu_{q-1}a + \nu_{q-2}a^2 + \dots + \nu_0a^q \end{aligned}$$

Les puissances positives de a appartiennent à $]1, +\infty[$ et les puissances négatives à $]0, 1[$, ou l'inverse, donc ces deux relations linéaires montrent que Γ est de génération compacte .

Cas 3 — Supposons A cyclique : $A = \{ a^n / n \in \mathbf{Z} \}$. Alors Γ est de génération compacte si et seulement si a est une unité algébrique (corollaire II.6) .

Cas 4 — Les a_i sont rationnels . Alors Γ est de génération compacte si et seulement si A n'est pas cyclique .

C'est une agréable application de l'identité de Bezout : considérons $\chi = \log|_A : A \rightarrow \mathbf{R}$, et pour chaque nombre premier p la valuation p -adique $\nu_p : A \rightarrow \mathbf{Z}$. L'identité de Bezout traduit la condition i) (resp. ii)) en *pour tout p , il y a un élément a de A tel que $\chi(a) < 0$ (resp. > 0) et $\nu_p(a) \leq 0$* . Pensons à A comme à un réseau sur lequel sont définies les formes linéaires χ, ν_p : cela revient à dire que χ n'est proportionnelle à aucune des ν_p . Si χ est proportionnel à ν_p , alors $\chi(A)$ est cyclique, autrement dit A est cyclique . Inversement si A est cyclique alors toutes les formes linéaires sont proportionnelles .

Noter que dans le cas 4, Γ ne contient jamais de sous-groupe polycyclique qui soit uniforme dans G .

Cas 5 — Donnons-nous un polynôme $P \in \mathbf{Z}[X_1, X_2, \dots, X_n]$, irréductible sur \mathbf{C} . Soit (a_1, a_2, \dots, a_n) un point générique de l'hypersurface algébrique :

$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$$

De sorte que les relations algébriques entre les a_i sont toutes multiples de P . Dans ce cas on a le critère suivant :

Ordonnons l'ensemble des monômes de coefficient non nul dans P par la règle :

$$X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} < X_1^{j_1} \dots X_n^{j_n} \text{ si et seulement si } a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} < a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n}$$

Γ est de génération compacte si et seulement si le plus grand et le plus petit monôme ont ± 1 pour coefficient dans P .

En effet, si cette condition est remplie, alors après division par le plus grand monôme, la relation $P(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ est la relation demandée en i). De même, après division par le plus petit monôme, la relation $P(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ est la relation demandée en ii).

Si au contraire le plus grand (resp. le plus petit) monôme est affecté d'un coefficient $\nu \neq \pm 1$, alors dans toute relation algébrique à coefficients entiers entre les a_i , le plus grand (resp. le plus petit) monôme sera affecté d'un coefficient multiple de ν . Donc la relation demandée en i) (resp. ii)) ne peut exister.

Noter que dans le cas 5, quand $n \geq 2$, Γ ne contient pas de sous-groupe polycyclique qui soit uniforme dans G .

Exemple A.2 — Les théorèmes A et A' et leur démonstration suggèrent la question suivante : notre théorie ne se réduirait-elle pas au cas métabélien ? Plus précisément, étant donnés deux sous-groupes de type fini uniformes dans un même groupe de Lie résoluble G , s'ils ont même image dans G/G'' et si l'un d'eux est de génération compacte, l'autre l'est-il aussi ? L'exemple suivant montre que la réponse est négative.

G est simplement le groupe des matrices $(a_{i,j})$ réelles 3×3 triangulaires supérieures à éléments diagonaux strictement positifs.

On fixe deux réels strictement positifs t, t' algébriquement indépendants sur \mathbf{Q} et une unité algébrique réelle strictement positive u autre que 1. Pour chaque réel s on considère le sous-groupe Γ_s de G engendré par :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t' \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous allons voir que Γ_s est de génération compacte ou non suivant la valeur de s . On voit aisément que Γ_s est défini par les conditions suivantes :

$a_{1,1}$ et $a_{3,3}$ appartiennent au groupe multiplicatif engendré par t et t' ;

$a_{2,2}$ appartient au groupe multiplicatif engendré par t et u ;

$a_{3,2}$ et $a_{2,3}$ appartiennent au sous-anneau $A = \mathbf{Z}[t, t^{-1}, t', t'^{-1}, u, u^{-1}]$ de \mathbf{R} engendré par t, t', u et leurs inverses ;

$a_{1,3}$ appartient au groupe additif $A + As$.

