



**HAL**  
open science

# ANNEAU DE FEUILLETAGES D'UNE VARIÉTÉ p-RIEMANNIENNE.

Hassimiou Diallo

► **To cite this version:**

Hassimiou Diallo. ANNEAU DE FEUILLETAGES D'UNE VARIÉTÉ p-RIEMANNIENNE.. 2014.  
hal-01066563v2

**HAL Id: hal-01066563**

**<https://hal.science/hal-01066563v2>**

Preprint submitted on 2 Feb 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# ANNEAU DE FEUILLETAGES D'UNE VARIETE $p$ -RIEMANNIENNE

Hassimiou DIALLO

Email:diallomh@yahoo.fr

Laboratoire de Mathématiques Fondamentales ,  
Ecole Normale Supérieure d'Abidjan,Côte d'Ivoire.

February 1, 2015

## Abstract

Here, we establish the link between a structure almost product , a ring of foliations and a flag of foliations , and examine regularity conditions for a structure almost product becomes a product.

**Mots-clés:** feuilletage riemannien; feuilletage de Lie; feuilletage parallèle; extension de feuilletage; drapeau de feuilletages; anneau de feuilletages.

**MCS:**53C12;53R30; 53C40.

Dans tout ce qui suit, les objets considérés sont supposées  $C^\infty$  et  $p$  un entier supérieur ou égal à 2. Si nécessaire la variété et les feuilletages seront pris orientables.

**Notation 1**  $I_p = \{1, \dots, p\}$ ,  $\mathcal{P}(I_p)$  l'ensemble des parties de  $I_p$ ,

$$\prod_{k=1}^p T_k = T_1 \times \dots \times T_p, \quad \prod_{k=1}^p \theta_k = \theta_1 \times \dots \times \theta_p,$$

où chaque  $\theta_i$  est une bijection d'un ouvert de  $T_i$  sur un ouvert de  $T_i$ .

## 1 STRUCTURE PRESQUE MULTIPRODUIT ET EXTENSION DE FEUILLETAGE.

### 1.1 Structure presque multiproduit

**Définition 2** Une structure de variété presque multiproduit de type  $p$  ou une variété presque  $p$ -produit sur  $M$  est définie par la donnée d'une variété modèle  $\prod_{k=1}^p T^k$  et d'un atlas tel que pour deux cartes quelconques  $(U_i, \varphi_i)$   $(U_j, \varphi_j)$  ,  $\varphi(U_i)$

(resp.  $\varphi(U_j)$ ) est un produit  $\prod_{k=1}^p V_i^k$  avec  $V_i^k$  ouvert de  $T^k$  (resp.  $\prod_{k=1}^p V_j^k$  avec  $V_j^k$  ouvert de  $T^k$ ) et pour  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , le changement de cartes est de la forme  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} = \prod_{k=1}^p \theta_{ij}^k = \theta_{ij}^1 \times \dots \times \theta_{ij}^p$ .

On remarquera que toute variété presque  $p$ -produit est une variété presque  $k$ -produit pour  $2 \leq k \leq p$ .

**Définition 3** Une famille finie de  $p$  feuilletages  $(\mathcal{F}_i)$  d'une variété  $M$  est dite **complète** si  $TM = \bigoplus_{i=1}^p T\mathcal{F}_i$ , **stable** si pour tous  $1 \leq i, j \leq p$ ,  $[\mathcal{X}(\mathcal{F}_i), \mathcal{X}(\mathcal{F}_j)] \subset \mathcal{X}(\mathcal{F}_i) + \mathcal{X}(\mathcal{F}_j)$

( $\mathcal{X}(\mathcal{F}_k)$  étant le module des champs tangents à  $\mathcal{F}_k$ ).

On a la caractérisation utile suivante:

**Proposition 4** Une variété  $M$  est une variété presque  $p$ -produit si et seulement si elle supporte une famille complète et stable de  $p$  feuilletages .

Ces feuilletages sont appelés *feuilletages constitutifs* de la variété presque  $p$ -produit .

**Preuve.** Soit  $(\mathcal{F}_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille complète et stable. La stabilité implique l'intégrabilité des système différentiel  $\bigoplus_{i=1, i \neq h}^p T\mathcal{F}_i$  Soit  $(\mathcal{F}_h)_{1 \leq h \leq p}$  la famille de feuilletages correspondante. Dans un ouvert  $U_i$  distingué à la fois pour chacun de ces feuilletages, considérons leurs applications distinguées  $f_i^h$ , et leurs fonctions de transition  $g_{ij}^h = \theta_{ij}^h$  alors  $\varphi_i$  est une submersion surjective de  $U_i$  sur  $\varphi_i(U_i)$ . Quitte à rapetisser  $\varphi_i(U_i)$  en un polytope  $V_i$  de  $\prod_{s=1}^p T^s$  et remplacer  $U_i$  par  $\varphi_i^{-1}(V_i)$ , on montre sans peine que  $(U_i, \varphi_i = (f_i^1, \dots, f_i^p))_{i \in I}$  est un atlas de cartes dont le difféomorphisme de changement de cartes est explicitement est  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} = \prod_{k=1}^p \theta_{ij}^k$ ; ce qui permet de voir que la structure de variété de  $M$  est celle d'une structure presque multiproduct de type  $p$ .

Réciproquement, étant donné sur  $M$  une structure presque  $p$ -produit, définie par un atlas de cartes  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ ,  $\varphi_i$  applique  $U_i$  dans  $\prod_{j=1}^p T^j$ . Soit  $p_k$  pour  $1 \leq k \leq p$ , la projection de  $\prod_{s=1}^p T^s$  sur  $\prod_{s \in I_p - \{k\}} T^s$ , alors avec les notations précédentes,  $(U_i, f_i^k = p_k \circ \varphi_i, g_{ij}^k = \prod_{s \in I_p - \{k\}} \theta_{ij}^s, \prod_{s \in I_p - \{k\}} T^s)_{i \in I}$  est un cocycle définissant sur  $M$  un feuilletage  $\mathcal{F}_k$ , de dimension la dimension de  $T^k$ . On obtient ainsi  $p$  feuilletages  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$  tels que  $TM = \bigoplus_{i=1}^p T\mathcal{F}_i$ . Le diagramme commutatif suivant décrit mieux la façon dont les feuilletages sont obtenus:

$$\begin{array}{ccccc}
& & U_i \cap U_j & & \\
& \swarrow \varphi_i & & \searrow \varphi_j & \\
\varphi_i(U_i \cap U_j) = \prod_{s=1}^p V_i^s & \xrightarrow{\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}} & & \xrightarrow{\varphi_j} & \varphi_j(U_i \cap U_j) = \prod_{s=1}^p V_j^s \\
p_k \downarrow & & & & \downarrow p_k \\
\prod_{s \in I_p - \{k\}} V_i^s & \xrightarrow{\prod_{s \in I_p - \{k\}} \theta_{ij}^s} & & & \prod_{s \in I_p - \{k\}} V_j^s
\end{array}$$

