



HAL
open science

ANNEAU DE FEUILLETAGES D'UNE VARIÉTÉ p -RIEMANNIENNE.

Hassimiou Diallo

► **To cite this version:**

Hassimiou Diallo. ANNEAU DE FEUILLETAGES D'UNE VARIÉTÉ p -RIEMANNIENNE.. 2014.
hal-01066563v1

HAL Id: hal-01066563

<https://hal.science/hal-01066563v1>

Preprint submitted on 21 Sep 2014 (v1), last revised 2 Feb 2015 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ANNEAU DE FEUILLETAGES D'UNE VARIETE p -RIEMANNIENNE

Hassimiou DIALLO

Email:diallomh@yahoo.fr

Laboratoire de Mathématiques Fondamentales ,
Ecole Normale Supérieure d'Abidjan,Côte d'Ivoire.

September 18, 2014

Abstract

Locally, a almost p -product manifold is a polytope of a product of p -varieties model , with changes card that are products of p morphisms . We show that a almost p -product manifold is characterized by the data of a complete and stable family of p nontrivial foliations; and then this family generates a Boolean ring over which the subset consisting of Lie foliations is a final section for Boolean algebra associated (that's to say, in this ring, any extension of a Lie foliation is a Lie foliation). In addition, we establish that when the family foliations are Riemannian foliations , every foliations of this ring are both metric and parallel. Finally, in remaining still in this context, we give under certain conditions, cohomological obstructions to the existence of a structure almost p -product.

Mots-clés: feuilletage riemannien; feuilletage de Lie; feuilletage parallèle; extension de feuilletage; drapeau de feuilletages.

MCS:53C12;53R30; 53C40.

Dans tout ce qui suit, les objets considérés sont supposées C^∞ et p un entier supérieur ou égal à 2. Si nécessaire la variété et les feuilletages seront pris orientables.

Notation 1 $I_p = \{1, \dots, p\}$, $\mathcal{P}(I_p)$ l'ensemble des parties de I_p ,

$$\prod_{k=1}^p T_k = T_1 \times \dots \times T_p, \quad \prod_{k=1}^p \theta_k = \theta_1 \times \dots \times \theta_p,$$

chaque θ_i appliquant un ouvert de T_i sur un ouvert de T_i .

1 STRUCTURE PRESQUE MULTIPRODUIT ET EXTENSION DE FEUILLETAGE.

1.1 Structure presque multiproduit

Définition 2 Une structure de variété presque multiproduit de type p ou une variété presque p -produit sur M est définie par la donnée d'une variété modèle $\prod_{k=1}^p T^k$ et d'un atlas tel que pour deux cartes quelconques (U_i, φ_i) (U_j, φ_j) , $\varphi(U_i)$ (resp. $\varphi(U_j)$) est un produit $\prod_{k=1}^p V_i^k$ avec V_i^k ouvert de T^k (resp. $\prod_{k=1}^p V_j^k$ avec V_j^k ouvert de T^k) et pour $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, le changement de cartes est de la forme $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} = \prod_{k=1}^p \theta_{ij}^k = \theta_{ij}^1 \times \dots \times \theta_{ij}^p$.

On remarquera que toute variété presque p - produit est une variété presque k - produit pour $2 \leq k \leq p$.

Définition 3 Une famille finie de p feuilletages (\mathcal{F}_i) d'une variété M est dite **complète** si $TM = \bigoplus_{i=1}^p T\mathcal{F}_i$, **stable** si pour tous $1 \leq i, j \leq p$, $[\mathcal{X}(\mathcal{F}_i), \mathcal{X}(\mathcal{F}_j)] \subset \mathcal{X}(\mathcal{F}_i) + \mathcal{X}(\mathcal{F}_j)$

$(\mathcal{X}(\mathcal{F}_k))$ étant le module des champs tangents à \mathcal{F}_k).

On a la caractérisation utile suivante:

Théorème 4 Une variété M est une variété presque p -produit si et seulement si elle supporte une famille complète et stable de p feuilletages .

Ces feuilletages sont appelés *feuilletages constitutifs* de la variété presque p -produit .

Preuve. Soit $(\mathcal{F}_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille complète et stable. La stabilité implique l'intégrabilité des système différentiel $\bigoplus_{i=1, i \neq h}^p T\mathcal{F}_i$ Soit $(\mathcal{F}_h)_{1 \leq h \leq p}$ la famille de feuilletages correspondante. Dans un ouvert U_i distingué à la fois pour chacun de ces feuilletages , considérons leurs applications distinguées f_i^h , et leurs fonctions de transition $g_{ij}^h = \theta_{ij}^h$ alors φ_i est une submersion surjective de U_i sur $\varphi_i(U_i)$. Quitte à rapetter $\varphi_i(U_i)$ en un polytope V_i de $\prod_{s=1}^p T^s$ et remplacer U_i par $\varphi_i^{-1}(V_i)$, on montre sans peine que $(U_i, \varphi_i = (f_i^1, \dots, f_i^p))_{i \in I}$ est un atlas de cartes dont le difféomorphisme de changement de cartes est explicitement est $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} = \prod_{k=1}^p \theta_{ij}^k$; ce qui permet de voir que la structure de variété de M est celle d'une structure presque multiproduit de type p .