Noter que Γ_s est dense dans G . Les racines de G sont $\rho_1 : (a_{i,j}) \mapsto a_{1,1}a_{3,3}^{-1}$, $\rho_2 : (a_{i,j}) \mapsto a_{1,1}a_{2,2}^{-1}$, $\rho_3 : (a_{i,j}) \mapsto a_{2,2}a_{3,3}^{-1}$, $\rho_4 = \rho_5 = 1$.

(G, Γ_s, ρ_4) et (G, Γ_s, ρ_5) sont trivialement unifères !

On constate que pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, $\Gamma_s \cap \ker(\rho_i)$ est uniforme dans $\ker(\rho_i)$. Nous pouvons donc appliquer le critère II.7 : (G, Γ_s, ρ_i) est unifère si et seulement si 1 est combinaison linéaire entière d'éléments de $\rho_i(\Gamma_s) \cap]0, 1[$, ainsi que d'éléments de $\rho_i(\Gamma_s) \cap]1, +\infty[$.

Ce critère est vérifié par ρ_2 et ρ_3 car $\rho_2(\Gamma_s) = \rho_3(\Gamma_s)$ contient l'unité algébrique $u \neq 1$. Mais il n'est pas vérifié par ρ_1 car $\rho_1(\Gamma_s)$ est le groupe multiplicatif engendré par t et t' qui sont algébriquement indépendants sur \mathbf{Q} .

Donc d'après notre théorème A, Γ_s est de génération compacte précisément quand ρ_1 n'est pas Γ -critique — c'est-à-dire, puisque $G_0 = \{1\}$ et $G_1 = G''$, quand $\Gamma \cap G'' \neq (\Gamma \cap G')'$. Or $\Gamma \cap G''$ est défini par $a_{1,1} = a_{2,2} = a_{3,3} = 1$, $a_{2,3} = a_{3,2} = 0$ et $a_{1,3} \in A + As$, tandis que $(\Gamma \cap G)'$ est défini par $a_{1,1} = a_{2,2} = a_{3,3} = 1$, $a_{2,3} = a_{3,2} = 0$ et $a_{1,3} \in A$. Donc Γ_s est de génération compacte précisément quand s appartient à A .

Noter enfin que Γ_s contient Γ_0 , ce qui fournit, quand s n'appartient pas à A , un exemple de sous-groupe de G (de type fini, dense) qui n'est pas de génération compacte mais contient un sous-groupe (de type fini, dense dans G) qui est de génération compacte.

Appendice B — Génération compacte des groupes d'holonomie de feuilletages de Lie

Soit G un groupe de Lie, M une variété différentielle compacte connexe, et \mathcal{F} un feuilletage de M (dont la codimension est la dimension de G).

\mathcal{F} est un G -feuilletage de Lie s'il est défini par un ensemble de submersions locales $f_i : U_i \rightarrow G$, dont chaque difféomorphisme de transition h_{ij} (défini par $h_{ij} \circ f_i = f_j$) est la restriction à $f_i(U_i \cap U_j)$ d'une translation à gauche de G .

Par un argument classique d'Ehresmann, il existe un sous-groupe Γ de G (le groupe d'holonomie de \mathcal{F}), ainsi qu'un revêtement $p : \bar{M} \rightarrow M$ galoisien connexe de groupe Γ (le revêtement d'holonomie de \mathcal{F}) et une submersion $D : \bar{M} \rightarrow G$ (le développement de \mathcal{F}) qui est Γ -équivariante, telle que le feuilletage défini sur \bar{M} par D coïncide avec $p^{-1}(\mathcal{F})$.

Si l'on munit \bar{M} d'une métrique riemannienne invariante à gauche et M d'une métrique bien choisie, que l'on relève à \bar{M} , alors D est une submersion riemannienne entre variétés riemanniennes complètes. Donc D est une fibration.

Par exemple supposons un autre groupe de Lie H contenant un sous-groupe discret cocompact Γ , et un homomorphisme surjectif q de H sur G . Notons K le noyau de q . Alors les classes bilatères $\Gamma\eta K$, $\eta \in H$, sont les feuilles d'un G -feuilletage de Lie de $M = \Gamma \backslash H$ dont le groupe d'holonomie est $q(\Gamma)$. Dans le cas où $\Gamma \cap K = \{1\}$, le revêtement d'holonomie est H et l'application développante est q .