On note de même que  $(U_i, f_i^{k,s} = p_{k,s} \circ \varphi_i, g_{ij}^{k,s} = \prod_{l \in \{1, \dots, p\} - \{k, s\}} \theta_{ij}^l, \prod_{l \in \{1, \dots, p\} - \{k, s\}} T^l)_{i \in I}$  est cocycle définissant un feuilletage  $\mathcal{J}$  associé au système différentiel  $T\mathcal{F}_k \oplus T\mathcal{F}_s$  qui est donc intégrable et il en résulte évidemment  $[\mathcal{X}(\mathcal{F}_k), \mathcal{X}(\mathcal{F}_s)] \subset \mathcal{X}(\mathcal{F}_k) + \mathcal{X}(\mathcal{F}_s)$  puisque  $\mathcal{X}(\mathcal{F}_k) \subset \mathcal{X}(\mathcal{F}_k) + \mathcal{X}(\mathcal{F}_s)$  et  $\mathcal{X}(\mathcal{F}_s) \subset \mathcal{X}(\mathcal{F}_k) + \mathcal{X}(\mathcal{F}_s)$ . ■

On dira souvent d'une variété presque  $p$ -produit qu'elle est une variété  $p$ -feuilletée.

**Remarque 5** 1) On notera qu'une famille complète de deux feuilletages est nécessairement stable; ainsi une variété dont le fibré tangent est somme directe de deux sous-fibrés non triviaux (i.e. une variété bifeuilletée) est une variété presque produit (i.e. une variété 2-produit).

2) Si  $X$  et  $Y$  des sections du sous-fibré  $\bigoplus_{j \in J} T\mathcal{F}_j$ , alors  $X = \sum_{j \in J} X_j$  et  $Y = \sum_{j \in J} Y_j$  où  $X_j$  et  $Y_j$  sont dans  $\mathcal{X}(\mathcal{F}_j)$ , on vérifie bien avec cette condition et les propriétés du crochet, notamment sa  $\mathbb{R}$ -bilinearité que  $[X, Y]$  reste une section du sous-fibré  $\bigoplus_{j \in J} T\mathcal{F}_j$ .

Ainsi le système différentiel  $\bigoplus_{i \in J} T\mathcal{F}_i$  est intégrable, on notera  $\mathcal{F}_J$  le feuilletage qu'il définit et ce feuilletage sera dit composé; une feuille de  $\mathcal{F}_J$  est une réunion de feuilles de ses feuilletages constitutifs. Et il est clair que le feuilletage  $\mathcal{F}_{I_p - J}$  défini par  $\bigoplus_{l \in I_p - J} T\mathcal{F}_l$  est un feuilletage de dimension maximale strictement transverse à  $\mathcal{F}_J$ .

**Corollaire 6** Une variété supportant un feuilletage admettant un parallélisme transverse totalement intégrable est une variété presque multiproduct.

**Preuve.** Soit  $(M, \mathcal{F})$  ce feuilletage. Supposons le de codimension  $p$ . Soit  $(\xi_i)_{2 \leq i \leq p+1}$  le parallélisme transverse de  $\mathcal{F}$  et  $(\mathcal{F}_i)_{2 \leq i \leq p+1}$  la famille de flots correspondante. Si on pose  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$ , avec le total parallélisme des  $\xi_i$ , la famille  $(\mathcal{F}_i)_{1 \leq i \leq p+1}$  est une famille à la fois complète et stable. Et on conclut avec la caractérisation précédente. ■

**Notation 7** Pour une variété presque  $p$ -produit  $M$  de feuilletages constitutifs  $(\mathcal{F}_i)_{1 \leq i \leq p}$ , on note pour  $1 \leq k \leq p$ ,  $J^{(k)}$  l'ensemble d'indices  $J^{(k)} = (j_1^{(k)})$

, ...,  $j_{n_k}^{(k)}$ ) où  $n_k = \dim \mathcal{F}_k$ . Pour la suite on adoptera parfois lorsque nécessaire le système de coordonnées suivant:

$$(U, (x^{j_1^{(1)}} , \dots, x^{j_{n_1}^{(1)}}), \dots, (x^{j_1^{(k)}} , \dots, x^{j_{n_1}^{(k)}}), \dots, (x^{j_1^{(p)}} , \dots, x^{j_{n_1}^{(p)}}))$$

Et on remarquera qu'à une permutation près le repère

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^{j_1^{(1)}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{n_1}^{(1)}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_1^{(k)}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{n_1}^{(k)}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_1^{(p)}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{n_1}^{(p)}}} \right)$$

est un repère local naturel adapté pour chacun des sous-fibrés  $T\mathcal{F}_k$

On notera qu'une variété  $p$ - feuilletée peut être toujours regardée comme une variété bifeuilletée. Ainsi pour toute partie propre  $J$  de  $I_p$  les feuilletage  $\mathcal{F}_J$  et  $\mathcal{F}_{I_p - J}$  bifeuilletent la variété  $M$ ; ces feuilletages sont dits *complémentaires*.

## 1.2 ANNEAU DE FEUILLETAGES D'UNE STRUCTURE $p$ -MULTIPRODUIT

### 1.2.1 Structure d'anneau

Soit  $TM = \bigoplus_{i=1}^p T\mathcal{F}_i$  et  $I_p = \{1, \dots, p\}$ ,  $\mathcal{P}(I_p)$  l'ensemble des parties de  $I_p$ . On sait, par la remarque précédente que pour  $J$  parcourant l'ensemble des parties de  $I_p = \{1, \dots, p\}$ , les  $\mathcal{F}_J$  sont intégrables. Soit  $\mathcal{A}_p$  l'ensemble des feuilletages  $\mathcal{F}_J$ ,  $J$  parcourant  $\mathcal{P}(I_p)$  et  $\mathcal{F}$  l'application de  $\mathcal{P}(I_p)$  dans  $\mathcal{A}_p$  qui à  $J$  associe  $\mathcal{F}_J = \mathcal{F}(J)$  ainsi définie. On note que  $\mathcal{F}$  est par construction une bijection de  $\mathcal{P}(I_p)$  sur  $\mathcal{A}_p$ .