Réciproquement, étant donné sur M une structure presque p -produit , définie par un atlas de cartes $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$, φ_i applique U_i dans $\prod_{j=1}^p T^j$. Soit p_k pour $1 \leq k \leq p$, la projection de $\prod_{s=1}^p T^s$ sur $\prod_{s \in I_p - \{k\}} T^s$, alors avec les notations

précédentes, $(U_i, f_i^k = p_k \circ \varphi_i, g_{ij}^k = \prod_{s \in I_p - \{k\}} \theta_{ij}^s, \prod_{s \in I_p - \{k\}} T^s)_{i \in I}$ est un cocycle définissant sur M un feuilletage \mathcal{F}_k , de dimension la dimension de T^k . On obtient ainsi p feuilletages $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$ tels que $TM = \bigoplus_{i=1}^p T\mathcal{F}_i$. Le diagramme commutatif suivant décrit mieux la façon dont les feuilletages sont obtenus:

$$\begin{array}{ccccc}
& & U_i \cap U_j & & \\
& \swarrow \varphi_i & & \searrow \varphi_j & \\
\varphi_i(U_i \cap U_j) = \prod_{s=1}^p V_i^s & \xrightarrow{\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}} & & \xrightarrow{\varphi_j} & \varphi_j(U_i \cap U_j) = \prod_{s=1}^p V_j^s \\
p_k \downarrow & & \prod_{s \in I_p - \{k\}} \theta_{ij}^s & & \downarrow p_k \\
\prod_{s \in I_p - \{k\}} V_i^s & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \prod_{s \in I_p - \{k\}} V_j^s
\end{array}$$

On note de même que $(U_i, f_i^{k,s} = p_{k,s} \circ \varphi_i, g_{ij}^{k,s} = \prod_{l \in \{1, \dots, p\} - \{k, s\}} \theta_{ij}^l, \prod_{l \in \{1, \dots, p\} - \{k, s\}} T^l)_{i \in I}$ est cocycle définissant un feuilletage \mathcal{J} associé au système différentiel $T\mathcal{F}_k \oplus T\mathcal{F}_s$ qui est donc intégrable et il en résulte évidemment $[\mathcal{X}(\mathcal{F}_k), \mathcal{X}(\mathcal{F}_s)] \subset \mathcal{X}(\mathcal{F}_k) + \mathcal{X}(\mathcal{F}_s)$ puisque $\mathcal{X}(\mathcal{F}_k) \subset \mathcal{X}(\mathcal{F}_k) + \mathcal{X}(\mathcal{F}_s)$ et $\mathcal{X}(\mathcal{F}_s) \subset \mathcal{X}(\mathcal{F}_k) + \mathcal{X}(\mathcal{F}_s)$. ■

Remarque 5 1) On notera qu'une famille complète de deux feuilletages est nécessairement stable; ainsi une variété dont le fibré tangent est somme directe de deux sous-fibrés non triviaux (i.e. une variété bifeuilletée) est une variété presque produit (i.e. une variété 2 - produit).

2) Si X et Y des sections du sous-fibré $\bigoplus_{j \in J} T\mathcal{F}_j$, alors $X = \sum_{j \in J} X_j$ et $Y = \sum_{j \in J} Y_j$ où X_j et Y_j sont dans $\mathcal{X}(\mathcal{F}_j)$, on vérifie bien avec cette condition et les propriétés du crochet, notamment sa \mathbb{R} -bilinearité que $[X, Y]$ reste une section du sous-fibré $\bigoplus_{j \in J} T\mathcal{F}_j$.

Ainsi le système différentiel $\bigoplus_{i \in J} T\mathcal{F}_i$ est intégrable, on notera \mathcal{F}_J le feuilletage qu'il définit et ce feuilletage sera dit composé; une feuille de \mathcal{F}_J est une réunion de feuilles de ses feuilletages constitutifs. Et il est clair que le feuilletage $\mathcal{F}_{I_p - J}$ défini par $\bigoplus_{l \in I_p - J} T\mathcal{F}_l$ est un feuilletage de dimension maximale strictement transverse à \mathcal{F}_J i.e. avec $\dim(\mathcal{F}_J \cap \mathcal{F}_{I_p - J}) = 0$.

Corollaire 6 Une variété supportant un feuilletage admettant un parallélisme transverse totalement intégrable est une variété presque multiproduit.

Preuve. Soit (M, \mathcal{F}) ce feuilletage. Supposons le de codimension p . Soit $(\xi_i)_{2 \leq i \leq p+1}$ le parallélisme transverse de \mathcal{F} et $(\mathcal{F}_i)_{2 \leq i \leq p+1}$ la famille de flots correspondante. Si on pose $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$, avec le total parallélisme des ξ_i , la famille $(\mathcal{F}_i)_{1 \leq i \leq p+1}$ est une famille à la fois complète et stable. Et on conclut avec la caractérisation précédente. ■

Notation 7 Pour une variété ppp M de feuilletages constitutifs $(\mathcal{F}_i)_{1 \leq i \leq p}$, on note pour $1 \leq k \leq p$, $J^{(k)}$ l'ensemble d'indices $J^{(k)} = (j_1^{(k)}, \dots, j_{n_k}^{(k)})$ où $n_k = \dim \mathcal{F}_k$. Pour la suite on adoptera parfois lorsque nécessaire le système de coordonnées suivant:

$$(U, (x^{j_1^{(1)}}), \dots, (x^{j_{n_1}^{(1)}}), \dots, (x^{j_1^{(k)}}), \dots, (x^{j_{n_k}^{(k)}}), \dots, (x^{j_1^{(p)}}), \dots, (x^{j_{n_p}^{(p)}}))$$

