



**HAL**  
open science

# SUR LES FEUILLETAGES TRANSVERSALEMENT HOMOGÈNES A SOUS-GROUPE DISCRET.

Hassimiou Diallo

► **To cite this version:**

Hassimiou Diallo. SUR LES FEUILLETAGES TRANSVERSALEMENT HOMOGÈNES A SOUS-GROUPE DISCRET.. Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni, 2015, Série VII (36), pp.197-206. hal-01066566v2

**HAL Id: hal-01066566**

**<https://hal.science/hal-01066566v2>**

Submitted on 2 Feb 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Sur les feuilletages transversalement homogènes à sous-groupe discret

Hassimiou DIALLO

Email:diallomh@yahoo.fr

Laboratoire de Mathématiques Fondamentales,  
Ecole Normale Supérieure d'Abidjan,Côte d'Ivoire.

September 18, 2014

## Abstract

$G^\Gamma$  being the group generated by left translation of a Lie group  $G$  and right translation of elements of a discrete subgroup  $\Gamma$ , we establish here that on a manifold  $M$ ,

1) There is a correspondance one to one between  $\frac{G}{\Gamma}$ - homogenous transversally foliations and foliations given by a  $(G^\Gamma, G)$ - transverse structure. Two corresponding foliations have the same  $C^\infty$ -transverse structure.

2) One foliation of  $(G^\Gamma, G)$ - transverse structure is a Lie foliation if and only if its  $\Gamma$ -holonomy group is trivial.

**Mots-clés:** feuilletage de Lie;  $(G, T)$ -structure transverse; feuilletage transversalement homogène; extension de feuilletage.

**MCS:**53C12;53R30; 53C40.

**Notation 1** Dans tout ce qui suit  $G$  est un groupe de Lie connexe , d'élément neutre  $e$ ,  $C(G)$  le centre de  $G$  ,  $Diff(G)$  le groupe des difféomorphismes de  $G$ ,  $Loc(G^\Gamma)$  le pseudogroupe obtenu par localisation des éléments de  $G^\Gamma$ . Enfin on se met dans le cadre où tous les objets considérés sont  $C^\infty$ .

## 1 Introduction

On rappelle qu'étant donné deux feuilletages  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  d'une même variété , on dit que  $\mathcal{F}$  est une extension de  $\mathcal{E}$  (et on note  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ ) [2] si toute feuille de  $\mathcal{F}$  est une réunion de feuilles de  $\mathcal{E}$ . Par exemple si on se donne  $H$  un sous groupe fermé d'un groupe de Lie  $G$ , alors tout  $G$ - feuilletage de Lie[4] d'une variété admet canoniquement une extension  $\frac{G}{H}$ - transversalement homogène.

On dira de cette extension qu'elle dérive du  $G$ -feuilletage de Lie . Le problème est de savoir si un feuilletage transversalement homogène dérive nécessairement d'un feuilletage de Lie. C'est un problème difficile, car même dans le cas où le feuilletage transversalement homogène est de Lie , on n'a pas, en général, de réponse.

Nous allons résoudre le problème dans le cas où  $H$  est un sous-groupe discret  $\Gamma$  d'un groupe de Lie  $G$ .

Notons  $G^\Gamma = \langle L(G) \cup R(\Gamma) \rangle$  le sous-groupe de  $Diff(G)$  engendré par les translations à gauche de  $G$  et à droite des éléments de  $\Gamma$ . Le fait que dans un groupe les translations à gauche commutent avec les translations à droite nous donne dans  $G^\Gamma$  la loi de composition suivante:

$$L_g \circ R_\gamma \circ L_{g'} \circ R_{\gamma'} = L_{gg'} \circ R_{\gamma'\gamma}.$$

## 2 Détermination des feuilletages admettant pour extension discrète un feuilletage transversalement homogène

L'application

$$\begin{aligned} G^\Gamma \times G &\longrightarrow G \\ (v = L_g \circ R_\gamma, u) &\longmapsto v \cdot u = (L_g \circ R_\gamma)(u) = gu\gamma \end{aligned}$$

définit une action de  $G^\Gamma$  sur  $G$ , et mieux, on a:

**Proposition 2**  $G^\Gamma$  opère analytiquement sur  $G$ .

**Preuve.** Soit  $L_g \circ R_\gamma \in G^\Gamma$ . Et soit  $U$  un ouvert non vide de  $G$ .

$L_g \circ R_\gamma|_U = 1_G|_U$  implique que  $\gamma = g^{-1}$  et  $H_g = \{u \in G/gug^{-1} = u\}$  est un sous-groupe de Lie de  $G$ . En effet si  $g\gamma \neq e$ , alors  $L_g \circ R_\gamma(e) \neq e = 1_G(e)$ . Par continuité, il existe un voisinage ouvert  $V$  de l'élément neutre (on peut le prendre même symétrique si l'on veut) tel que pour tout  $v \in V$  on ait  $L_g \circ R_\gamma(v) \neq v$ . Maintenant soit  $u_0 \in U$ ,  $(u_0V) \cap U$  est un voisinage ouvert de  $u_0$ . Soit  $z = u_0v \in (u_0V) \cap U$ , on a alors

$$u_0v = z = L_g \circ R_\gamma(z) = gz\gamma = gu_0v\gamma = gu_0\gamma\gamma^{-1}v\gamma = (gu_0\gamma)(\gamma^{-1}v\gamma) = u_0\gamma^{-1}v\gamma;$$

ce qui implique que  $v = \gamma^{-1}v\gamma$  pour tout  $v \in V$ ; en d'autres termes on a  $Ad_\gamma|_V = 1_G|_V$ . Par ailleurs  $H_\gamma = \{u \in G/\gamma u\gamma^{-1} = u\}$  est visiblement un sous-groupe fermé, donc un sous-groupe de Lie de  $G$ . Ensuite puisque par hypothèse  $H_\gamma$  contient l'ouvert (non vide)  $U$  de  $G$ , alors pour des raisons de dimension et d'homogénéité dans un groupe de Lie, on a nécessairement  $H_\gamma = G$ . Par ailleurs puisque pour ce  $z \in (u_0V) \cap U$  considéré plus haut on a  $gz\gamma = z = \gamma^{-1}z\gamma$ ; on

y tire que  $g = \gamma^{-1}$  et on a une contradiction avec  $g\gamma \neq e$ . On a montré ainsi  $L_g \circ R_\gamma|_U = 1_{G|U}$  implique que  $\gamma = g^{-1}$  et  $L_g \circ R_\gamma = 1_G$ . Et la réciproque est évidente. Si on note que la condition  $L_g \circ R_\gamma = 1_G$  contient la condition  $g = \gamma^{-1}$ , alors pour tout  $\gamma \in \Gamma$  et tout ouvert non vide  $U$  de  $G$ , on a

$$L_g \circ R_\gamma|_U = 1_{G|U} \iff L_g \circ R_\gamma = 1_G$$

Considérons maintenant un ouvert non vide quelconque  $U$  et des éléments quelconques  $g, g' \in G, \gamma, \gamma' \in \Gamma$ , on a ;  $L_{g'} \circ R_{\gamma'}|_U = L_g \circ R_\gamma|_U \implies L_{g^{-1}g'} \circ R_{\gamma'\gamma^{-1}}|_U =$

$1_{G|U} \implies L_{g^{-1}g'} \circ R_{\gamma'\gamma^{-1}} = 1_G \implies L_{g'} \circ R_{\gamma'} = L_g \circ R_\gamma$ . Il en résulte pour tout ouvert  $U$ ,  $L_{g'} \circ R_{\gamma'}|_U = L_g \circ R_\gamma|_U \implies L_{g'} \circ R_{\gamma'} = L_g \circ R_\gamma$  et c'est ce qui justifie que  $G^\Gamma$  opère analytiquement sur  $G$ . ■

**Proposition 3** *Pour un sous-groupe discret  $H$  d'un groupe topologique  $G$ , les assertions suivantes sont équivalentes.*

- 1  $H$  est normal dans  $G$ ;
- 2  $H$  est contenu dans le centre de  $G$ .