On va définir dans  $\mathcal{A}_p$  des opérations " $\cup, \cap, \Delta$ ". Les égalités suivantes  $(\bigoplus_{l \in I} T\mathcal{F}_l) \oplus$   
 $(\bigoplus_{l \in J} T\mathcal{F}_l) = (\bigoplus_{l \in I \cup J} T\mathcal{F}_l)$ ,  $(\bigoplus_{l \in I} T\mathcal{F}_l) \cap (\bigoplus_{l \in J} T\mathcal{F}_l) = (\bigoplus_{l \in I \cap J} T\mathcal{F}_l)$ ,  $(\bigoplus_{l \in I} T\mathcal{F}_l) \ominus (\bigoplus_{l \in J} T\mathcal{F}_l)$   
 $= \bigoplus_{l \in I - J} T\mathcal{F}_l$  (pour  $J \subset I$ ),  $(\bigoplus_{l \in I \cup J} T\mathcal{F}_l) \ominus (\bigoplus_{l \in J \cap J} T\mathcal{F}_l) = \bigoplus_{l \in I \Delta J} T\mathcal{F}_l$  et l'intégrabilité  
des systèmes différentiels qui apparaissent nous amènent à poser  $\mathcal{F}_{\{i\}} := \mathcal{F}_i$ ,  
 $\mathcal{F}_I \cup \mathcal{F}_J := \mathcal{F}_{I \cup J}$ ,  $\mathcal{F}_I \cap \mathcal{F}_J := \mathcal{F}_{I \cap J}$ ,  $\mathcal{F}_I - \mathcal{F}_J := \mathcal{F}_{I - J}$  ( $J \subset I$ ),  $\mathcal{F}_I \Delta \mathcal{F}_J := \mathcal{F}_{I \Delta J}$ ,  
 $\mathcal{F}_{I_p}$  le feuilletage trivial dont les feuilles sont les composantes connexes de  $M$ ,  
et enfin  $\mathcal{F}_\emptyset$  le feuilletage par points de  $M$ . Avec ces définitions et notations  
finalement on a  $\mathcal{F}_J = \bigcup_{j \in J \subset I_p} \mathcal{F}_j$

Ceci étant, on a aussi  $\mathcal{F}(I \cup J) = \mathcal{F}(I) \cup \mathcal{F}(J)$  et  $\mathcal{F}(I \cap J) = \mathcal{F}(I) \cap \mathcal{F}(J)$ ,  
 $\mathcal{F}(I - J) = \mathcal{F}(I) - \mathcal{F}(J)$  et que  $\mathcal{F}(I \Delta J) = \mathcal{F}(I) \Delta \mathcal{F}(J)$ . On définit un ordre  
partiel sur  $\mathcal{A}_p$  en posant  $\mathcal{F}_I \subseteq \mathcal{F}_J$  lorsque  $I \subseteq J$  ou tout simplement lorsque  $\mathcal{F}_J$   
est une extension de  $\mathcal{F}_I$ .

Au total  $(\mathcal{A}_p, \Delta, \cap, \cup)$  a une structure d'anneau de Boole[9] et  $\mathcal{F}$  est un iso-  
morphisme d'anneaux de Boole de  $(\mathcal{P}(I_p), \Delta, \cap)$  sur  $(\mathcal{A}_p, \Delta, \cap)$ .

### 1.2.2 Structure d'une variété multiriemannienne

Dans ce qui suit on supposera que la variété modèle de la structure presque  
 $p$ - produit est une variété riemannienne produit de  $p$  variétés riemanniennes

$$\prod_{i=1}^p (T_i, h_i)$$

**Définition 8** Si les feuilletages constitutifs d'une variété presque  $p$ -produit sont riemanniens, on parlera de variété multiriemannienne ou de variété  $p$ -riemannienne.

**Définition 9** Un feuilletage riemannien d'une variété riemannienne est dit métrique si la métrique quasi-fibrée coïncide avec la métrique de la variété.

**Proposition 10** Une variété presque  $p$ -produit est une variété  $p$ -riemannienne si et seulement si les changements de cartes sont des produits de  $p$  isométries .

**Preuve.** Soit  $(U_i, \varphi_i)$  un atlas de cartes de la structure presque multiproduct de type  $p$  de  $M$ . Pour  $k = 1, 2$ , il y correspond deux cocycles

$$(U_i, f_i^1 = p_1 \circ \varphi_i, g_{ij}^1 = \theta_{ij}^2 \times \theta_{ij}^3 \times \dots \times \theta_{ij}^p, T^2 \times T^3 \times \dots \times T^p)_{i \in I}$$

et

$$(U_i, f_i^{(2)} = p_2 \circ \varphi_i, g_{ij}^{(2)}, T^1 \times T^3 \times \dots \times T^p)_{i \in I}$$

définissant les feuilletages  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ . Comme ces deux feuilletages sont supposés riemanniens, alors les fonctions de transition  $\theta_{ij}^2 \times \theta_{ij}^3 \times \dots \times \theta_{ij}^p$  sont des isométries locales de  $(T^2, h_2) \times (T^3, h_3) \times \dots \times (T^p, h_p)$  dans lui-même, donc un produit de  $(p-1)$  isométries et la considération du feuilletage riemannien  $\mathcal{F}_2$  permet de voir pour le total que chaque  $\theta_{ij}^k$  pour  $1 \leq k \leq p$ , est une isométrie locale de  $(T^k, h_k)$  et que les changements de cartes  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} = \theta_{ij}^1 \times \theta_{ij}^2 \times \theta_{ij}^3 \times \dots \times \theta_{ij}^p$  sont des produits de  $p$  isométries.

La réciproque étant évidente! ■

**Définition 11** Une partition de l'unité  $(U_i, \psi_i)_{i \in I}$  d'une variété presque  $p$ -produit  $M$  (avec  $TM = \bigoplus_{j=1}^p T\mathcal{F}_j$ ) est dite adaptée ou compatible à un feuilletage  $(M, \mathcal{F}_k)$  ou  $\mathcal{F}_k$ -adaptée, si pour tout  $i \in I$ ,  $\psi_i$  est constante sur les plaques dans  $U_i$  des autres feuilletages du système.

**Lemme 12** Dans une variété presque  $p$ -produit  $M$  (avec  $TM = \bigoplus_{i=1}^p T\mathcal{F}_i$ ), chacun des feuilletages constitutifs admet des partitions de l'unité qui lui sont compatibles.

**Preuve.** Soit  $(U_i, \psi_i)_{i \in I}$  une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement correspondant à un atlas de cartes  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  de la structure. Notons pour  $1 \leq k \leq p$ ,  $\psi_i^k$  la fonction de  $M$  dans  $\mathbb{R}$  de support contenu dans le support de  $\psi_i$ , définie par

$$\psi_i^k(x) = \psi_i(\varphi_i^{-1}(0, \dots, (pr_k \circ \varphi_i)(x), \dots, 0))$$

où  $pr_k$  est la  $k$ ème projection dans  $\prod_{i=1}^p T_i$ . En clair, cette fonction ne dépend que de

$$(x_1^k = x_1^{j_1^{(k)}}(x), \dots, x_{n_k}^k = x_{n_1}^{j_1^{(k)}}(x))$$

et on voit que la famille  $(\psi_i^k)_{i \in I}$  réalise une partition de l'unité  $\mathcal{F}_k$ -adaptée subordonnée au recouvrement précédent. ■

**Théorème 13** Dans une variété multiriemannienne, on a les propriétés suivantes:

- 1) il existe une métrique quasi-fibrée pour chacun des feuilletages constitutifs;
- 2) ces feuilletage sont transversalement intégrable et de feuilletages transverses également riemanniens;
- 3) les feuilletages sont géodésibles;
- 4) les feuilletages sont parallèles;
- 5) la connexion de Levi Cevita induit sur chaque feuilletage la connexion de Bott;

6) la courbure  $R$  admet la décomposition  $R = \bigoplus_{i=1}^p R_i$  où  $R_i(X, Y) = R(X_i, Y_i)$ ;  
 7) le feuilletage  $\mathcal{F}_J$  défini par le système différentiable  $\bigoplus_{l \in J} T\mathcal{F}_l$  est métrique, parallèle, et de feuilletage transverse  $\mathcal{F}_J^\perp = \mathcal{F}_{I_p - J}$  le feuilletage complémentaire de  $\mathcal{F}_J$ .