Et on remarquera qu'à une permutation près le repère

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1^{(1)}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{n_1}^{(1)}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_1^{(k)}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{n_k}^{(k)}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_1^{(p)}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{n_p}^{(p)}}} \right)$$

est un repère local naturel adapté pour chacun des sous-fibrés $T\mathcal{F}_k$

On notera qu'une variété p - feuilletée peut être toujours regardée comme une variété bifeuilletée. Ainsi pour toute partie propre J de I_p les feuilletage \mathcal{F}_J et $\mathcal{F}_{I_p - J}$ bifeuilletent la variété M ; ces feuilletages sont dits *complémentaires*.

1.2 ANNEAU DE FEUILLETAGES D'UNE STRUCTURE p -MULTIPRODUIT

1.2.1 Structure d'anneau

Soit $TM = \bigoplus_{i=1}^p T\mathcal{F}_i$ et $I_p = \{1, \dots, p\}$, $\mathcal{P}(I_p)$ l'ensemble des parties de I_p . On sait, par la remarque précédente que pour J parcourant l'ensemble des parties de $I_p = \{1, \dots, p\}$, les \mathcal{F}_J sont intégrables. Soit \mathcal{A}_p l'ensemble des feuilletages \mathcal{F}_J , J parcourant $\mathcal{P}(I_p)$ et \mathcal{F} l'application de $\mathcal{P}(I_p)$ dans \mathcal{A}_p qui à J associe $\mathcal{F}_J = \mathcal{F}(J)$ ainsi définie. On note que \mathcal{F} est par construction une bijection de $\mathcal{P}(I_p)$ sur \mathcal{A}_p .

On va définir dans \mathcal{A}_p des opérations " \cup, \cap, Δ ". Les égalités suivantes $(\bigoplus_{l \in I} T\mathcal{F}_l) \oplus$
 $(\bigoplus_{l \in J} T\mathcal{F}_l) = (\bigoplus_{l \in I \cup J} T\mathcal{F}_l)$, $(\bigoplus_{l \in I} T\mathcal{F}_l) \cap (\bigoplus_{l \in J} T\mathcal{F}_l) = (\bigoplus_{l \in I \cap J} T\mathcal{F}_l)$, $(\bigoplus_{l \in I} T\mathcal{F}_l) \ominus (\bigoplus_{l \in J} T\mathcal{F}_l)$
 $= \bigoplus_{l \in I - J} T\mathcal{F}_l$ (pour $J \subset I$), $(\bigoplus_{l \in I \cup J} T\mathcal{F}_l) \ominus (\bigoplus_{l \in J \cap J} T\mathcal{F}_l) = \bigoplus_{l \in I \Delta J} T\mathcal{F}_l$ et l'intégrabilité
des systèmes différentiels qui apparaissent nous amènent à poser $\mathcal{F}_{\{i\}} := \mathcal{F}_i$,
 $\mathcal{F}_I \cup \mathcal{F}_J := \mathcal{F}_{I \cup J}$, $\mathcal{F}_I \cap \mathcal{F}_J := \mathcal{F}_{I \cap J}$, $\mathcal{F}_I - \mathcal{F}_J := \mathcal{F}_{I - J}$ ($J \subset I$), $\mathcal{F}_I \Delta \mathcal{F}_J := \mathcal{F}_{I \Delta J}$,
 \mathcal{F}_{I_p} le feuilletage trivial dont les feuilles sont les composantes connexes de M ,
et enfin \mathcal{F}_\emptyset le feuilletage par points de M . Avec ces définitions et notations
finalement on a $\mathcal{F}_J = \bigcup_{j \in J \subset I_p} \mathcal{F}_j$

Ceci étant, on a aussi $\mathcal{F}(I \cup J) = \mathcal{F}(I) \cup \mathcal{F}(J)$ et $\mathcal{F}(I \cap J) = \mathcal{F}(I) \cap \mathcal{F}(J)$,
 $\mathcal{F}(I - J) = \mathcal{F}(I) - \mathcal{F}(J)$ et que $\mathcal{F}(I \Delta J) = \mathcal{F}(I) \Delta \mathcal{F}(J)$. On définit un ordre
partiel sur \mathcal{A}_p en posant $\mathcal{F}_I \subseteq \mathcal{F}_J$ lorsque $I \subseteq J$ ou tout simplement lorsque \mathcal{F}_J
est une extension de \mathcal{F}_I .

Au total $(\mathcal{A}_p, \Delta, \cap, \cup)$ a une structure d'anneau de Boole[7] et \mathcal{F} est un iso-
morphisme d'anneaux de Boole de $(\mathcal{P}(I_p), \Delta, \cap)$ sur $(\mathcal{A}_p, \Delta, \cap)$.

Théorème 8 Dans une variété presque p produit si l'un des feuilletages de l'anneau est de Lie, tous les feuilletages de l'anneau qui le contiennent sont

aussi de Lie, i.e. le sous-ensemble \mathcal{L} des feuilletages de Lie est une section finissante pour la structure de l'algèbre de Boole associée à l'anneau \mathcal{A}_p .