Pour le voir, il suffit de considérer l'application de  $\Gamma \times G \rightarrow \Gamma$  qui à  $(\gamma, g) \rightarrow g\gamma g^{-1}$ . Comme  $\Gamma$  est discret, par un argument classique de connexité et de continuité, on établit que cette application est constante et égale à  $\gamma$ . La réciproque étant évidente.

Ceci permet de poser les définitions suivantes.

**Définition 4** 1. *Deux représentations  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  de  $\pi_1(M)$  dans un groupe  $L$  sont dites équivalentes si et seulement si il existe une représentation  $\zeta$  de  $\pi_1(M)$  dans  $C(L)$  telle que  $\Phi_2 = \zeta\Phi_1$ .*

2. *Soit  $\psi$  une représentation de  $\pi(M)$  dans  $G^\Gamma$ .  $\psi$  induit des représentations  $\psi_1, \psi_2$  respectivement de  $\pi_1(M)$  dans  $G$  et  $\pi_1(M)$  dans  $\Gamma$  de sorte que  $\psi = L_{\psi_1} \circ R_{\psi_2}$ . Cette décomposition n'est pas unique, puisque pour toute représentation  $\zeta$  de  $\pi_1(M)$  dans  $\Gamma \cap C(G)$ , on a  $\psi = L_{\psi_1} \circ R_{\psi_2} = \psi = L_{\psi_1\zeta} \circ R_{\zeta^{-1}\psi_2}$ .  $\Gamma(\psi) = \psi(\pi_1(M))$  est un sous-groupe de  $\Gamma$ , et  $\Gamma(\psi) \cap C(G) = \Gamma(\psi) \cap C(\Gamma)$  est un sous-groupe normal de  $\Gamma(\psi)$ , et c'est le groupe  $\frac{\Gamma(\psi)}{\Gamma(\psi) \cap C(G)}$  noté  $\mathcal{R}Hol(\psi)$  qu'on appellera le  $\Gamma$ -groupe d'holonomie de la représentation  $\psi$ . Il mesure l'obstruction à ce que  $\psi$  soit à une équivalence près une représentation de  $\pi(M)$  dans  $G$ .*

3. *Si la représentation  $\psi$  est l'homomorphisme d'holonomie d'un feuilletage  $\mathcal{F}^\Gamma$  défini par une  $(G^\Gamma, G)$ -structure transverse,  $\mathcal{R}Hol(\psi)$  sera noté  $\mathcal{R}Hol(\mathcal{F}^\Gamma)$  et appellé le  $\Gamma$ -groupe d'holonomie du feuilletage.*

On a alors le résultat suivant:

**Proposition 5** *A tout  $\frac{G}{\Gamma}$ -feuilletage transversalement homogène d'un sous-groupe discret d'une variété  $M$ , il correspond un feuilletage défini par une  $(G^\Gamma, G)$ -structure transverse et les deux feuilletages transversalement  $C^\infty$  sous-jacents sont identiques.*

*En plus le feuilletage à  $(G^\Gamma, G)$ -structure transverse est un  $G$ -feuilletage de Lie si et seulement si son  $\Gamma$ -groupe d'holonomie est trivial.*

**Preuve.** Notons  $\mathcal{F}$  ce  $\frac{G}{\Gamma}$ -feuilletage transversalement homogène . Soit  $(D, \rho)$  son développement sur le revêtement universel  $\widetilde{M}$  de  $M$ [6].Puisque  $\widetilde{M}$  est connexe et simplement connexe , soit  $D^\Gamma$  un relèvement de  $D$  sur  $G$  revêtement de  $\frac{G}{\Gamma}$  qui prend la valeur  $e$  pour un certain  $\tilde{x}_0$ : On a pour tous  $s \in \pi_1(M)$  et  $\tilde{x} \in \widetilde{M}$

$$\pi(D^\Gamma(s\tilde{x})) = (\pi \circ D^\Gamma)(s\tilde{x}) = D(s\tilde{x}) = \rho(s)D(\tilde{x}) = \rho(s)\pi(D^\Gamma(\tilde{x})) = \pi(\rho(s)D^\Gamma(\tilde{x}))$$