**Preuve.** La métrique quasi-fibrée du feuilletage  $\mathcal{F}_k$ , feuilletage complémentaire de  $\mathcal{F}_k$ , induit une métrique  $g_{\partial(\mathcal{F}_k)}$  sur son fibré normal; puisque cette dernière s'obtient localement par pull back de la métrique riemannienne de  $T^k$ , elle y dépend uniquement des coordonnées transverses de  $\mathcal{F}_k$ . Ainsi au niveau d'un ouvert distingué de  $\mathcal{F}_k$ , on a  $g_{\partial(\mathcal{F}_k)} = \sum a_{il}^k(x_1^k, \dots, x_{n_k}^k) dx_i^{j_i^{(k)}} \otimes dx_i^{j_i^{(k)}}$ . Ainsi  $g = \bigoplus_{k=1}^p g_{\partial(\mathcal{F}_k)}$  est une métrique sur  $M$  et cette métrique est quasi-fibrée pour chacun des feuilletages et dans cette métrique, les feuilletages constitutifs sont deux à deux orthogonaux.

Si on considère maintenant la connexion de Levi Cevita associée à cette métrique, on voit avec la formule donnant les coefficients de Riemann-Christoffel

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left( \frac{\partial g_{kl}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial \xi^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \xi^l} \right)$$

que les  $\Gamma_{jk}^i$  sont identiquement nuls lorsque  $j \in J^{(m)}$  et  $k \in J^{(n)}$  avec  $1 \leq m \neq n \leq p$  et que donc  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} = 0$ . Ce qui permet de voir que  $\nabla_X Y$  reste tangent à  $\mathcal{F}_k$  si  $Y$  est tangent à  $\mathcal{F}_k$  et que toutes les distributions issues du système sont invariantes par le transport parallèle correspondant à cette métrique  $g$ . De façon précise, en utilisant la nullité de la torsion de cette connexion, on a pour tous  $i \neq j$ ,  $X$  tangent à  $\mathcal{F}_i$  et  $Y$  tangent à  $\mathcal{F}_j$ ,  $\nabla_X Y = [X, Y]_j$ ;  $[X, Y]_j$  étant la composante de  $[X, Y]$  dans  $\mathcal{X}(\mathcal{F}_j)$ , le module des champs tangents à  $\mathcal{F}_j$ . Ce qui montre bien que la connexion de Levi Cevita induit sur chaque feuilletage la connexion de Bott et que

$$\begin{aligned} R(X, Y) &= R_1(X, Y) + R_2(X, Y) + \dots + R_p(X, Y) = \\ &= R_1(X, Y) + R_2(X, Y) + \dots + R_p(X, Y) \end{aligned}$$

puisque  $R(X_i, X_j) = 0$  pour  $X_i \in \mathcal{X}(\mathcal{F}_i)$ ,  $X_j \in \mathcal{X}(\mathcal{F}_j)$  et  $i \neq j$ .

En se référant à cette métrique quasi-fibrée commune tout le reste devient évident si on se souvient qu'un feuilletage transversalement intégrable est riemannien si et seulement si le feuilletage transverse est géodésible[12]. Dans ces conditions, ici tous les feuilletages de l'anneau sont riemanniens et géodésibles, par conséquent parallèles et de feuilletages transverses également riemanniens, géodésibles et parallèles. Enfin  $(\bigoplus_{l \in J} T\mathcal{F}_l)^\perp = \bigoplus_{l \in I_p - J} T\mathcal{F}_l$  montre  $(\mathcal{F}_J)^\perp = \mathcal{F}_{I_p - J}$ .

■

**Remarque 14** Si  $TM = \bigoplus_{i=1}^p T\mathcal{F}_i$ , où les  $\mathcal{F}_i$  sont des flots riemanniens alors  $M$  est à courbure nulle.

### 1.2.3 Cohomologie d'une variété multiriemannienne compacte

On a là, une obstruction à l'existence d'une structure  $p$ -riemannienne

**Théorème 15** Pour une variété  $p$ -riemannienne compacte sans bord, on a pour tout  $1 \leq k \leq p$ ,  $H^{\dim \mathcal{F}_k}(M, \mathcal{F}_k) = \langle a_k \rangle$  et  $H^{\dim M}(M) = \langle \prod_{i=1}^{i=p} a_i \rangle = \langle a_1 \smile \dots \smile a_p \rangle$ , le cup produit de ces  $p$  générateurs.

**Preuve.** Si  $\omega_k$  est une forme volume (resp. une forme sans singularité) sur la variété transverse  $T^k$ , par pull back avec les submersions d'ouverts distingués et par recollement au moyen d'une partition de l'unité  $\mathcal{F}_k$ -adaptée, on obtient une forme fermée  $\widetilde{\omega}_k$  sur  $M$ . Par construction elle est basique pour chacun des feuilletages  $\mathcal{F}_i, i \neq k$ .

$\Omega = \widetilde{\omega}_1 \wedge \dots \wedge \widetilde{\omega}_p$  est une  $m$ -forme volume sur  $M$ . Aucune des formes  $\widetilde{\omega}_k$  n'est exacte! En effet si  $\widetilde{\omega}_{k_1}$ , était exacte avec  $\widetilde{\omega}_{k_1} = d\alpha_k$ , on aurait comme les formes sont fermées,  $\omega = (-1)^k d\alpha_k \wedge \widetilde{\omega}_2 \dots \wedge \widetilde{\omega}_p$ , et par la formule de Stokes on aurait  $0 = \int_{\partial M} \alpha \wedge \widetilde{\omega}_2 \dots \wedge \widetilde{\omega}_p = \int_M \Omega \neq 0$ . Si on note  $a_k$  la classe de cohomologie de  $\widetilde{\omega}_k$ , alors  $a_k \neq 0$  et il est clair que  $H^{\dim \mathcal{F}_k}(M, \mathcal{F}_k) = \langle a_k \rangle$  et  $H^{\dim M}(M) = \langle a_1 \smile \dots \smile a_p \rangle$  ■

**Remarque 16** 1) Dans une telle variété les  $H^{\dim \mathcal{F}_k}(M)$  sont non nuls.

2)  $\widetilde{\omega}_k = 0$  est une équation du feuilletage défini par le système différentiel  $\bigoplus_{1 \leq i \neq k \leq m} T\mathcal{F}_i$  et  $(\widetilde{\omega}_i = 0, i \neq k)$  une équation de  $\mathcal{F}_k$ .