Preuve. Soit $TM = \bigoplus_{i=1}^p T\mathcal{F}_i$, compte tenu de la commutativité de \oplus , on peut sans perdre en généralité supposer que c'est le feuilletage \mathcal{F}_1 qui est un G -feuilletage de Lie et que G est connexe et simplement connexe. Soit e l'élément neutre de G , avec $e = e_2 + \dots + e_p$ et où $e_i \in T_e\mathcal{F}_i$. Avec la structure presque multiproduct, topologiquement $G = G_2 \times \dots \times G_p$

Ensuite on sait que $\mathcal{G} = T_eG = \bigoplus_{i=2}^p T_{e_i}G_i$ l'algèbre de Lie de G s'identifie à l'algèbre de Lie $\Xi(\mathcal{F}_1)$ des champs feuilletés transverses à \mathcal{F}_1 . En plus on sait que \mathcal{F}_1 est transversalement intégrable de feuilletage transverse \mathcal{F}_1^\perp et que $\nu(\mathcal{F}_1) = T\mathcal{F}_1^\perp = \bigoplus_{i=2}^p T\mathcal{F}_i$. Si on note $\Xi_i(\mathcal{F}_1)$ l'algèbre de Lie des champs feuilletés

transverse à \mathcal{F}_1 et tangents à \mathcal{F}_i , $i \neq 1$, on a $\Xi(\mathcal{F}_1) = \bigoplus_{i=2}^p \Xi_i(\mathcal{F}_1)$. Et $\Xi_i(\mathcal{F}_1)$, à travers l'isomorphisme d'algèbre de Lie entre $\mathcal{G} = T_eG$ et $\Xi(\mathcal{F}_1)$, correspond à une sous-algèbre \mathcal{A}_i de T_eG . Mais cette image \mathcal{A}_i est tout simplement $T_{e_i}G_i$; ce qui, par les théorèmes de correspondance entre algèbres et groupes de Lie, permet alors de dire de façon univoque puisque G_i est connexe et simplement connexe, que G_i est un groupe de Lie, sous-groupe du groupe de Lie G .

Il s'agit maintenant de déterminer si la structure de groupe de G est celle du groupe produit de $p-1$ groupes ou d'un produit semi-direct d'un des groupe par les autres au moyen d'une représentation d'un groupe $H = \prod_{k \in K \subseteq \{2, \dots, p\}} G_k$ dans un groupe d'automorphismes de $\prod_{l \in L = \{2, \dots, p\} - K} G_l$. Les applications de changement de coordonnées transverses étant des restrictions de translation g_{ij} qui se présentent compte tenu du caractère presque multi produit sous la forme $g_{ij} = g_{ij}^1 \times \dots \times g_{ij}^2$. Pour $g = (g_2, \dots, g_p)$ pris dans un certain ouvert de G (image par une application applications de changement de coordonnées transverses d'un ouvert de carte), on a:

$$g_{ij} \cdot g = g_{ij}^1 \times \dots \times g_{ij}^2(g_1, \dots, g_k) = (g_{ij}^1(g_1), \dots, g_{ij}^k(g_k))$$

Par analyticité, cette formule reste vraie pour g quelconque pris dans G . Cette formule globale montre que chaque composante de ce produit ne dépend uniquement que de la coordonnée correspondante, ce qui assure que ce produit n'est pas celui d'une structure de produit semi-direct non trivial; il en résulte donc que G est un produit direct des $p-1$ groupes G_i et il vient en définitive que $g_{ij} \cdot g = (g_{ij}^1 g_1, \dots, g_{ij}^k g_k)$.

Soit \mathcal{F}_J une extension de \mathcal{F}_1 correspondant, pour $J \subset \{2, \dots, p\}$, au système différentiel $\bigoplus_{i \in J \cup \{1\}} T\mathcal{F}_i$ et soit ω la 1-forme de F dida définissant le feuilletage \mathcal{F}_1 , alors pour la projection canonique ϱ_J de $\mathcal{G} = T_eG = \bigoplus_{i=2}^p T_{e_i}G_i = \bigoplus_{i=2}^p \mathcal{G}_i$

sur $\bigoplus_{i \in J \subset \{2, \dots, p\}} \mathcal{G}_i$ qui est un morphisme d'algèbres de Lie, la 1- forme $\rho_J \circ \omega$ définit sur M un feuilletage de Lie et a pour zéros le système différentiel $\bigoplus_{i \in J \cup \{1\}} T\mathcal{F}_i$ associé à \mathcal{F}_J .

On termine en montrant de même que dans l'anneau tout feuilletage composé, extension d'un feuilletage composé transversalement de Lie, est un feuilletage de Lie. ■

1.2.2 Structure d'une variété multiriemannienne

Dans ce qui suit on supposera que la variété modèle de la structure presque p - produit est une variété riemannienne produit de p variétés riemanniennes $\prod_{i=1}^p (T_i, h_i)$

Définition 9 Si les feuilletages constitutifs d'une variété presque p -produit sont riemanniens, on parlera de variété multiriemannienne ou de variété p -riemannienne

Définition 10 Un feuilletage riemannien d'une variété riemannienne est dit métrique si la métrique quasi-fibrée coïncide avec la métrique de la variété.

Proposition 11 Une variété presque p -produit est une variété p -riemannienne si et seulement si les changements de cartes sont des produits de p isométries .