Comme le revêtement  $G \longrightarrow \frac{G}{\Gamma}$  est ici vu comme un fibré principal pour l'action à droite de  $\Gamma$  sur  $G$  , la relation précédente montre que pour  $s \in \pi_1(M)$  et  $\tilde{x} \in \widetilde{M}$  ,  $D^\Gamma(s\tilde{x})$  et  $\rho(s)D^\Gamma(\tilde{x})$  appartiennent à la même fibre dans  $G$ ,ce qui assure donc l'existence et l'unicité d'un élément  $\delta(s, \tilde{x})$  dans  $\Gamma$  tel que  $D^\Gamma(s\tilde{x}) = \rho(s)D^\Gamma(\tilde{x})\delta(s, \tilde{x})$  . L'application  $\delta$  de  $\pi_1(M) \times \widetilde{M} \rightarrow \Gamma$  ainsi définie est visiblement continue . Comme  $\pi_1(M)$  et  $\Gamma$  sont de topologies discrètes ,par continuité et connexité , la restriction de  $\delta$  sur chaque composante connexe de  $\pi_1(M) \times \widetilde{M}$  est constante, de sorte que finalement  $\delta$  ne dépend que de  $s$  . On peut écrire: pour tous  $s \in \pi_1(M)$  et  $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ ,

$$D^\Gamma(s\tilde{x}) = \rho(s)D^\Gamma(\tilde{x})\delta(s) = (L_{\rho(s)} \circ R_{\delta(s)})(D^\Gamma(\tilde{x}))$$

On constate que  $\delta$  est un anti-morphisme( i.e  $\delta(ss') = \delta(s')\delta(s)$ ).Soit  $\gamma = \delta^{-1}$  le morphisme de groupe correspondant. On pose  $\sigma(s) = L_{\rho(s)} \circ R_{\delta(s)} = L_{\rho(s)} \circ R_{\gamma^{-1}(s)}$ ;on vérifie sans peine que  $\sigma$  est un homomorphisme de groupes de  $\pi_1(M)$  dans  $G^\Gamma$ . Ainsi on a

$$D^\Gamma(s\tilde{x}) = \rho(s)D^\Gamma(\tilde{x})\delta(s) = (L_{\rho(s)} \circ R_{\delta(s)})(D^\Gamma(\tilde{x})) = \sigma(s)(D^\Gamma(\tilde{x})) = (\sigma(s) \circ D^\Gamma)(\tilde{x})$$

et la relation  $D^\Gamma(s\tilde{x}) = \sigma(s)(D^\Gamma(\tilde{x}))$  établit la  $\sigma$ -équivariance de  $D^\Gamma$ .Tout ceci montre bien que le feuilletage  $\mathcal{F}$  dérive d'une  $(G^\Gamma, G)$ - structure transverse comme l'indiquent les diagrammes suivants:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \xrightarrow{D^\Gamma} & G \\ s \downarrow & & \downarrow \sigma(s) \\ \widetilde{M} & \xrightarrow{D^\Gamma} & G \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \xrightarrow{D^\Gamma} & G \\ Id_M \downarrow & & \downarrow \pi \\ \widetilde{M} & \xrightarrow{D} & \frac{G}{\Gamma} \\ p \downarrow & & \\ M & & \end{array}$$