## 1.3 STRUCTURE PRESQUE MULTIPRODUIT ET DRAPEAUX DE FEUILLETAGES.

### 1.3.1 Structure presque multiproduit et drapeaux de feuilletages.

On rappelle qu'un feuilletage  $(M, \mathcal{F}')$  est dite une extension de  $(M, \mathcal{F})$  si toute feuille de  $\mathcal{F}'$  est une réunion de feuilles de  $\mathcal{F}$ , et on note  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ . Jusqu'à maintenant un drapeau de feuilletages est une suite d'extensions successives à pas un d'un flot([1],[4], [5], [6], [7]). On va généraliser cette notion à des cas où la suite d'extensions ne débute pas nécessairement par un flot et où les pas ne sont pas nécessairement réguliers.



**Définition 17** Un drapeau généralisé est une suite d'extensions successives d'un feuilletage donné. Un drapeau est dit riemannien (resp. de Lie) si ses feuilletages le sont. Un drapeau à  $p$  feuilletages sera appelé parfois  $p$ -drapeau et sera noté  $\mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_p$ .

**Définition 18** Dans une variété riemannienne un drapeau quelconque est dit métrique si et seulement si ses feuilletages sont métriques.

**Exemple 19** Dans une variété presque  $p$ -produit, à toute suite croissante  $J_1, \dots, J_s$  de  $\mathcal{P}(I_p)$ , on peut associer le drapeau généralisé  $\mathcal{F}_{J_1} \subset \dots \subset \mathcal{F}_{J_s}$ ;

**Définition 20** Un tel drapeau généralisé sera appelé tout simplement drapeau de l'anneau  $\mathcal{A}_p$ .

On notera donc que les drapeaux de l'anneau sont en correspondance biunivoque avec les suites croissantes de  $\mathcal{P}(I_p)$ .

**Exemple 21** A toute variété multiriemannienne on peut associer des drapeaux irréguliers riemanniens .

Le résultat suivant établit le lien entre drapeau et structure multiriemannienne.

**Théorème 22** Une variété est  $p+1$ -riemannienne si et seulement si elle supporte un  $p$ -drapeau de feuilletages parallèles.

**Preuve.** A partir d'une variété  $p+1$ -riemannienne, il est loisible ,à l'image de l'exemple précédent , de lui associer un  $p$ - drapeau de feuilletages riemanniens.

Réciproquement si on part d'un drapeau (généralisé)  $\mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_p$  de  $p$  feuilletages riemanniens de  $M$ , on peut écrire que

$$TM = T\mathcal{F}_1 \oplus (T\mathcal{F}_1)_{T\mathcal{F}_2}^\perp \oplus \dots \oplus (T\mathcal{F}_{p-1})_{T\mathcal{F}_p}^\perp \oplus T\mathcal{F}_p^\perp$$

Soit  $2 \leq i \leq p$ . Pour des champs de vecteurs  $X, Y$  dans  $\Gamma((T\mathcal{F}_{i-1})_{T\mathcal{F}_i}^\perp)$ ,  $[X, Y]$  est dans  $\Gamma(T\mathcal{F}_i)$  et pour  $Z$  dans  $\Gamma(T\mathcal{F}_{i-1})$ , on a

$$0 = Yg(X, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(X, \nabla_Y Z) = g(\nabla_Y X, Z)$$

puisque  $\mathcal{F}_{i-1}$  étant parallèle  $\nabla_Y Z$  reste comme  $Z$  dans  $\Gamma(T\mathcal{F}_{i-1})$ ; ce qui implique ,puisque  $\nabla_Y X \in \Gamma(T\mathcal{F}_i)$  ,  $\nabla_Y X \in \Gamma(T\mathcal{F}_{i-1})_{T\mathcal{F}_i}^\perp$ . Ensuite

$$g(Z, [X, Y]) = g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_X Y, Z) = 0$$

ceci pour tout  $Z$  dans  $\Gamma(T\mathcal{F}_{i-1})$  et il en résulte que  $[X, Y] \in \Gamma(T\mathcal{F}_{i-1})_{T\mathcal{F}_i}^\perp$ . Montrons enfin que le feuilletage  $\tilde{\mathcal{F}}_i$  défini par le système  $(T\mathcal{F}_{i-1})_{T\mathcal{F}_i}^\perp$  est riemannien. Soit  $X \in \Gamma((T\mathcal{F}_{i-1})_{T\mathcal{F}_i}^\perp)$ ,

Pour  $Y \in \Gamma(T\mathcal{F}_{i-1})$  (resp.  $Y \in \Gamma(T\mathcal{F}_i)^\perp$ ) et  $Z \in \Gamma(T\mathcal{F}_i)^\perp$ , on a

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) = g([X, Y] - \nabla_Y X, Z) + g(Y, [X, Z] - \nabla_Z X)$$

, comme le feuilletage  $\mathcal{F}_i$  est parallèle et que le transport parallèle préserve l'orthogonalité  $\nabla_Z X$  reste tangent à  $\mathcal{F}_i$  et  $\nabla_Y X$  ( resp.  $\nabla_Z X$  ) est orthogonal à  $\mathcal{F}_{i-1}$ . On a finalement

$$Xg(Y, Z) = g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z])$$

Ce qui assure que le feuilletage  $\tilde{\mathcal{F}}_i$  est transversalement riemannien. Ensuite comme le feuilletage  $\mathcal{F}_p$  est parallèle, on sait qu'il est transversalement intégrable et de feuilletage transverse également riemannien; soit  $\tilde{\mathcal{F}}_{p+1}$  ce feuilletage et notons  $\mathcal{F}_1 = \tilde{\mathcal{F}}_1$ , alors on a au total  $TM = \bigoplus_{i=1}^{p+1} T\tilde{\mathcal{F}}_i$  i.e.  $M$  est une variété  $p+1$ -riemannienne, et le résultat est prouvé. ■

**Corollaire 23** *Une variété supportant un feuilletage totalement transversalement parallélisable est une variété multiriemannienne.*

**Preuve.** Soit  $(M, \mathcal{F})$  un tel feuilletage et  $(X_2, \dots, X_p)$  son parallélisme transverse et  $g$  la métrique quasi-fibrée associée. Considérons les  $p-1$  flots  $\mathcal{F}_i$  engendrés par les  $X_i$ . En posant  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$ , on sait (corol.6) que la famille  $(\mathcal{F}_i)_{1 \leq i \leq p}$  est une famille stable qui fait que la structure de variété de  $M$  est celle d'une variété presque  $p$ -produit. Vérifions maintenant que cette métrique  $g$  est quasi-fibrée pour chacun de ces flots  $\mathcal{F}_i$ . En effet pour  $i, j, k \geq 2$ , distincts deux à deux,  $X$  tangent au flot  $\mathcal{F}_i$