Preuve. Soit (U_i, φ_i) un atlas de cartes de la structure presque multiproduct de type p de M . Pour $k = 1, 2$, il y correspond deux cocycles

$$(U_i, f_i^1 = p_1 \circ \varphi_i, g_{ij}^1 = \theta_{ij}^2 \times \theta_{ij}^3 \times \dots \times \theta_{ij}^p, T^2 \times T^3 \times \dots \times T^p)_{i \in I}$$

et

$$(U_i, f_i^{(2)} = p_2 \circ \varphi_i, g_{ij}^{(2)}, T^1 \times T^3 \times \dots \times T^p)_{i \in I}$$

définissant les feuilletages $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$. Comme ces deux feuilletages sont supposés riemanniens, alors les fonctions de transition $\theta_{ij}^2 \times \theta_{ij}^3 \times \dots \times \theta_{ij}^p$ sont des isométries locales de $(T^2, h_2) \times (T^3, h_3) \times \dots \times (T^p, h_p)$ dans lui même, donc un produit de $(p-1)$ isométries et la considération du feuilletage riemannien \mathcal{F}_2 permet de voir pour le total que chaque θ_{ij}^k pour $1 \leq k \leq p$, est une isométrie locale de (T^k, h_k) et que les changements de cartes $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} = \theta_{ij}^1 \times \theta_{ij}^2 \times \theta_{ij}^3 \times \dots \times \theta_{ij}^p$ sont des produits de p isométries.

La réciproque étant évidente! ■

Définition 12 Une partition de l'unité $(U_i, \psi_i)_{i \in I}$ d'une variété presque p -produit M (avec $TM = \bigoplus_{j=1}^p T\mathcal{F}_j$) est dite adaptée ou compatible à un feuilletage (M, \mathcal{F}_k) ou \mathcal{F}_k -adaptée, si pour tout $i \in I$, ψ_i est constante sur les plaques dans U_i des autres feuilletages du système.

Lemme 13 Dans une variété presque p -produit M (avec $TM = \bigoplus_{i=1}^p T\mathcal{F}_i$), chacun des feuilletages constitutifs admet des partitions de l'unité qui lui sont compatibles.

Preuve. Soit $(U_i, \psi_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement correspondant à un atlas de cartes $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ de la structure. Notons pour $1 \leq k \leq p$, ψ_i^k la fonction de M dans \mathbb{R} de support contenu dans le support de ψ_i , définie par

$$\psi_i^k(x) = \psi_i(\varphi_i^{-1}(0, \dots, (pr_k \circ \varphi_i)(x), \dots, 0))$$

où pr_k est la k ième projection dans $\prod_{i=1}^p T_i$. En clair, cette fonction ne dépend que de

$$(x_1^k = x^{j_1^{(k)}}(x), \dots, x_{n_k}^k = x^{j_{n_k}^{(k)}}(x))$$

et on voit que la famille $(\psi_i^k)_{i \in I}$ réalise une partition de l'unité \mathcal{F}_k -adaptée subordonnée au recouvrement précédent. ■

Théorème 14 Dans une variété multiriemannienne, on a les propriétés suivantes:

- 1) il existe une métrique quasi-fibrée pour chacun des feuilletages constitutifs;
- 2) ces feuilletages sont transversalement intégrable et de feuilletages transverses également riemanniens;
- 3) les feuilletages sont géodésibles;
- 4) les feuilletages sont parallèles;
- 5) la connexion de Levi Cevita induit sur chaque feuilletage la connexion de Bott;
- 6) la courbure R admet la décomposition $R = \bigoplus_{i=1}^p R_i$ où $R_i(X, Y) = R(X_i, Y_i)$;
- 7) le feuilletage \mathcal{F}_J défini par le système différentiable $\bigoplus_{l \in J} T\mathcal{F}_l$ est métrique, parallèle, et de feuilletage transverse $\mathcal{F}_J^\perp = \mathcal{F}_{I_p - J}$ le feuilletage complémentaire de \mathcal{F}_J .

Preuve. La métrique quasi-fibrée du feuilletage $\mathcal{F}_{\bar{k}}$, feuilletage complémentaire de \mathcal{F}_k , induit une métrique $g_{\partial(\mathcal{F}_{\bar{k}})}$ sur son fibré normal; puisque cette dernière s'obtient localement par pull back de la métrique riemannienne de T^k , elle y dépend uniquement des coordonnées transverses de $\mathcal{F}_{\bar{k}}$. Ainsi au niveau d'un ouvert distingué de $\mathcal{F}_{\bar{k}}$, on a $g_{\partial(\mathcal{F}_{\bar{k}})} = \sum a_{il}^k(x_1^k, \dots, x_{n_k}^k) dx^{j_i^{(k)}} \otimes dx^{j_l^{(k)}}$. Ainsi $g = \bigoplus_{k=1}^p g_{\partial(\mathcal{F}_{\bar{k}})}$ est une métrique sur M et cette métrique est quasi-fibrée pour chacun des feuilletages et dans cette métrique, les feuilletages constitutifs sont deux à deux orthogonaux.