Ensuite,le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \xrightarrow{D^\Gamma} & G \xrightarrow{\pi} \frac{G}{\Gamma} \\ \downarrow & & \\ M & & \end{array}$$

et l'égalité  $D = \pi \circ D^\Gamma$  montrent que le feuilletage  $\mathcal{F}$  est une extension [2] du

feuilletage  $\mathcal{F}^\Gamma$  i.e.  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^\Gamma$ . Montrons maintenant que  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^\Gamma$  i.e. que toute feuille de  $\mathcal{F}$  contient une feuille de  $\mathcal{F}^\Gamma$ . Soit  $F$  une feuille de  $\mathcal{F}$ ,  $F^\Gamma$  une feuille de  $\mathcal{F}^\Gamma$  contenue dans  $F$  et  $L$  une feuille de  $p^{-1}(F)$ , contenant  $L^\Gamma$  une feuille de  $p^{-1}(F^\Gamma)$ . Alors  $D^\Gamma(L)$  est une partie connexe de  $G$  et  $D(L) = (\pi \circ D^\Gamma)(L)$  est un singleton dans  $\frac{G}{\Gamma}$ , donc  $D^\Gamma(L)$  est contenue dans une fibre de  $\pi$ . Or cette fibre est discrète et  $D^\Gamma(L)$  connexe non vide, par conséquent  $D^\Gamma(L)$  est réduit à un point; il en résulte que  $L \subseteq L^\Gamma$  et  $F \subseteq F^\Gamma$ . Au total,  $L = L^\Gamma$ , donc  $F = p(L) = p(L^\Gamma) = F^\Gamma$  et  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^\Gamma$ . Ensuite comme  $\pi$  est un difféomorphisme local, il est clair que deux feuilletages correspondants proviennent du même feuilletage transversalement  $C^\infty$  de  $M$ .

Pour la suite notons que le  $\Gamma$ -groupe d'holonomie correspondant est  $\mathcal{R}Hol(\mathcal{F}^\Gamma) = \frac{\gamma(\pi_1(M))}{\gamma(\pi_1(M)) \cap C(G)}$ . Si  $\mathcal{F}^\Gamma$  est un  $G$ -feuilletage de Lie, alors il existe un homomorphisme de groupes  $k : \pi_1(M) \rightarrow G$ , tel que  $L_{\rho(s)} \circ R_{\gamma^{-1}(s)} = \sigma(s) = L_{k(s)}$ . Ce qui implique que pour tout  $s \in \pi_1(M)$  et pour tout  $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ , on a

$$\rho(s)D^\Gamma(\tilde{x})\gamma^{-1}(s) = (\sigma(s) \circ D^\Gamma)(s\tilde{x}) = k(s)D^\Gamma(\tilde{x})$$

En particulier avec  $D^\Gamma(\tilde{x}_0) = e$ , on tire que  $k(s) = \rho(s)\gamma^{-1}(s)$ . Ainsi, de  $\rho(s)D^\Gamma(\tilde{x})\gamma^{-1}(s) = k(s)D^\Gamma(\tilde{x}) = \rho(s)\gamma^{-1}(s)D^\Gamma(\tilde{x})$ , il vient que  $\rho(s)D^\Gamma(\tilde{x})\gamma^{-1}(s) = \rho(s)\gamma^{-1}(s)D^\Gamma(\tilde{x})$  et donc  $D^\Gamma(\tilde{x})\gamma^{-1}(s) = \gamma^{-1}(s)D^\Gamma(\tilde{x})$  ceci pour tout  $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ ; cela signifie comme  $D^\Gamma$  en tant que submersion est une application ouverte, que  $Ad_{\gamma^{-1}(s)}$  coïncide avec l'identité sur l'ouvert  $V = D^\Gamma(G)$ . Il vient alors, par analyticité, que pour tout  $s \in \pi_1(M)$ ,  $Ad_{\gamma(s)} = 1_G$ ; ce qui signifie  $\gamma(\pi_1(M)) = \mathcal{R}Hol(\mathcal{F}^\Gamma) \subset C(G)$ , i.e. la trivialité du  $\Gamma$ -groupe d'holonomie. Et évidemment la trivialité du  $\Gamma$ -groupe d'holonomie implique que le feuilletage  $\mathcal{F}^\Gamma$  est transversalement de Lie (ayant pour développement  $(D^\Gamma, \rho\gamma^{-1})$ ). ■