1)  $Y$  tangent au flot  $\mathcal{F}_j$ ,  $Z$  tangent au flot  $\mathcal{F}_k$ , en raison de parallélisme total et d'orthogonalité, on a

$$g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z]) = 0 + 0 = Xg(Y, Z)$$

2)  $Y$  tangent au flot  $\mathcal{F}_j$ ,  $Z$  tangent à  $\mathcal{F}$ , pour les mêmes raisons, on a:

$$g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z]) = 0 + 0 = Xg(Y, Z)$$

3)  $Y, Z$  tangents à  $\mathcal{F}$ , le feuilletage  $\mathcal{F}$  étant riemannien la connexion de Bott induite donne ici

$$\nabla_X Y = [X, Y]_1, \nabla_X Z = [X, Z]_1$$

de sorte qu'on a avec l'orthogonalité:

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) = g([X, Y]_1, Z) + g(Y, [X, Z]_1) \\ &= g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z]) \end{aligned}$$

■

### 1.3.2 Structure presque multiproduct et produit

Ici nous présentons des situations où la structure presque produit se décompose en produit de variétés ou de variétés presque produit. En s'appuyant essentiellement sur le théorème d'Ehresmann[12], on obtient

**Proposition 24** *Toute variété compacte supportant un feuilletage totalement transversalement parallélisable admettant une feuille compacte et à variété basique simplement connexe est un produit riemannien de la feuille compacte par une variété transverse multiriemannienne.*

**Preuve.** Cette variété  $M$  est alors multiriemannienne (corol.23) . Ensuite le feuilletage  $(M, \mathcal{F})$  étant transversalement parallélisable et admettant une feuille compacte  $F$ , est une fibration [15]  $\pi : M \rightarrow B$  de fibre  $F$ ; le fait que le feuilletage admet un parallélisme transverse totalement parallélisable implique que le feuilletage est transversalement intégrable et que ce feuilletage transverse est également riemannien (théo.13). Par ailleurs, par le théorème d'Ehresmann sur les feuilletages transverses à une fibration [12], ce feuilletage transverse provient de la suspension d'une représentation du groupe fondamental de la variété basique  $B$  dans le groupe de difféomorphismes de  $F$ . Comme cette représentation est triviale, la variété  $M$  est le produit riemannien de la feuille compacte et de la variété basique du feuilletage qui est une variété compacte totalement parallélisable, donc canoniquement une variété multiriemannienne. ■

**Proposition 25** *Toute variété  $p$ -riemannienne complète connexe et simplement connexe est le produit riemannien de ses feuilles.*

**Preuve.** Soit  $M$  une variété  $p$ -riemannienne complète connexe et simplement connexe. En appliquant le théorème de Blumenthal-Hebda[2] aux feuilletages riemanniens  $\mathcal{F}_i$  et  $\mathcal{F}_i^\perp = \cup_{k \neq i} \mathcal{F}_k$ , il vient que chacun des feuilletages constitutifs est simple et  $M$  est le produit riemannien d'une feuille  $F_1$  de  $\mathcal{F}_1$  et d'une feuille  $F_1^\perp$  de  $\mathcal{F}_1^\perp$ ; soit  $M = F_1 \times F_1^\perp$ . Les feuilletages constitutifs  $M$  se projettent sur  $F_1^\perp$  en  $(p-1)$  feuilletages riemanniens non triviaux ( celle de  $\mathcal{F}_1$  étant triviale !) et  $F_1^\perp$  est alors une variété  $(p-1)$ -feuilletée complète connexe et simplement connexe et une récurrence sur  $p$  permet de conclure.

**Définition 26**  *$p$  étant un entier  $\geq 2$ , un  $p$ -groupe de Lie est un groupe de Lie dont la structure de variété sous-jacente est une variété  $p$ -feuilletée avec des feuilletages invariants par translations.*

■

Une caractérisation d'un  $p$ -groupe de Lie est donnée par

**Proposition 27**  *$G$  est un  $p$ -groupe de Lie si et seulement si son algèbre de Lie se décompose en somme directe de  $p$  idéaux.*

**Preuve.** Soit  $\mathcal{G} = Lie(G) = \bigoplus_{i=1}^p \mathcal{H}_i$  une décomposition de l'algèbre de Lie de  $G$  en somme directe de  $p$  idéaux, alors les système différentiables  $g \rightarrow g \cdot \mathcal{H}_i$  définissent  $p$  feuilletages de Lie  $\mathcal{F}_i$  sur  $G$  invariants par toute translation de  $G$ : on a :  $TG = \bigoplus_{i=1}^p T\mathcal{F}_i$  et pour  $i \neq j, [\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j] = 0$  ; ce qui implique que pour  $1 \leq i, j \leq p, [\mathcal{X}(\mathcal{F}_i), \mathcal{X}(\mathcal{F}_j)] \subset \mathcal{X}(\mathcal{F}_i) + \mathcal{X}(\mathcal{F}_j)$  ( $\mathcal{X}(\mathcal{F}_k)$  étant le module des

champs tangents à  $\mathcal{F}_k$ ), de sorte que d'après la caractérisation d'une variété multipresque produit 4,  $G$  est une variété  $p$ - produit qui ,par construction, est un  $p$ - groupe de Lie.

Réciproquement si  $G$  est un  $p$ - groupe de Lie avec  $TG = \bigoplus_{i=1}^p T\mathcal{F}_i$  et  $\mathcal{F}$  un feuilletage constitutif, si  $X_e$  et  $Y_e$  sont deux vecteurs tangents de  $\mathcal{F}$  en  $e$ ,  $X$ ,  $Y$ , les champs invariants (par translation) associés, on a :  $[X, Y](e) = [X_e, Y_e]$  . Comme le feuilletage  $\mathcal{F}$  est invariant par toute translation , alors les champs  $X$ ,  $Y$ , tangents à  $\mathcal{F}$  en  $e$ , restent tangents à  $\mathcal{F}$ , donc  $[X_e, Y_e]$  en particulier est alors tangent à  $\mathcal{F}$  en  $e$ ; ce qui permet de dire  $\mathcal{H} = T_e\mathcal{F}$  est un sous-algèbre de Lie de  $\mathcal{G}$ . Toujours puisque  $\mathcal{F}$  est invariant par translation, on a pour tout  $g \in G$ ,  $g \cdot \mathcal{H} \cdot g^{-1} = \mathcal{H}$ ; ce qui implique  $\mathcal{H}$  est un idéal de  $\mathcal{G}$ , de sorte que  $\mathcal{G} = \bigoplus_{i=1}^p \mathcal{H}_i$ ,  $\mathcal{H}_i$  étant l'idéal correspondant au feuilletage constitutif  $\mathcal{F}_i$ . ■