Si on considère maintenant la connexion de Levi Cevita associée à cette métrique, on voit avec la formule donnant les coefficients de Riemann-Christoffel

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial \xi^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \xi^l} \right)$$

que les Γ_{jk}^i sont identiquement nuls lorsque $j \in J^{(m)}$ et $k \in J^{(n)}$ avec $1 \leq m \neq n \leq p$ et que donc $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} = 0$. Ce qui permet de voir que $\nabla_X Y$ reste tangent à \mathcal{F}_k si Y est tangent à \mathcal{F}_k et que toutes les distributions issues du système sont invariantes par le transport parallèle correspondant à cette métrique g . De façon précise, en utilisant la nullité de la torsion de cette connexion, on a pour $i \neq j$, X tangent à \mathcal{F}_i et Y tangent à \mathcal{F}_j , $\nabla_X Y = [X, Y]_j$; $[X, Y]_j$ étant la composante de $[X, Y]$ dans $\mathcal{X}(\mathcal{F}_j)$ le module des champs tangents à \mathcal{F}_j . Ce qui montre bien que la connexion de Levi Cevita induit sur chaque feuilletage la connexion de Bott et que

$$\begin{aligned} R(X, Y) &= R_1(X, Y) + R_2(X, Y) + \dots + R_p(X, Y) = \\ &= R_1(X, Y) + R_2(X, Y) + \dots + R_p(X, Y) \end{aligned}$$

puisque $R(X_i, X_j) = 0$ pour $X_i \in \mathcal{X}(\mathcal{F}_i)$, $X_j \in \mathcal{X}(\mathcal{F}_j)$ et $i \neq j$.

En se référant à cette métrique quasi-fibrée commune tout le reste devient évident si on se souvient qu'un feuilletage transversalement intégrable est riemannien si et seulement si le feuilletage transverse est géodésible. Dans ces conditions, ici tous les feuilletages de l'anneau sont riemanniens et géodésibles, par conséquent parallèles et de feuilletages transverses également riemanniens, géodésibles et parallèles. Enfin $(\oplus_{l \in J} T\mathcal{F}_l)^\perp = \oplus_{l \in I_p - J} T\mathcal{F}_l$ montre $(\mathcal{F}_J)^\perp = \mathcal{F}_{I_p - J}$.

■

Remarque 15 *D'ailleurs ces propriétés de 1) à 5) sont équivalentes.*

1.2.3 Cohomologie d'une variété multiriemannienne compacte

On a là, une obstruction à l'existence d'une structure p -riemannienne

Théorème 16 *Pour une variété p -riemannienne compacte sans bord, on a pour tout $1 \leq k \leq p$ $H^{\dim \mathcal{F}_k}(M, \mathcal{F}_k) = \langle a_k \rangle$ et $H^{\dim M}(M) = \langle \prod_{i=1}^{i=p} a_i \rangle = \langle a_1 \smile \dots \smile a_p \rangle$, le cup produit de ces p générateurs.*

Preuve. Si ω_k est une forme volume (resp. une forme sans singularité) sur la variété transverse T^k , par pull back avec les submersions d'ouverts distingués et par recollement au moyen d'une partition de l'unité \mathcal{F}_k -adaptée, on obtient une forme fermée $\widetilde{\omega}_k$ sur M . Par construction elle est basique pour chacun des feuilletages \mathcal{F}_i , $i \neq k$.

$\Omega = \widetilde{\omega}_1 \wedge \dots \wedge \widetilde{\omega}_p$ est une m -forme volume sur M . Aucune des formes $\widetilde{\omega}_k$ n'est exacte! En effet si $\widetilde{\omega}_{k1}$, était exacte avec $\widetilde{\omega}_k = d\alpha_k$, on aurait comme les formes sont fermées, $\omega = (-1)^k d\alpha_k \wedge \widetilde{\omega}_2 \dots \wedge \widetilde{\omega}_p$, et par la formule de Stokes on aurait $0 = \int_{\partial M} \alpha \wedge \widetilde{\omega}_2 \dots \wedge \widetilde{\omega}_p = \int_M \Omega \neq 0$. Si on note a_k la classe de cohomologie de $\widetilde{\omega}_k$, alors $a_k \neq 0$ et il est clair que $H^{\dim \mathcal{F}_k}(M, \mathcal{F}_k) = \langle a_k \rangle$ et $H^{\dim M}(M) = \langle a_1 \smile \dots \smile a_p \rangle$ ■

Remarque 17 1) *Dans une telle variété les $H^{\dim \mathcal{F}_k}(M)$ sont non nuls.*

2) $\widetilde{\omega}_k = 0$ est une équation du feuilletage défini par le système différentiel $\oplus_{1 \leq i \neq k \leq m} T\mathcal{F}_i$ et $(\widetilde{\omega}_i = 0, i \neq k)$ une équation de \mathcal{F}_k .

1.3 STRUCTURE PRESQUE MULTIPRODUIT ET DRAPEAUX DE FEUILLETAGES.

1.3.1 Structure presque multiproduit et drapeaux de feuilletages.

On rappelle qu'un feuilletage (M, \mathcal{F}') est dite une extension de (M, \mathcal{F}) si toute feuille de \mathcal{F}' est une réunion de feuilles de \mathcal{F} , et on note $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. Jusqu'à maintenant un drapeau de feuilletages est une suite d'extensions successives à pas un d'un flot ([1],[3], [4], [5], [6]). On va généraliser cette notion à des cas où la suite d'extensions ne débute pas nécessairement par un flot et où les pas ne sont pas nécessairement réguliers.