Revenons au cas général. Il est clair que Γ est de type fini. De plus il est uniforme dans G car si l'on note $\bar{\Gamma}$ sa fermeture dans G , la fibration D passe au quotient en une fibration de M sur $\bar{\Gamma} \backslash G$, qui est donc compact.

Proposition B.1 (Haefliger) — Soit Γ le groupe d'holonomie d'un G -feuilletage de Lie défini sur une variété compacte. Alors Γ est de génération compacte dans G .

La démonstration qui suit est due à Y. Carrière. Choisissons dans \bar{M} un compact P rencontrant $D^{-1}(1)$ et qui soit un domaine fondamental, c'est-à-dire que les translatés $\gamma(P)$, $\gamma \in \Gamma$, recouvrent \bar{M} . L'ensemble \mathcal{G} des $\gamma \in \Gamma$ tels que $\gamma(P) \cap P \neq \emptyset$ est une partie génératrice finie de Γ .

Donnons-nous un $K \in \mathcal{K}(G)$, que nous pouvons supposer connexe par arcs et contenant 1. Soit γ un élément quelconque de $\Gamma \cap K$.

Comme D est équivariante, $\gamma(P)$ rencontre $D^{-1}(\gamma)$. Donc P et $\gamma(P)$ rencontrent $D^{-1}(K)$. Nous pouvons supposer G simplement connexe, si bien que les fibres de D sont connexes, et finalement $D^{-1}(K)$ est connexe par arcs. Donc P et $\gamma(P)$ peuvent être joints par un chemin dans $D^{-1}(K)$. Les translatés de P rencontrés successivement par ce chemin forment précisément une suite du type : $P, \gamma_1(P), \gamma_1\gamma_2(P), \dots, \gamma_1 \dots \gamma_n(P)$ où $\gamma_i \in \mathcal{G}$ et $\gamma_1 \dots \gamma_n = \gamma$.

Pour chaque $i \in \{0, \dots, n\}$, le translaté $\gamma_1 \dots \gamma_i(P)$ rencontre $D^{-1}(K)$. En d'autres termes $\gamma_1 \dots \gamma_i D(P)$ rencontre K . Donc $\gamma_1 \dots \gamma_i \in KD(P)^{-1}$.

Nous avons ainsi prouvé que $\Gamma \cap K \subset \langle \mathcal{G} \rangle_{KD(P)^{-1}}$.

Références

[BNS] Bieri, R., Neumann, W.D., Strebel, R. — "A Geometric Invariant of Discrete Groups". *Invent. Math.* 90, 451–477 (1987).

[BS] Bieri, R., Strebel, R. — "Valuations and Finitely Presented Metabelian Groups". *Proc. London Math. Soc.* 3, 41 (1980), 439–464

- [C1] Carrière, Y. — "Sur la croissance des feuilletages de Lie" . *Pub. IRMA Lille* , vol. VI, fasc. 3 (1984) .
- [C2] Carrière, Y. — "Feuilletages riemanniens à croissance polynomiale" . *Comm. Math. Helv.* 63 (1988), 1-20 .
- [G] Ghys, E. — "Groupes d'holonomie des feuilletages de Lie" . *Indag. Math.*, vol.47, fasc. 2 (1985), 173-182 .
- [Hae1] Haefliger, A. — "Groupoïdes d'holonomie et classifiants" . *In Structure transverse des feuilletages* , Astérisque 116 .
- [Hae2] Haefliger, A. — "Pseudogroups of Local Isometries" . *In Proceedings Vth. Coll. in Diff. Geometry, Santiago de Compostella, Sept. 1984* , ed. L.A. Cordero, *Research notes in Math.* 131, Pitman (1985), 174-197 .
- [Hal] Hall, M. Jr. — "The Theory of Groups" . Mc Millan (1959) .
- [Mo] Mostow, G.D. — "Factor Spaces of Solvable Groups" . *Annals of Mathematics* , vol. 60, no. 1 (1954) .
- [R] Ragunathan, M.S. — "Discrete Subgroups of Lie Groups" . Springer (1972) .
- [Y] Yamabe, H. — "On an Arcwise Connected Subgroup of a Lie Group" . *Osaka Mathematical Journal*, vol. 2, no. 1 (1950) .

*U.F.R. de Mathématiques
 Université Paris 7
 2, place Jussieu
 75251 Paris Cedex 05, France*