Les fonctions de transition définissant le feuilletage  $\mathcal{F}^\Gamma$  étant obtenues par localisation des difféomorphismes de  $G^\Gamma$ , ce feuilletage est tout simplement un  $\mathcal{L}oc(G^\Gamma)$ -feuilletage de  $M$ ; il est parfaitement défini par la donnée de  $(\widetilde{M}, D^\Gamma, \sigma)$ . Ce triplet est un développement du feuilletage sur  $\widetilde{M}$ . Dans ces conditions, on sait qu'on a une unicité du développement dans le sens suivant.

**Proposition 6** *Deux tels développements  $(\widetilde{M}, D_i^\Gamma, \sigma_i)$  définissent le même  $\mathcal{L}oc(G^\Gamma)$ -feuilletage si et seulement si il existe  $\omega \in G^\Gamma$  tel que  $D_2^\Gamma = \omega \circ D_1^\Gamma$ ,  $\sigma_2 = \omega \circ \sigma_1 \circ \omega^{-1}$ .*

Nous allons juste voir comment apparait naturellement l'élément  $\omega$  annoncé, le reste étant soit connu d'avance, soit facile à vérifier. Ainsi, si deux développements  $(\widetilde{M}, D_i^\Gamma, \sigma_i)$  définissent le même  $\mathcal{L}oc(G^\Gamma)$ -feuilletage de  $M$ , alors ils induisent deux développements  $(\widetilde{M}, \pi \circ D_i^\Gamma, \pi \circ \sigma_i)$  définissant le même  $\frac{G}{\Gamma}$ -feuilletage transversalement homogène de  $M$ . Dans ces conditions, puisqu'un  $\frac{G}{\Gamma}$ -feuilletage transversalement homogène peut être regard  comme un feuilletage à  $(G, \frac{G}{\Gamma})$ -structure transverse, il existe donc un élément unique  $g \in G$  tel que  $\pi \circ D_2^\Gamma = g \cdot (\pi \circ D_1^\Gamma)$  et  $\rho_2 = g\rho_1g^{-1}$ . Ainsi, pour tout  $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ ,

on a  $\pi(D_2^\Gamma(\tilde{x})) = \pi(gD_1^\Gamma(\tilde{x}))$ . Ce qui assure comme précédemment l'existence d'une fonction  $\delta$  de  $\widetilde{M}$  dans  $\Gamma$  telle que  $D_2^\Gamma(\tilde{x}) = gD_1^\Gamma(\tilde{x})\delta(\tilde{x})$ . Là encore pour des raisons de continuité et de connexité, la fonction  $\delta$  est constante; d'où  $D_2^\Gamma = \omega \circ D_1^\Gamma$ , avec  $\omega = L_g \circ R_\delta$ . Ensuite, on a,

$$\begin{aligned} (\sigma_2(s) \circ \omega)(D_1^\Gamma(\tilde{x})) &= \sigma_2(s)(D_2^\Gamma(\tilde{x})) = D_2^\Gamma(s\tilde{x}) = \\ &= \omega \circ D_1^\Gamma(s\tilde{x}) = \omega \circ D_1^\Gamma(s\tilde{x}) = (\omega \circ \sigma_1(s))(D_1^\Gamma(\tilde{x})) \end{aligned}$$

De l'égalité des termes extrêmes, on tire que  $\sigma_2(s) \circ \omega$  et  $\omega \circ \sigma_1(s)$  sont deux difféomorphismes de  $G^\Gamma$  qui coïncident sur l'ouvert  $V = D^\Gamma(G)$ ; il en résulte par analyticité que  $\sigma_2(s) \circ \omega = \omega \circ \sigma_1(s)$ , ceci pour tout  $s \in \pi_1(M)$  et c'est ce qui conduit enfin à  $\sigma_2 = \omega \circ \sigma_1 \circ \omega^{-1}$ .