Définition 18 *Un drapeau généralisé est une suite d'extensions successives d'un feuilletage donné. Un drapeau est dit riemannien (resp. de Lie) si ses feuilletages le sont.*

Un drapeau à p feuilletages sera appelé parfois p -drapeau et sera noté $\mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_p$.

Définition 19 *Dans variété riemannienne un drapeau quelconque est dit métrique si et seulement si ses feuilletages sont métriques.*

Exemple 20 *Dans une variété presque p -produit, à toute suite croissante J_1, \dots, J_s de $\mathcal{P}(I_p)$, on peut associer le drapeau généralisé $\mathcal{F}_{J_1} \subset \dots \subset \mathcal{F}_{J_s}$;*

Définition 21 *Un tel drapeau généralisé sera appelé tout simplement drapeau de l'anneau \mathcal{A}_p .*

On notera donc que les drapeaux de l'anneau sont en correspondance biunivoque avec les suites croissantes de $\mathcal{P}(I_p)$.

Exemple 22 *1) A toute variété multiriemannienne on peut associer des drapeaux irréguliers riemanniens.*

2) Tout drapeau de l'anneau \mathcal{A}_p débutant par un feuilletage de Lie est un drapeau de Lie (théo.8).

Le résultat suivant établit le lien entre drapeau et structure multiriemannienne.

Théorème 23 *Une variété est $p+1$ -riemannienne si et seulement si elle supporte un p -drapeau de feuilletages parallèles.*

Preuve. A partir d'une variété $p+1$ -riemannienne, il est loisible, à l'image de l'exemple précédent, de lui associer un p -drapeau de feuilletages riemanniens.

Réciproquement si on part d'un drapeau (généralisé) $\mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_p$ de p feuilletages riemanniens de M , on peut écrire que

$$TM = T\mathcal{F}_1 \oplus (T\mathcal{F}_1)_{T\mathcal{F}_2}^\perp \oplus \dots \oplus (T\mathcal{F}_{p-1})_{T\mathcal{F}_p}^\perp \oplus T\mathcal{F}_p^\perp$$

Soit $2 \leq i \leq p$. Pour des champs de vecteurs X, Y dans $\Gamma((T\mathcal{F}_{i-1})^\perp_{T\mathcal{F}_i})$, $[X, Y]$ est dans $\Gamma(T\mathcal{F}_i)$ et pour Z dans $\Gamma(T\mathcal{F}_{i-1})$, on a

$$0 = Yg(X, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(X, \nabla_Y Z) = g(\nabla_Y X, Z)$$

puisque \mathcal{F}_{i-1} étant parallèle $\nabla_Y Z$ reste comme Z dans $\Gamma(T\mathcal{F}_{i-1})$; ce qui implique, puisque $\nabla_Y X \in \Gamma(T\mathcal{F}_i)$, que $\nabla_Y X \in \Gamma(T\mathcal{F}_{i-1})^\perp_{T\mathcal{F}_i}$. Ensuite

$$g(Z, [X, Y]) = g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_X Y, Z) = 0$$

ceci pour tout Z dans $\Gamma(T\mathcal{F}_{i-1})$ et il en résulte que $[X, Y] \in \Gamma(T\mathcal{F}_{i-1})^\perp_{T\mathcal{F}_i}$. Montrons enfin que le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_i$ défini par le système $(T\mathcal{F}_{i-1})^\perp_{T\mathcal{F}_i}$ est riemannien. Soit $X \in \Gamma((T\mathcal{F}_{i-1})^\perp_{T\mathcal{F}_i})$,

Pour $Y \in \Gamma(T\mathcal{F}_{i-1})$ (resp. $Y \in \Gamma(T\mathcal{F}_i)^\perp$) et $Z \in \Gamma(T\mathcal{F}_i)^\perp$, on a

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) = g([X, Y] - \nabla_Y X, Z) + g(Y, [X, Z] - \nabla_Z X)$$

, comme le feuilletage \mathcal{F}_i est parallèle et que le transport parallèle préserve l'orthogonalité $\nabla_Z X$ reste tangent à \mathcal{F}_i et $\nabla_Y X$ (resp. $\nabla_Z X$) est orthogonal à \mathcal{F}_{i-1} . On a finalement

$$Xg(Y, Z) = g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z])$$

Ce qui assure que le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_i$ est transversalement riemannien. Ensuite comme le feuilletage \mathcal{F}_p est parallèle, on sait qu'il est transversalement intégrable et de feuilletage transverse également riemannien; soit $\tilde{\mathcal{F}}_{p+1}$ ce feuilletage et notons $\mathcal{F}_1 = \tilde{\mathcal{F}}_1$, alors on a au total $TM = \bigoplus_{i=1}^{p+1} T\tilde{\mathcal{F}}_i$ i.e. M est une variété $p+1$ -riemannienne, et le résultat est prouvé. ■

Corollaire 24 *Une variété supportant un feuilletage totalement transversalement parallélisable est une variété multiriemannienne.*

Preuve. Soit (M, \mathcal{F}) un tel feuilletage et (X_2, \dots, X_p) son parallélisme transverse et g la métrique quasi-fibrée associée. Considérons les $p-1$ flots \mathcal{F}_i engendrés par les X_i . En posant $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$, on sait (corol.6) que la famille $(\mathcal{F}_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une famille stable qui fait que la structure de variété de M est celle d'une variété presque p -produit. Vérifions maintenant que cette métrique g est quasi-fibrée pour chacun de ces flots \mathcal{F}_i . En effet pour $i, j, k \geq 2$, distincts deux à deux, X tangent au flot \mathcal{F}_i