**Théorème 28** *Dans l'anneau de feuilletages d'un  $p$ -groupe de Lie  $G$ , tous les feuilletages sont transversalement de Lie et, chaque feuilletage constitutif contient un sous-groupe normal de  $G$  de dimension maximale et ses feuilles sont les translatés de ce sous-groupe. Le revêtement universel de  $G$  est un produit direct des revêtements universels de ces sous-groupes normaux .*

*Lorsque ces sous-groupes normaux sont fermés et d'intersection deux à deux triviale,  $G$  est le produit direct de ces  $p$  sous-groupes.*

*Lorsque ces sous-groupes normaux sont compacts,  $G$  est compact et est le revêtement galoisien fini d'un produit direct des quotients de ces  $p$  sous-groupes.*

**Preuve.** 1) Un tel groupe est une variété  $p$ -riemannienne complète; en effet on considère sur l'espace tangent  $T_eG$  une base  $(E_{i_h}^h)_{\substack{1 \leq h \leq p \\ 1 \leq i_h \leq \dim \mathcal{F}_h}}$  et on note

$(\xi_{i_h}^h)_{\substack{1 \leq h \leq p \\ 1 \leq i_h \leq \dim \mathcal{F}_h}}$  le parallélisme invariant par l'action à gauche de  $G$  associé; il

est clair que pour un feuilletage constitutif quelconques  $\mathcal{F}_q$ ,  $(\xi_{i_h}^h)_{\substack{1 \leq h \leq p, h \neq q \\ 1 \leq i_h \leq \dim \mathcal{F}_h}}$

est un parallélisme  $\mathcal{F}_q$ -transverse et  $\mathcal{F}_q$ -feuilleté; ce qui assure que chaque feuilletage constitutif est transversalement parallélisable, donc riemannien; au total  $G$  est une variété  $p$ -riemannienne dont une métrique quasi-fibrée commune à tous les feuilletages constitutifs est celle dont un repère orthonormé de champs de vecteurs est  $(\xi_{i_h}^h)_{\substack{1 \leq h \leq p \\ 1 \leq i_h \leq \dim \mathcal{F}_h}}$ . Et on sait *a priori* que  $G$  est complet pour cette métrique  $G$ -invariante à gauche .

2) Les feuilles transverses contenant l'élément neutre sont des sous-groupes normaux de  $G$ .

En effet pour une telle feuille  $F$ , son espace tangent en  $e$ , est par le théo. de Frobenius une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie de  $G$ ; on sait alors qu'il existe un sous- groupe de Lie connexe et un seul ayant pour algèbre de Lie  $T_eF$ ; par suite  $F$  est bien un sous-groupe immergé de  $G$ . Ensuite le fait que les feuilletages sont invariants par translation à gauche et translation à droite assure que  $gFg^{-1} = F$  et cela pour dire que  $F$  est un sous-groupe normal de  $G$ .

3) On va établir d'abord le résultat pour  $p = 2$ .

- Lorsque  $p = 2$ , avec  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  pour feuilletages constitutifs le groupe de Lie  $G$  est une variété bi-riemannienne complète et  $\mathcal{F}_1^\perp = \mathcal{F}_2$ , le théo. de Blumenthal-Hebda [2] permet de relever sur le revêtement universel  $\widetilde{G}$  de  $G$  les feuilletages  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  en deux feuilletages riemanniens simples  $\widetilde{\mathcal{F}}_1$  et  $\widetilde{\mathcal{F}}_2$  où  $\widetilde{G}$  est une variété produit dont les facteurs sont deux feuilles transverses de  $\widetilde{\mathcal{F}}_1$  et  $\widetilde{\mathcal{F}}_2$  et ces feuilletages  $\widetilde{\mathcal{F}}_1$  et  $\widetilde{\mathcal{F}}_2$  étant tout simplement les feuilletages horizontal et vertical de ce produit. Par ailleurs  $\widetilde{G}$  le revêtement universel de  $G$  a aussi une structure de groupe de Lie; soit  $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$  son élément neutre. En se positionnant à partir de  $\tilde{e}$ , on peut poser  $\widetilde{G} = \widetilde{F}_{\tilde{e}_1}^1 \times \widetilde{F}_{\tilde{e}_2}^2$ , or  $\widetilde{F}_{\tilde{e}_1}^1$  et  $\widetilde{F}_{\tilde{e}_2}^2$  se projette respectivement sur les groupes de Lie  $F_{e_1}^1$  et  $F_{e_2}^2$ ; il en résulte que les feuilles transverses en  $\tilde{e}$  des feuilletages relevés sont des groupes de Lie simplement connexes et sont les revêtements universels respectifs des groupes de Lie  $F_{e_1}^1$  et  $F_{e_2}^2$ ; on a bien  $\widetilde{G} = \widetilde{F}_{\tilde{e}_1}^1 \times \widetilde{F}_{\tilde{e}_2}^2 = \widetilde{F}_{e_1}^1 \times \widetilde{F}_{e_2}^2$ ;  $\widetilde{G}$  étant un produit de groupes de Lie, il reste à préciser si ce produit est *direct* ou *semi-direct*. Montrons qu'en fait  $\widetilde{G}$  est un produit direct : en effet comme les relevés des feuilles passant par  $e$  sont des sous-groupes normaux, et les feuilletages relevés des feuilletages de Lie simples définis par les morphismes de groupes (les deux projections canoniques)  $\widetilde{G} \longrightarrow \frac{\widetilde{G}}{\widetilde{F}_{\tilde{e}_i}^i} = \widetilde{F}_{\tilde{e}_j}^j$ ,  $\widetilde{G}$  ne peut être que le produit direct parce que sinon l'un de ces deux feuilletages relevés en question ne serait pas de Lie! Ensuite puisque les feuilletages relevés sont évidemment invariants par translation, donc en particulier invariants par l'action de  $\pi_1(G)$  alors, par passage au quotient, comme on le voit avec le diagramme ci-dessous, les deux feuilletages constitutifs sont des feuilletages de Lie.