Il résulte directement de cette proposition:

**Corollary 7** *Tout  $\frac{G}{\Gamma}$ -feuilletage transversalement homogène d'un sous-groupe distingué  $\Gamma$  est de Lie et dérive d'un  $G$ - feuilletage de Lie.*

**Preuve.** Avec les notations précédentes, le  $\frac{G}{\Gamma}$ -feuilletage transversalement homogène est un  $\frac{G}{\Gamma}$ -feuilletage de Lie de developpement  $(\widetilde{M}, D, \pi \circ \rho)$ . Pour le feuilletage  $\mathcal{F}^\Gamma$ , il est clair que  $\Gamma \subset C(G)$  implique la trivialité du  $\Gamma$ - groupe d'holonomie et on conclut avec la proposition. ■

Aussi, puisque pour une variété compacte et simplement connexe, tout  $\Gamma$ -groupe d'holonomie est trivial, le résultat de F dida [4] sur l'existence de  $G$ - feuilletages de Lie sur les sphères et ce qui précède permettent de dire également:

**Remarque 8** *En dehors des feuilletages par points de  $\mathbb{S}^1$  et  $\mathbb{S}^3$ , les sphères ne supportent pas de  $\frac{G}{\Gamma}$ -feuilletage transversalement homogène à sous-groupe discret.*

On notera par ailleurs que la donnée d'un feuilletage d'une variété défini par une  $(G^\Gamma, G)$ -structure transverse permet d'associer canoniquement, à travers le revêtement  $\pi$ , un  $\frac{G}{\Gamma}$ -feuilletage transversalement homogène de cette variété.

Ceci dit, au total, on aura établi le théorème suivant.

**Théorème 9** *Etant donné une variété  $M$ , un groupe de Lie  $G$ , un sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $G$ ,*

*Il ya une correspondance biunivoque entre les  $\frac{G}{\Gamma}$ -feuilletages transversalement homogènes et les  $\mathcal{L}oc(G^\Gamma)$ - feuilletages de  $M$ . Et les  $C^\infty$ -feuilletages sous-jacents de deux feuilletages correspondants coïncident .*

*En plus un  $\mathcal{L}oc(G^\Gamma)$ -feuilletage est un  $G$ - feuilletage de Lie si et seulement si son  $\Gamma$ -groupe d'holonomie est trivial.*

**Remarque 10** *1) Les feuilles correspondantes de deux feuilletages correspondants sont identiques ont même holonomie.*

*2) Lorsqu'un  $\frac{G}{\Gamma}$ -feuilletage d'une variété  $M$  dérive d'un  $G$ -feuilletage de Lie, ses feuilles sont sans holonomie. Ainsi l'existence d'une feuille du  $\frac{G}{\Gamma}$ -feuilletage admettant une holonomie est une obstruction à l'existence d'un  $G$ -feuilletage de Lie sur cette variété.*

## References

- [1] **Y.Carrière,1984** . *Flots riemanniens, in " Structures transverses des feuilletages*, Astérisque, 116, 31-5.
- [2] **C. Dadi and H. Diallo, 2007**. *Extension d'un feuilletage de Lie minimal d'une variété compacte*, Afrika Mathematika, 3, 18, 34-45.
- [3] **H.Diallo, 2002** .*Sur les drapeaux de Lie*.Afrika Mathematika,3, 13 ,75-86.
- [4] **E.Fédida, 1974** .*Sur l'existence des Feuilletages de Lie*. CRAS de Paris, 278, 835-837.
- [5] **E. Ghys, 1984**. *Feuilletages riemanniens sur les variétés simplement connexes*, Anna . Inst. Fourier , Grenoble, 34, 4, 203-223.
- [6] **C. Godbillon, 1985**. *Feuilletage:Etude géométrique I*, Publication IRMA, Strasbourg.