1) Y tangent au flot \mathcal{F}_j , Z tangent au flot \mathcal{F}_k , en raison de parallélisme total et d'orthogonalité, on a

$$g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z]) = 0 + 0 = Xg(Y, Z)$$

2) Y tangent au flot \mathcal{F}_j , Z tangent à \mathcal{F} , pour les mêmes raisons, on a:

$$g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z]) = 0 + 0 = Xg(Y, Z)$$

3) Y, Z tangents à \mathcal{F} , le feuilletage \mathcal{F} étant riemannien la connexion de Bott induite donne ici

$$\nabla_X Y = [X, Y]_1, \nabla_X Z = [X, Z]_1$$

de sorte qu'on a avec l'orthogonalité:

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) = g([X, Y]_1, Z) + g(Y, [X, Z]_1) \\ &= g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z]) \end{aligned}$$

■

1.3.2 Structure presque multiproduct et produit

Les résultats de ([2],[3],[6],[12].) et ce qui précède permettent d'énoncer directement la proposition suivante:

Proposition 25 *si $TM = \bigoplus_{i=1}^p T\mathcal{F}_i$, où les \mathcal{F}_i sont des flots parallèles alors M est à courbure nulle ; en plus dans le cas compact*

- *si un des flots est minimal alors M est un tore et tout feuilletage contenant ce flot est linéaire.*

- *si les orbites des flots ne sont ni fermés ni denses alors M est fibré en tores par chacune des adhérences de chacun des flots;*

- *si d flots sont à orbites fermés alors $M = \mathbb{T}^d \times M_d$, où M_d est fibré en tores comme précédemment; si le feuilletage défini par $\bigoplus_{k=1}^r T\mathcal{F}_{i_k}$ a une feuille fermée alors $M = \mathbb{V}_A^r \times M_r$, où \mathbb{V}_A^r est soit un tore hyperbolique défini par une certaine matrice $A \in \mathbb{SL}(n, \mathbb{Z})$ ou un produit de tores hyperbolique et M_r fibré en tores comme précédemment.*

Proposition 26 *Toute variété compacte supportant un feuilletage totalement transversalement parallélisable admettant une feuille compacte et à variété basique simplement connexe est un produit riemannien de la feuille compacte par une variété transverse multiriemannienne.*

Preuve. Cette variété M est alors multiriemannienne (corol.24). Ensuite feuilletage (M, \mathcal{F}) étant transversalement parallélisable et admettant une feuille compacte F , est une fibration [12] $\pi : M \rightarrow B$ de fibre F ; le fait que le feuilletage admet un parallélisme transverse totalement parallélisable implique que le feuilletage est transversalement intégrable et que ce feuilletage transverse est également riemannien (théo.14). Par ailleurs, par le théorème d'Ehresmann[10], ce feuilletage transverse provient de la suspension d'une représentation du groupe fondamental de la variété basique B dans le groupe de difféomorphismes de F . Comme cette représentation est triviale, la variété M est le produit riemannien de la feuille compacte et de la variété basique du feuilletage qui est canoniquement une variété multiriemannienne compacte.

■

References

- [1] **B.Bossoto and H.Diallo, 2002.** *Sur les drapeaux de feuilletages riemanniens*, JP Journal of Geometry and Topology, 2, 3, 281-288.
- [2] **Y.Carrière,1984** . *Flots riemanniens*, in " *Structures transverses des feuilletages*, Astérisque, 116, 31-5.
- [3] **C. Dadi and H. Diallo, 2007.** *Extension d'un feuilletage de Lie minimal d'une variété compacte*, Afrika Mathematika, 3, 18, 34-45.
- [4] **H.Diallo, 2002** .*Sur les drapeaux de Lie*.Afrika Mathematika,3, 13 ,75-86.
- [5] **H.Diallo, 2005** .*Relèvement d'un drapeau riemannien et drapeaux de Lie complets du tore hyperbolique $n+1$ - dimensionnel*. Ann. math. Blaise Pascal 12, 245- 258.
- [6] **H.Diallo, 2008** .*Structure d'un drapeau riemannien complet*. African Diaspora Journal of Mathematica,vol 7, Issue 2, pp.43-57.
- [7] **P.Dubreil, M.L. Dubreil J.,1964.** *Leçons d'Algèbre Moderne*, Monographies universitaires des Mathématiques, Dunod, Paris.
- [8] **E.Fédida, 1974** .*Sur l'existence des Feuilletages de Lie*. CRAS de Paris, 278, 835-837.
- [9] **E. Ghys, 1984.** *Feuilletages riemanniens sur les variétés simplement connexes*, Anna . Inst. Fourier , Grenoble, 34, 4, 203-223.
- [10] **C. Godbillon, 1985.** *Feuilletage:Etude géométrique I*, Publication IRMA, Strasbourg.
- [11] **A. Haefliger, 1984.** *Groupoïdes d'holonomie et classifiants*. Astérisque, 116, 98- 107.
- [12] **P.Molino, 1988.** *Riemannian foliations*. Birkhäuser.