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{G} & \longrightarrow & \frac{\widetilde{G}}{\widetilde{F}_{\tilde{e}_i}^i} = \widetilde{F}_{\tilde{e}_j}^j \\ \pi_1(G) \downarrow & & \\ G & & \end{array}$$

En se plaçant dans l'anneau des feuilletages, on sait que chaque feuilletage constitutif  $\mathcal{F}_s$  est transversalement orthogonal de feuilletage transverse riemannien  $\mathcal{F}_s^\perp = \bigcup_{1 \leq t \leq p, t \neq s} \mathcal{F}_t$ , donc les deux feuilletages forment un bifeuilletage de  $G$ . Il résulte de ce qui précède que chacun des feuilletages constitutifs est de Lie. Par récurrence  $\widetilde{G} = \widetilde{F}_{\tilde{e}_1}^1 \times \widetilde{F}_{\tilde{e}_2}^2 \times \dots \times \widetilde{F}_{\tilde{e}_p}^p = \widetilde{F}_{e_1}^1 \times \widetilde{F}_{e_2}^2 \times \dots \times \widetilde{F}_{e_p}^p$  est le produit direct Le feuilletage réunion de deux feuilletages constitutifs  $\mathcal{F}_{ij} = \mathcal{F}_i \cup \mathcal{F}_j$  est également un feuilletage de Lie, puisque le diagramme suivant où toutes les flèches sont des projections canoniques, montre qu'il est une extension de Lie de  $\mathcal{F}_i$

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{G} & \longrightarrow & \frac{\widetilde{G}}{\widetilde{F}_{\tilde{e}_i}^i} & \longrightarrow & \frac{\frac{\widetilde{G}}{\widetilde{F}_{\tilde{e}_i}^i}}{\widetilde{F}_{\tilde{e}_j}^j} = \frac{\widetilde{G}}{\widetilde{F}_{\tilde{e}_i}^i \times \widetilde{F}_{\tilde{e}_j}^j} \\ \pi_1(G) \downarrow & & & & \\ G & & & & \end{array}$$

Il suit par récurrence que tous les feuilletages de l'anneau sont de Lie.

Et chaque feuilletage est l'ensemble des translatsés de sa feuille passant par  $e$ , laquelle feuille est un sous-groupe normal de  $G$ . On notera  $F_e^i$  le plongement canonique de  $F_{e_i}^i$  dans  $G$ ; par exemple dans le cas  $p = 2 : F_e^1 = F_{e_1}^1 \times \{e_2\}$ ,  $F_e^2 = \{e_1\} \times F_{e_2}^2$

- Dans le cas où les feuilles transverses en  $e$  sont fermées et d'intersection triviale alors  $F_e^1$  intersecte toute feuille  $\mathcal{F}_2$  en un et un seul point puisque pour tout  $k \in F_e^1$ ,  $F_k^2$  étant la feuille de  $\mathcal{F}_2$  passant par  $k$ , on a :

$$F_k^2 \cap F_e^1 = k.F_e^2 \cap F_e^1 = k.F_e^2 \cap k.F_e^1 = k.(F_e^2 \cap F_e^1) = \{ke\} = \{k\};$$

de même  $F_e^2$  intersecte toute feuille du feuilletage  $\mathcal{F}_1$  en un et un seul point; ainsi les deux feuilles transverses en  $e$  sont des unisections. Au total  $G$  est une variété bi-riemannienne régulière (vbr), donc,  $G$  est le produit riemannien de ces deux unisections passant par  $e$  [5]; comme ces deux unisections sont des sous-groupes normaux de  $G$  et que les feuilletages sont de Lie et sont les feuilletages triviaux du produit, en argumentant comme précédemment on conclut que  $G$  est un produit direct des groupes de Lie  $F_{e_1}^1$  et  $F_{e_2}^2$ . Comme le feuilletage est à feuilles fermées, son espace de feuilles est son unisection ou si l'on préfère sa variété basique; cette unisection est un  $(p-1)$ -groupe de Lie et une récurrence évidente permet de conclure.

- Dans le cas où les feuilles transverses en  $e$  sont compactes et d'intersection non triviale,  $\Gamma = F_e^1 \cap F_e^2$  est alors un sous-groupe normal compact discret donc fini et dans le centre de  $G$ ; et le bifeuilletage se projette sur le groupe de Lie quotient  $\frac{G}{\Gamma}$  en un bifeuilletage de Lie dont les feuilles transverses en l'élément neutre de  $\frac{G}{\Gamma}$  sont fermées d'intersection triviale; ce qui nous ramène dans le cas précédent;  $\frac{G}{\Gamma}$  est alors le produit direct des groupes de Lie compacts  $\frac{F_e^1}{\Gamma}$  et  $\frac{F_e^2}{\Gamma}$ ; et le groupe de Lie  $G$  est tel qu'on l'a vu de revêtement universel un produit direct de groupes de Lie, et  $G$  lui-même est un revêtement fini à  $m$  feuilletés ( $m = \text{ordre de } \Gamma$ ) d'un produit direct de groupes de Lie donc nécessairement compact.

Et le résultat, par récurrence, vaut pour tout  $p \geq 3$ . ■

## References

- [1] **B.Bossoto and H.Diallo, 2002.** *Sur les drapeaux de feuilletages riemanniens*, JP Journal of Geometry and Topology, 2, 3, 281-288.
- [2] **R. A. Blumenthal, J. Hebda, 1983.** De Rham decomposition theorem for foliated manifolds, Ann. Ins. Fourier, 33(2), pp. 183-198.
- [3] **Y.Carrière, 1984.** *Flots riemanniens*, in "Structures transverses des feuilletages", Astérisque, 116, 31-5.
- [4] **C. Dadi and H. Diallo, 2007.** *Extension d'un feuilletage de Lie minimal d'une variété compacte*, Afrika Mathematika, 3, 18, 34-45.

- [5] **H.Diallo, 2000.** *Les variétés biriemanniennes*.Proyecciones, universidad Católica del Norte Antofagasta - Chile,vol. 19, N° 1, pp. 95-104.
- [6] **H.Diallo, 2002 .** *Sur les drapeaux de Lie*. Afrika Mathematika,3, 13 ,75-86.
- [7] **H.Diallo, 2005 .***Relèvement d'un drapeau riemannien et drapeaux de Lie complets du tore hyperbolique n+1- dimensionnel*. Ann. math. Blaise Pascal 12, 245- 258.
- [8] **H.Diallo, 2008 .***Structure d'un drapeau riemannien complet*. African Diaspora Journal of Mathematica,vol 7, Issue 2, pp.43-57.
- [9] **P.Dubreil, M.L. Dubreil J.,1964.** *Leçons d'Algèbre Moderne*, Monographies universitaires des Mathématiques, Dunod, Paris.
- [10] **E.Fédida, 1974 .***Sur l'existence des Feuilletages de Lie*. CRAS de Paris, 278, 835-837.
- [11] **E. Ghys, 1984.** *Feuilletages riemanniens sur les variétés simplement connexes*, Anna . Inst. Fourier , Grenoble, 34, 4, 203-223.
- [12] **C. Godbillon, 1985.** *Feuilletage:Etude géométrique I*, Publication IRMA, Strasbourg.
- [13] **A. Haefliger, 1984.** *Groupoïdes d'holonomie et classifiants*. Astérisque, 116, 98- 107.
- [14] **R. Hermann, 1960.** *A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds be a fibre bundle*, Proc. A. M. S. 11, pp. 236-242.
- [15] **P.Molino, 1988.** *Riemannian foliations*. Birkhäuser.